# Anais do XI ENAMA


**Comissão Organizadora**

Abiel Macedo - UFG
Edcarlos da Silva - UFG
Jesus da Mota - UFG
Lidiane Lima - UFG
Ronaldo Gardia - UFG
Durval Tonon - UFG
Rodrigo Euzébio - UFG
Sandra Malta - LNCC


**Home web:** `http://www.enama.org/`


## Realização: Instituto de Matemática e Estatatística - IME - UFG

**Apoio:**

O ENAMA é um encontro científico anual com propósito de criar um fórum de debates entre alunos, professores e pesquisadores de instituições de ensino e pesquisa, tendo como áreas de interesse: Análise Funcional, Análise Numérica, Equações Diferenciais Parciais, Ordinárias e Funcionais.

**Home web:** `http://www.enama.org/`

O XI ENAMA é uma realização Instituto de Matemática e Estatatística - IME da Universidade Federal de Goiás -UFC. O evento ocorrerá no Centro de Eventos Professor Ricardo Freua Bufáiçal no Campus Samambaia Goiânia - GO.

Os organizadores do XI ENAMA expressam sua gratidão aos órgãos e instituições que apoiaram e tornaram possível a realização do evento: IME - UFG, FAPEG e INCTMat.

## A Comissão Organizadora

Abiel Macedo - UFG
Edcarlos da Silva - UFG
Jesus da Mota - UFG
Lidiane Lima - UFG
Ronaldo Gardia - UFG
Durval Tonon - UFG
Rodrigo Euzébio - UFG
Sandra Malta - LNCC

## A Comissão Científica

Alexandre Madureira - LNCC
Giovany Malcher Figueiredo - UFPA
Juan A. Soriano - UEM
Márcia Federson - USP - SC
Marco Aurélio Souto - UFCG
Pablo Braz e Silva - UFPE
Valdir Menegatto - USP - SC
Vinícius Vieira Fávaro - UFU

**ENAMA 2017**

**ANAIS DO XI ENAMA**

**08 a 10 de Novembro 2017**

# Conteúdo

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** 7–8

# ON A QUASILINEAR SCHRÖDINGER-POISSON SYSTEM

GIOVANY M. FIGUEIREDO[1,†] & GAETANO SICILIANO[2,‡].

[1]Departamento de Matemática - Universidade de Brasilia, Brazil, [2]Instituto de Matemática e Estatística - Universidade São Paulo, Brazil.

[†]giovany@unb.br, [‡]sicilian@ime.usp.br

**Abstract**

We consider a quasilinear Schrödinger-Poisson system in $\mathbb{R}^3$ under a critical nonlinearity and depending on a parameter $\varepsilon > 0$. We prove existence of solutions and study the behaviour whenever $\varepsilon$ tend to zero, recovering a solution of the classical Schrödinger-Poisson system.

## 1 Introduction

In the recent papers [2, 4] Kavian, Benmlih, Illner and Lange have attracted the attention on a new kind of elliptic system, which was already known in the physical literature: the *quasi-linear Schrödinger-Poisson system*, (see [1] where the authors proposed and discussed this new model from a physical point of view).

The existing literature on this problem is restricted to very few papers, in contrast to the literature concerning the well known and "classical" Schrödinger-Poisson system. The advantage of working with the classical Poisson equation is that the solution is explicitly given by the convolution $\phi^{\text{Poiss}}(u) = |\cdot|^{-1} * u^2$ (up to a multiplicative factor) so that many good properties of the solution are known; in particular the homogeneity $\phi^{\text{Poiss}}(tu) = t^2\phi^{\text{Poiss}}(u), t \in \mathbb{R}$. As a matter of fact, the main difficult dealing with the quasilinear Poisson equation of type

$$-\Delta\phi - \Delta_4\phi = u^2$$

is due exactly to the lack of good properties for the solution $\phi$.

Here we consider a system where the Schrödinger equation has a critical nonlinearity and the electrostatic potential satisfy a quasilinear equation. More specifically, we are concerning here with the following system

$$\begin{cases} -\Delta u + u + \phi u = \lambda f(x,u) + |u|^{2^*-2}u & \text{in } \mathbb{R}^3, \\ -\Delta\phi - \varepsilon^4\Delta_4\phi = u^2 & \text{in } \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{$P_{\lambda,\varepsilon}$}$$

where $\lambda > 0$ and $\varepsilon > 0$ are parameters, $2^* = 6$ is the critical Sobolev exponent in dimension 3, $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous function that satisfies the following assumptions

1. $f(x,t) = 0$ for $t \leq 0$,
2. $\lim_{t\to 0} \dfrac{f(x,t)}{t} = 0$, uniformly on $x \in \mathbb{R}^3$,
3. there exists $q \in (2, 2^*)$ verifying $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{f(x,t)}{t^{q-1}} = 0$ uniformly on $x \in \mathbb{R}^3$,
4. there exists $\theta \in (4, 2^*)$ such that

$$0 < \theta F(x,t) = \theta \int_0^t f(x,s)ds \leq tf(x,t), \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^3 \text{ and } t > 0.$$

## 2 Main results

The results we obtain are the following.

**Theorem 2.1.** *Assume that conditions* (1)-(4) *on* $f$ *hold. Then, there exists* $\lambda^* > 0$*, such that*

$$\forall \lambda \geq \lambda^*, \varepsilon > 0 : \textit{problem } (P_\varepsilon) \textit{ admit a solution } (u_{\lambda,\varepsilon}, \phi_{\lambda,\varepsilon}) \in H^1(\mathbb{R}^3) \times \Big(D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \cap D^{1,4}(\mathbb{R}^3)\Big).$$

*Moreover* $\phi_{\lambda,\varepsilon}, u_{\lambda,\varepsilon}$ *are nonnegative and for every fixed* $\varepsilon > 0$*:*

1. $\lim_{\lambda\to+\infty} \|u_{\lambda,\varepsilon}\|_{H^1} = 0$,
2. $\lim_{\lambda\to+\infty} \|\phi_{\lambda,\varepsilon}\|_{D^{1,2}\cap D^{1,4}} = 0$,
3. $\lim_{\lambda\to+\infty} |\phi_{\lambda,\varepsilon}|_\infty = 0$.

We study also the behaviour with respect to $\varepsilon$ of the solutions given in Theorem 2.1, indeed we prove they converge to the solution of the Schrödinger-Poisson system.

**Theorem 2.2.** *Assume that conditions* (1)-(4) *hold. Let* $\lambda^* > 0$ *be the one given in Theorem 2.1 and* $\overline{\lambda} \geq \lambda^*$ *be fixed. Let* $\{(u_{\overline{\lambda},\varepsilon}, \phi_{\overline{\lambda},\varepsilon})\}_{\varepsilon>0}$ *be the solutions given above in correspondence of such fixed* $\overline{\lambda}$*. Then*

1. $\lim_{\varepsilon\to0^+} u_{\overline{\lambda},\varepsilon} = u_{\overline{\lambda},0}$ *in* $H^1(\mathbb{R}^3)$,
2. $\lim_{\varepsilon\to0^+} \phi_{\overline{\lambda},\varepsilon} = \phi_{\overline{\lambda},0}$ *in* $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$,

*where* $(u_{\overline{\lambda},0}, \phi_{\overline{\lambda},0}) \in H^1(\mathbb{R}^3) \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ *is a positive solution of the Schrödinger-Poisson system*

$$\begin{cases} -\Delta u + u + \phi u = \overline{\lambda} f(x,u) + |u|^{2^*-2}u & \textit{in } \mathbb{R}^3, \\ -\Delta \phi = u^2 & \textit{in } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

The important point of Theorem 2.1 is the vanishing of the solutions whenever $\lambda$ is larger and larger. Moreover, thanks to a Moser iteration scheme, we get $u_{\lambda,\varepsilon}, \phi_{\lambda,\varepsilon} \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$. This allow us to treat also the supercritical case, that is when $p > 2^*$ and indeed we have similar results.

Our approach is variational; indeed a suitable functional can be defined whose critical points are exactly the solutions of $(P_\varepsilon)$. Then suitable estimates permits to pass to the limit in $\varepsilon$.

In proving our results, we have to manage with various difficulties. Firstly, the fact that the problem is in the whole $\mathbb{R}^3$ and no symmetry conditions on the solutions and on the datum $f$ are imposed; even more we are in the critical case, then there is a clear lack of compactness. We are able to overcome this difficulty thanks to the Concentration Compactness of Lions and taking advantage of the parameter $\lambda$.

Secondly, we have to face with the fact that the solution in the second equation of $(P_\varepsilon)$, which is quasilinear, has not an explicit formula, neither has homogeneity properties. To circumvent this last difficulty, a suitable truncation is used in front of the "bad" part of the functional.

### References


[1] N. Akhmediev, A. Ankiewicz and J.M. Soto-Crespo, *Does the nonlinear Schrödinger equation correctly describe beam equation?* Optics Letters **18** (1993), 411- 413.

[2] K. Benmilh, O. Kavian, *Existence and asymptotic behaviour of standing waves for quasilinear Schrödinger-Poisson systems in* $\mathbb{R}^3$ , Ann. I. H. Poincaré - AN **25** (2008) 449–470.

[3] R. Illner, O. Kavian and H. Lange, *Stationary Solutions of Quasi-Linear Schrödinger-Poisson System,* Journal Diff. Equations **145** (1998) 1-16.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *9–10*

# UMA TEORIA DE REGULARIDADE PARA EQUAÇÕES DE SEGUNDA ORDEM EM TEMPO DISCRETO

FILIPE DANTAS[1,†]

[1]Departamento de Matemática, UFS, SE, Brasil

[†]filipeddsmat@gmail.com

**Abstract**

Usando técnicas provenientes da Análise de Fourier, obtemos uma caracterização para o problema de $\ell^p$-regularidade maximal ($p \in (1,\infty)$) de um par $(A,B)$ de operadores lineares limitados num espaço de Banach via análise espectral e $R$-limitação.

