ENAMA

Encontro nacional de análise matemática

Sobre o método de Nehari

Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

Brasília, de 7 a 9 de novembro de 2018

Dedicatória

Ao meu pai Edilton com muito amor e carinho.

Agradecimentos

Quando eu tinha 03 anos de idade, meu pai me levava para visitar o irmão dele e meu tio Armando(Derviro). Tio Armando morava naquela época em Belém, na Avenida Marquês de Herval entre Timbó e Estrela(hoje Mariz de Barros). Em 1966 a Avenida Marques de Herval não tinha pavimentação, mas já tinha, como algumas outras ruas dos bairros da Pedreira e do Marco, a largura e o cumprimento necessários para serem chamadas de avenida. A Marquês de Herval atravessava os bairros da Matinha(hoje Fátima), Pedreira e Sacramenta. Meu pai fazia o trajeto para a casa do tio Armando andando a pé e me carregando no pescoço, ou como é mais conhecido no Pará, me carregando no cangote. Pois numa dessas visitas a casa de tio Armando, nos meus três anos de idade, no cangote de meu pai, ao levantar a cabeça, percebí pela primeira vez, que não conseguia enxergar o final da rua. Naquele momento, sem me dar conta, ví pela primeira vez o "infinito".

Fiquei tão impressionado com a "descoberta"que até hoje não esqueço. Talvez seja por isso que sempre gostei de carregar meus filhos no cangote.

Muito obrigado meu pai por tudo.

Resumo

Nestas notas descrevemos o método de encontrar soluções do tipo Ground State para problemas elipticos. Tal método foi introduzido por Zeev Nehari [22], [23] e generalizado por Szulkin e Weth em [25], por Figueiredo e Ramos em [15] e por Figueiredo e Pimenta em [14].

Abstract

In this manuscript, we describe the method of find solution of the type Grond sate for some elliptic problems. This method was given by Zeev Nehari in [22], [23] and generalized by Szulkin and Weth in [25], by Figueiredo and Ramos in [15] and by Figueiredo and Pimenta in [14].

Conteúdo

Introdução

Iniciamos estas notas descrevendo de um modo intuitivo o Método de Nehari. Seja E um espaço de Banach reflexivo e Φ um funcional de classe $C^1(E, \mathbb{R})$. A derivada de Frechet em $u \in E$, dado por $\Phi'(u)$, é um elemento de E' que calculado em $v \in E$ será denotado por $\Phi'(u)v$. Assim, se $u \in E$ é um ponto crítico de Φ, então $\Phi'(u) = 0$, o qual é equivalente a $\Phi'(u)v = 0$, para todo $v \in E$. Então, necessariamente, u pertence ao conjunto

$$\mathcal{N} = \{u \in E : u \neq 0 : \Phi'(u)u = 0\}.$$

Tal conjunto é chamado Variedade de Nehari, embora, muitas vezes tal conjunto não seja uma variedade. O método de Nehari consiste em minimizar o funcional Φ sobre a variedade de Nehari $\mathcal{N}$, em outras palavras, obter $u \in \mathcal{N}$ tal que

$$\Phi(u) = c := \inf_{v \in \mathcal{N}} \Phi(v).$$

Posteriormente, deve-se mostrar que o ponto de mínimo de Φ na variedade de Nehari $\mathcal{N}$ é um ponto de crítico de Φ em todo o espaço. Note que este método fornece um ponto crítico $u \in E$ para o funcional Φ com a seguinte propriedade:

$$\Phi(u) \leq \Phi(w),$$

qualquer que seja w ponto crítico de Φ. Tal propriedade caracteriza o ponto crítico u de Φ como ponto crítico Ground State, ou ponto crítico em Estado Fundamental.

Quando este ponto crítico de Φ é solução de um problema elíptico, então diz-se que esta solução é do tipo Ground State ou solução em Estado Fundamental.

Zeev Nehari, matemático Israelense (1915-1978), introduziu esse método através de dois artigos [22] and [23]. Nesses artigos Nehari considerou uma EDO de segunda ordem em um intervalo (a,b) e mostrou existência de solução não trivial minimizando o funcional Φ de classe C^2 associado ao problema em $\mathcal{N}$. Após a minimização, Nehari usou o Teorema da Função Implícita e mostrou que o ponto de mínimo de Φ na Nehari era ponto crítico de Φ em todo o espaço. Em [23], Nehari mostrou existência de solução com um determinado número de nós em (a,b). Desde essa época, este eficiente método vem sendo largamente aplicado, ficando quase impossível citar aqui todos os autores que difundiram o método. Além disso, a partir deste método, outros métodos foram criados, como, por exemplo, o método de Fibração introduzido por Pohozaev [13].

Em 2010, num celebrado livro [25], Szulkin e Weth apresentaram um resultado abstrato, o qual era uma prova unificada do Método de Nehari para alguns problemas cujo funcionais eram apenas de classe C^1 e tinham mínimo local em 0. Além disso, Φ era da forma $\Phi = I_0 - I$, onde I_0 era homogêneo e I era completamente continuo. Esses autores deram vários exemplos de problemas onde este método podia ser aplicado e ainda mostraram resultados de multiplicidade e uma generalização do método de Nehari para problemas onde 0 é um ponto de sela do funcional associado. Para mostrar que o mínimo na Nehari era ponto crítico do funcional Φ em todo o espaço, Szulkin e Weth não puderam usar o Teorema da função implícita, uma vez que Φ não era de classe C^2. Para este caso eles usaram que a variedade de Nehari era homeomorfa a esfera.

Em 2015, Figueiredo e Ramos [15] generalizaram os resultados de Szulkin e Weth para funcionais da forma $\Phi = I_0 - I$ com I_0 não necessariamente homogêneo. Para ilustrar o resultado e ressaltar que o método de Nehari não requeria homogeneidade de I_0 os autores aplicaram o resultado em problemas do tipo $p - q$ Lapalciano, problema de Kirchhoff e a problemas anisotrópicos, que são, conhecidamente, problemas cujo funcionais são da forma $\Phi = I_0 - I$ com I_0 não homogêneo.

Em 2016, Figueiredo e Pimenta [14] retomaram esses estudos e mostraram que o método de Nehari não requeria diferenciabilidade para o funcional Φ e nem a reflexividade do espaço de Banach. Em outras palavras, Φ precisaria ser apenas do tipo localmente Lipschitz. Neste artigo foram dados exemplos de funcionais associados aos problemas envolvendo o operador 1-Lapalciano e operador de Bi-1-

Laplaciano no espaço das funções de variação limitada BV, o qual não é reflexivo. Para mostrar que o mínimo na Nehari era ponto crítico de Φ em todo o espaço, os autores provaram uma versão do Lema de deformação para funcionais localmente Lipschitz.

No capítulo 1 deste trabalho, com a finalidade de ilustrar o pioneiro trabalho de Zeev Nehari, aplicaremos o Método de Nehari para o problema

$$-\Delta u = f(u) \;\text{ em }\; \Omega, \quad u = 0 \;\text{ sobre }\; \partial\Omega,$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ e com hipóteses adequadas sobre a não linearidade f.

No capítulo 2 demonstraremos o resultado abstrato de Szulkin e Weth e faremos uma aplicação com um problema envolvendo o operador p-Laplaciano.

No capítulo 3 demonstraremos o resultado de Figueiredo e Ramos e faremos duas aplicações que aparecem no artigo dos autores.

No capítulo 4 mostraremos que o método de Nehari ainda é eficiente para obter soluções do tipo Grond State que mudam de sinal. Para isso faremos uma aplicação devida a Liu e Wang [18].

Finalmente, no capítulo 5, demonstraremos o resultado abstrato de Figueiredo e Pimenta [14] e faremos as aplicações dos problemas envolvendo o 1-Laplaciano e o operador Bi-1-Laplaciano .

Gostaria de agradecer ao Professor Humberto Ramos da Universidade de Santiago do Chile, pelo convite que me fez para visitar aquela Universidade, por ter me introduzido neste fascinante tema e pela colaboração no artigo que descreveremos no capítulo 4.

Estas notas foram escritas em 2016 em Presidente Prudente, no período em que fui Professor visitante na UNESP, campus de Presidente Prudente. Portanto agradeço também ao Professor Marcos Pimenta pela acolhida naquela maravilhosa cidade e também pela colaboração no artigo descrito no capítulo 5.

Capítulo 1

O Método de Nehari

Como foi dito a introdução, Zeev Nehari introduziu esse método através de dois artigos [22] e [23]. Mas por uma questão de preferência pessoal, vamos ilustrar este método com o seguinte problema:

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ é um domínio limitado. Antes de enunciar o resultado principal, precisamos de hipóteses sobre a função f:

A função f é de classe C^1 e existem $C, r \in \mathbf{R}$ com $2 < r < 2^*$ tais que

$$(f_1) \qquad |f(t)| \leq C(1 + |t|^{r-1})$$

Além disso, considere as seguintes condiçẽs na orígem e no infinito:

$$(f_2) \qquad \lim_{|t| \to 0} \frac{|f(t)|}{|t|} = 0$$

e

$$(f_3) \qquad \lim_{t \to +\infty} \frac{F(t)}{t^2} = +\infty,$$

onde $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(r)dr$.

Note que, por $(f_1) - (f_2)$, dado $\epsilon > 0$, existe $C_\epsilon > 0$, tal que

$$|f(t)| \leq \epsilon|t| + C_\epsilon|t|^{r-1} \tag{1.1}$$

A função

$$(f_4) \qquad t \mapsto \frac{f(t)}{t} \quad \text{é crescente para} \quad t > 0.$$

O principal resultado desta seção é dado por:

Teorema 1.1 *Considere $(f_1) - (f_4)$ verdadeiras. Então (P) tem uma solução Ground state.*

1.1 Estrutura variacional

Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ éuma solução fraca do problema (P) se verifica

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi \; dx - \int_\Omega f(u)\phi \; dx = 0$$

para todo $\phi \in H_0^1(\Omega)$, onde $\|.\|$ é a norma usual em $H_0^1(\Omega)$.

Vamos encontrar soluções de (P) procurando pontos críticos do funcional Φ de classe C^1 dado por

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F(u) \; dx.$$

Note que

$$\Phi'(u)\phi = \int_\Omega \nabla u \nabla \phi \; dx - \int_\Omega f(u)\phi \; dx,$$

para todo $\phi \in H_0^1(\Omega)$. Portanto, pontos críticos de Φ são soluções fracas de (P).

Agora definiremos a variedade de Nehari $\mathcal{N}$ associada ao funcional Φ por:

$$\mathcal{N} = \{u \in X \backslash \{0\} : \Phi'(u)u = 0\} = J^{-1}\{0\},$$

onde $J(u) = \Phi'(u)u = \|u\|^2 - \int_\Omega f(u)u dx$.

1.2 Resultados preliminares

O Lema que demonstraremos abaixo é ponto chave no método de Nehari. Essencialmente é dito que, toda $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$ pode ser projetada na variedade de Nehari de maneira única. Como consequência desse resultado temos que a variedade de Nehari é não vazia.

Lema 1.1 *Se* (f_1)*-* (f_4) *ocorrem, então, para* $u \in H_0^1(\Omega)$ *com* $u \neq 0$*, existe um único* $t_0 = t_0(u) > 0$ *tal que* $t_0 u \in \mathcal{N}$ *e* $\Phi(t_0 u) = \max_{t \geq 0} \Phi(tu)$*.*

Demonstração: Sejam $u \in H_0^1(\Omega)$ com $u \neq 0$ e $h(t) = \Phi(tu)$. Usando (1.1) e as imersões contínuas de Sobolev, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$h(t) = \Phi(tu) \geq (1 - \epsilon C_1)\frac{t^2}{2}\|u\|^2 - \frac{t^r}{r} C_\epsilon C_2 \|u\|^r.$$

Desde que $2 < r$, existe $t_1 > 0$ suficientemente pequeno tal que $h(t) > 0$, para todo $0 < t < t_1$.

Agora de (f_3) deduzimos que dado $K > 0$, existe $M > 0$ tal que, para todo $t \geq M$, obtemos

$$F(t) \geq Kt^2.$$

Portanto,

$$h(t) \leq \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - Kt^2 \int_\Omega |u|^2 dx.$$

Escolhendo K suficientemente grande, temos que

$$h(t) < 0, \quad \text{para todo} \quad t \geq M.$$

Assim, existe $t_0 > 0$ such that

$$h(t_0) = \max_{t \geq 0} h(t) = \max_{t \geq 0} \Phi(tu).$$

Portanto, $h'(t_0) = 0$, ou seja,

$$t_0^2 \|u\|^2 = \int_\Omega f(t_0 u) t_0 u$$

implicando que $t_0 u \in \mathcal{N}$.

No que segue, mostraremos que t_0 é único. Para isso, suponhamos que exista $s > 0$ tal que $su \in \mathcal{N}$. Então,

$$\|u\|^2 = \int_\Omega \frac{f(t_0 u)}{t_0 u} u^2 dx$$

e

$$\|u\|^2 = \int_\Omega \frac{f(su)}{su} u^2 dx.$$

Logo,

$$\int_\Omega \Big(\frac{f(t_0u)}{t_0u} - \frac{f(su)}{su} \Big) u^2 dx.$$

Por (f_4), segue-se que $t_0 = s$. ■

O próximo Lema afirma que sequências na variedade de Nehari não podem convergir pra zero e que existe o número real c tal que $c = \inf\limits_{\mathcal{N}} I > 0$.

Lema 1.2 *Para todo $u \in \mathcal{N}$, existe uma constante positiva C independente de u tal que*

$$0 < C \leq \|u\|$$

e

$$\Phi(u) \geq 0.$$

Demonstração: Note que por (1.1) e das imersões de Sobolev, para todo $u \in \mathcal{N}$, temos que

$$\|u\|^2 = \int_\Omega f(u)u \ dx \leq \epsilon \int_\Omega |u|^2 \ dx + C_\epsilon \int_\Omega |u|^r \ dx \leq \epsilon C_1 \|u\|^2 + C_\epsilon C_2 \|u\|^r.$$

Assim,

$$0 < \Big[\frac{(1 - \epsilon C_1)}{C_\epsilon C_2} \Big]^{1/(r-2)} \leq \|u\|.$$

Note agora que, por (f_4), obtemos

$$f'(t)t - f(t) > 0, \tag{1.2}$$

para todo $t > 0$. Mas esta última desigualdade é equivalente que a função

$$\frac{1}{2} f(t)t - F(t) \ \text{ é crescente para } \ t > 0. \tag{1.3}$$

Usando (1.3) encontramos

$$\Phi(u) = \Phi(u) - \frac{1}{2}\Phi'(u)u \geq 0.$$

■

O próximo Lema afirma que toda sequência minimizante na variedade de Nehari e limitada.

Lema 1.3 *Se* $(u_n) \subset \mathcal{N}$ *é uma sequência minimizante para* Φ*, então* (u_n) *é limitada em* $H_0^1(\Omega)$*.*

Demonstração: Suponha por contradição que, a menos de subsequência, $\|u_n\| \to \infty$ e considere $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|} \rightharpoonup v_0$.

Se $v_0 = 0$, então para todo $t > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} c + o_n(1) = \Phi(u_n) &= \Phi(\|u_n\| v_n) \geq \Phi(tv_n) \\ &= \frac{t^2}{2} - \int_\Omega F(tv_n)\, dx. \end{aligned}$$

Desde que

$$\int_\Omega F(tv_n)\, dx \to 0$$

obtemos

$$c + o_n(1) \geq \frac{t^2}{2}, \quad \text{para todo} \quad t > 0,$$

o que é uma contradição.