## 1 Introdução

Seja $X$ um espaço de Banach complexo e denotemos por $B(X)$ o espaço de Banach de todos os operadores lineares limitados em $X$. Para $p \in (1,\infty)$, consideremos o espaço de Banach $(\ell^p(X), ||\cdot||_p)$ de todas as sequências $u : \mathbb{Z}^+ \to X$ tais que $||u||_p := [\sum_{n=0}^{\infty} ||u_n||^p]^{\frac{1}{p}} < \infty$. O conceito de $\ell^p$-regularidade maximal de operadores lineares limitados foi introduzido por S. Blunck em [1]: dizemos que $A \in B(X)$ possui $\ell^p$-regularidade maximal se existir $C > 0$ tal que $||\Delta u_\bullet(0,f)||_p \leq C||f||_p$, para todo $f \in \ell^p(X)$. Aqui, $u_\bullet(x,f)$ denota a solução de

$$\begin{cases} u_{n+1} &= Au_n + f_n, \;\; n \in \mathbb{Z}^+ \\ u_0 &= x \in X \end{cases} \tag{1}$$

e $(\Delta v)_n = v_{n+1} - v_n$. Em outras palavras, o problema de $\ell^p$-regularidade maximal de $A \in B(X)$ consiste em verificar se o operador $K(f)_n = \sum_{k=0}^{n} A^{n-k}(A-I)f_k$ pertence a $B(\ell^p(X))$. Em contraste com a simplicidade dessa definição, o problema toma um grau de dificuldade considerável mesmo no caso onde $A$ é um operador limitado em potências (isto é, o semigrupo discreto $n \mapsto A^n$ é limitado em $B(X)$), uma vez que a $\ell^p$-regularidade maximal implica no fato de $A$ ser analítico no sentido de Ritt, isto é, a família $n \mapsto nA^n(A-I)$ é limitada em $B(X)$. Logo, o operador convolução $K$ possui núcleo de ordem $O(\frac{1}{n})$ e portanto é de tipo singular. Todavia, a analiticidade de $A$ traz uma vantagem muito importante: $\{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \geq 1, \lambda \neq 1\} \subset \rho(A)$ e $z \mapsto (z-1)R(z,A)$ admite uma extensão analítica e limitada para um setor $\sum(1,\theta) = \{\lambda \in \mathbb{C}; 0 < |arg(\lambda - 1)| < \theta\}$, $\theta \in (\frac{\pi}{2}.\pi)$. S. Blunck mesclou isso com a teoria de multiplicadores de Fourier e obteve o seguinte resultado de caracterização em espaços UMD:

**Teorema 1.1.** *Sejam $X$ um espaço UMD, $p \in (1,\infty)$ e $A \in B(X)$ limitado em potências e analítico. São equivalentes:*

*a) $A$ possui $\ell^p$-regularidade maximal;*

*b) O conjunto $\{(\lambda-1)R(\lambda,A); |\lambda| = 1, \lambda \neq 1\}$ é $R$-limitado.*

O nosso objetivo é tentar extender os resultados de S. Blunck para um par de operadores lineares limitados $(A,B)$ associados à equação de segunda ordem

$$\begin{cases} u_{n+2} &= Bu_{n+1} + Au_n + f_n, \;\; n \in \mathbb{Z}^+ \\ u_0 &= x \in X \\ \Delta u_0 &= y \in X. \end{cases} \tag{2}$$

A noção de $\ell^p$-regularidade maximal aqui segue do mesmo princípio: dizemos que $(A, B)$ possui $\ell^p$-regularidade maximal se existir $C > 0$ tal que $||\Delta^2 u_\bullet(0, 0, f)||_p \leq C||f||_p$ para todo $f \in \ell^p(X)$, onde $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$ e $u_\bullet(x, y, f)$ é a solução de (2). Ou seja: o problema é equivalente a mostrar que o operador convolução $L(f)_n := \sum_{k=0}^{n} \Delta^2 S(n-k) f_k$ está em $B(\ell^p(X))$. Quando $B = 2I$ e $A = -T$, o problema foi estudado por C. Cuevas et. al. em [2] sob a hipótese de $T \in B(X)$ ser um operador limitado em potências e analítico. Aqui, nossa hipótese central é (assim como em [1]) a limitação da família de evolução $S(n)_{n\in\mathbb{Z}^+} \subset B(X)$ associada a (2) dada por $S(n)x = u_n(0, x, 0)$.

## 2 Resultados Principais

Denotemos por $H(z) = z^2 - Bz - A$, $z \in \mathbb{C}$ e $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. Assim como acontece no caso de primeira ordem, nosso primeiro resultado mostra que se $(S(n))_{n\in\mathbb{Z}^+} \subset B(X)$ for limitada, então a $\ell^p$-regularidade maximal do par $(A, B)$ implica que o operador $L$ tem núcleo de ordem $O(\frac{1}{n})$:

**Teorema 2.1.** *Sejam $X$ um espaço de Banach, $p \in (1, \infty)$ e suponha que a família de evolução $(S(n))_{n\in\mathbb{Z}^+}$ gerada por $(A, B)$ seja limitada. Se $(A, B)$ possuir $\ell^p$-regularidade maximal, então existe $M > 0$ tal que $||n\Delta^2 S(n)|| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Em particular, se $z \in \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \geq 1, \lambda \neq 1\}$, então $H(z)^{-1} \in B(X)$ e existe $M' > 0$ tal que*

$$||H(z)^{-1}|| \leq \frac{M'}{|z-1|^2},$$

*para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.*

O próximo resultado caracteriza a $\ell^p$-regularidade maximal de geradores de famílias de evolução limitadas associadas à (2) que satisfazem uma certa condição de pequenez.

**Teorema 2.2.** *Sejam $X$ um espaço UMD, $p \in (1, \infty)$ e $(A, B)$ gerador de uma família de evolução $(S(n))_{n\in\mathbb{Z}^+}$ limitada associada à (2). Assuma que exista $r > 0$ tal que*

$$\sup\left\{\left|\left|(\lambda - 1)^2 H(\lambda)^{-1}\right|\right|; \lambda = 1 + \eta i, \eta \in [-r, 0) \cup (0, r]\right\} \leq \frac{2}{1 + ||A||} \tag{1}$$

*São equivalentes:*

*a) $(A, B)$ possui $\ell^p$-regularidade maximal;*

*b) $H(z)^{-1} \in B(X)$ para todo $z \in \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \geq 1, \lambda \neq 1\}$, $(z-1)^2 H(z)^{-1}$ é analítica e limitada em $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ e o conjunto $\{(z-1)^2 H(z)^{-1}; |z| = 1, z \neq 1\}$ é R-limitado.*

**Observação 1.** *Assumimos a condição (1) para contornar uma das diferenças entre os casos de primeira e segunda ordens: não garantimos a extensão analítica e limitada da função $(z-1)^2 H(z)^{-1}$ para um setor $\sum(1, \theta)$, $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, mas sim para um setor parabólico $\mathcal{D}_\beta = \left\{z \in \mathbb{C}; |Re(z) - 1| < \beta Im(z)^2\right\}$, $\beta > 0$. Portanto, (1) garante que esse setor intercepte o disco unitário aberto $\mathbb{D}$, possibilitando assim o uso da teoria de multiplicadores de Fourier.*

## References


[1] BLUNCK, S. - Maximal regularity of discrete and continuous time evolution equations. *Studia Math*, **146**, 157-176, 2001.

[2] CUEVAS, C. AND LIZAMA, C. - Maximal regularity of discrete second order Cauchy problems in Banach spaces. *J. Difference Equ. Appl.*, **13**, 1129-1138, 2007.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *11–12*

# EDFN EM MEDIDA COM RETARDO INFINITO VIA EDO GENERALIZADAS

FERNANDO G. ANDRADE[1,†], MÁRCIA FEDERSON[1,‡], MIGUEL FRASSON[1,§] & PATRICIA H. TACURI[2,§§]

[1]ICMC, USP, SP, Brasil, [2]FCT, Unesp, SP, Brasil

[†]andrade.fg89@gmail.com, [‡]federson@icmc.usp.br, [§]frasson@icmc.usp.br, [§§]ptacuri@fct.unesp.br

**Abstract**

No âmbito das equações diferenciais, a busca por existência e unicidade de soluções tem sido amplamente estudada usando diversas técnicas, por exemplo, os teoremas de ponto fixo. Porém, em algumas situações tais teoremas podem não ser aplicáveis. Neste estudo estabelecemos uma correspodência entre uma classe de equações diferenciais funcionais neutras em medida com retardo infinito (EDFN) e equações diferencias ordinárias generalizadas (EDOG) cujas as soluções tomam valores em um espaço de Banach definido de forma axiomática. Determinada essa relação é possível garantir a existência, unicidade e dependência contínua de soluções de uma EDFN a partir dos resultados existentes para EDOG.

## 1 Introdução

Sejam $[a,b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $G$ o espaço das funções regradas $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Neste trabalho, consideramos como espaço de fase um subespaço $H_0$ de $G$, munido de uma norma $\|\cdot\|_{H_0}$, definido de forma axiomatica apresentado em [1]. Se $a \in \mathbb{R}$ e $S_a$ denota o operador translação, isto é, $(S_a y)(t) = y(t+a)$, adotamos a notação $H_a = \{S_a y; y \in H_0\}$.

Fixe $t_0 \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ e considere $O \subset H_{t_0+\sigma}$ um subconjunto limitado, $P = \{y_t; y \in O, t \in [t_0, t_0+\sigma]\}$ e $\Omega = [t_0, t_0+\sigma] \times P$. Uma equação diferencial funcional neutra em medida com retardo infinito (EDFN) é uma equação da forma

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, y_s)\, dg(s) + N(t)y_t - N(t_0)y_{t_0}, \tag{1}$$

sendo $g : [t_0, t_0+\sigma] \to \mathbb{R}$ não decrescente, $f, N : \Omega \to \mathbb{R}$ aplicações contínuas, com $N(t) : H_0 \to \mathbb{R}^n$ linear limitada pra cada $t \in [t_0, t_0+\sigma]$. Uma função $x : [a,b] \to O$ é uma solução da equação diferencial generalizada no intervalo $[a,b]$, se

$$x(d) - x(c) = \int_{c}^{d} DF(t, x(\tau))$$

para todo $c, d \in [a,b]$. Nosso objetivo é associar à equação (1) uma EDO generalizada

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(t,x), \quad t \in [t_0, t_0+\sigma], \tag{2}$$

com $x : [t_0, t_0+\sigma] \to O$ e $F : [t_0, t_0+\sigma] \times O \to G((-\infty, t_0+\sigma], \mathbb{R}^n)$ dada por

$$F(t,x)(v) = \begin{cases} 0, & v \in (-\infty, t_0], \\[2ex] \displaystyle\int_{t_0}^{v} f(s, x_s)\, dg(s) + N_0(v)x_v, & v \in [t_0, t], \\[2ex] \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, x_s)\, dg(s) + N_0(t)x_t, & v \in [t, t_0+\sigma], \end{cases} \tag{3}$$

## 2 Resultados Principais

A fim de estabelecer uma correspondência entre (1) e (2), dados $t_0 < a < b < t_0 + \sigma$ e $y \in O$, vamos assumir as seguintes condições:

**(A1)** existe a integral $\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+\sigma} f(t, y_t)\, dg(t)$;

**(A2)** existe uma função positiva $M : [t_0, t_0 + \sigma] \to \mathbb{R}$ integrável em relação à $g$ tal que

$$\left| \int_a^b f(t, y_t)\, dg(t) \right| \leq \int_a^b M(t)\, dg(t);$$

**(A3)** existe uma função positiva $L : [t_0, t_0 + \sigma] \to \mathbb{R}$ integrável em relação à $g$ tal que

$$\left| \int_a^b [f(t, y_t) - f(t, z_t)]\, dg(t) \right| \leq \int_a^b L(t) \|y_t - z_t\|_{H_0}\, dg(t);$$

**(A4)** existe uma função positiva $Q : [t_0, t_0 + \sigma] \to \mathbb{R}$ integrável em relação à $g$ tal que

$$|N(b)x_b - N(a)x_a| \leq \int_a^b Q(t) \|x_t\|_{H_0}\, dg(t).$$

**Teorema 2.1.** *Sejam $O \subset H_{t_0+\sigma}$ limitado com a propriedade de prolongamento para $t \geq t_0$, $P = \{y_t, y \in O, t \in [t_0, t_0 + \sigma]\}$, $\varphi \in P$ e $g : [t_0, t_0 + \sigma] \to \mathbb{R}$ uma função não descrescente. Assuma que $f : [t_0, t_0 + \sigma] \times P \to \mathbb{R}^n$ satisfaça as condições* (A1) - (A3)*, $N : \Omega \to \mathbb{R}^n$ cumpra* (A4) *e $F$ seja definida por* (3)*, com $F(t, x) \in H_{t_0+\sigma}$ para cada $x \in O$ e $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$. Se $y \in O$ é uma solução da EDFN* (1)*, com condição inicial $y_{t_0} = \varphi$, então a função $x : [t_0, t_0 + \sigma] \to O$ definida por $x(t)(v) = y(v), v \in (-\infty, t]$ e $x(t)(v) = y(t)$ caso contrário, é uma solução da EDO generalizada* (2)*.*

**Teorema 2.2.** *Sejam $O$ um subconjunto limitado de $H_{t_0+\sigma}$ com a propriedade de prolongamento para $t \geq t_0$, $P = \{y_t; y \in O, t \in [t_0, t_0 + \sigma]\}$, $\varphi \in P$ e $g : [t_0, t_0 + \sigma]$ uma função não decrescente. Assuma que $f : [t_0, t_0 + \sigma] \times P \to \mathbb{R}^n$ satisfaça as condições* (A1)-(A3)*, $N : \Omega \to \mathbb{R}^n$ cumpra* (A4) *e $F$ seja dada por* (3)*, com $F(t, x) \in H_{t_0+\sigma}$ para cada $x \in O$ e $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$. Se $x : [t_0, t_0 + \sigma] \to O$ é uma solução da EDO generalizada* (2) *com condição inicial*

$$x(t_0)(v) = \begin{cases} \varphi(v - t_0), & v \in (-\infty, t_0), \\ \varphi(0), & v \in [t_0, t_0 + \sigma], \end{cases}$$

*então a função $y \in O$ definida por $y(v) = x(t_0)(v), v \in (-\infty, t_0]$ e $y(v) = x(v)(v)$ caso contrário é uma solução da EDFN* (1) *com condição inicial $y_{t_0} = \varphi$.*

A partir desta relação é possível estabelecer circunstâncias para a existência, unicidade e depedência contínua de soluções.

### References

[1] SLAVÍK, A. - *Measure functional differential equations with infinite delay.*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, **79**, 140-155, 2013.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *13–14*

# EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA EQUAÇÕES INTEGRAIS DE VOLTERRA EM ESCALAS TEMPORAIS

IGUER LUIS DOMINI DOS SANTOS[1,†]

[1]Departamento de Matemática, UNESP, Ilha Solteira, SP, Brasil

[†]iguerluis@mat.feis.unesp.br

**Abstract**

Neste trabalho, estudamos a existência de soluções para equações integrais de Volterra em escalas temporais. Utilizando o Teorema do ponto fixo de Schäfer, estabelecemos um resultado de existência de soluções para equações integrais de Volterra em escalas temporais. O resultado obtido aqui se soma aos resultados considerados na literatura.

## 1 Introdução

O estudo de equações integrais de Volterra em escalas temporais pode ser encontrado em [1, 2, 3]. Aqui, nós estudamos a seguinte classe de equações integrais de Volterra em escalas temporais

$$x(t) = f(t) + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} k(t, s, x(\sigma(s)))\Delta s, \qquad t \in I_{\mathbb{T}} := I \cap \mathbb{T} \tag{1}$$

onde: $x : I_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^n$ é a função incógnita; $\mathbb{T}$ é uma escala temporal, isto é, um subconjunto fechado e não-vazio de números reais; $k : I_{\mathbb{T}} \times I_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $f : I_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^n$ são funções dadas; $\sigma$ é uma função definida na próxima seção; e $I$ é um determinado subintervalo de $\mathbb{R}$.

Motivados por [1], nós estabelecemos um resultado de existência de soluções para a Eq. (1). Mais especificamente, nós obtemos um análogo do teorema [[1], Teorema 5.7] para a Eq. (1).

## 2 Escalas Temporais

Definimos a função $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ como

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}.$$

Estamos supondo que $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$.

Seja $\mu : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ dada por

$$\mu(t) = \sigma(t) - t.$$

Denotaremos por $e_p(t, a)$ a função exponencial na escala temporal $\mathbb{T}$. Além disso, $\|.\|_0$ denotará a norma do supremo.

## 3 Resultado Principal

A seguir enunciamos o resultado de existência de soluções para a Eq. (1). Para isso, consideramos as hipóteses H1 e H2 para uma função $k : [a, b]_{\mathbb{T}} \times [a, b]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

H1 Existe uma constante $C > 0$ satisfazendo

$$\|k(t_1, s, p) - k(t_2, s, p)\| \leq C \mid t_1 - t_2 \mid .$$

para quaisquer $(t_1, t_2) \in [a, b]_{\mathbb{T}} \times [a, b]_{\mathbb{T}}$, $s \in [a, b]_{\mathbb{T}}$ e $p \in \mathbb{R}^n$.

H2 Existam constantes $L > 0$ e $N \geq 0$ tais que

$$\|k(t,s,p)\| \leq L\|p\| + N$$

para quaisquer $(t,s) \in [a,b]_{\mathbb{T}} \times [a,b]_{\mathbb{T}}$ e $p \in \mathbb{R}^n$.

**Teorema 3.1.** *Considere a equação integral dada na Eq.* (1) *com* $I_{\mathbb{T}} := [a,b]_{\mathbb{T}}$. *Sejam* $k : I_{\mathbb{T}} \times I_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *e* $f : I_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^n$ *funções contínuas. Suponha que a função* $k$ *satisfaz as hipóteses H1 e H2. Suponha também que* $e_L(b,a) < 2$ *e* $L\|\mu\|_0 < 1$. *Então a Eq.* (1) *tem pelo menos uma solução.*

## References


[1] KULIK, T. AND TISDELL, C. C. - Volterra integral equations on time scales: basic qualitative and quantitative results with applications to initial value problems on unbounded domains. *International Journal of Difference Equations*, **3**, 103-133, 2008.

[2] MESSINA, E. AND RUSSO, E. AND VECCHIO, A. - Volterra integral equations on time scales: stability under constant perturbations via Liapunov direct method. *Ricerche di Matematica*, **64**, 345-355, 2015.

[3] DOS SANTOS, I. L. D. - On Volterra integral equations on time scales. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **12**, 471-480, 2015.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *15–16*

# ON THE DULAC'S PROBLEM FOR NON-SMOOTH VECTOR FIELDS

KAMILA DA S. ANDRADE[1,†]

[1]Instituto de Matemática e Estatística, UFG, GO, Brazil

[†]kamila.andrade@ufg.br

**Abstract**

The main objective of this work is putting together the Dulac's problem and the study of cycles for non-smooth vector fields. In this way, we show a version of the Dulac's problem for hyperbolic polycycles in discontinuous vector fields on $\mathbb{R}^2$.