Suponha agora que $v_0 \neq 0$. Neste caso,

$$\frac{1}{\|u_n\|^2}\Phi(u_n) = \frac{c}{\|u_n\|^2} = o_n(1).$$

Assim,

$$\int_\Omega \frac{F(\|u_n\| v_n)}{\|u_n\|^2} = \frac{1}{2} + o_n(1),$$

o qual é uma contradição por (f_4). ∎

No próximo Lema mostraremos que o ínfimo de Φ restrito a Nehari é atingido. Nesta prova é fundamental a projeção na variedade de Nehari e a semicontinuidade fraca do funcional Φ.

Lema 1.4 *Existe* $u \in \mathcal{N}$*, tal que*

$$\Phi(u) = c$$

Demonstração: Considere $(u_n) \subset \mathcal{N}$ uma sequência minimizante. Então, (u_n) e limitada em $H_0^1(\Omega)$ e, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u_0 \;\; \text{in} \;\; H_0^1(\Omega).$$

Note que $u_0 \neq 0$, porque caso contrário, usando (1.1) e as imersões compactas de Sobolev, obtemos

$$\|u_n\|^2 = \int_\Omega f(u_n)u_n \; dx = o_n(1),$$

o qual contradiz o Lema 1.2.

Seja $t_0 > 0$ tal que $u = t_0 u_0 \in \mathcal{N}$.

Desde que $\|.\|$ é fracamente semicontínuo inferiormente e que $\int_\Omega F(u_n)dx = \int_\Omega F(u_0)dx + o_n(1)$ então Φ é fracamente semicontínuo inferiormente. Dai

$$c \leq \Phi(u) = \Phi(t_0 u_0) \leq \liminf_{n\to\infty} \Phi(t_0 u_n) \leq \liminf_{n\to\infty} I(u_n) = c,$$

onde foi usado na segunda desigualdade que se $u \in \mathcal{N}$, então $\Phi(u) = \max_{t\geq 0} \Phi(tu)$. ■

Finalizando, vamos mostrar que este ponto de mínimo na variedade de Nehari para o funcional Φ é ponto crítico de Φ em todo o espaço. Mostraremos esse resultado de duas maneiras distintas. A primeira é usando o Teorema da Função Implícita, da mesma maneira que fez Nehari. A segunda maneira é usando o Teorema dos multiplicadores de Lagrange, como é comumente usado em trabalhos mais recentes.

1.3 Demonstração do Teorema 1.1

1.3.1 Via Teorema da Função Implícita

Mostraremos que $\Phi'(u)v = 0$, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Desde que $u \neq 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que $u + sv \neq 0$, para todo $|s| < \epsilon$. Então, pelo Lema 1.1, existe $t(s)$ tal que $t(s)(u + sv) \in \mathcal{N}$. Agora definimos

$$\begin{aligned} \phi(s,t) &= \Phi'(t(u+sv))t(u+sv) = \|t(u+sv)\|^2 \\ &- \int_\Omega f(t(u+sv))t(u+sv) \; dx. \end{aligned}$$

Note que $\phi \in C^1$, $\phi(0,1) = 0$ e

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(0,1) = J'(u)u = 2\|u\|^2 - \int_\Omega \Big[f(u)u - f'(u)u^2 \Big] \; dx,$$

onde

$$J(u) = \|u\|^2 - \int_\Omega f(u)u \, dx.$$

Desde que $u \in \mathcal{N}$, temos que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(0,1) = J'(u)u = \int_\Omega \Big[f(u)u - f'(u)u^2 \Big] \, dx, \tag{1.4}$$

Usando (1.2) obtemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(0,1) < 0.$$

Usando o Teorema da função Implícita, existe $t(s) \in C^1$ tal que $\phi(s, t(s)) = 0$ para todo $|s| < \epsilon$. Então, $t(s) \neq 0$ e $t(s)(u + sv) \in \mathcal{N}$. Considere $\Upsilon(s) = \Phi(t(s)(u + sv))$ com $|s| < \epsilon$ e note que $\Upsilon \in C^1$ e $s = 0$ é um mínimo local de Υ. Então,

$$0 = \Upsilon'(0) = \Phi'(u)v.$$

■

1.3.2 Via Teorema dos Multiplicadores de Lagrange

Pela Proposição 5.12 na página 87 do excelente livro de M. Willem [26], a derivada de Φ restrito a $\mathcal{N}$ tem norma dada por

$$\|\Phi'(u)\|_* = \min_{\lambda \in \mathbf{R}} \|\Phi'(u) - \lambda J'(u)\|_{H_0^1(\Omega)'}.$$

Desde que $u \in \mathcal{N}$ é ponto de mínimo de Φ restrito a variedade de Nehari, então existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tal que

$$\Phi'(u) - \lambda J'(u) = 0. \tag{1.5}$$

Aplicando este funcional linear contínuo no próprio u, obtemos

$$\Phi'(u)u - \lambda J'(u)u = 0.$$

Dai, $\Phi'(u)u = 0$ implica que $\lambda J'(u)u = 0$. Mas por (1.4) e por (1.2) temos que $J'(u)u < 0$, o que implica $\lambda = 0$. Portanto, por (1.5) obtemos

$$\Phi'(u) = 0.$$

■

Capítulo 2

O resultado abstrato de Szulkin e Weth

2.1 Introdução

Como dito na introdução, o método de Nehari foi aplicado por muitos autores nos mais variados problemas. Entretanto, em 2010, Szulkin e Weth em [25], reescreveram o método de Nehari de uma forma abstrata. Tal resultado abstrato pode ser aplicado em diversos problemas de natureza diferentes. As principais contribuições de Szulkin e Weth foram:

1) O resultado abstrato devido a Szulkin e Weth pôde ser aplicado a problemas envolvendo o operador p-Laplaciano, sistema Newtoniano de equações diferenciais, problemas no $\mathbf{R}^N$, sistemas do tipo gradiente, etc.

2) Os autores enfraqueceram algumas hipóteses de Nehari. Por exemplo, a não linearidade era apenas contínua, ocasionando dificuldades técnicas para provar que o mínimo do funcional era ponto crítico em todo o espaço. Foi usado fortemente o homeomorfirmo entre a variedade de Nehari e a esfera do espaço.

3) Os autores generalizaram o método de Nehari para problemas em que 0 era um ponto de sela para o funcional.

4) Os autores provaram ainda um resultado de multiplicidade envolvendo teoria de Gênero.

Para não perder o objetivo dessas notas, vamos restringir este capítulo somente à forma abstrata do método de Nehari.

Neste resultado, X é um espaço de Banach uniformente convexo, $\mathcal{S}$ é a esfera unitária em X e $\|\cdot\|$ a norma em X.

2.2 Resultado principal

Teorema 2.1 *[25] Seja Φ tal que $\Phi(0) = 0$ e $\Phi = I_0 - I$ onde I_0, I são funcionais de classe $\mathcal{C}^1$ sobre X satisfazendo para algum $p > 1$:*

1. *$I'(u) = o(\|u\|^{p-1})$ quando $u \to 0$.*
2. *$s \mapsto \frac{I'(su)}{s^{p-1}}$ é estritamente crescente em $(0, \infty)$ para todo $u \neq 0$.*
3. *$\frac{I(su)}{s^p} \to \infty$ uniformemente para u sobre subconjuntos fracamente compactos de $X \setminus \{0\}$ as $s \to \infty$.*
4. *I' é completamente contínuo, isto é, se $u_n \rightharpoonup u$ em X, então $I'(u_n) \to I'(u)$ em X'.*
5. *I_0 é fracamente semicontínuo inferiormente, positivamente homogêneo de grau p, isto é, $I_0(su) = s^p I_0(u)$, e satisfaz*

   $$C_0\|u\|^p \leq I_0(u) \leq C_0^{-1}\|u\|^p$$

   e

   $$\left(I_0'(v) - I_0'(w)\right)(v - w) \geq C_1 \left(\|v\|^{p-1} - \|w\|^{p-1}\right)(\|v\| - \|w\|) \tag{2.1}$$

   para algum $C_0, C_1 > 0$ e para todo $u, v \in X$.

Então a equação $\Phi'(u) = 0$ tem uma solução ground state solution. Além disso, se Φ é par, então esta equação tem infinitas soluções.

2.2.1 Demonstração do Resultado principal

Vamos provar que a projeção na variedade de Nehari existe e é única. Considere a função de classe C^1 definida por $h(t) = \Phi(tu)$ para alguma função $u \neq 0$. Assim, da p-homogeneidade de I_0 (veja 5.), temos que

$$h(t) = t^p I_0(u) - I(tu)$$

$$\frac{h'(t)}{t^{p-1}\|u\|^{p-1}} \geq 1 - \frac{I'(tu)u}{t^{p-1}\|u\|^{p-1}}.$$

Por 1., temos que $h'(t) > 0$ para $t > 0$ pequeno. Desde que $h(0) = 0$, temos que h é positivo para $t > 0$ pequeno.

Agora, da homogeneidade de I_0 (veja 5.), temos que

$$\frac{h(t)}{t^p} = I_0(u) - \frac{I(tu)}{t^p}.$$

Por 3., temos que $h(t) < 0$ para t grande. Logo existe t_0 tal que

$$h(t_0) = \max_{t \geq 0} \Phi(tu).$$

Note novamente da homogeneidade de I_0 obtemos que

$$t^{1-p}h'(t) = I_0(u) - t^{1-p}I'(tu)u$$

De 2. inferimos que a função $t \mapsto t^{1-p}h'(t)$ é decrescente. Segue que h' se anula uma única vez, isto é, t_0 é único. Portanto, existe um único $t_0 > 0$ tal que $t_0 u \in \mathcal{N}$.

Note que existe $C > 0$ tal que $C \leq \|u\|$ para todo $u \in \mathcal{N}$, porque caso contrário, existiria uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{N}$ tal que $u_n \to 0$. Mas por 5., temos

$$0 < C_1\|u_n\|^p \leq I_0'(u_n)u_n = I'(u_n)u_n,$$

o que implica

$$0 < C_1 \leq \frac{I'(u_n)u_n}{\|u_n\|^p} \leq \frac{\|I'(u_n)\|}{\|u_n\|^{p-1}},$$

o que é um absurdo por 1..

Observe também que da definição de h, para todo $u \in \mathcal{N}$, temos

$$\Phi(u) = h(1) = \max_{t \geq 0} h(t) \geq 0.$$

Portanto, fica bem definido $c := \min_{\mathcal{N}} \Phi$. Provaremos agora que toda sequência minimizante em $\mathcal{N}$ é limitada. De fato, suponha que $(u_n) \subset \mathcal{N}$ tal que, a menos de subsequência, $\|u\| \to \infty$. Assim $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|} \rightharpoonup v$. Suponha primeiramente $v = 0$. Assim,

$$o_n(1) + c = \Phi(u_n) = \Phi(\|u_n\|v_n) = \max_{t \geq 0} \Phi(tv_n) \geq \Phi(tv_n).$$

De 1. e da continuidade de I, obtemos

$$c \geq t^p - I(0), \quad \text{para todo} \quad t > 0,$$

o que é um absurdo, pois $c \in \mathbf{R}$.

Suponha agora $v \neq 0$. Dai, por 5., encontramos

$$o_n(1) = \frac{c}{\|u_n\|^p} = \frac{\Phi(u_n)}{\|u_n\|^p} \leq C_0^{-1} - \frac{I(u_n)}{\|u_n\|^p} = C_0^{-1} - \frac{I(\|u_n\|v_n)}{\|u_n\|^p},$$

o que contradiz 3.. Assim, (u_n) é limitada em X. Portanto, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u_0$ em X. Logo, de 5., observamos que

$$C_1\|u_n\|^p \leq I_0'(u_n)u_n = I'(u_n)u_n.$$

Mas de 4. esta desigualdade implica que $u_0 \neq 0$.

Mostraemos agora que existe $\widehat{u} \in \mathcal{N}$ tal que $\Phi(\widehat{u}) = c$. De fato, seja $t_0 > 0$ tal que $t_0u_0 \in \mathcal{N}$. Assim. para $\widehat{u} = t_0u_0$,

$$\begin{aligned} c \leq \Phi(\widehat{u}) &= I_0(t_0u_0) - I(t_0u_0) \leq \liminf_{n\to\infty}[I_0(t_0u_n) - I(t_0u_n)] \\ &= \liminf_{n\to\infty} \Phi(t_0u_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \Phi(u_n) = c, \end{aligned}$$

onde usamos o fato que I_0 ser fracamente semicontínuo inferiormente e I ser fracamente contínuo.

Agora vamos provar que este ponto de mínimo de Φ na variedade de Nehari é um ponto crítico de Φ em todo o espaço. O argumento usado por Szulkin e Weth foi o homeomorfismo entre a variedade de Nehari e a esfera unitária de X. Mas por preferencia pessoal, vamos usar uma versão do Lema de deformação quantitativo(veja a demonstração em [11, Lemma II.1]).

Teorema 2.2 (Lema da Deformação) *Seja X um espaço de Banach e $\Phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. Quando $a \in \mathbb{R}$, denotamos por $\Phi^a = \{u \in X;\, \Phi(u) \leq a\}$. Suponha que exista $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$ e $\alpha, \epsilon_0 > 0$ tais que*

$$\|\Phi'(u)\| \geq \alpha \quad \forall u \in \Phi^{-1}([c-\epsilon_0, c+\epsilon_0]) \bigcap S_{2\delta},$$

então, para $0 < \epsilon < \min\{\delta\alpha/2, \epsilon_0\}$, existe um homeomorfismo $\eta : X \to X$ tal que *i)* $\eta(u) = u$ *para todo* $u \notin \Phi^{-1}([c-\epsilon_0, c+\epsilon_0]) \bigcap S_{2\delta}$*;*

ii) $\eta(\Phi^{c+\epsilon} \bigcap S_\delta) \subset \Phi^{c-\epsilon} \bigcap S_\delta$*, onde* S_a *é uma a-vizinhança do conjunto* S*.*

Afirmamos que $\widehat{u}$ é um ponto crítico de Φ, em todo o espaço X, i.e. $\Phi'(\widehat{u}) = 0$ em todo o espaço X. Caso contrário, existiria $\alpha > 0$ tal que

$$\|\Phi'(\widehat{u})\| \geq \alpha > 0.$$

Da continuidae de Φ, temos que

$$\|\Phi'(u)\| \geq \alpha > 0,$$

para todo $u \in B_{2\delta}(\widehat{u})$. Denotando $J = [1-\delta, 1+\delta] \subset \mathbb{R}$, defina $g : J \to X$ por

$$g(t) = t\widehat{u}.$$

Note que

$$\|g(t) - \widehat{u}\| = \|t\widehat{u} - \widehat{u}\| = |t-1|\|\widehat{u}\| < \|\widehat{u}\| < 2\delta$$

Além disso, dado $\epsilon > 0$ qualquer, diminuindo $\delta > 0$ se necessário, obtemos

$$|\Phi(u) - \Phi(\widehat{u}) = c| < \epsilon$$

para todo $u \in B_{2\delta}(\widehat{u})$, onde $c := \Phi(\widehat{u}) = \inf\limits_{\mathcal{N}} \Phi$. Em outras palavras

$$c - \epsilon < \Phi(u) < c + \epsilon,$$

para todo $u \in B_{2\delta}(\widehat{u})$.

Definindo $c_0 = \max\{\Phi(g(1-\delta)), \Phi(g(1+\delta))\}$, encontramos $c_0 < c = \Phi(g(1)) = \max\limits_{t \in J} \Phi(g(t))$. Assim, fazendo $\epsilon_0 = \frac{c-c_0}{2}$, obtemos

$$\|\Phi'(u)\| \geq \alpha > 0,$$

para todo $u \in \Phi^{-1}([c-\epsilon_0, c+\epsilon_0]) \bigcap B_{2\delta}(\widehat{u})$

Agora escolhendo $\epsilon > 0$ tal que

$$\epsilon < \min\{\epsilon_0, \alpha/2\},$$

do Lema da Deformação, existe um homeomorfismo $\eta : X \to X$ such that *i)* $\eta(u) = u$ para todo $u \notin \Phi^{-1}([c-\epsilon_0, c+\epsilon_0]) \bigcap B_{2\delta}(\widehat{u})$;

ii) $\eta(\Phi^{c+\epsilon} \bigcap B_\delta(\widehat{u})) \subset \Phi^{c-\epsilon} \bigcap B_\delta(\widehat{u})$.