## 1 Introduction

The study of non-smooth vector fields has developed very fast in recent years and it has become a common frontier between Mathematics, Physics, Engineering and Life Sciences. In short, a non-smooth vector field in $\mathbb{R}^2$ is a vector field which is piecewise defined in disjoint open regions of $\mathbb{R}^2$ separated by codimension one curves, called switching manifolds, where the union of these regions and curves is equal to $\mathbb{R}^2$, see [3] and [4]. The study of the cycles for discontinuous systems has several open problems and interesting phenomena can happen even in the simplest cases: considering two open regions separated by a straight line.

On the smooth case, the well known Hilbert's $16^{th}$ problem gave rise to a lot of works and it has motivated many researchers. A first step towards the solution of this problem is to to prove the following affirmation:

- *A polynomial vector field on $\mathbb{R}^2$ has at most a finite number of limit cycles.*

This question was first studied by Dulac in 1923 who gave an incomplete proof, which was noticed much later. This finiteness question can be reduced to the problem of non-accumulation of limit cycles for a polynomial vector field, called *Dulac's problem*:

- *A hyperbolic polycycle of an analytic vector field $X$ cannot have limit cycles accumulating onto it.*

Here, polycycle is closed oriented curve formed by a finite union of regular orbits and singular points of $X$. A polycycle is said to be hyperbolic if all its singular points are hyperbolic singularities. Based on that, a correct proof for the finiteness question was given for quadratic vector fields by Bamon [1] and complete proofs of the finiteness result were obtained independently by Ecalle [2] and Il'Yashenko [5].

Consider a smooth embedded submanifold $\Sigma = h^{-1}(0)$ where $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is a smooth function for which 0 is a regular value. In this way, $\Sigma$ splits $\mathbb{R}^2$ in two open regions

$$\Sigma^+ = \{p \in \mathbb{R}^2; h(p) > 0\} \quad \text{and} \quad \Sigma^- = \{p \in \mathbb{R}^2; h(p) < 0\}.$$

A piecewise analytic vector field in $\mathbb{R}^2$ is a vector field of the form

$$Z(p) = \begin{cases} X(p), & p \in \Sigma^+, \\ Y(p), & p \in \Sigma^-, \end{cases}$$

where $X$ and $Y$ are analytic vector fields in $\mathbb{R}^2$. Denote by $\Omega^\omega$ the set of all piecewise analytic vector fields defined as above. In $\Sigma$ the following regions are distinguished

- Crossing region: $\Sigma^c = \{p \in \Sigma;\ Xh \cdot Yh(p) > 0\}$,
- Sliding region: $\Sigma^s = \{p \in \Sigma;\ Xh(p) < 0 \text{ and } Yh(p) > 0\}$,

- Escaping region: $\Sigma^e = \{p \in \Sigma;\ Xh(p) > 0 \text{ and } Yh(p) < 0\}$,

where $Xh(p) = \langle X, \nabla h\rangle(p)$ is the Lie derivative of $h$, at $p$, in the direction of $X$, analogously for $Yh(p)$. Trajectories of $Z$ follow the Filippov convention, see [3, 4].

Consider $Z = (X, Y) \in \Omega^\omega$, a point $p \in \Sigma$ is said to be a fold point of $X$ (resp. of $Y$) if $Xh(p) = 0$ and $X^2h(p) \neq 0$ (resp. $Yh(p) = 0$ and $Y^2h(p) \neq 0$). A fold point of $X$ (of $Y$), $p \in \Sigma$, is visible if $X^2h(p) > 0$ (resp. $Y^2h(p) < 0$) and it is invisible if $X^2h(p) < 0$ (resp. $Y^2h(p) > 0$). Moreover, recall that $p \in \Sigma$ is

- a regular point of $X$ (resp. $Y$) if $Xh(p) \neq 0$ (resp. $Yh(p) \neq 0$);
- a hyperbolic saddle point of $X$ (resp. $Y$) if $\det(DX(p)) < 0$ (resp. $\det(DY(p) < 0)$).

Finally, a point $p \in \Sigma$ is said to be *a*-*b* point if it has the characteristic $a$ for $X$ and the characteristic $b$ for $Y$, where $a$, $b \in \{$ fold, regular, saddle$\}$.

## 2 Main Results

Briefly, the mains results concerning this work are stated below.

**Theorem 2.1.** *A hyperbolic polycycle of a piecewise analytic vector field $Z \in \Omega^\omega$ cannot have limit cycles accumulating onto it.*

**Theorem 2.2.** *A polycycle of a piecewise analytic vector field $Z = (X, Y) \in \Omega^\omega$, which singularities are only hyperbolic saddles outside of the switching manifold, saddle-regular, saddle-saddle, fold-regular, fold-fold, and fold-saddle points, cannot have limit cycles accumulating onto it.*

**Proofs** The proofs of these two results follow the same strategy used on the proof of the Dulac's Problem for analytic vector fields, see [6], by doing the necessary adaptations. It is worthwhile to emphasize that it is neither a simple proof nor a direct adaptation, moreover it is pretty extensive. $\square$

## References


[1] BAMON, R. - Quadratic vector fields in the plane have a finite number of limit cycles. *Publ. IHES* **64**, 111-142, 1986.

[2] ECALLE, J. - *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac.* Hermann, Paris,1992.

[3] FILIPPOV, A.F. - *Differential equations with discontinuous right-hand sides.* Math. Appl. (Sov. Ser.), **18**, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1988.

[4] GUARDIA, M.; SEARA, T.M. AND TEIXEIRA, M.A. - Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems. *J. Differential Equations* **250**, 1967-2023, 2011.

[5] IL'YASHENKO, Y. - Limit cycles of polynomial vector fields with nondegenerate singular points on the real plane. *Anal. Ego. Pri.*, **18**, 3, 32-34, 1984. (Func. Ana. and Appl., **18**, 3199-209, 1985).

[6] ROUSSARIE, R. - *Bifurcation of planar vector fields and Hilbert's sixteenth problem.* Birkhäuser, 1998.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *17–18*

# ON GLOBAL SOLUTIONS FOR KIRCHHOFF-TYPE PROBLEM WITH UNBOUNDED INITIAL DATA

H. R. CLARK[1,†] & R. R. GUARDIA[2,‡]

[1]Departamento de Matemática, UFPI, Parnaíba, PI, Brasil, [2]Instituto de Matemática e Estatística, UFF, Niterói, RJ, Brasil

† haroldoclark@gmail.com, ‡ronaldramosmat@gmail.com

**Abstract**

This paper deals with the existence and uniqueness of global solutions, and uniform stabilization of the energy for initial-boundary value problems for quasilinear equations of the Kirchhoff type. The main purpose here is to establish the existence of global solution for a Kirchhoff-type problem with initial data in the Sobolev spaces, without any restriction on the size of its norms, and also without any dissipative mechanism acting in the displacement variable.

## 1 Introduction

The purpose in the present paper is to establish global solutions for the system

$$\begin{array}{lll} u'' - M\left(\cdot,\cdot,|\nabla u|^2\right)\Delta u = 0 & \text{in} & Q, \\ u = 0 & \text{on} & \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x),\;\; u'(x,0) = u_1(x) & \text{in} & \Omega, \end{array} \tag{1}$$

with the initial data $u_0$ and $u_1$ belong to the Sobolev spaces $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ and $H_0^1(\Omega)$ respectively and without any restriction on the size of its norms.

As far as we know, in all articles in the literature on problems of the Kirchhoff type, like (1) or when $M = M(\lambda)$, the global solutions are obtained supposing that the initial data have small norm or they are analytic functions with some growth conditions. The originality of our paper is concerned with the global solvability for system (1), supposing the initial data in a Sobolev class and satisfying suitable geometric conditions.

## 2 Main results

To state the main results, we suppose:

**(a)** $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ and $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ such that

$$\operatorname{sgn}(u_0, w_j) = -\operatorname{sgn}(u_1, w_j) \quad \text{for all} \quad j \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

"sgn" means the signal function, and $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ is the spectral basis of the Laplace operator in $H_0^1(\Omega)$, i.e.,

$$(\nabla w_j, \nabla v) = \lambda_j (w_j, v) \;\text{ for all }\; v \in H_0^1(\Omega) \;\text{ and }\; j \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

**(b)** $M : \Omega \times [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ is such that

$$\begin{array}{l} M \in C^1(\Omega \times [0,\infty) \times [0,\infty); \mathbb{R}^+),\;\; 0 < m_0 \le M(x,t,\lambda) \le C_0 f(\lambda), \\ \big\langle \nabla M(y), v \big\rangle \le 0 \;\text{ for all }\; y \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,\;\; v = (0_1,\ldots,0_n,1,\zeta) \;\text{ for all }\; \zeta \in (-\infty, 0], \end{array} \tag{3}$$

where $m_0$ and $C_0$ are positive real constants, $f \in C^1\big([0,\infty);[0,\infty)\big)$, $< \cdot, \cdot >$ is the Euclidian inner product in $\mathbb{R}^{n+2}$, and $\nabla M = \big(\frac{\partial M}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial M}{\partial x_n},\frac{\partial M}{\partial t},\frac{\partial M}{\partial \lambda}\big)$.

**Definition 2.1.** *A global strong solution for the initial-boundary value problem* (1) *is a function* $u$ *defined on* $\Omega \times [0,\infty)$ *with real values, such that*

$$u \in L^\infty\big(0,\infty;\, H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\big),\;\; u' \in L^\infty\big(0,\infty; H_0^1(\Omega)\big),\;\; u'' \in L^\infty\big(0,\infty; L^2(\Omega)\big), \tag{4}$$

*and the function* $u$ *satisfies the system* (1) *almost everywhere.*

The main result of this paper is:

**Theorem 2.1.** *Suppose* $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ *and* $u_1 \in H_0^1(\Omega)$*. Then there exists at least a global strong solution of system* (1)*, provided the hypotheses* (1)-(3) *hold.*

The uniqueness of solutions can be obtained by adding one more hypothesis to the set of hypotheses of Theorem 2.1. Namely,

**Proposition 2.1.** *Supposing* $g \in C^1\big([0,\infty);[0,\infty)\big)$ *and* $C_1$ *a positive real constant, such that*

$$|\nabla M(x,t,\lambda)|_{\mathbb{R}^{n+2}} \leq C_1 g(\lambda) \;\; \textit{for all} \;\; (x,t,\lambda) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \tag{5}$$

*then the solution of problem* (1) *guaranteed in Theorem 2.1 is unique.*

The existence of global solutions for equations of the Kirchhoff type with weak internal damping, i.e., $\rho u'$ for $\rho > 0$, and without restrictions on the size of the norms of the initial data was also an open questions.

The purpose is to show that the techniques to prove Theorem 2.1 allow in a very simple way, to determine the asymptotic stabilization of the energy of the problem

$$\begin{array}{lll} u'' - M\left(\cdot,\cdot,|\nabla u|^2\right)\Delta u + \rho u' = 0 & \text{in} & Q, \\ u = 0 & \text{on} & \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x),\;\; u'(x,0) = u_1(x) & \text{in} & \Omega. \end{array} \tag{6}$$

The existence and uniqueness of solutions for system (6) are established assuming the same hypotheses of Theorem 2.1, and the proofs are obtained in a similar way to what was done for Theorem 2.1. Therefore, all assumptions (1)-(3) and (5) for the objects of system (6) are assumed, and $\rho$ is a positive real number.

The energy

$$E(t) = \frac{1}{2}\Big\{|u'(t)|^2 + \int_\Omega M\big(x,t,|\nabla u(t)|^2\big)|\nabla u(x,t)|^2_{\mathbb{R}}\,dx\Big\} \tag{7}$$

of system (6) has an exponential decay rate. Specifically, one has.

**Theorem 2.2.** *Let* $\varepsilon > 0$ *be a real number such that*

$$0 < \varepsilon < \min\Big\{\frac{1}{2C_2},\, \frac{2m_0\rho}{2m_0 + \rho^2 C_\Omega^2}\Big\} \quad \textit{and} \quad C_2 = \max\Big\{C_\Omega,\, \frac{1}{m_0}\Big\}, \tag{8}$$

*then*

$$E(t) \leq 3C_\Omega K_1 \exp\Big(-\frac{4\tau}{3}t\Big) \;\; \textit{for all} \;\; t \geq 0, \tag{9}$$

*where* $K_1 = \frac{1}{2}\left[|\mathbb{N}u_1|^2 + C_0 f\left(|\mathbb{N}u_0|^2\right)|\Delta u_0|^2\right]$ *and* $\tau$ *is a positive real constant.*

## References


[1] J. Límaco, H. R. Clark & L. A. Medeiros, *Vibrations of elastic string with nonhomogeneous material*, J. Math. Anal. Appl., 344 (2008), 806-820.

[2] J. L. Lions, *On some questions in boundary value problem of mathematical physics. Contemporary development in continuum mechanics and partial differential equations*, Ed. by G. M. de La Penha & L. A. Medeiros, North-Holland, Amsterdam (1978).

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *19–20*

# THE IVP FOR THE BENJAMIN-ONO-ZAKHAROV-KUZNETSOV EQUATION IN LOW REGULARITY SOBOLEV SPACES

ALYSSON CUNHA[1,†] & ADEMIR PASTOR[2,‡]

[1]Instituto de Matemática e Estatística, UGF, GO , Brasil, [2]IMECC, UNICAMP, SP, Brasil

† `alysson@ufg.br`, ‡`apastor@ime.unicamp.br`

**Abstract**

In this paper we study the initial-value problem associated with the Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov equation. Such equation appears as a two-dimensional generalization of the Benjamin-Ono equation when transverse effects are included via weak dispersion of Zakharov-Kuznetsov type. We prove that the initial-value problem is locally well-posed in the usual $L^2(\mathbb{R}^2)$-based Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R}^2)$, $s > 11/8$, and in some weighted Sobolev spaces. To obtain our results, most of the arguments are accomplished taking into account the ones for the Benjamin-Ono equation.

## 1 Introduction

The Benjamin-Ono (BO) equation

$$u_t + \mathcal{H}\partial_x^2 u + uu_x = 0, \quad u = u(t,x), \;\; x \in \mathbb{R}, \; t > 0, \tag{1}$$

was proposed as a model for unidirectional long internal gravity waves in deep stratified fluids (see [1], [6], [4] and [3]). However, when the effects of long wave lateral dispersion are included, two-dimensional generalizations of (1) appear.

In the present work, we study a generalization of (1) when the transverse effects are included via weak dispersion of Zakharov-Kuznetsov-type: the so-called Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov (BO-ZK) equation. Such equation, coupled with an initial condition $\phi$, reads as

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{H}\partial_x^2 u + u_{xyy} + uu_x = 0, \;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2, \; t > 0, \\ u(0,x,y) = \phi(x,y), \end{cases} \tag{2}$$

where $u = u(t,x,y)$ is a real-valued function and $\mathcal{H}$, as in (1), stands for the Hilbert transform in the $x$ direction defined as

$$\mathcal{H}u(t,x,y) = \text{p.v.}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{u(t,z,y)}{x-z}dz.$$

Recall that p.v. denotes the Cauchy principal value.

Following the ideas of [3] the authors in [2] established the following results

**Theorem A.** *Let $s > 2$. Then for any $\phi \in H^s(\mathbb{R}^2)$, there exist a positive $T = T(\|\phi\|_{H^s})$ and a unique solution $u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^2))$ of the* IVP (2)*. Furthermore, the flow-map $\phi \mapsto u(t)$ is continuous in the $H^s$-norm and*

$$\|u(t)\|_{H^s} \le \rho(t), \qquad t \in [0,T],$$

*where $\rho$ is a function in $C([0,T]; \mathbb{R})$.*

**Theorem B.** *The following statements hold.*

*(i)* *If* $s > 2$ *and* $r \in [0, 1]$ *then* (2) *is locally well-posed in* $\mathcal{Z}_{s,r}$. *Furthermore, if* $r \in (1, 5/2)$ *and* $s \geq 2r$ *then* (2) *is locally well-posed in* $\mathcal{Z}_{s,r}$.

*(ii)* *If* $r \in [5/2, 7/2)$ *and* $s \geq 2r$, *then* (2) *is locally well-posed in* $\dot{\mathcal{Z}}_{s,r}$.

## 2 Main Results

Our main goal in this paper is to improve Theorems A and B by pushing down the Sobolev regularity index. Our main results read as follows.

**Theorem 2.1.** *Let* $s > 11/8$. *Then for all* $\phi \in H^s(\mathbb{R}^2)$, *there exists* $T \geq c\|\phi\|_{H^s}^{-8}$ *and a unique solution of* (2) *defined in* $[0, T]$ *such that*

$$u \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}^2)) \quad \text{and} \quad u_x \in L^1([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}^2)).$$

*Moreover, for all* $R > 0$, *there exists* $T \geq cR^{-8}$ *such that the map*

$$\phi \in B(0, R) \mapsto u \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}^2))$$

*is continuous, where* $B(0, R)$ *denotes the ball of radius* $R$ *centered at the origin of* $H^s(\mathbb{R}^2)$.

**Theorem 2.2.** *The following statements are true.*

*(i)* *If* $s > 11/8$ *and* $r \in [0, 11/16]$ *then the* IVP (2) *is locally well-posed in* $\mathcal{Z}_{s,r}$.

*(ii)* *If* $r \in (11/16, 1]$ *and* $s \geq 2r$, *then the* IVP (2) *is locally well-posed in* $\mathcal{Z}_{s,r}$.

## References


[1] T. B. Benjamin - Internal waves of permanent form in fluids of great depth *J. Fluid Mech.*, **29**, 559–592, 1967.

[2] A. Cunha and A. Pastor - The IVP for the Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov equation in weighted Sobolev spaces *J. Math. Anal. Appl.*, **417**, 660–693, 2014.

[3] G.Fonseca and G. Ponce - The IVP for the Benjamin-Ono equation in weighted Sobolev spaces. *J. Funct. Anal.*, **260** 436–459, 2011.

[4] Iório, R. - On the Cauchy Problem for the Benjamin-Ono equation *Comm. Part. Diff. Eq.*, 1031–1081, 1986.

[5] Koch, H.,Tzvetkov, N. - On the local well-posedness of the Benjamin-Ono equation in $H^s(\mathbb{R})$. *Int. Math. Res. Not. IMRN.*, 1449–1464, 2003.

[6] H. Ono - Algebraic solitary waves in stratified fluids *J. Phys. Soc. Japan.*, **39**, 1082–1091, 1975.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *21–22*

# APROXIMAÇÃO DO SISTEMA DE UM FLUIDO MICROPOLAR NÃO-NEWTONIANO POR UM SISTEMA DO TIPO CAUCHY-KOWALESKA

GERALDO M. DE ARAÚJO[1,†] & ELIZARDO F. LIMA LUCENA[2,‡]

[1]instituto de ciências exatas e naturais, programa de doutorado em matemática, UFPA, Pa, Brasil [2]Faculdade de Matemática-Campus Bragança, UFPA, Pa, Brasil

[†]gera@ufpa.br, [‡]elizardo@ufpa.br

**Abstract**

Neste trabalho investigamos um sistema acoplado de um fluido micropolar não-Newtoniano usando aproximação por um sistema do tipo Cauchy-Kowaleska. O problema é considerado em um domínio suave e limitado do $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, com condições de Dirichlet na fronteira. O tensor de estresse é do tipo $\tau(e(u)) = M(|e(u)|_E^2)e(u)$.