Definamos $\gamma : J \to X$ por $\gamma(t) = \eta(g(t))$ e duas funções contínuas, $\Psi_0, \Psi_1 : J \to \mathbb{R}$ por

$$\Psi_0(t) = \Phi'(g(t))\widehat{u}$$

and

$$\Psi_1(t) = \frac{1}{t}\Phi'(\gamma(t))\gamma(t).$$

Para $t \in \{1-\delta, 1+\delta\}$, temos

$$\Phi(g(t)) \leq c_0 = c - (c - c_0) < c - \frac{c - c_0}{2} = c - \epsilon_0,$$

ou seja $g(t) \notin \Phi^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon]) \bigcap B_{2\delta}(\widehat{u})$. Do Lema da deformação item *i*), temos que $\eta(g(t) = g(t)$ quando $t \in \{1-\delta, 1+\delta\}$. Portanto, para $t \in \{1-\delta, 1+\delta\}$, encontramos

$$\begin{aligned}\Psi_1(t) = \frac{1}{t}\Phi'(\gamma(t))\gamma(t) &= \frac{1}{t}\Phi'(\eta(g(t)))\eta(g(t)) = \frac{1}{t}\Phi'(g(t))g(t)) \\ &= \frac{1}{t}\Phi'(g(t))t\widehat{u} = \Phi'(g(t))\widehat{u} = \Psi_0(t)\end{aligned}$$

Logo, da Teoria do grau, $d(\Psi_0, J, 0) = d(\Psi_1, J, 0)$. AlÃ©m disso,

$$\Psi_0(1) = \Phi'(g(1))\widehat{u} = \Phi'(\widehat{u})\widehat{u} = 0$$

e

$$\Psi_0(t) \neq 0,$$

para todo $t \in J$ com $t \neq 1$. Assim, $d(\Psi_0, J, 0) = 1$ o que implica que $d(\Psi_1, J, 0) = 1$. Logo, existe $t \in J$ tal que $\Psi_1(t) = 0$, ou seja,

$$\frac{1}{t}\Phi'(\gamma(t))\gamma(t) = 0,$$

de onde concluimos que $\gamma(t) \in \mathcal{N}$. Isto implica que

$$c \leq \Phi(\gamma(t)) = \Phi(\eta(g(t))).$$

Como $g(t) \in B_\delta(\widehat{u})$ e $\Phi(g(t)) < c + \epsilon$, pelo item *ii*) do Lema da Deformação, temos que

$$\Phi(\eta(g(t))) < c - \epsilon,$$

de onde concluimos que $c < c - \epsilon$, o que é uma contradição. ■

2.2.2 Aplicação 1

Considere o problema

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = f(u) & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ é um domínio limitado e $\Delta_p = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $1 < p < N$. Antes de enunciar o resultado principal, precisamos de hipóteses sobre a função f:

A função f é contínua e existem $C, r \in \mathbf{R}$ com $p < r < p^* = \frac{pN}{N-p}$ tais que

$$(f_1) \qquad |f(t)| \leq C(1 + |t|^{r-1})$$

Além disso, considere as seguintes condições na orígem e no infinito:

$$(f_2) \qquad \lim_{|t|\to 0} \frac{|f(t)|}{|t|^{p-1}} = 0$$

e

$$(f_3) \qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{F(t)}{t^p} = +\infty,$$

onde $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(r)dr$.

Note que, por $(f_1) - (f_2)$, dado $\epsilon > 0$, existe $C_\epsilon > 0$, tal que

$$|f(t)| \leq \epsilon|t|^{p-1} + C_\epsilon|t|^{r-1} \tag{2.2}$$

A função

$$(f_4) \qquad t \mapsto \frac{f(t)}{t^{p-1}} \text{ é crescente para } t > 0.$$

O principal resultado desta seção é dado por:

Teorema 2.3 *Considere $(f_1) - (f_4)$ verdadeiras. Então (P) tem uma solução Ground state.*

2.3 Estrutura variacional

Dizemos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma solução fraca do problema (P) se verifica

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi \, dx - \int_\Omega f(u)\phi \, dx = 0$$

para todo $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, onde $\|.\|$ é a norma usual em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Vamos encontrar soluções de (P) procurando pontos críticos do funcional Φ de classe C^1 dado por

$$\Phi(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p - \int_\Omega F(u) \, dx.$$

Note que

$$\Phi'(u)\phi = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi \, dx - \int_\Omega f(u)\phi \, dx,$$

para todo $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Portanto, pontos críticos de Φ são soluções fracas de (P).

Agora definiremos a variedade de Nehari $\mathcal{N}$ associada ao funcional Φ por:

$$\mathcal{N} = \{u \in X \backslash \{0\} : \Phi'(u)u = 0\} = J^{-1}\{0\},$$

onde $J(u) = \Phi'(u)u = \|u\|^2 - \int_\Omega f(u)udx$.

Vamos mostrar que o funcional Φ satisfaz as hipóteses do Teorema devido a Szulkin e Weth.

Note $\Phi = I_0 - I$ é de classe C^1 e $\Phi(0) = 0$. Além disso, de (2.2), da desigualdade de Horder e das imersões contínuas de Sobolev, existem constantes k_1, k_2, tais que

$$\|I'(u)\| = \sup_{\|\phi\|=1} |I'(u)\phi| = \sup_{\|\phi\|=1} |\int_\Omega f(u)\phi dx| \leq \epsilon k_1 \|u\|^{p-1} + C_\epsilon k_2 \|u\|^{r-1}.$$

Desde que $p < r$, a hipótese 1. do Teorema de Szulkin e Weth é satisfeita. A hipótese 2. é consequência direta de (f_2). A hipótese 3. resulta de (f_3). Além disso, desde que f tem crescimento subcrítico e Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, a hipótese 4. é prontamente satisfeita. Note que

$$(I_0'(v) - I_0')(w)(v - w) = \|v\|^2 - \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla w dx - \int_\Omega |\nabla w|^{p-2}\nabla w \nabla v dx + \|w\|^p.$$

Usando desigualdade de Holder com os expoentes $p/p-1$ e p, obtemos

$$\begin{aligned}(I_0'(v) - I_0')(w)(v-w) &\geq \|v\|^p - \|v\|^{p-1}\|w\| - \|w\|^{p-1}\|v\| + \|w\|^p \\ &\geq (\|v\|^{p-1} - \|w\|^{p-1})(\|v\| - \|w\|),\end{aligned}$$

e a hipótese 5. é válida.

Capítulo 3

O resultado abstrato de Figueiredo e Ramos

Em 2015 Figueiredo e Ramos publicaram (veja [15]) uma versão do resultado de Szulkin e Weth, sem pedir que o funcional I_0 fosse p-homogêneo. Este resultado permitiu que problemas sem homogeneidade no operador diferencial pudesse ser estudado com o método de Nehari. O principal resultado em [15] é o seguinte:

Teorema 3.1 *Seja X um espaço Banach reflexivo com norma $\|\cdot\|$ e $\Phi : X \to \Re$ um funcional de classe $\mathcal{C}^1$ com $\Phi(0) = 0$. Considere $p, r > 1$ tal que :*

1. $\liminf\limits_{u \to 0} \dfrac{\Phi'(u)u}{\|u\|^r} > 0$
2. *Para todo $u \in X$ temos $\Phi(u) \geq C_0\|u\|^r - I(u)$ onde $C_0 > 0$ e I é fracamente contínuo sobre X.*
3. $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{\Phi(tu)}{t^p} = -\infty$ *uniformemente para u em subconjuntos fracamente compactos de $X \setminus \{0\}$.*
4. *Para todo $u \in X$ com $u \neq 0$, a função $u \mapsto \frac{\Phi'(tu)u}{t^{p-1}}$ é decrescente.*
5. *O funcional Φ é fracamente semicontínuo inferiormente.*

Então $c := \inf_{\mathcal{N}} \Phi$ é postivo e é atingido por algum $u_0 \neq 0$, i.e. Φ tem um ground state não trivial no nível c. Além disso, se Φ é par, então podemos escolher $u_0 \geq 0$.

3.0.1 Demonstração do Teorema

Dado $u \in X \setminus \{0\}$, definimos $h(t) = \Phi(tu)$ para $t > 0$. Assim

$$\frac{h'(t)}{\|u\|^r} = \frac{\Phi'(tu)u}{\|u\|^r}.$$

Por 1., temos que para $t > 0$ suficentemente pequeno, $h'(t) > 0$. Como $h(0) = 0$, então $h(t) > 0$ para $t > 0$ pequeno. Agora, por 3., temos que $h(t) < 0$ para $t > 0$ grande. Assim, existe $t_0 > 0$ tal que $h(t_0u) = \max_{t\geq 0} \Phi(tu)$. Em outras palavras $t_0u \in \mathcal{N}$. Note que por 4., h' é decrscente, ou seja, h' se anula uma única vez. Portanto t_0 é único.

Em particular, para $u \in \mathcal{N}$, temos que $\Phi(u) = h(1) = \max_{t\geq 0} h(t) \geq 0$.

Afirmamos que, para toda $u \in \mathcal{N}$, existe $C > 0$ tal que $\|u\| \geq C > 0$. Pois se existisse $(u_n) \subset \mathcal{N}$ com $u_n \to 0$ em X, então $\frac{\Phi'(u_n)u_n}{\|u_n\|^r} = 0$ para todo n, contradizendo 1..

Vamos provar agora que se $(u_n) \subset \mathcal{N}$ é tal que se $(\Phi(u_n))$ é limitado superiormente, então (u_n) é limitada e, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u_0$ com $u_0 \not\equiv 0$. Suponha, por contradição que $(u_n) \subset \mathcal{N}$ não seja limitada. Então, podemos assumir que $\|u_n\| \to \infty$ e $v_n \rightharpoonup v_0$, onde $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$. Se $v_0 \equiv 0$ então, desde que $t = 1$ é o ponto de máximo global de hu_n, concluímos usando 2. que:

$$\Phi(u_n) \geq \Phi(tv_n) \geq C_0t^r - I(tv_n) \to C_0t^r - I(0),$$
$$forall t > 0.$$

Esta desigualdade contradiz o fato que $(\Phi(u_n))$ é limitado superiormente. Portanto, $v_0 \not\equiv 0$ e consequentemente, por (3),

$$\frac{\Phi(u_n)}{\|u_n\|^p} = \frac{\Phi(\|u_n\|v_n)}{\|u_n\|^p} \to -\infty,$$

o que contradiz o fato que $\Phi(u_n) > 0$ para todo n. Portanto, (u_n) deve ser limitada e, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u_0$. Se $u_0 \equiv 0$ então, repetindo o argumento usado no caso $v_0 \equiv 0$, obtemos

$$\Phi(u_n) \geq \Phi(tu_n) \geq C_0t^r\|u_n\|^r - I(tu_n) \geq D_0t^r - I(tu_n) \to D_0t^r - I(0),$$

onde foi usado (2) e o fato que $\mathcal{N}$ é limitada por zero. Assim, encontramos uma outra contradição, o que nos mostra que $u_0 \not\equiv 0$.

Em particular, se (u_n) é uma sequência minimizante para c, então podemos assumir que $u_n \rightharpoonup u_0$ com $u_0 \not\equiv 0$. Seja $t_0 > 0$ tal que $t_0 u_0 \in \mathcal{N}$. De 5., concluimos que

$$c \leq \Phi(t_0 u_0) \leq \liminf_{n\to\infty} \Phi(t_0 u_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \Phi(u_n) = c,$$

e, como consequência, $\Phi(t_0 u_0) = c$. Finalmente, if Φ é par, então $\Phi(t_0 u_0) = \Phi(|t_0 u_0|)$, o que mostra que $|t_0 u_0|$ atinge c.

Para mostrar que o ponto de mínimo de Φ restrito à Nehari é ponto crítico de Φ em todo o espaço nós repetimos os argumentos de Szulkin e Weth.

3.0.2 Aplicação 1

Nesta seção vamos estudar o problema

$$(P) \qquad \begin{cases} -\mathrm{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(u) \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio regular e limitado e $1 < p < N$.

As hipóteses sobre a função $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ de classe C^1 são as seguintes:

Existem constantes $k_0, k_1 > 0$, $k_2, k_3 \geq 0$, $N > q > p$ tais que

$$(a_1) \qquad k_0 + H(k_3)k_2 t^{(q-p)/p} \leq a(t) \leq k_1 + k_3 t^{(q-p)/p},$$

onde $H(\xi) = 1$ se $\xi > 0$ e $H(\xi) = 0$ se $\xi = 0$.

A função

$$(a_2) \qquad t \to a(t^p)t^{p-2} \text{ é crescente e } t \to a(t^p)t^p \text{ é convexa.}$$

A função

$$(a_3) \qquad t \to \frac{a(t^p)}{t^{H(\xi_3)(\gamma-p)}} \text{ é crescente para } t > 0,$$

onde $\gamma = (1 - H(k_3))p + H(k_3)q$.

As hipóteses sobre f são dadas por:

Existem $C, r \in \mathbb{R}$ tais que $\gamma < r < \gamma^* = \frac{\gamma N}{N-\gamma}$ e

$$(f_1) \qquad |f(t)| \leq C(1 + |t|^{r-1})$$

Além disso, considere as seguintes condições de crescimento na orígem e no infinito;

$$(f_2) \qquad \lim_{|t|\to 0} \frac{|f(t)|}{|t|^{p-1}} = 0$$

e

$$(f_3) \qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{F(t)}{t^\gamma} = +\infty,$$

onde $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(r)dr$.

A função

$$(f_4) \qquad t \mapsto \frac{f(t)}{t^{\gamma-1}} \text{ é crescente para } \quad t > 0.$$

Usando o Teorema abstrato da seção anterior, provaremos o seguinte resultado:

Teorema 3.2 *Se* $(a_1)-(a_4)$ *e* $(f_1)-(f_4)$ *ocorrem, então o problem* (P) *tem uma solução ground.*

Agora daremos alguns exemplos de funções a para ilustrar o grau de generalidade de problemas que estamos estudando aqui:

Exemplo 3.1 *Considerando* $a(t) = 1$, *temos que* a *satisfaz as hipóteses* $(a_1) - (a_4)$ *com* $k_0 = k_1 = 1$, $k_3 = 0$ *e* $k_2 > 0$. *Portanto, o Teorema 3.2 é válido para o problema*

$$-\Delta_p u = f(u) \text{ em } \Omega,$$

o qual é um dos problemas estudados por Szulkin e Weth.

Exemplo 3.2 *Considerando* $a(t) = 1 + t^{\frac{q-p}{p}}$, *temos que* a *satisfa as hipóteses* $(a_1) - (a_4)$ *com* $k_0 = k_1 = k_2 = k_3 = 1$. *Portanto, o Teorema 3.2 é válido para o problema*

$$-\Delta_p u - \Delta_q u = f(u) \text{ em } \Omega,$$

que não é homogêneo. Esta classe de problemas vem, por exemplo, de um sistema de reação-difusão mais geral do tipo

$$u_t = div[D(u)\nabla u] + c(x,u), \tag{3.1}$$

onde $D(u) = (|\nabla u|^{p-2} + |\nabla u|^{q-2})$. Este sistema tem uma vasta gama de aplicações na física e ciências afins, como biologia, fÃsica de plasma e química. Em tais aplicações, a função u descreve uma concentração, o primeiro termo do lado direito de (3.1) corresponde a difusão com coeficiente de difusão $D(u)$; enquanto que o segundo termo é a reação e relaciona processos de orígem e perda. Tipicamente, nas aplicações da química e biologia, o termo de reação $c(x,u)$ é um polinômio de com coeficientes variáveis(ver [19], [20], [27]).