## 1 Introdução

Neste trabalho vamos estudar o seguinte problema de valor inicial e de contorno de um fluido micropolar não-Newtoniano usando aproximação por um sistema do tipo Cauchy-Kowaleska:

$$\left| \begin{array}{rcl} u' - \nabla \cdot \left[ (\nu + \nu_r + M(|e(u)|_E^2))e(u) \right] & + & (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 2\nu_r \nabla \times w + f \text{ em } Q_T, \\ w' - \nu_1 \nabla \cdot e(w) + (u \cdot \nabla)w + 4\nu_r w & = & 2\nu_r \nabla \times u + g \text{ em } Q_T, \\ \nabla \cdot u & = & 0 \text{ em } Q_T, \\ u = w = 0 \text{ sobre } \Sigma_T, \ u(0) & = & u_0, \quad w(0) = w_0 \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \tag{1}$$

em que $u$ e $w$ denotam as velocidades linear e microrrotacional, $p$ a pressão hidrostática do fluido e $f$ a resultante das forças externas, $e(u) = \dfrac{1}{2}\left[\nabla u + (\nabla u)^T\right]$, $\nu$, $\nu_1$ e $\nu_r$ são constantes positivas, $\nu$ e $\nu_r$ denotam as viscosidades Newtoniana e microrrotacional, $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $\nabla \times u$ é dado por $\nabla \times u = \left( \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}, \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$, a aplicação real $M : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ deve satisfazer certas hipóteses. Notamos que quando $M$ é uma função constante, o problema (1) foi analisado em detalhes no livro de *G. Lukaszewicz* [2], [1999]. Em [2] os autores obtiveram existência e unicidade para o problema (1), de maneira usual, isto é, usando espaços com divergência nula. Neste trabalho será usada outra técnica para obtenção de solução do problema (1) (veja [3], pgs. 466-471), vamos estabelecer a existência de soluções para esse sistema aproximando-o por um sistema do tipo Cauchy-Kowaleska. De um modo mais preciso, vamos considerar o sistema do tipo Cauchy-Kowaleska associado a (1):

$$\left| \begin{array}{rl} u'_\epsilon - \nabla \cdot \left[ \left( \nu + \nu_r + M(|e(u_\epsilon)|_E^2) \right) e(u_\epsilon) \right] + (u_\epsilon \cdot \nabla)u_\epsilon + \dfrac{1}{2}(\nabla \cdot u_\epsilon)u_\epsilon & + \nabla p_\epsilon = 2\nu_r \nabla \times w_\epsilon + f \text{ em } Q_T, \\ w'_\epsilon - \nu_1 \nabla \cdot (e(w_\epsilon)) + (u_\epsilon \cdot \nabla)w_\epsilon + \dfrac{1}{2}(\nabla \cdot u_\epsilon)w_\epsilon + 4\nu_r w_\epsilon & = 2\nu_r \nabla \times u_\epsilon + g \text{ em } Q_T, \\ \epsilon p'_\epsilon + \nabla \cdot u_\epsilon & = 0 \text{ em } Q_T, \\ u_\epsilon = w_\epsilon \ = \ 0 \text{ sobre } \Sigma_T, \ \ u_\epsilon(0) = u_{\epsilon 0}, w_\epsilon(0) & = w_{\epsilon 0} \text{ em } \Omega, p_\epsilon(0) = p_{\epsilon 0}, \, p_{\epsilon 0} \in L^2(\Omega), \end{array} \right. \tag{2}$$

Empregando o método de Faedo-Galerkin mostramos que o sistema (2) possui uma solução fraca $\{u_\epsilon, w_\epsilon, p_\epsilon\}$, para cada $\epsilon > 0$, que converge para a solução do problema (1) quando $\epsilon \to 0$. A principal vantagem desse método é que os resultados são obtidos sobre os espaços $\mathbf{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^n$ e $\mathbf{H}_0^1(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^n$. Portanto, mais gerais que àqueles com divergência nula ($V$ e $H$).

## 2 Resultados Principais

**Definição 2.1.** *Sejam* $u_0, w_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^{4/3}\left(I, \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)\right)$ *e* $g \in L^2\left(I, \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)\right)$. *Uma solução fraca para o sistema (1) é um par de funções* $\{u, w\}$ *tal que*

$$u \in L^4\left(I; \boldsymbol{W}_0^{1,4}(\Omega)\right) \cap L^\infty\left(I; \boldsymbol{L}^2(\Omega)\right), w \in L^2\left(I; \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)\right) \cap L^\infty\left(I; \boldsymbol{L}^2(\Omega)\right), \tag{1}$$

*satisfazendo as seguintes identidades*

$$\left|\begin{array}{l} (u'(t), v) + (\nu + \nu_r)a_1(u(t), v) + \langle \mathcal{K}_1 u(t), v\rangle + \langle B_u u(t), v\rangle = 2\nu_r(\nabla \times w(t), v) + \langle f(t), v\rangle \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \\ (w'(t), z) - \nu_1(\nabla \cdot e(w(t)), z) + \langle B_u w(t), z\rangle + 4\nu_r(w(t), z) = 2\nu_r(\nabla \times u(t), z) + \langle g(t), z\rangle \quad \forall z \in \mathcal{D}(\Omega) \\ \nabla \cdot u = 0, \\ u(0) = u_0, \quad w(0) = w_0. \end{array}\right. \tag{2}$$

**Definição 2.2.** *Sejam* $u_{\epsilon 0}, w_{\epsilon 0} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, $p_{\epsilon 0} \in L^2(\Omega)$, $f \in L^{4/3}\left(I, \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)\right)$ *e* $g \in L^2(I; \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$. *Uma solução fraca para o sistema (2) é uma terna de funções* $u_\epsilon, w_\epsilon, p_\epsilon$, *tal que*
$u_\epsilon \in L^4\left(I; \boldsymbol{W}_0^{1,4}(\Omega)\right) \cap L^\infty\left(I; \boldsymbol{L}^2(\Omega)\right), w_\epsilon \in L^2\left(I; \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)\right) \cap L^\infty\left(I; \boldsymbol{L}^2(\Omega)\right), p_\epsilon \in L^\infty\left(I; L^2(\Omega)\right)$,
*satisfazendo as seguintes identidades*

$$\left|\begin{array}{l} (u_\epsilon'(t), v) + (\nu + \nu_r)a_1(u_\epsilon(t), v) + \langle \mathcal{K}_1 u_\epsilon(t), v\rangle + \langle \widetilde{B}_{u_\epsilon} u_\epsilon(t), v\rangle + (\nabla p_\epsilon(t), v) = 2\nu_r\langle \nabla \times w_\epsilon(t), v\rangle + \langle f(t), v\rangle \\ (w_\epsilon'(t), z) - \nu_1(\nabla \cdot e(w_\epsilon)(t), z) + \langle \widetilde{B}_{u_\epsilon} w_\epsilon(t), z\rangle + 4\nu_r(w_\epsilon, z) = 2\nu_r\langle \nabla \times u_\epsilon(t), z\rangle + \langle g(t), z\rangle \quad \forall v, z \in \mathcal{D}(\Omega), \\ \epsilon(p_\epsilon'(t), q) + (\nabla \cdot u_\epsilon(t), q) = 0 \quad \forall q \in \mathcal{D}(\Omega), \\ u_\epsilon(0) = u_{\epsilon 0}, w_\epsilon(0) = u_{\epsilon 0}, p_\epsilon(0) = p_{\epsilon 0}, \\ \text{onde } \mathcal{K}_1 u = -\nabla \cdot M\left(|e(u)|_E^2\right) e(u), \overline{B}_u v = \dfrac{1}{2}(\nabla \cdot u)v, B_u v = (u \cdot \nabla)v, \widetilde{B}_u v = B_u v + \overline{B}_u v \ \forall u, v \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega). \end{array}\right. \tag{3}$$

A seguir, os teoremas principais

**Teorema 2.1.** *Se* $d \leq 3$, $u_0, w_0 \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, $f \in L^{4/3}\left(I; \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)\right)$ *e* $g \in L^2\left(I; \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)\right)$, *então existe uma solução fraca para o sistema (1) no sentido da definição 2.1.*

**Teorema 2.2.** *Se* $d \leq 3$, $u_{\epsilon 0}, w_{\epsilon 0} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, $p_{\epsilon 0} \in L^2(\Omega)$, $f \in L^{4/3}\left(I; \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)\right)$ *e* $g \in L^2\left(I; \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)\right)$, *então para cada* $\epsilon > 0$, *existe uma solução fraca para o sistema (2) no sentido da definição 2.2, dada por* $\{u_\epsilon, w_\epsilon, p_\epsilon\}$. *Além disso, se* $d = 2$, *essa solução é única.*

**Idéia da prova dos Teoremas:** Para mostrar a existência de soluções fracas do problema penalizado (2) (Teorema 2.2), procedemos de maneira standard, isto é, utilizamos o método de Faedo-Galerkin, projeções ortogonais e o lema de compacidade de Aubin-Lions. Para a unicidade, usamos o método da energia. Para mostrar a existência de soluções fracas do problema (1) (Teorema 2.1), precisamos passar o limite no problema penalizado (2) com $\epsilon \to 0$, para tal, usando derivada fracionária, mostramos que $u_\epsilon$ é limitada em $\mathcal{H}_\Omega^\gamma\left(I; \mathbf{H}_0^1(\Omega), \mathbf{L}^2(\Omega)\right) = \{u; u \in L^2(\mathbf{I}; \mathbf{H}_0^1(\Omega)), |\tau|^\gamma \widehat{u} \in L^2(\mathbf{I}; \mathbf{L}^2(\Omega))\} \hookrightarrow L^2(I; \mathbf{L}^2(\Omega))$, isso e o teorema da limitação uniforme de Banach-Steinhauss nos permitem concluir que $u_\epsilon \to u$ forte e q.s., o que nos possibilita passar o limite no problema penalizado .