Continuamos com outros exemplos que são interessantes do ponto de vista matemático:

Exemplo 3.3 *Considerando* $a(t) = 1 + \frac{1}{(1+t)^{\frac{p-2}{p}}}$, *temos que a satisfaz as hipóteses* $(a_1) - (a_4)$ *com* $k_0 = 1$, $k_1 = 2$, $k_3 = 0$ *e* $k_2 > 0$. *Portanto, o Teorema 3.2 é válido para o problema*

$$-div\ (|\nabla u|^{p-2}\nabla u + \frac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{(1+|\nabla u|^p)^{\frac{p-2}{p}}}) = f(u)\ \ em\ \Omega.$$

Exemplo 3.4 *Considerando* $a(t) = 1 + t^{\frac{q-p}{p}} + \frac{1}{(1+t)^{\frac{p-2}{p}}}$, *temos que a satisfaz as hipóteses* $(a_1) - (a_4)$ *com* $k_0 = 1$, $k_1 = 2$ *e* $k_3 = k_2 = 1$. *Portanto, o Teorema 3.2 é válido para o problema*

$$-\Delta_p u - \Delta_q u - \ div\ (\frac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{(1+|\nabla u|^p)^{\frac{p-2}{p}}}) = f(u)\ \ em\ \Omega.$$

3.1 Estrutura variacional

Dizemos que $u \in X$ é solução fraca do problema (P) se u satisfaz

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\phi\ dx - \int_\Omega f(u)\phi\ dx = 0$$

para todo $\phi \in X$, onde X denota o espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega) \bigcap W^{1,\gamma}(\Omega)$.

Desde que $q > p$ e $H = 0$ ou $H = 1$, temos $\gamma \geq p$ e assim $W_0^{1,p}(\Omega) \bigcap W_0^{1,\gamma}(\Omega) = W_0^{1,\gamma}(\Omega) = X$

Então, em X consideramos a norma usual $\|u\|^\gamma = \int_\Omega |\nabla u|^\gamma \, dx$.

O funcional associado a (P) é de classe C^1 é dado por $\Phi : X \to \mathbb{R}$ onde

$$\Phi(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega A(|\nabla u|^p) \, dx - \int_\Omega F(u) \, dx,$$

e $A(t) = \int_0^t a(s)ds$.
Note que

$$\Phi'(u)\phi = \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi \, dx - \int_\Omega f(u)\phi \, dx,$$

para todo $\phi \in X$. Portanto, pontos críticos de Φ são soluções fracas de (P).

Agora definimos a variedade de Nehari associada a Φ dado por

$$\mathcal{N} = \{u \in X \backslash \{0\} : \Phi'(u)u = 0\}.$$

3.2 Demonstração do Teorema 3.2

É suficiente provar que o funcional Φ satisfaz as hipóteses do Teorema 3.1 de Figueiredo e Ramos.

Note que por (a_1), (f_1) e (2_1), dado ϵ, existem constantes positivas C_ϵ, C tais que

$$\Phi'(u)u \geq (K_0 - \epsilon C)\|u\|^p + CC_\epsilon \|u\|^q \geq C\|u\|^p$$

para $\|u\|$ pequeno. Assim, a hipótese 1. é satisfeita.

A hipótese 2. é consequência imediata de (a_1). Agora a hipótese 3. é consequência direta de (f_3) e (a_3). Com (f_4) podemos provar a hipótese 4.. Por (a_2), provamos 5.. Assim, Φ tem um ground state nào trivial.

3.2.1 Aplicação 2

Nesta aplicação vamos estudar o problema de Kirchhoff o qual é dado por

$$(P) \qquad \begin{cases} -M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u = f(u) \;\; \text{in} \;\; \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u = 0 \;\; \text{on} \;\; \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ é um domínio limitado. Antes de enunciar o resultado de existência de solução ground state, precisamos das seguintes hipóteses sobre a função M.

A função $M : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ é de classe C^1 e satisfaz as seguintes condições:

(M_1**)** A função M é crescente e $0 < M(0) =: m_0$.

(M_2**)** A função $t \mapsto \dfrac{M(t)}{t}$ é decrescente.

Um exemplo típico de funções verificando as hipóteses $(M_1) - (M_2)$ é dadas por

$$M(t) = m_0 + bt, \quad \text{onde} \quad m_0 > 0 \ \text{ e } \ b > 0.$$

Este é o exemplo que foi considerado por Kirchhoff em [17]. Mais geralmente, cada função da forma

$$M(t) = m_0 + bt + \sum_{i=1}^{k} b_i t^{\gamma_i}$$

com $b_i \geq 0$ e $\gamma_i \in (0,1)$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ verifica as hipóteses $(M_1) - (M_2)$. Um outro exemplo é $M(t) = m_0 + ln(1+t)$.

As hipóteses sobre a função f são dadas por:

Existem $C, r \in \mathbb{R}$ tais que $4 < r < 2^* = 6$ e

$$(f_1) \qquad |f(t)| \leq C(1 + |t|^{r-1})$$

Além disso, considere as seguintes condições de crescimento na orígem e no infinito:

$$(f_2) \qquad \lim_{|t| \to 0} \frac{|f(t)|}{|t|^3} = 0$$

e

$$(f_3) \qquad \lim_{t \to +\infty} \frac{F(t)}{t^4} = +\infty,$$

onde $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(r)dr$.

A função

$$(f_4) \qquad t \mapsto \frac{f(t)}{t^3} \quad \text{é crescente para} \quad t > 0.$$

O principal resultado agora é o:

Teorema 3.3 *Se* $(M_1) - (M_2)$ *e* $(f_1) - (f_4)$ *ocorrem, então o problema* (P) *tem uma solução não trivial ground state.*

A classe de problemas (P) é chamada do tipo Kirchhoff porque é modelo de uma importante aplicação da Física e das Engenharias. Por exemplo, em 1883, Kirchhoff [17] estudou a equação

$$(K) \qquad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

o qual estende a clássica equação da onda de D'Alembert considerando os efeitos da troca de comprimentos da corda durante as vibrações. Os parâmetros da equação (K) tem o seguintes significados: L é o comprimento da corda, h é a seção de área tranversal da corda, E é uma constante que está relacionada com o material com o qual a corda é feita, ρ é a densidade de massa da corda e P_0 é a tensão inicial.

Quando uma corda elástica com as extremidades fixadas é submetida a vibrações transversais, seu comprimento varia cm o tempo: Isto introduz troca de tensões na corda. Esse fenômeno motivou Kirchhoff a propor uma correção na clássica equação de D'Alembert. Depois, Woinowsky-Krieger (Nash - Modeer) incorporou esta correção na clássica equação de Euler-Bernoulli para a viga. Veja por exemplo, [4], [5] e as referências lá contidas.

Além dessa importante aplicação, a presença do termo $M(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)$ causa algumas dificuldades matemáticas, o que faz o estudo desta classe de problemas particularmente interessante.

3.3 Estrutura Variacional

Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca do problema (P) se u satisfaz

$$M(\|u\|) \int_\Omega \nabla u \nabla \phi \; dx - \int_\Omega f(u) \phi \; dx = 0$$

para todo $\phi \in H_0^1(\Omega)$, onde $\|.\|$ é a norma usual em $H_0^1(\Omega)$.

O funcional associado ao problema (P) é dado pelo funcional de classe C^1 $\Phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \widehat{M}(\|u\|^2) - \int_\Omega F(u) \; dx,$$

onde $\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s)ds$.

Note que

$$I'(u)\phi = M(\|u\|^2) \int_\Omega \nabla u \nabla \phi \; dx - \int_\Omega f(u)\phi \; dx,$$

para todo $\phi \in H_0^1(\Omega)$. Portanto, pontos críticos de Φ são soluções fracas de (P).

Agora definimos a variedade de Nehari associada ao funcional Φ:

$$\mathcal{N} = \{u \in X \backslash \{0\} : \Phi'(u)u = 0\}.$$

3.4 Demonstração do Teorema 3.3

É suficiente provar que o funcional Φ satisfaz as hipóteses do Teorema 3.1 de Figueiredo e Ramos.

Note que por (M_1), (f_1) e (2_1), dado ϵ, existem constantes positivas C_ϵ, C tais que

$$\Phi'(u)u \geq (M_0 - \epsilon C)\|u\|^2 + CC_\epsilon \|u\|^r$$

para $\|u\|$ pequeno. Assim, a hipótese 1. é satisfeita.

A hipótese 2. é consequência imediata de (M_1). Agora a hipótese 3. é consequência direta de (f_3) e (M_2). Com (f_4) e (M_2) podemos provar a hipótese 4.. Da definição de M, provamos 5.. Assim, Φ tem um ground state não trivial.

Capítulo 4

O método de Nehari e soluções nodais

Neste capítulo estudaremos a existência de soluções nodais ou soluções que mudam de sinal do seguinte problema

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(u) \ \text{ em } \ \Omega, \\ u^+ \neq 0 \ \text{ e } \ u^- \neq 0 \ \text{ em } \ \Omega, \\ u = 0 \ \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio regular limitado,

$$u^+(x) = \max\{u(x), 0\} \ \text{ e } \ u^-(x) = \min\{u(x), 0\}, \quad \text{para todo } \ x \in \Omega.$$

Note que, neste caso, $u = u^+ + u^-$ e $|u| = u^+ - u^-$. Procuramos por soluções que mudam de sinal exatamente uma vez. Neste caso dizemos que a solução u possui dois domínios nodais.

Consideramos que a função f é de classe C^1 e satisfaz

(f_1)

$$\lim_{|t| \to 0^+} \frac{f(t)}{t} = 0.$$

(f_2) Existe $q \in (2, 2^*)$ tal que

$$\lim_{|t| \to \infty} \frac{f(t)}{t^{q-1}} = 0.$$

(f_3) Existe $\theta \in (2, 2^*)$ tal que

$$0 < \theta F(t) \leq f(t)t, \ \forall |t| > 0, \quad \text{onde} \ \ F(t) = \int_0^t f(s)ds.$$

(f_4) A aplicação

$$t \mapsto \frac{f(t)}{t}$$

é crescente em $|t| > 0$.

O principal resultado neste capítulo é:

Teorema 4.1 *Suponha que a função f satisfaça $(f_1) - (f_4)$. Então o problema (P) possui uma solução Ground state, com exatamente dois domínios nodais.*

4.1 Estrutura Variacional e Lemas técnicos

Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca nodal de problema (P) se $u^+ \neq 0$, $u^- \neq 0$ em Ω e satisfaz

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi \ dx - \int_\Omega f(u)\phi \ dx = 0, \quad \text{para todo} \ \ \phi \in H_0^1(\Omega),$$

onde

$$\|u\| := \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \ dx \right)^{1/2}.$$

Em vista de $(f_1) - (f_2)$, temos que o funcional $J : H_0^1(\Omega) \to \mathrm{I\!R}$ dado por

$$J(u) := \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F(u) \ dx$$

está bem definido. Além disso, $J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathrm{I\!R})$ com a seguinte derivada

$$J'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v \ dx - \int_\Omega f(u)v \ dx.$$

Assím, soluções fracas de (P) são precisamente pontos críticos de J. Associado ao funcional J, definimos a variedade de Nehari dada por

$$\mathcal{N} := \Big\{ u \in H_0^1(\Omega) \backslash \{0\} : J'(u)u = 0 \Big\}.$$

No Teorema 4.1 demonstraremos que existe $w \in \mathcal{M}$ tal que

$$J(w) = \min_{v \in \mathcal{M}} J(v),$$

onde

$$\mathcal{M} := \Big\{ w \in \mathcal{N} : J'(w^+)w^+ = 0 = J'(w^-)w^- \Big\}.$$

Tal conjunto $\mathcal{M}$ é conhecido como conjunto Nodal. Vamos iniciar estabelecendo alguns resultados preliminares o quais serão explorados na próxima seção num argumento de minimização.

Lema 4.1 **(a)** *Para todo $u \in \mathcal{N}$ temos*

$$J(u) \geq \frac{(\theta - 2)}{2\theta} \|u\|^2.$$

(b) *Existe $\rho > 0$ tal que*

$$\|u\| \geq \rho, \quad \textit{para todo} \ \ u \in \mathcal{N}$$

e

$$\|w^{\pm}\| \geq \rho, \quad \textit{para todo} \ \ w \in \mathcal{M}.$$

Demonstração Por (f_3) concluimos que

$$J(u) = J(u) - \frac{1}{\theta} J'(u)u \geq \frac{(\theta - 2)}{2\theta} \|u\|^2, \quad \text{for all} \ \ u \in \mathcal{N},$$

o qual demonstra (a).

Para demonstrar (b), note que por (f_1) e (f_2), dado $\epsilon > 0$, existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$f(t)t \leq \epsilon |t|^2 + C_\epsilon |t|^q. \tag{4.1}$$

Agora da definição de $\mathcal{N}$ e da imersões de Sobolev, temos que

$$0 < \rho := \left[(1 - \frac{\epsilon C_2}{C_1}) \frac{1}{C_\epsilon} \right]^{1/(q-2)} \leq \|u\|,$$

para todo $u \in \mathcal{N}$ e para algum $C_1 > 0$.

De (4.1) e repetindo argumentos anteriores, obtemos

$$0 < \rho \leq \|w^{\pm}\|.$$

■

Mostraremos agora que toda sequência minimizante de J sobre $\mathcal{M}$ não pode convergir para zero.

Lema 4.2 *Se* (w_n) *é uma sequência limitada em* $\mathcal{M}$*, então*

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |w_n^\pm|^q \, dx > 0.$$

Demonstração. Repetindo os mesmo argumentos já usados neste capítulo, obtemos

$$0 < \rho^2 \leq \|w_n^\pm\|^2 \leq \epsilon \int_\Omega |w_n^\pm|^2 \, dx + C_\epsilon \int_\Omega |w_n^\pm|^q \, dx.$$

Desde (w_n)é limitada, existe $C > 0$ tal que

$$0 < \rho^2 \leq \epsilon C + C_\epsilon \int_\Omega |w_n^\pm|^q \, dx$$

e o resultado segue da última desigualdade. ■

Nos próximos resultados obteremos informações de f J com respeito a $\mathcal{M}$ da mesma maneira que foi obtido sobre $\mathcal{N}$. Para ser mais preciso, observe a similaridade do próximo resultado com o resultado que afirma que para cada $v \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ existe um único $t_v > 0$ tal que $t_v v \in \mathcal{N}$.