## References


[1] G. Lukaszewicz, *Micropolar Fluids, Theory and applications*, Modeling and simulations in Science, Engineering and Technology, Birkhäuser Boston, Inc.,Boston, MA, 1999.

[2] G. M. de Araújo, M. A. F. de Araújo and E. F. L. Lucena, *On a System of Equations of a Non-Newtonian Micropolar Fluid*, Journal of Applied Mathematics, volume 2015, p. 1-11, 2015.

[3] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Resolution Des Problémes Aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *23–24*

# SOBRE UM SISTEMA DE INEQUAÇÕES ASSOCIADO A UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DE UM FLUIDO MICROPOLAR NÃO NEWTONIANO FORTEMENTE DILATANTE

MICHEL MELO ARNAUD[1,†] & GERALDO MENDES DE ARAÚJO[2,‡]

[1]Universidade Federal do Pará, UFPA-Campus Universitário de Tocantins/Cametá, PA, Brasil [2]Universidade Federal do Pará, UFPA, PA, Brasil

[†]michelmat1@yahoo.com.br, [‡]geramaraujo@gmail.com

**Abstract**

Este é um trabalho que investigamos um sistema de inequações que descreve o desequilíbrio de um sistema de EDP´s, que modela o escoamento de um fluido micropolar não-newtoniano fortemente dilatante. Consideremos um domínio suave e limitado do $\mathbb{R}^3$, com condições de Dirichlet na fronteira. No problema utilizamos o operador extra de stress, $\tau(e(u)) = \mu_0[(1+|e(u)|^2)e(u)]$, e mostramos a existência e unicidade de soluções para o sistema de inequações, utilizando o método de penalização, teoria de operadores monótonos e argumentos de compacidade.

## 1 Introdução

Segue o sistema de inequações que descreve o desequilíbrio de um sistema de EDP´s citado no resumo desse texto.

$$\left|\begin{array}{rcll} u' - \nabla\cdot\left[2(\nu+\nu_r+M(|e(u)|^2))e(u)\right] + (u.\nabla)u + \nabla p & \geq & 2\nu_r\nabla\times w + f & \text{in } Q_T \\ w' - \nu_1\nabla\cdot[M(|e(w)|_E^2)e(w)] + (u.\nabla)w + 4\nu_r w & \geq & 2\nu_r\nabla\times u + g & \text{in } Q_T \\ \nabla\cdot u & = & 0 & \text{in } Q_T \\ u & = & 0 & \text{on } \Sigma_T \\ w & = & 0 & \text{on } \Sigma_T \\ u(x,0) & = & u_0(x) & \text{in } \Omega \\ w(x,0) & = & w_0(x) & \text{in } \Omega \end{array}\right. \tag{1}$$

o qual é um modelo para um fluido micropolar com viscosidade variável caracterizada pelo tensor de estresse $\tau(e(u)) = (\nu+\nu_0+M(|e(u)|^2))e(u)$ e os símbolos $\nu$ e $\nu_r$ são constantes positivas.

Em relação as notações usadas: vamos considerar $\Omega$ limitado em $\mathbb{R}^n$, com fronteira suave $\partial\Omega$, sendo $T>0$, denotamos o nosso domínio por $Q_T$ o cilindro espaço-temporal $I\times\Omega$, com fronteira lateral $\Sigma = I\times\partial\Omega$, em que $I=(0,T)$ é um intervalo de tempo. Nesse contexto, os vetores $u=(u_1,...,u_n)$ e $w=(w_1,...,w_n)$ representam, respectivamente, a velocidade linear e microrrotacional de um fluido contido em $Q_T$. Essas velocidades são as variáveis de nosso problema. A pressão desse fluido é representada por $p$ e $f=(f_1,...,f_d)$ será a resultante das forças externas aplicadas a ele. A aplicação $\tau:\mathbb{R}^{n^2}_{sym}\to\mathbb{R}^{n^2}_{sym}$ é o tensor de estresse, onde $e:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n^2}_{sym}$ leva cada vetor $u\in R^n$ na parte simétrica do gradiente da velocidade, dada pela expressão $e(u)=\frac{1}{2}\left[\nabla u+(\nabla u)^T\right]$, a aplicação $M:(0,\infty)\to(0,\infty)$ também respeita algumas hipóteses.

Para fazer o estudo de existência e unicidade do problema (1) vamos precisar utilizar os operadores de penalização $\beta: L^4(I;V)\to L^{4/3}(I;V)'$ e $\widetilde{\beta}: L^2(I;\mathbf{H}^1_0(\Omega))\to L^2(I;\mathbf{H}^{-1}(\Omega))$

O problema penalizado associado com a desigualdade variacional (1) é dado por:

$$
\left|
\begin{array}{lll}
u'_\epsilon - \nabla\cdot\left[2(\nu+\nu_r+M(|e(u_\epsilon)|^2))e(u_\epsilon)\right] + (u_\epsilon.\nabla)u_\epsilon + \dfrac{1}{\epsilon}\beta u_\epsilon + \nabla p & = & 2\nu_r\nabla\times w_\varepsilon + f \quad \text{in} \quad Q_T \\
w'_\varepsilon - \nu_1\nabla\cdot[M(|e(w_\varepsilon)|^2_E)e(w_\varepsilon)] \;+\; (u_\epsilon.\nabla)w_\varepsilon \;+\; 4\nu_r w_\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon}\widetilde{\beta} w_\varepsilon & = & 2\nu_r\nabla\times u_\epsilon + g \quad \text{in} \quad Q_T \\
\nabla\cdot u_\epsilon & = & 0 \quad \text{in } Q_T \\
u_\epsilon & = & 0 \quad \text{on } \Sigma_T \\
w_\varepsilon & = & 0 \quad \text{on } \Sigma_T \\
u_\epsilon(x,0) & = & u_{\epsilon 0}(x) \quad \text{in } \Omega \\
w_\varepsilon(x,0) & = & w_{\varepsilon 0}(x) \quad \text{in } \Omega
\end{array}
\right. \tag{2}
$$

## 2 Resultados Principais

**Definição 2.1.** *Sejam $u_{\epsilon 0}\in V, w_{\varepsilon 0}\in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, bem como $f\in L^{4/3}(I,V')$ e $g\in L^{4/3}(I;\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)\cap W_0^{1,4}(\Omega))'$. Uma solução fraca para (2), consiste de um par de funções $\{u_\epsilon, w_\varepsilon\}$, tal que $u_\epsilon\in L^4(I;V)\cap L^\infty(I;H)$, $w_\varepsilon\in L^\infty(I;\boldsymbol{L}^2(\Omega))\cap L^2(I;\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)\cap W_0^{1,4}(\Omega))$ e que satisfaçam o seguinte sistema*

$$
\left|
\begin{array}{l}
(u'_\epsilon,\varphi) + (\nu+\nu_r)a(u_\epsilon,\varphi) + b(u_\epsilon,u_\epsilon,\varphi) + \langle K_{u_\epsilon}u_\epsilon,\varphi\rangle + \dfrac{1}{\epsilon}(\beta u_\epsilon,\varphi) \\
= 2\nu_r(\nabla\times\; w_\epsilon,\varphi) + (f,\varphi), \forall\varphi\; \in\mathcal{D}(0,T;V) \\
\\
(w'_\epsilon,\phi) + \nu_1 a(w_\epsilon,\phi) + \nu_1(K_{w_\varepsilon}w_\varepsilon,\phi) + b(u_\epsilon,w_\varepsilon,\phi) \\
+4\nu_r(w_\varepsilon,\phi) + \dfrac{1}{\varepsilon}(\widetilde{\beta}w_\varepsilon,\phi) = 2\nu_r(\nabla\times u_\epsilon,\phi) + (g,\phi), \forall\phi\; \in\mathcal{D}(0,T;\mathcal{D}(\Omega)) \\
u_\epsilon(0)=0, \quad w_\varepsilon(0)=0
\end{array}
\right. \tag{1}
$$

**Teorema 2.1.** *Se $f\in L^{4/3}(I;V')$, $g\in L^{4/3}(I;\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$, $u_{\epsilon 0}\in V$ e $w_{\varepsilon 0}\in\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, então para cada $0<\epsilon,\varepsilon<1$ existe uma solução para o problema (2) no sentido da definição (2.1).*

**Teorema 2.2.** *Assumindo que $n=3$, $f\in L^4(I;V), f'\in L^{4/3}(I;V'), g\in L^2(I;\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)), g'\in L^2(I;\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$. Então para cada $0<\epsilon,\varepsilon<1$, $u_{\epsilon 0}\in V$ e $w_{\varepsilon 0}\in H_0^1$, existe um único par de funções $(u_\epsilon,w_\varepsilon)$ definidas para $(x,t)\in Q_T$, soluções para o problema (2) no sentido da definição (2.1).*

Sabendo que $\widetilde{\beta},\beta\to 0$ quando $\epsilon,\varepsilon\to 0$, a partir dos teoremas (2.1) e (2.2) poderemos passar o limite no problema (2), com $\epsilon,\varepsilon\to 0$, recaindo assim no problema (1). A partir de então, o problema (1) possui existência e unicidade de solução para $n\le 3$, no sentido da definição de solução fraca que cabe a ele.