Lema 4.3 *Se* $v \in H_0^1(\Omega)$ *com* $v^\pm \neq 0$*, então existem* $t, s > 0$ *tais que*

$$J'(tv^+ + sv^-)v^+ = 0$$

e

$$J'(tv^+ + sv^-)v^- = 0.$$

Demonstração. Seja $V : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ uma função contínua dada por

$$V(t, s) = (J'(tv^+ + sv^-)(tv^+), J'(tv^+ + sv^-)(sv^-)).$$

Note que

$$J'(tv^+ + sv^-)(tv^+) = t^2\|v^+\|^2 - \int_\Omega f(tv^+)tv^+ dx. \tag{4.2}$$

Usando (4.1) e imersões de Sobolev em (4.2), temos

$$J'(tv^+ + sv^-)(tv^+) \geq (1 - \epsilon C)t^2\|v^+\|^2 - t^q C_\epsilon C\|v^+\|^q,$$

para algum $C > 0$. Assim, existe $r > 0$ suficiente pequeno tal que

$$J'(rv^+ + sv^-)(rv^+) > 0, \quad \text{para todo} \quad s > 0.$$

Argumentando da mesma maneira, obtemos

$$J'(tv^+ + rv^-)(rv^-) > 0, \quad \text{para todo} \quad t > 0.$$

Por outro lado, por (f_3), existem $K_1, K_2 > 0$ tal que

$$F(t) \geq K_1 t^\theta - K_2. \tag{4.3}$$

Usando (4.3) e (f_3) em (4.2), temos

$$J'(tv^+ + sv^-)(tv^+) \leq t^2\|v^+\|^2 - \frac{t^\theta}{\theta}K_1 \int_\Omega |v^+|^\theta dx + K_2|\Omega|,$$

onde $|\Omega|$ representa a medida de Lebesgue de Ω. Portanto, desde que $\theta > 2$, para $R > 0$ suficiente grande, concluímos

$$J'(Rv^+ + sv^-)(Rv^+) < 0, \quad \text{for all} \quad s \leq R.$$

Argumentando novamente da mesma maneira, encontramos

$$J'(tv^+ + Rv^-)(Rv^-) < 0, \quad \text{for all} \quad t \leq R.$$

Em particular,

$$J'(rv^+ + sv^-)(rv^+) > 0 \quad \text{e} \quad J'(tv^+ + rv^-)(rv^-) > 0, \quad \text{para todo} \quad t, s \in [r, R],$$

$$J'(Rv^+ + sv^-)(Rv^+) < 0 \quad \text{e} \quad J'(tv^+ + Rv^-)(Rv^-) < 0, \quad \text{para todo} \quad t, s \in [r, R].$$

Agora o Lema segue aplicando o Teorema de Miranda [21]. ∎

Note que, por (f_4) temos

$$f'(t)t \geq f(t), \quad \text{para todo} \quad |t| \geq 0, \tag{4.4}$$

o qual implica

$$t \mapsto \frac{1}{2}f(t)t - F(t) \;\; \text{é crescente, para todo} \;\; |t| > 0. \tag{4.5}$$

Agora, podemos definir uma função e seu vetor gradiente, os quais estão relacionados com o funcional J e serão usados no lema de deformação. De fato, para cada $v \in H_0^1(\Omega)$ com $v^{\pm} \neq 0$, considere

$$h^v : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \to \mathbb{R} \;\; \text{dado por} \;\; h^v(t,s) = J(tv^+ + sv^-)$$

e seu vetor gradiente $\Phi^v : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$\begin{aligned} \Phi^v(t,s) &= \Big(\Phi_1^v(t,s), \Phi_2^v(t,s)\Big) = \Big(\frac{\partial h^v}{\partial t}(t,s), \frac{\partial h^v}{\partial s}(t,s)\Big) \\ &= (J'(tv^+ + sv^-)v^+, J'(tv^+ + sv^-)v^-), \end{aligned}$$

para todo $(t,s) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty)$. Além disso, considere the matriz hessiana de h^v ou. a matriz jaconbiana de Φ^v, i.e.

$$(\Phi^v)'(t,s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1^v}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial \Phi_1^v}{\partial s}(t,s) \\ \\ \frac{\partial \Phi_2^v}{\partial t}(t,s) & \frac{\partial \Phi_2^v}{\partial s}(t,s) \end{pmatrix},$$

para todo $(t,s) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty)$. De fato, no que segue, provaremos que se $w \in \mathcal{M}$, a função h^w tem um ponto crítico e, em particular, um máximo global em $(t,s) = (1,1)$,

Lema 4.4 *Se $w \in \mathcal{M}$, então*

(a)

$$h^w(t,s) < h^w(1,1) = J(w),$$

para todo $t, s \geq 0$ tal que $(t,s) \neq (1,1)$.

(b)

$$det(\Phi^w)'(1,1) > 0.$$

Demonstração. Desde que $w \in \mathcal{M}$, tencontramos

$$J'(w)w^{\pm} = J'(w^+ + w^-)w^{\pm} = 0.$$

Assim,

$$\Phi^w(1,1) = (\frac{\partial h^w}{\partial t}(1,1), \frac{\partial h^w}{\partial s}(1,1)) = (0,0).$$

Além disso, de (4.3) temos

$$\begin{aligned} h^w(t,s) &= J(tw^+ + sw^-) \leq \frac{1}{2}\|tw^+ + sw^-\|^2 \\ &- K_1 \int_\Omega |tw^+ + sw^-|^\theta dx + K_2|\Omega|. \end{aligned}$$

Desde que $2 < \theta < 2^*$, então

$$\lim_{|(t,s)| \to +\infty} h^w(t,s) = -\infty,$$

que implica $(1,1)$ é um ponto crítico de h^w e h^w tem um máximo global em (a,b).

Agora provaremos que $a, b > 0$. Suponha, por contradição, que $b = 0$. Então, $J'(aw^+)aw^+ = 0$ implica

$$\|w^+\|^2 = \int_\Omega \frac{f(aw^+)}{a} w^+ dx. \tag{4.6}$$

Além disso, temos

$$\|w^+\|^2 = \int_\Omega f(w^+)w^+ dx. \tag{4.7}$$

Então, concluimos $a = 1$.

Desde que os suportes de w^+ e w^- são disjuntos, inferimos que

$$h^w(1,0) = J(w^+) < J(w) = h^w(1,1),$$

o qual é um absurdo pois $(1,0)$ é um ponto de máximo. Da mesma maneira provamos que $0 < a$.

Provaremos que $a, b < 1$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $b \leq a$. Assim,

$$\|w^+\|^2 \geq \int_\Omega \frac{f(aw^+)}{(aw^+)}(w^+)^2 \, dx. \tag{4.8}$$

Por outro lado, $J'(w^+)w^+ = 0$ implica

$$\|w^+\|^2 = \int_\Omega \frac{f(w^+)}{(w^+)}(w^+)^2 \, dx. \tag{4.9}$$

Da última desigualdade e de (f_4) concluímos que that $0 < b \leq a \leq 1$.

Agora provaremos que h^w não tem máximo global em $[0,1] \times [0,1] \backslash \{(1,1)\}$. Mostraremos que

$$h^w(a,b) < h^w(1,1).$$

Note que $\|aw^+ + bw^-\|^2 = \|aw^+\|^2 + \|bw^-\|^2 \leq \|w^+\|^2 + \|w^-\|^2$, implica

$$h^w(a,b) = J(aw^+ + bw^-) \leq \frac{1}{2}\|w^+\|^2 + \|w^-\|^2 - \int_\Omega F(aw^+ + bw^-)dx. \tag{4.10}$$

Por (f_3) obtemos $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega f(aw^+ + bw^-)(aw^+ + bw^-)dx \geq 0$.

Assim, usando essa informação em (4.10) obtemos

$$\begin{aligned} h^w(a,b) &= J(aw^+ + bw^-) \leq \frac{1}{2}\|w^+\|^2 + \|w^-\|^2 \\ &+ \int_\Omega \left[\frac{1}{2} f(aw^+ + bw^-)(aw^+ + bw^-) - F(aw^+ + bw^-)\right] dx. \end{aligned}$$

Desde que w^+ and w^- tem suportes disjuntos, encontramos

$$\begin{aligned} h^w(a,b) &= J(aw^+ + bw^-) \leq \frac{1}{2}\|w^+\|^2 + \|w^-\|^2 \\ &+ \int_\Omega \left[\frac{1}{2} f(aw^+)(aw^+) - F(aw^+)\right] dx \\ &+ \int_\Omega \left[\frac{1}{2} f(bw^-)(bw^-) - F(bw^-)\right] dx. \end{aligned}$$

Usando (4.5) obtemos

$$h^w(a,b) < J(w^+ + w^-) = J(w) = h^w(1,1)$$

e o ítem (a) é demonstrado.

Agora demonstraremos o ítem (b). Considere $\Phi_1^w(t,s) = J'(tw^+ + sw^-)w^+$ e $\Phi_2^w(t,s) = J'(tw^+ + sw^-)w^-$. Assim,

$$\Phi_1^w(t,s) = t\|w^+\|^2 - \int_\Omega f(tw^+)w^+ dx$$

e

$$\Phi_2^w(t,s) = s\|w^-\|^2 - \int_\Omega f(sw^-)w^- dx.$$

Note que

$$\frac{\partial \Phi_1^w}{\partial t}(t,s) = \|w^+\|^2 - \int_\Omega f'(tw^+)(w^+)^2 dx$$

implica

$$\frac{\partial \Phi_1^w}{\partial t}(1,1) = \|w^+\|^2 - \int_\Omega f'(w^+)(w^+)^2 dx.$$

Da última igualdade

$$\frac{\partial \Phi_1^w}{\partial t}(1,1) = \int_\Omega \Big[f(w^+)w^+ - f'(w^+)(w^+)^2 \Big] dx.$$

De (4.4) obtemos

$$\frac{\partial \Phi_1^w}{\partial t}(1,1) < 0. \tag{4.11}$$

Argumentando da mesma maneira, concluímos que

$$\frac{\partial \Phi_2^w}{\partial s}(1,1) < 0. \tag{4.12}$$

Desde que $\frac{\partial \Phi_1^w}{\partial s}(1,1) = 0$, $\frac{\partial \Phi_2^w}{\partial t}(1,1) = 0$ e considerando (4.11) e (4.12) , podemos inferir que $det(\Phi^w)'(1,1) = \frac{\partial \Phi_1^w}{\partial t}(1,1)\frac{\partial \Phi_2^w}{\partial s}(1,1) > 0$ e o ítem (b) está demosntrado. ■

4.2 Demonstração do Teorema 4.1

Nesta seção, demonstraremos a existência de $w \in \mathcal{M}$ o qual o ínfimo de J ié atingido sobre $\mathcal{M}$. Em seguida, os mesmos argumentos usados em [8] por Bartsch, Weth e Willem (sveja também Alves e Souto em [1]) e, em particular, aplicando um lema de deformação, encontramos que w é um ponto crítico de J e então uma solução ground state nodal de (P). Para completar a prova do Teorema 4.1, concluiremos que w tem exatamente dois domínios nodais.

Note que, pelo Lemma 4.1, existe $c_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < c_0 = \inf_{v \in \mathcal{M}} J(v).$$

Assim, existe uma sequência minimizante (w_n) em $\mathcal{M}$, o qual é limitada pelo Lema 4.1 novamente. Portanto, pelo Teorema de imersão de sobolev, sem perda de generalidade, podemos assumir, passando a uma subsequência se necessário, que existe $w, w_1, w_2 \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} w_n \rightharpoonup w, \quad w_n^+ \rightharpoonup w_1, \quad w_n^- \rightharpoonup w_2 \quad &\text{em} \quad H_0^1(\Omega), \\ w_n \to w, \quad w_n^+ \to w_1, \quad w_n^- \to w_2 \quad &\text{em } L^q(\Omega),\ q \in (1, 2^*). \end{aligned}$$

Desde que as funções $w \to w^+$ e $w \to w^-$ são contínuas de $L^q(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$ (veja Lema 2.3 em [9]), temos que $w^+ = w_1 \geq 0$ e $w^- = w_2 \leq 0$. Assim, podemos demonstrar que $w \in \mathcal{M}$. De fato, por $w_n^+ \to w^+$ e $w_n^- \to w^-$ em $L^q(\Omega)$ então

$$\int_\Omega |(w_n)^\pm|^q dx \to \int_\Omega |w^\pm|^q dx.$$

Logo, pelo Lema 4.2, concluímos que $w^\pm \neq 0$ e consequentemente $w = w^+ + w^-$ troca de sinal. Pelo Lema 4.3, existem $t, s > 0$ tais que

$$\begin{aligned} J'(tw^+ + sw^-)w^+ = 0, \\ J'(tw^+ + sw^-)w^- = 0, \end{aligned} \tag{4.13}$$

implicando $tw^+ + sw^- \in \mathcal{M}$. Agora demonstraremos que $t, s \leq 1$. Primeiro observe que, desde que f tem crescimento subcrítico, encontramos

$$\int_\Omega f((w_n)^\pm)(w_n)^\pm dx \to \int_\Omega f(w^\pm)w^\pm dx$$

e

$$\int_\Omega F((w_n)^\pm) dx \to \int_\Omega F(w^\pm) dx.$$

Assim, desde que $J'(w_n)w_n^\pm = 0$, combinando (4.13) e argumentando como na prova do Lema 4.4 ítem (a), obtemos $0 < t, s \leq 1$.

No próximo passo mostraemos que $J(tw^+ + sw^-) = c_0$ and $t = s = 1$ ou melhor $J(w) = c_0$. De fato, desde que $t, s \leq 1$ e $w_n \rightharpoonup w$ quando $n \to +\infty$, explorando os argumentos usados na prova do Lemma 4.4 item (a) e da semicontinuidade fraca de ambos J and K com $K(u) = J'(u)u$ sobre $H_0^1(\Omega)$ descrito acima, temos

$$c_0 \leq J(tw^+ + sw^-) \quad = \quad J(tw^+ + sw^-) - \frac{1}{4} J'(tw^+ + sw^-)(tw^+ + sw^-)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \; J(w^+ + w^-) - \frac{1}{4}J'(w^+ + w^-)(w^+ + w^-) \\
&\leq \; \liminf_{n\to+\infty}\Big[J(w_n^+ + w_n^-) - \frac{1}{4}J'(w_n^+ + w_n^-)(w_n^+ + w_n^-)\Big] \\
&= \; \lim_{n\to+\infty} J(w_n) = c_0.
\end{aligned}
$$

Usando um lema de deformação quantitativo e argumentos usados em [8] com ligeiras trocas técnicas, temos que w é ponto crítico de J, i.e. $J'(w) = 0$.

Suponha, por contradição, que existe uma constante $\alpha > 0$ e $v_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\|v_0\| = 1$ tal que

$$J'(w)v_0 = 2\alpha > 0.$$

Por continuidade de J', podemos escolher um raio $r > 0$ tal que

$$J'(v), v_0 = \alpha > 0, \text{ para todo } v \in B_r(w) \subset H_0^1(\Omega) \text{ com } v^\pm \neq 0.$$

Fixe $D = (\xi, \chi) \times (\xi, \chi) \subset \mathbb{R}^2$ com $0 < \xi < 1 < \chi$ tal que

(i) $(1, 1) \in D$ e $\Phi^w(t, s) = (0, 0)$ in $\overline{D}$ se e somente se $(t, s) = (1, 1)$;

(ii) $c_0 \notin h^w(\partial D)$;

(iii) $\Big\{tw_0^+ + sw_0^- : (t, s) \in \overline{D}\Big\} \subset B_r(w)$,

onde h^w e Φ^w são definidas como na Seção 2 e satisfaz o Lema 4.4. Agora, podemos escolher um menor raio $r' > 0$ tal que

$$\mathcal{B} = \overline{B_{r'}(w)} \subset B_r(w) \text{ and } \mathcal{B} \cap \{tw^+ + sw^- : (t, s) \in \partial D\} = \emptyset. \tag{4.14}$$

Agora defina uma aplicação contínua $\rho : H_0^1(\Omega) \to [0, +\infty)$ tal que

$$\rho(u) := \text{dist}(u, \mathcal{B}^c), \text{ para toda } u \in H_0^1(\Omega),$$

e um campo vetorial limitado Lipschitz $V : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ dado por

$$V(u) = -\rho(u)v_0$$

e, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, denotando por $\eta(\tau) = \eta(\tau, u)$ consideramos o seguinte problema de Calchy

$$\eta'(\tau) = V(\eta(\tau)), \text{ for all } \tau > 0,$$
$$\eta(0) = u.$$

Agora observe que existe uma deformação contínua $\eta(\tau, u)$ e $\tau_0 > 0$ tal que para todo $\tau \in [0, \tau_0]$ as seguintes propriedades ocorrem:

(a) $\eta(\tau, u) = u$ para todol $u \notin \mathcal{B}$;

(b) $\tau \to J(\eta(\tau, u))$ é decrescente para todol $\eta(\tau, u) \in \mathcal{B}$;

(c) $J(\eta(\tau, w_0)) \leq J(w) - \frac{r'\alpha}{2}\tau$.

O item (a) segue imediatamente da definição de ρ. De fato, $u \notin \mathcal{B}$ implica $\rho(u) = 0$ e a única solução satisfazendo o problema de calchy acima é constante com valor constante u.
Com relação ao ítem (b), primiero observe que, desde que $\eta(\tau) \in \mathcal{B} \subset B_r(w)$, $J'(\eta(\tau))v_0 = \alpha > 0$ e, por definiçãode ρ, temos $\rho(\eta(\tau)) > 0$. Agora, diferenciando J com respeito a τ, para todo $\eta(\tau) \in \mathcal{B}$, temos

$$\frac{d}{d\tau}\left(J(\eta(\tau)\right) = J'(\eta(\tau))\eta'(\tau) = -\rho(\eta(\tau))J'(\eta(\tau))v_0 = -\rho(\eta(\tau))\alpha < 0$$

assim concluindo que $J(\eta(\tau, u))$ é decrescente com respeito a τ.
Para provar o ítem (c), sendo $\tau_0 > 0$ tal que $\eta(\tau, u) \in \mathcal{B}$ para todo $0 \leq \tau \leq \tau_0$, podemos assumir sem perda de generalidade que

$$\|\eta(\tau, w) - w\| \leq \frac{r'}{2} \Longleftrightarrow \eta(\tau, w) \in \overline{B_{\frac{r'}{2}}(w)}, \text{ para todo} 0 \leq \tau \leq \tau_0.$$

Assim, desde que $\rho(\eta(\tau, w)) = \operatorname{dist}(\eta(\tau, w), \mathcal{B}^c) \geq \frac{r'}{2}$ segue que

$$\frac{d}{d\tau}\left(J(\eta(\tau, w)\right) = -\rho(\eta(\tau, w))\alpha \leq \frac{r'\alpha}{2}$$

e, integrando em $[0, \tau_0]$ obtemos

$$J(\eta(\tau, w_0)) - J(w) \leq -\frac{r'\alpha}{2}\tau.$$

Neste ponto, considere o seguinte caminho deformado $\overline{\eta}_0 : \overline{D} \to X$ defined by

$$\overline{\eta}_{\tau_0}(t, s) := \eta(\tau_0, tw^+ + sw^-), \text{ para todo } (t, s) \in \overline{D}$$

tal que

$$\max_{(t,s)\in\overline{D}} J(\overline{\eta}_{\tau_0}(t, s)) < c_0.$$

De fato, por (b) e pelo fato que η satisfaz a condição inical $\eta(0,u)=u$, para todo $(t,s)\in\overline{D}-\{(1,1)\}$ temos

$$\begin{aligned} J(\overline{\eta}_{\tau_0}(t,s)) &= J(\eta(\tau_0, tw^+ + sw^-)) \leq J(\eta(0, tw^+ + sw^-)) \\ &= J(tw^+ + sw^-) = h^w(t,s) < c_0, \end{aligned}$$

e, para $(t,s)=(1,1)$, por (c) obtemos

$$\begin{aligned} J(\overline{\eta}_{\tau_0}(1,1)) &= J(\eta(\tau_0, w^+ + w^-)) = J(\eta(\tau_0, w)) \\ &\leq J(w) - \frac{r'\alpha}{2}\tau_0 < J(w) < c_0. \end{aligned}$$

Então, $\overline{\eta}_{\tau_0}(\overline{D})\cap\mathcal{M}\neq\emptyset$, i.e.

$$\overline{\eta}_{\tau_0}(t,s)\notin\mathcal{M}, \text{ para todo } (t,s)\in\overline{D}. \tag{4.15}$$

Por outro lado, definindo $\Psi_{\tau_0}:\overline{D}\to\mathbb{R}^2$ tal que

$$\Psi_{\tau_0} := \Big(\frac{J'(\overline{\eta}_{\tau_0}(t,s))(\overline{\eta}_{\tau_0}(t,s))^+}{t}, \frac{J'(\overline{\eta}_{\tau_0}(t,s))(\overline{\eta}_{\tau_0}(t,s))^-}{s}\Big),$$

observamos que, para todo $(t,s)\in\partial D$, por (4.14) e (a) para $\tau=\tau_0$, concluimos

$$\Psi_{\tau_0}(t,s) = \Big(J'(tw^+ + sw^-)w^+, J'(tw^+ + sw^-), w^-\Big) = \Phi^w(t,s).$$

Então, pelo grau topológico de Brouwer

$$\deg(\Psi_{\tau_0}, D, (0,0)) = \deg(\Phi^w, D, (0,0)) = \operatorname{sgn}(\det(\Phi^w)'(1,1)) = 1,$$

o que implica que Ψ_{τ_0} tem um zero $(\bar{t},\bar{s})\in D$ a saber

$$\Psi_{\tau_0}(\bar{t},\bar{s}) = (0,0) \Longleftrightarrow J'(\overline{\eta}_{\tau_0}(\bar{t},\bar{s}))(\overline{\eta}_{\tau_0}(\bar{t},\bar{s}))^{\pm} = 0.$$

Consequentemente, existe $(\bar{t},\bar{s})\in D$ tal que $\overline{\eta}_{\tau_0}(\bar{t},\bar{s})\in\mathcal{M}$ o que contradiz (4.15). Concluimos que w é um ponto crítico de J.

Finalmente, provaremos que w tem exatamente dois domńios nodais, ou equivalentemente, esta função troca de sinal exatamente uma vez.

Observamos que as hipóteses (f_1) e (f_2) asseguram que w é contínuo e $\widetilde{\Omega}=\{x\in\Omega : w(x)\neq 0\}$ é aberto. Suponha, por contradição, que $\widetilde{\Omega}$ tem mais que duas componentes ou w tem mais que dois domínios nodais e, desde que w troca de sinal, sem perda de generalidade, podemos considerar que

$$w = w_1 + w_2 + w_3, \text{ onde } w_1 \geq 0,\ w_2 \leq 0,\ w_3 \neq 0,$$

e

$$\mathrm{supp}(w_i) \cap \mathrm{supp}(w_j) = \emptyset, \text{ para } i \neq j,\ i, j = 1, 2, 3.$$

Desde que os suportes são disjuntos, combinado com $J'(w) = 0$ implica que

$$\langle J'(w_1 + w_2), w_1 \rangle = 0 = \langle J'(w_1 + w_2), w_2 \rangle .$$

Desde que $0 \neq w_1 = (w_1 + w_2)^+$ e $0 \neq w_2 = (w_1 + w_2)^-$, por argumentos previos, existem $t, s \in (0, 1]$ tal que $t(w_1+w_2)^+ + s(w_1+w_2)^+ \in \mathcal{M}$, a saber $tw_1+sw_2 \in \mathcal{M}$ e assim $J(tw_1 + sw_2) \geq c_0$.
Por outro lado, $0 \neq w_3 \in \mathcal{N}$, Lema 2.1 (i) e os argumentos usados na prova do lema 4.4 implicam que

$$J(tw_1 + sw_2) \leq J(w_1 + w_2) < J(w_1 + w_2) + J(w_3) = J(w) = c_0$$

o qual é uma contradição. Portanto, $w_3 = 0$. Assim, ta prova do Teorema 4.1 é completa.

Capítulo 5

O resultado abstrato de Figueiredo e Pimenta

Nesta Seção, o principal resultado é o seguinte:

Teorema 5.1 *Seja E, F espaços de Banach, E compactamente imerso em F e tal que, para toda sequeência limitada $(u_n) \subset E$ stal que $u_n \to u$ in F, ocorre que $u \in E$. Seja $\Phi, I_0 : E \to \mathbb{R}$, $I : F \to \mathbb{R}$ funcionais tais que $\Phi = I_0 - I|_E$, onde I_0 ié localmente Lipschitz contínuo, $I \in C^1(E) \cap C^0(F)$, $I(0) = 0$ e para todo $u \in E$, existe o seguinte limite*

$$I_0'(su)u := \lim_{t \to 0} \frac{I_0(su + tu) - I_0(su)}{t}, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Suponha também que as seguintes condições são satisfeitas:

i) *I_0 é semicontínuo inferiormente na topologia de F, i.e., se (u_n) é uma sequência limitada em E, e $u \in E$ são tais que, a menos de subsequência, $u_n \to u$ em F, tentão $I_0(u) \leq \liminf_{n \to \infty} I_0(u_n)$;*

ii) *Existem $\rho, \alpha_0 > 0$, tais que $\Phi(u) \geq \alpha_0 > \Phi(0)$, para todo $u \in E$ com $\|u\| = \rho$;*

iii) *$\forall u \in E$, $\Phi(u) \geq \|u\| - I(u)$;*

iv) *$t \mapsto \Phi'(tu)u$ é estritamente decrescente em $(0, +\infty)$;*

v) *Para cada sequência limitada $(v_n) \subset E$ tal que $v_n \to v \neq 0$ in F, segue que*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\Phi(tv_n)}{t} = -\infty, \quad \text{uniformemente em } n \in \mathbb{N}.$$

Então, o ínfimo de Φ *no conjunto*

$$\mathcal{N} := \{u \in E\backslash\{0\};\ I_0'(u)u = I'(u)u\}$$

é atingido.

Finalmente, nosso último Teorena nesta Seção assegura que pontos de mínimo de Φ sobre o conjunto de Nehari $\mathcal{N}$, são pontos críticos.

Teorema 5.2 *Suponha que todas as condições do teorema 5.1 ocorrem, então se* $u_0 \in \mathcal{N}$ *é tal que* $\Phi(u_0) = \min\limits_{\mathcal{N}} \Phi$*, então* u_0 *é ponto crítico de* Φ *em* E*.*

5.1 Demonstração dos resultados abstratos

5.1.1 Demonstração do Teorema 5.1

Vamos começar demonstrando que $\mathcal{N} \neq \emptyset$. Para isso, vamos mostrar que para cada $w \in E\backslash\{0\}$, texiste um único $t_w > 0$ tal que $t_w w \in \mathcal{N}$.

Para cada $w \in E\backslash\{0\}$ considere $\gamma_w : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definido por

$$\gamma_w(t) = \Phi(tw).$$

Note que γ_w é uma função regular tal que $\gamma_w(0) = \Phi(0)$ e $\gamma_w'(t) = I_0'(tw)w - I'(tw)w$. Por $ii)$, para $t_0 = \rho/\|w\|$, segue que $\gamma_w(t_0) \geq \alpha_0 > \Phi(0)$. Além disso, por $v)$, temos que

$$\lim_{t\to\infty} \gamma_w(t) = -\infty.$$

Então, existe um $t_w > 0$ tal que $\gamma_w'(t_w) = 0$ e consequentemente, $t_w w \in \mathcal{N}$.

Para verificar a unicidade de tal t_w, note que, supondo que $\gamma_w'(t) = \gamma_w'(s) = 0$, para $t, s > 0$, então segue que $\Phi'(tw)w = \Phi'(sw)w$. Logo por $iv)$ obtemos que $t = s$.

Note que para todo $u \in \mathcal{N}$, temos que $ii)$

$$\Phi(u) = \max_{t\geq 0} \Phi(tu) \geq \Phi\left(\frac{\rho}{\|u\|}u\right) \geq \alpha_0 > \Phi(0). \tag{5.1}$$

então existe $(u_n) \subset \mathcal{N}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(u_n) = \inf_{\mathcal{N}} \Phi =: c.$$

Note que existe $\delta > 0$ tal que

$$\|u\| \geq \delta \quad \text{for all } u \in \mathcal{N}. \tag{5.2}$$

De fato, caso contrário existiria $(w_n) \subset \mathcal{N}$ tal que $w_n \to 0$ in E, o que contradiz (5.1).

Demonstraremos que toda sequência minimizante (u_n) é limitada em E. Suponha, por contradição, que $\|u_n\| \to \infty$, quando $n \to \infty$ e seja $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$. Desde que $(v_n) \subset E$ é limitada, a compacidade da imersão $E \hookrightarrow F$ implica que existe $v \in F$ tal que $v_n \to v$ in F, a menos de subsequência. Então segue que $I(v_n) \to I(v)$.

Se $v = 0$, então por $iii)$, para todo $t \geq 0$

$$\begin{aligned} c + o_n(1) &= \Phi(u_n) = \Phi(v_n\|u_n\|) \\ &= \max_{s\geq 0} \Phi(sv_n) \\ &\geq \Phi(tv_n) \\ &\geq t - I(tv_n) \\ &= t + o_n(1), \end{aligned}$$

o qual é uma contradição com o fato que $c \in \mathbb{R}$.

Se $v \neq 0$, então por $v)$

$$o_n(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{c}{\|u_n\|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Phi(u_n)}{\|u_n\|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Phi(v_n\|u_n\|)}{\|u_n\|} = -\infty.$$

Então temos uma contradição.

Portanto, (u_n) é limitada em E e existe $u \in F$ tal que $u_n \to u$ em F, a menos de subsequência. Então, por hipótese, segue que $u \in E$.

Se $u = 0$, então por (5.2), para todo $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} c + o_n(1) &= \Phi(u_n) \\ &= \max_{s\geq 0} \Phi(su_n) \\ &\geq \Phi(tu_n) \\ &\geq t\|u_n\| - I(tu_n) \\ &\geq t\delta - I(tu_n) \\ &= t\delta + o_n(1), \end{aligned}$$

o qual é uma contradição.

Portanto, $u \neq 0$ e seja $t_u > 0$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}$. Então, por $i)$

$$\begin{aligned} c &\leq \Phi(t_u u) \\ &= I_0(t_u u) - I(t_u u) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} I_0(t_u u_n) - \lim_{n\to\infty} I(t_u u_n) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \Phi(t_u u_n) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \Phi(u_n) = c \end{aligned}$$

e então $\Phi(t_u u) = c$ e $t_u u \in \mathcal{N}$, o qual prova o teorema. ■

Agora apresentamos a demonstração do segundo resultado.

5.2 Demonstração do Teorema 5.2

Suponha por contradição que $0 \notin \partial\Phi(u_0)$, então $\beta(u_0) > 0$, onde $\beta(u_0) = \inf\{\|z\|_*;\ z \in \partial\Phi(u_0)\}$, desde que por [10][p. 105], tal ínfimo é atingido, onde a norma dual e o subdiferencial de Φ_0 sào tomados com respeito a E. Desde que $u \mapsto \beta(u)$ ié semicontínuo inferiormente (novamente por [10][p. 105] por exemplo), segue que existe $\kappa > 0$ tal que

$$\beta(u) > \frac{\beta(u_0)}{2} > 0, \quad \forall u \in B_\kappa(u_0). \tag{5.3}$$

Denotemos por $J = \left[1 - \frac{\kappa}{4}, 1 + \frac{\kappa}{4}\right] \subset \mathbb{R}$ and defina $g : J \to E$ by

$$g(t) = tu_0.$$

Denotando por $c := \Phi(u_0) = \inf_{\mathbb{N}} \Phi$, note que

$$\Phi(g(t)) < c, \quad \forall t \neq 1.$$

Além disso, observe que

$$\max\left\{\Phi\left(g\left(1 - \frac{\kappa}{4}\right)\right), \Phi\left(g\left(1 + \frac{\kappa}{4}\right)\right)\right\} = c_0 < c.$$

Usando a versão do Teorema da Deformação para funcionais localmente Lipschit, sem a condição Palais-Smale (see [12][Lemma 2.3]), existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\epsilon < \epsilon_0 := \min\left\{\frac{c-c_0}{2}, \frac{\kappa\beta(u_0)}{16}\right\},$$

e um homeomorfismo $\eta : E \to E$ tal que

i) $\eta(x) = x$ para todo $x \notin \Phi^{-1}([c-\epsilon_0, c+\epsilon_0]) \cap B_\kappa(u_0)$;

ii) $\eta(\Phi_{c+\epsilon} \cap B_{\kappa/2}(u_0)) \subset \Phi_{c-\epsilon}$;

iii) $\Phi(\eta(x)) \le \Phi(x)$, for all $x \in E$,

onde, para $d \in \mathbb{R}$, $\Phi_d = \{u \in E; \Phi(u) \le d\}$.

Definamos agora $h : J \to E$ by $h(t) = \eta(g(t))$ duas funções , $\Psi_0, \Psi_1 : J \to \mathbb{R}$ por

$$\Psi_0(t) = \Phi'(tu_0)u_0$$

e

$$\Psi_1(t) = \frac{1}{t}\Phi'(h(t))h(t).$$

Desde que para $t \in \left\{\left(1-\frac{\kappa}{4}\right), \left(1+\frac{\kappa}{4}\right)\right\}$, $\Phi(g(t)) \le c_0 < c - \epsilon_0$, então $h(t) = \eta(g(t)) = g(t) = tu_0$ for $t \in \left\{\left(1-\frac{\kappa}{4}\right), \left(1+\frac{\kappa}{4}\right)\right\}$. Portanto,

$$\Psi_0(t) = \Psi_1(t), \quad \forall t \in \left\{\left(1-\frac{\kappa}{4}\right), \left(1+\frac{\kappa}{4}\right)\right\}. \tag{5.4}$$

Vamos brevemente justificar que o grau de Brouwer $d(\Psi_0, J, 0)$ é igual a -1. De fato, a prova do Teorema 5.1, segue que $\Psi_0(t) = \gamma'_{u_0}(t)$ é contínuo, estritamente decrescente, $\Psi_0(1-\kappa/4) > 0 > \Psi_0(1+\kappa/4)$ e $t = 1$ é o único ponto em J onde Ψ_0 anula. Desde que não existe informações sobre a regularidade de Ψ_0, para calcular $d(\Psi_0, J, 0)$, aproximaremos Ψ_0 por alguma função $C^1(J, \mathbb{R})$. Considerando uma função estritamente decrescente $\overline{\Psi} \in C^1(J, \mathbb{R})$, tal que $\overline{\Psi}(t-\kappa/4) = \Psi_0(t-\kappa/4)$, $\overline{\Psi}(t+\kappa/4) = \Psi_0(t+\kappa/4)$ e $\overline{\Psi}(1) = 0$, note que pela definição de grau de Brouwer e da invariância por homotopia, $d(\Psi_0, J, 0) = d(\overline{\Psi}, J, 0) = \text{sgn}(\overline{\Psi}'(1)) = -1$.

Desde que $\Psi_0 = \Psi_1$ sobre ∂J e $d(\Psi_0, J, 0) = -1$, pela teoria do grau, $d(\Psi_1, J, 0) = -1$. Então, existe $t \in J$ tal que $h(t) \in \mathcal{N}$. Isto implica que

$$c \le \Phi(h(t)) = \Phi(\eta(g(t))).$$

Mas note que $\Phi(g(t)) < c + \epsilon$ e assim $g(J) \subset B_{\kappa/2}(u_0)$. Ent]ão, por, by ii)

$$\Phi(\eta(g(t))) < c - \epsilon$$

o qual contradiz a última desigualdade. Então o resultado segue. ∎

5.3 Aplicações

5.3.1 Preliminares

Primeiramente introduziremos as funções de variação limitada $BV(\Omega)$. Dizemos que $u \in BV(\Omega)$ é uma função de variação limitada se $u \in L^1(\Omega)$ e sua derivada no sentido das distribuições Du é uma medida vetorial, i.e.,

$$BV(\Omega) = \left\{ u \in L^1(\Omega);\ Du \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N) \right\}.$$

É possível provar que t u pertence a $BV(\Omega)$é equivalente a

$$\int_\Omega |Du| := \sup \left\{ \int_\Omega u \mathrm{div} \phi dx;\ \phi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N), \text{ s.t. } |\phi|_\infty \leq 1 \right\} < +\infty.$$

O espaço $BV(\Omega)$ ié um espaço de Banach quando induzido com a norma

$$\|u\|_{BV(\Omega)} := \int_\Omega |Du| + |u|_1,$$

o qual está imerso continuamente em $L^r(\Omega)$ fpara todo $r \in [1, N/(N-1)]$ e imerso compactamente para $r \in [1, N/(N-1))$ (see [7][Theorems 10.1.3, 10.1.4]).

Devido ao Teorema do traço [7][Theorem 10.2.1] e as imersões contínuas de $BV(\Omega)$ em $L^1(\Omega)$, segue que

$$\|u\| := \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}_{N-1},$$

onde $\mathcal{H}_{N-1}$ denota a usual medida de Hausdorf $(N-1)-$dimensional em $BV(\Omega)$ uma norma equivalente, o qual usaremos em $BV(\Omega)$ daqui em diante.

Pode-se provar que $I_0 : BV(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_0(u) = \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}_{N-1} \tag{5.5}$$

é um funcional convexo contínuo e Lipschitz em $BV(\Omega)$. De fato, note que pela desigualdade de Poincaré no espaço $BV(\Omega)$ (see [21] por examplo) e das imersões contínuas $BV(\Omega) \hookrightarrow L^1(\partial\Omega)$, segue que I_0 é uma norma em $BV(\Omega)$, equivalente a norma usual.

Segue que $BV(\Omega)$ também é um *reticulado* (ver [2] por exemplo), i.e., se $u, v \in BV(\Omega)$, então $\max\{u,v\}, \min\{u,v\} \in BV(\Omega)$ e tanbém

$$I_0(\max\{u,v\}) + I_0(\min\{u,v\}) \leq I_0(u) + I_0(v), \quad \forall u, v \in BV(\Omega). \tag{5.6}$$

Por uma medida vetorial de Radon $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, denotamos por $\mu = \mu^a + \mu^s$ a ususal decomposição do Teorema de Radon Nikodym, onde μ^a and μ^s são, respectivamente, a part absolutamente contínua e a parte singular com respeito a medida $N-$dimensional de Lebesgue $\mathcal{L}^N$. Denotaremos por $|\mu|$, o valor absoluto de μ, a medida escalar de Radon definida como em [7][pg. 125]. Por $\frac{d\mu}{d|\mu|}(x)$ denotamos a usal derivada de Lebesgue de μ com respeito a $|\mu|$, dada por

$$\frac{d\mu}{d|\mu|}(x) = \limsup_{r\to 0} \frac{\mu(B_r(x))}{|\mu|(B_r(x))}.$$

Para observar as propriedades de diferenciabilidade (ou a falta dela) of I_0, vamos relembrar o resultado de Anzellotti em [3][Theorem 2.4]. Por $g : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, definimos

$$g^0(x,p) = \lim_{t\to 0^+} g\left(x, \frac{p}{t}\right) t.$$

Suponha que g é diferenciável em p para todo $x \in \Omega$, $p \in \mathbb{R}^N$ e $g^0(x,p)$ é diferenciável para todo $x \in \Omega$, $p \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ e também existe $M > 0$ stal que

$$|g_p(x,p)| \leq M, \quad |g_p^0(x,p)| \leq M.$$

Então $\mathcal{J}_g : BV(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\mathcal{J}_g(u) = \int_\Omega g(x, Du) := \int_\Omega g(x, (Du)^a(x))dx + \int_\Omega g^0\left(x, \frac{Du}{|Du|}(x)\right)|Du|^s$$

é diferenciável no ponto $u \in BV(\Omega)$ na direção $v \in BV(\Omega)$ se, e somente se, $|Dv|^s$] é absolutamente contínua com respeito a $|Du|^s$, e em tal caso temos

$$\mathcal{J}_g'(u)v = \int_\Omega g_p(x, (Du)^a(x))(Dv)^a(x)dx + \int_\Omega g_p^0\left(x, \frac{Du}{|Du|}(x)\right)\frac{Dv}{|Dv|}(x)|Dv|^s.$$

Desde que

$$I_0(u) = \mathcal{J}_g(u) + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}_{N-1}$$

com $g(x,p) = g^0(x,p) = |p|$, temos que, dado $u \in BV(\Omega)$, $I_0'(u)v$ está bem definido para $v \in BV(\Omega)$ tal que $|Dv|^s$ ié absolutamente contínuo com respeito a $|Du|^s$ e $v(x) = 0$, $\mathcal{H}_{N-1}-$ q.t.p sobre o conjunto $\{x \in \partial\Omega;\, u(x) = 0\}$ e temos que

$$I_0'(u)v = \int_\Omega \frac{(Du)^a(Dv)^a}{|(Du)^a|}dx + \int_\Omega \frac{Du}{|Du|}(x)\frac{Dv}{|Dv|}(x)|(Dv)|^s + \int_{\partial\Omega} \mathrm{sgn}(u)v d\mathcal{H}_{N-1}. \tag{5.7}$$

Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta_1 u &= f(u) \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.8}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave com $N \geq 2$.

Agora vamos dar sentido ao conceito de solução que estamos considerando nesse trabalho.

Considerando (5.8) e o funcional energia associado $\Phi : BV(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi(u) = I_0(u) - I(u),$$

onde

$$I(u) = \int_\Omega F(u)dx. \tag{5.9}$$

Se $I \in C^1(BV(\Omega))$ e I_0 é Lipschitz contínuo, dizemos que $u_0 \in BV(\Omega)$ é solução de (5.8) se $0 \in \partial\Phi(u_0)$, onde $\partial\Phi(u_0)$ denota o gradiente generalizado de Φ in u_0, como definido em [10]. Segue que isto é equivalente a $I'(u_0) \in \partial I_0(u_0)$ e desde que I_0 é convexo, isto é escrito como

$$I_0(v) - I_0(u_0) \geq I'(u_0)(v - u_0), \quad \forall v \in BV(\Omega). \tag{5.10}$$

Portanto, para todo $u_0 \in BV(\Omega)$ tal que (5.10) ocorre, dizemos que $u_0 \in BV(\Omega)$ é uma solutção de variação limitada de (5.8).

Na segunda aplicação, vamos considerar o problema envolvendo o operador $1-$biharmônico dado por

$$\begin{cases} \Delta_1^2 u = f(u) \quad in \;\; \Omega, \\ u = \dfrac{\Delta u}{|\Delta u|} = 0 \;\; on \;\; \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.11}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio regular com $N \geq 2$. Considere agora o espaço

$$BL_0(\Omega) = \left\{ u \in W_0^{1,1}(\Omega) : \int_\Omega |\Delta u| < +\infty \right\},$$

com a norma

$$\|u\|_0 = |u|_1 + |\nabla u|_1 + \int_\Omega |\Delta u|.$$

Da desigualdade de Poincaré em $BV(\Omega)$ (see [21][Proposition 2]) e o resultado em [6, Theorem 1.2 and Proposition 2.1] de H. Brézis e A. Ponce, podemos definir uma norma em $BL_0(\Omega)$ dado por

$$\|u\| = \int_\Omega |\Delta u| \quad \text{para todo } u \in BL_0(\Omega), \tag{5.12}$$

o qual é equivalente a $\|\cdot\|_0$. De fato, se $u \in BL_0(\Omega)$, desde que $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$, então $\int_\Omega |Du| = \int_\Omega |\nabla u| dx$. Assim, segue que

$$\begin{aligned} \|u\|_0 &\leq (C+1)|\nabla u|_1 + \int_\Omega |\Delta u| \\ &\leq C_1 \int_\Omega |\Delta u|. \end{aligned}$$

Note que o espaço $BL_0(\Omega)$ tem todas as propriedades que $BV(\Omega)$ tem. Por exemplo, pode-se provar que (ver [24]) que $BL_0(\Omega)$ é um espaço de Banach o qual está imerso continuamente em $L^r(\Omega)$ para todo $r \in [1, N/(N-1)]$ (esta imersão sendo compacta para $r \in [1, N/(N-1))$). A norma $\|\cdot\|$ dada em (5.12) é semicontínua inferiormente na topologia de $L^r(\Omega)$ para $r \in [1, N/(N-1)]$.

Em analogia com a primeira aplicação, o funcional energia associado de (5.11) é dado por

$$\Phi(u) = \tilde{I}_0(u) - I(u),$$

onde

$$\tilde{I}_0(u) = \int_\Omega |\Delta u| \tag{5.13}$$

e I é dado por (5.9). Como na primeira aplicação, Φ é escrito como diferença entre um funcional localmente Lipschitz e um funcional $C^1(BL_0(\Omega))$, de tal maneira tal que (5.11) está sendo considerado como uma função $u_0 \in BL_0(\Omega)$ tal que

$$\tilde{I}_0(v) - \tilde{I}_0(u_0) \geq I'(u_0)(v - u_0), \quad \forall v \in BL_0(\Omega). \tag{5.14}$$

5.3.2 Um problema envolvendo o operador $1-$Lapalciano

Considere o problema de encontrar pontos críticos do funcional $\Phi : BV(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi(u) = \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}_{N-1} - \int_\Omega F(u)dx,$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio regular com $N \geq 2$, $F(t) := \displaystyle\int_0^t f(s)ds$ e f satisfaz as seguintes hipóteses:

(f_1) $f \in C^0(\mathbb{R})$;

(f_2) $f(0) = 0$;

(f_3) existem constantes $c_1, c_2 > 0$ e $p \in (1, 1^*)$ tais que

$$|f(s)| \leq c_1 + c_2|s|^{p-1}, \quad s \in \mathbb{R};$$

(f_4) $\displaystyle\lim_{t \to \pm\infty} \frac{F(t)}{t} = \pm\infty$;

(f_5) f é crescente para $s \in \mathbb{R}$.

Note que pontos críticos de Φ são soluções do problema

$$\begin{cases} -\Delta_1 u &= f(u) \quad \text{in } \Omega, \\ \quad u &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.15}$$

onde $\Delta_1 u = \operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$.

Considere os funcionais $I_0, I : BV(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por (5.5) e (5.9), respectivamente e defina $\Phi : BV(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$\Phi(u) = I_0(u) - I(u).$$

Claramente o operador Δ_1 é altamente singular e algumas palavras acerca dessa imprecisa maneira de definir são necessárias. O primeiro passo é estender os funcionais I_0, I e Φ para $L^{1^*}(\Omega)$, definindo $\overline{I_0}, \overline{I}, \overline{\Phi} : L^{1^*}(\Omega) \to \mathbb{R}$, onde

$$\overline{I_0}(u) = \begin{cases} I_0(u), & \text{se } u \in BV(\Omega), \\ +\infty, & \text{se } u \in L^{1^*}(\Omega) \backslash BV(\Omega), \end{cases}$$

$$\overline{I}(u) = \int_\Omega F(u)dx$$

e $\overline{\Phi} = \overline{I_0} - \overline{I}$. Não é difícil ver que $\overline{I}$ pertence a $C^1(L^{1^*}(\Omega))$ e que $\overline{I_0}$ é convexo e semicontínuo inferiormente em $L^{1^*}(\Omega)$. Portanto, o subdiferencial de $\overline{I_0}$ está bem definido. O seguinte resultado é crucial para obter uma equação de Euler-Lagrange tal que as soluções são pontos críticos de Φ.

Lema 5.1 *Se $u \in BV(\Omega)$ é tal que $0 \in \partial\Phi(u)$, então $0 \in \partial\overline{\Phi}(u)$.*

Demonstração. Suponha que $u \in BV(\Omega)$ é tal que $0 \in \partial\Phi(u)$. Então u satisfaz (5.10). Vamos verificar que

$$\overline{I_0}(v) - \overline{I_0}(u) \geq \overline{I}'(u)(v-u), \quad \forall v \in L^{1^*}(\Omega).$$

Para $v \in L^{1^*}(\Omega)$, note que:

- se $v \in BV(\Omega) \cap L^{1^*}(\Omega)$, então

$$\begin{aligned} \overline{I_0}(v) - \overline{I_0}(u) &= I_0(v) - I_0(u) \\ &\geq I'(u)(v-u) \\ &= \int_\Omega f(u)(v-u)dx \\ &= \overline{I}'(u)(v-u); \end{aligned}$$

- se $u \in L^{1^*}(\Omega) \backslash BV(\Omega)$, desde que $\overline{I_0}(v) = +\infty$ and $\overline{I_0}(u) < +\infty$, segue que

$$\begin{aligned} \overline{I_0}(v) - \overline{I_0}(u) &= +\infty \\ &\geq \overline{I}'(u)(v-u). \end{aligned}$$

Portanto o resultado segue. ■

Suponha que $u \in BV(\Omega)$ é uma solução de variação limitada (5.15). Desde que $0 \in \partial\Phi(u)$, do último resultado segue que $0 \in \partial\overline{\Phi}(u)$. Desde que $\overline{I_0}$ é convexo e $\overline{I}$ é regular, segue que $\overline{I}'(u) \in \partial\overline{I_0}(u)$. De [16][Proposição 4.23, pg. 529], segue que existe $z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que $|z|_\infty \leq 1$,

$$-\text{div}z = f(u) \quad \text{in } L^N(\Omega) \tag{5.16}$$

e

$$-\int_\Omega u\mathrm{div}z dx = \int_\Omega |Du|, \tag{5.17}$$

onde a divergência em (5.16) tem que ser entendida no sentido distribucional. Portanto, segue que (5.16) e (5.17) tal que u satisfiaz

$$\begin{cases} \exists z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N),\ |z|_\infty \leq 1,\ \mathrm{div}z \in L^N(\Omega), \\ -\int_\Omega u \,\mathrm{div}\, z dx = \int_\Omega |Du|, \\ -\mathrm{div}z = f(u), \quad \text{a.e. in } \Omega. \end{cases} \tag{5.18}$$

Portanto, (5.18) é a versão precisa de (5.15).

Note que I_0 é contíno Lipschitz em $BV(\Omega)$ e $I \in C^1(BV(\Omega))$. Portanto, $BV(\Omega)$ está imerso compactamente em $L^p(\Omega)$, p como em (f_3), $I(0) = 0$, para todo $u \in BV(\Omega)$ e $s \in \mathbb{R}$, por (5.7) temos que

$$\begin{aligned} I_0'(su)u &= \lim_{t\to 0} \frac{I_0(su+tu) - I_0(su)}{t} \\ &= \int_\Omega \frac{(D(su))^a (Du)^a}{|(D(su))^a|} dx + \int_\Omega \frac{D(su)}{|D(su)|}(x)\frac{Du}{|Du|}(x)|Du|^s + \int_{\partial\Omega} \mathrm{sgn}(su)u d\mathcal{H}_{N-1} \\ &= \int_\Omega |(Du)^a| dx + \int_\Omega |(Du)^s| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}_{N-1} \end{aligned}$$

e então $I_0'(u)u = I_0(u)$, para todo $u \in BV(\Omega)$.

Definimos o conjunto de Nehari por

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \{u \in BV(\Omega)\backslash\{0\};\ I_0'(u)u = I'(u)u\} \\ &= \left\{u \in BV(\Omega)\backslash\{0\};\ \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}_{N-1} = \int_\Omega f(u)u dx\right\}. \end{aligned}$$

O seguinte resultado garante que todas os pontos críticos não triviais de Φ pertencem a $\mathcal{N}$.

Lema 5.2 *Se $u_0 \in BV(\Omega)$, $u_0 \neq 0$ e $0 \in \partial\Phi(u_0)$, então $u \in \mathcal{N}$.*

Demonstração. Se $0 \in \partial\Phi(u_0)$, então

$$I_0(v) - I_0(u_0) \geq \int_\Omega f(u_0)(v - u_0) dx, \quad \forall v \in BV(\Omega).$$

Para $t > 0$, considerando $v = u_0 + tu_0$ na última expressão e calculando o limite quando $t \to 0^+$ temos

$$I_0(u_0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{I_0(u_0 + tu_0) - I_0(u_0)}{t} \geq \int_\Omega f(u_0)u_0 dx.$$

Fazendo o mesmo para $t < 0$ temos

$$I_0(u_0) = \lim_{t \to 0^-} \frac{I_0(u_0 + tu_0) - I_0(u_0)}{t} \leq \int_\Omega f(u_0)u_0 dx.$$

Portanto, $u_0 \in \mathcal{N}$. ■

Vamos mostrar que Φ todas as condições do Teorema 5.1.

É bem conhecido que I_0 satisfaz $i)$ do Teorema 5.1.

Por $ii)$, primeiro de tudo note que (f_2) e (f_3) implicam que para todo $\epsilon > 0$, existe C_ϵ tal que

$$|F(s)| \leq \epsilon|s| + C_\epsilon|s|^p, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}. \tag{5.19}$$

Então, a imersão de $BV(\Omega)$ e (5.19) implicam que

$$\begin{aligned} \Phi(u) &\geq (1 - C\epsilon)\|u\| - CC_\epsilon\|u\|^p \\ &= \|u\|(1 - \epsilon - CC_\epsilon\|u\|^{p-1}) \\ &= \rho(1 - \epsilon - CC_\epsilon\rho^{p-1}) =: \alpha_0 > 0 = \Phi(0), \end{aligned}$$

onde $\|u\| = \rho$ e ϵ, ρ são positivas e suficientes pequenas, e a constante $C > 0$ é grande mais que a melhor constante tde imersão de $BV(\Omega)$ em $L^1(\Omega)$ e $L^p(\Omega)$.

Da definição de Φ segue $iii)$, desde que neste caso temos a igualdade satisfeita.

Para verificar $iv)$, note que

$$t \mapsto I'(tu)u = \int_\Omega f(tu)udx$$

é crescente em $(0, +\infty)$ by (f_5). Considerando que, por (5.7), $t \mapsto I_0'(tu)u = I_0(u)$ é constante, segue que $t \mapsto \Phi'(tu)u$ é uma função decrescente em $(0, +\infty)$.

Finalmente, para verificar $v)$, seja $(v_n) \subset BV(\Omega)$ e $v \in L^p(\Omega)\backslash\{0\}$ tal que $v_n \to v$ em $L^p(\Omega)$. Desde que $\Phi(u) = \|u\| - \int_\Omega F(u)dx$, it is enough to prove that

$$\lim_{t \to \infty} \int_\Omega \frac{F(tv_n)}{t} = +\infty \quad \text{uniformemente em } n \in \mathbb{N}.$$

Seja $\Gamma = \{x \in \Omega;\ v(x) \neq 0\}$ e note que $|\Gamma| > 0$. Então pelo Lema de Fatou, segue que, para todo $t > 0$,

$$\int_\Gamma \frac{F(tv)}{t} dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{F(tv_n)}{t} dx.$$

Então, por (f_4) temos que

$$\liminf_{t\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{F(tv_n)}{t} dx \geq \liminf_{t\to\infty} \int_\Gamma \frac{F(tv)}{t} dx = +\infty.$$

Mas isto significa que para todo $M > 0$, existe $t_0 > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_\Omega \frac{F(tv_n)}{t} dx \geq M, \quad \text{para todo } t > t_0 \text{ e } n \geq n_0,$$

o que prova v).

Agora, desde que todas as condições do teorema **??** são satisfeita, segue a existência de $u_0 \in \mathcal{N}$ tal que

$$\Phi(u_0) = \inf_{v\in\mathcal{N}} \Phi(v).$$

Além disso, pelo Teorema 5.1, segue que u_0 ié um ponto crítico de Φ e então, uma solução ground state e de variação limitada de (5.15).

5.3.3 Um problema envolvendo o operador 1-biharmonico

Nesta Seção estudaremos o problema

$$\begin{cases} \Delta_1^2 u = f(u) & in \ \ \Omega, \\ u = \dfrac{\Delta u}{|\Delta u|} = 0 & on \ \ \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio regular, $N \geq 2$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é assumido satisfazer as hipóteses (f_1) - (f_5), como na primeira aplicação.

Vamos considerar $\tilde{I}_0, I : BL_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por (5.13) e (5.9), respectivamente e definamos $\Phi : BL_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$\Phi(u) = \tilde{I}_0(u) - I(u).$$

Note que $\tilde{I}_0$ é contínuo Lipschitz em $BL_0(\Omega)$ e $I \in C^1(BL_0(\Omega))$. Além disso, $BL_0(\Omega)$ é compactamente imerso em $L^r(\Omega)$ para $r \in [1, N/(N-1))$ and $I(0) = 0$.

Note que para todo l $u \in BL_0(\Omega)$, de uma maneira similar como em (5.7), é possível demonstrar que

$$\tilde{I}_0'(u)v = \int_\Omega \frac{(\Delta u)^a(\Delta v)^a}{|(\Delta u)^a|}dx + \int_\Omega \frac{\Delta u}{|\Delta u|}(x)\frac{\Delta v}{|\Delta v|}(x)|(\Delta v)|^s. \tag{5.20}$$

Definimos agora o conjunto de Nehari por

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \left\{u \in BL_0(\Omega)\backslash\{0\};\ \tilde{I}_0'(u)u = I'(u)u\right\} \\ &= \left\{u \in BL_0(\Omega)\backslash\{0\};\ \int_\Omega |\Delta u| = \int_\Omega f(u)udx\right\} \end{aligned}$$

No próximo resultado afirmamos que pontos críticos não triviais de Φ pertencem a $\mathcal{N}$. A prova é totalmente análoga ao Lema 5.2.

Lema 5.3 *Se $u_0 \in BL_0(\Omega)$, $u_0 \neq 0$ e $0 \in \partial\Phi(u_0)$, então $u \in \mathcal{N}$.*

Como no caso da Seção 5.3.2, se provarmos que o ínfimo de Φ in $\mathcal{N}$ é atingido e é um ponto crítico, então teremos um ponto crítico de energia mínima ou aimnda uma solução ground state bounded de variação limitada de (5.11).

Uma vez mais vamos verificar todas as condições do Teorema 5.1 são satisfeitas. Como na primeira aplicação, é bem conhecido (see [24]) que $\tilde{I}_0$ satisfiaz *i)* no Teorema 5.1.

Para *ii)*, *iii)*, *iv)* e *v)*, todos os cálculos são absolutamente os mesmos da Seção 5.3.2 e será omitido.

Agora, desde todas as condições do Teorema 5.1 são satisfeitos, segue que existe $u_0 \in \mathcal{N}$ tal que

$$\Phi(u_0) = \inf_{v \in \mathcal{N}} \Phi(v).$$

Além disso, do Teorema 5.2, segue que u_0 é ponto crítico de Φ e então , uma ground state de variação limitada de (5.11).

Novamente, como na primeira aplicação, usando os mesmos argumentos, é possível demonstrar quena solução ground state $u_0 \in BL_0(\Omega)$ de (5.11) de fato satisfaz o seguinte problema , o qual é a precisa versão de (5.11),

$$\begin{cases} \exists\, z \in W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega),\ |z|_\infty \leq 1,\ \Delta z \in L^N(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega u\Delta z dx = \int_\Omega |\Delta u|, \\ \Delta z = f(u), \quad \text{a.e. in } \Omega. \end{cases}$$

Note que a condição de fronteira $\dfrac{\Delta u}{|\Delta u|} = 0$ sobre $\partial\Omega$ pode ser vista com z, desde que $z \in W_0^{1,1}(\Omega)$ implica que $z = 0$ sobre $\partial\Omega$ ino sentido do traço..

Bibliografia

[1] C. O. Alves and M. A S. Souto, *Existence of least energy nodal solution for a Schrödinger-Poisson system in bounded domains*, Z. Angew. Math. Phys., 65 (2014), 1153-1166.

[2] L. Ambrosio, S. Mortola and V. Tortorelli, *Functionals with linear growth defined on vector valued BV functions*, J. Math. Pures Appl. 70, 269 - 323, (1991).

[3] G. Anzellotti, *The Euler equation for functionals with linear growth*, Trans. Amer. Math. Soc., 290, No. 2, 483 - 501 (1985).

[4] A. Arosio, On the nonlinear Timoshenko-Kirchoff beam equation, Chin. Ann. Math., 20 (1999), 495-506.

[5] A. Arosio, A geometrical nonlinear correction to the Timoshenko beam equation, Nonlinear Anal. 47(2001), 729-740.

[6] H. Brezis and A. Ponce, *Kato's inequality up to the boundary*, Commun. Contemp. Math. 10, No. 6, 1217 - 1241, (2008).

[7] H. Attouch, G. Buttazzo and G. Michaille, *Variational analysis in Sobolev and BV spaces: applications to PDEs and optimization*, MPS-SIAM, Philadelphia (2006).

[8] T. Bartsch, T. Weth and M. Willem, *Partial symmetry of least energy nodal solution to some variational problems*, J. Anal. Math. 1, (2005)1-18.

[9] A. Castro, J. Cossio and J. Neuberger, *A sign-changing solution for a superlinear Dirichlet problem*, Rocky Mountain J. Math. 27, 4 (1997), 1041-1053.

[10] K. Chang, *Variational methods for non-differentiable functionals and their applications to partial differential equations*, J. Math. Anal. Appl., 80, 102 - 129 (1981).

[11] D. G. Costa, Tópicos em Ánalise não linear, Escola Latino-Americano de Matemática, 1986.

[12] G. Dai, *Non-smooth version of fountain theorem and its application to a Dirichlet-type differential inclusion problem*, Nonlinear Anal., 72, 1454-1461 (2010).

[13] P. Drabek and S.I. Pohozaev, Positive solutions for the p-Laplacian: application of the Fibering method, Proc. Royal Soc. Edinb. A 127 (1997), 703-726.

[14] G. M. Figueiredo and M. T. O. Pimenta, Nehari method for locally Lipsctz functionals with examples in problems in the space of bounded variation functions, preprint 2016.

[15] G. M. Figueiredo and H. Ramos, Ground states of elliptic problems involving non homogeneous operators, to appear in Indiana Univ. Math. J. in 2015.

[16] B. Kawohl and F. Schuricht, *Dirichlet problems for the 1-Laplace operator, including the eigenvalue problem*, Communications in Contemporary Mathematics, 9, No 4, 515 - 543 (2007).

[17] G. Kirchhoff, Mechanik, Teubner,Leipzig, 1883.

[18] Z. Liu and Z.Q. Wang, On the Ambrosetti-Rabinowitz superlinear condition, Adv. Nonl. Stud. 4 (2004), 563-574.

[19] C. He and G. Li, The regularity of weak solutions to nonlinear scalar field elliptic equations containing $p\&q$-Laplacians, Ann. Acad. Scientiarum Fennicae, 33(2008), 337-371.

[20] G. Li and X. Liang, The existence of nontrivial solutions to nonlinear elliptic equation of $p-q$-Laplacian type on $\mathbb{R}^N$, Nonl. Analysis, 71(2009) 2316-2334.

[21] C. Miranda, *Un' osservazione su un teorema di Brouwer*, Boll. Un. Mat. Ital., 3 (1940) 5-7.

[22] Z. Nehari, On a class of nonlinear second-order differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 101-123.

[23] Z. Nehari, Characteristic values associated with a class of non-linear second-order dfferential equations, Acta Math. 105 (1961), 141-175.

[24] E. Parini, B. Ruf and C. Tarsi, *The eigenvalue problem for the* $1-$*biharmonic problem*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 13, No. 5, 307 - 322, (2014).

[25] A. Szulkin and T. Weth, The method of Nehari manifold, Handbook of Nonconvex Analysis and Applications. D.Y. Gao and D. Montreanu eds., International Press, Boston, (2010)597-632.

[26] M. Willem, Minimax Theorems, Birkhäuser, 1996.

[27] M. Wu and Z. Yang, A class of $p-q$-Laplacian type equation with potentials eigenvalue problem in $\mathbb{R}^N$, BVP (2009), ID 185319.