## References


[1] G. M. de Araújo, M. M. Araújo and E. F. L. Lucena, *ON A SYSTEM OF EQUATIONS OF A NON-NEWTONIAN MICROPOLAR FLUID*, Hindawi Publishing Corporation Journal of Applied Mathematics Volume 2015, Article ID 481754, 11 pages. (2015)

[2] G. Lukaszewicz, *Micropolar Fluids, Theory and applications*, Modeling and simulations in Science, Engineering and Technology, Birkhäuser Boston, Inc.,Boston, MA, 1999.

[3] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Resolution Des Problémes Aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[4] J. Málek, J. Nečas, and M. Rùžička, *On weak solutions to a class of non-Newtonian incompressible fluids in bounded three-dimensional domains: the case $p\ge 2$*, Advances in Differential Equations, Vol. 6, N. 3, March 2001, pp. 257-302

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *25–26*

# A CLASS OF DIFFUSION PROBLEM OF KIRCHHOFF TYPE WITH VISCOELASTIC TERM INVOLVING THE FRACTIONAL LAPLACIAN

EUGENIO CABANILLAS L.,[1,†], EMILIO M. CASTILLO J.[1,‡], JUAN B. BERNUI B.[1,§] & CARLOS E. NAVARRO P.[2,§§].

[1]Instituto de Investigación, Facultad de Ciencias Matemáticas-UNMSM, Lima-Perú [2]Instituto de Investigación, Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática -UNMSM, Lima-Perú

[†]cleugenio@yahoo.com, [‡]ecastilloj@unmsm.edu.pe, [§]jbernuibunmsm.edu.pe, [§§]cnavarrodp@unmsm.edu.pe

**Abstract**

This work is concerned with a class of diffusion problem of Kirchhoff type with viscoelastic term and nonlinear interior source in the setting of the fractional Laplacian. Under suitable conditions we prove the existence of global solutions and the exponential decay of the energy.

## 1 Introduction

The objective of this research is to study the following nonlinear fractional Kirchhoff type diffusion problem

$$\begin{aligned} &\left(1+a|u|^{r-2}\right)u_t + M(\|u\|_{w_0}^2)(-\Delta)^s u - \int_0^t g(t-\tau)(-\Delta)^s u(\tau)d\tau = |u|^{\rho-2}u \quad \text{in } \Omega\times\mathbb{R}^+, \\ &u = 0 \qquad \text{in } (\mathbb{R}^n\backslash\Omega)\times\mathbb{R}_0^+ \\ &u(x,0) = u^0(x) \qquad \text{in } \Omega \end{aligned} \tag{1}$$

where $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ , is a smooth bounded domain, $M(t) = t^{\alpha-1}$ , $t \geq 0$ , $s \in ]0,1[$ , $2\alpha < \rho < 2_s^* = \frac{2N}{N-2s}$ , $2 < \frac{N}{s}$ $\alpha \in [1, \dfrac{2_s^*}{2}[$ ; $a, r$ are given positive constants, $r \in \left(2, \frac{2n}{n-2}\right)$ if $n \geq 3$ while $r \in (2,\infty)$ if $n = 1,2$,

$$g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+ \quad \text{belongs to } C^1(\mathbb{R}_0^+) \qquad , \qquad g(0) > 0 \ , \qquad \ell = 1 - \int_0^\infty g(\tau)d\tau > 0 \ , \ g'(t) \leq 0$$

and the space $W_0$ will be specified later.
In recent years nonlinear equations involving fractional powers of the Laplace operator have played an increasingly important role in physics, probability, and finance, see for instance [1] and the references therein. More recently many works of the form (1) and its variants have been used to model diffusion processes (see [2, 3], among many others), but without viscoelastic term( that is $g \equiv 0$) and the nonlinear diffusion term $|u|^{r-2}u_t$. Motivated by the above articles and [3], we focus on the well posedness and large time behavior of solutions of (1).

## 2 Notations and Main Results

We denote $Q = \mathbb{R}^{2n} \setminus (\mathcal{C}\Omega \times \mathcal{C}\Omega)$ and $\mathcal{C}\Omega := \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. We define $W$, the usual fractional Sobolev space

$$W = \left\{u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} : u|_\Omega \in L^2(\Omega), \int\int_Q \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\, dx\, dy < \infty\right\},$$

where $u|_\Omega$ represents the restriction to $\Omega$ of function $u(x)$. Also, we define the following linear subspace of $W$,

$$W_0 = \left\{u \in W : u = 0 \text{ a.e. in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega\right\}.$$

The linear space $W$ is endowed with the norm

$$\|u\|_W := \|u\|_{L^2(\Omega)} + \Big(\int\int_Q \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy\Big)^{1/2}.$$

It is easily seen that $\|\cdot\|_W$ is a norm on $W$ and $C_0^\infty(\Omega) \subseteq X_0$ . Also, we know that $W_0$, endowed with the norm

$$\|v\|_{W_0} = \Big(\int\int_Q \frac{|v(x)-v(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy\Big)^{1/2} \quad \text{for all } v \in W_0, \tag{2}$$

is a Hilbert space. Now, we define

$$J(u) = \frac{C_0}{2\alpha}\,\|u\|_{W_0}^{2\alpha} - \frac{1}{\rho}\,\|u\|_\rho^\rho \quad , \quad I(u) = C_0\,\|u\|_{W_0}^{2\alpha} - \|u\|_\rho^\rho\,,$$

the potential well $V = \{u \in W_0 :\ I(u) > 0\ ,\ J(u) < d\} \cup \{0\}$ with $d = \inf\limits_{\substack{u\in W_0\\ u\neq 0}} \sup\limits_{\lambda\geq 0} J(\lambda_u)$, and the energy functional

$$E(t) = \Big(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\int_0^t g(\tau)d\tau\Big)\iint\limits_Q \frac{|u(x,t)-u(y,t)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy + \frac{1}{2}g\Box\iint\limits_Q \frac{(u(x,t)-u(y,t))}{|x-y|^{\frac{N}{2}+s}}dxdy - \frac{1}{\rho}\,\|u\|_\rho^\rho$$

where $(g\Box\phi)(t) = \displaystyle\int_0^t g(t-\tau)\,|\phi(t)-\phi(\tau)|^2\,d\tau$

**Theorem 2.1.** *Suppose* $2 < \rho \leq r$ *or* $r < \rho < 2 + \frac{2r}{n}$ ; $u_0 \in W_0$ , $J(u_0) = d$ , $I(u_0) > 0$ *or* $0 < J(u_0) \leq d$ , $I(u_0) = 0$. *Then problem* (1) *admits a global weak solution* $u$, *such that* $u(x,t) \in \overline{V} = \{u \in W_0\ :\ J(u) \leq d\ ,\ I(u) \geq 0\}$
*In addition, if there exists a constant* $C > 0$ *such that* $g'(t) \leq -Cg(t)$ , *then this solution satisfies*

$$E(t) \leq L_0 e^{-\gamma t}, \forall t \geq 0$$

*where* $L_0$ *and* $\gamma$ *are two positive constants.*

**Proof** We apply the Galerkin method and the potential well theory to prove the existence. The decay estimate of solutions is established by means of Lemma of V. Komornik ■

## References

[1] L. CAFFARELLI - *Non-local diffusions, drifts and games*, Nonlinear partial differential equations, Abel Symposia **7**, Springer, Heidelberg, 37-52, 2016

[2] PAN N. , ZHANG B. , CAO J. -Degenerate Kirchhoff - type diffusion problems involving the fractional p-Laplacian *Nonlinear Anal.Real* , **37** 56-70 , 2017.

[3] FU Y. , PUCCI P. - On solutions of space - fractional diffusion equations by means of potential wells. *Elect. J. Q. Theo.* , **70**, 1-17, 2016.

[4] TRUONG L. X.. , VAN N.Y. - On a class of nonlinear heat equations with viscoelastic term. *Comput. Math. Appl*, **72**,1 , 216-232, 2016.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *27–28*

# ESTIMATIVAS PARA A NORMA DO SUP PARA UMA EQUAÇÃO DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO DUPLAMENTE NÃO LINEAR: CASO GERAL

JOCEMAR Q. CHAGAS[1,†], PATRÍCIA L. GUIDOLIN[2,DDAG] & PAULO R. ZINGANO[3,§].

[1]Depto. de Matemática e Estatística, UEPG, PR, Brasil, [2]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, RS, Brasil, [3]Depto. de Matemática Pura e Aplicada, UFRGS, RS, Brasil

O primeiro autor: Parc. ap. p/ Fundação Araucária -Cham. públ. 08/2017

†jocemarchagas@uepg.br, ‡patricia.guidolin@viamao.ifrs.edu.br, §paulo.zingano@ufrgs.br

**Abstract**

Vamos indicar como é possível usar algumas desigualdades de energia padrão para obter, de uma forma relativamente curta, a derivação da seguinte estimativa fundamental na norma do sup

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p,\alpha,\beta,\kappa).\max\Big\{\big\|u(\cdot,t_0)\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)};\big(\mathbb{B}(t_0;t)\big)^{\delta_1}\big(\mathbb{U}_p(t_0;t)\big)^{\delta_2}\Big\}, \quad \forall\ t>0,$$

onde $\delta_1 = \frac{n}{n(\alpha+\beta-\kappa)+p(\beta+1)}$ e $\delta_2 = \frac{p(\beta+1)}{n(\alpha+\beta-\kappa)+p(\beta+1)}$, para soluções da equação de adveção-difusão duplamente não linear regularizada

$$u_t + div\big(\boldsymbol{f}(x,t,u)\big) = div\big(|u|^\alpha|\nabla u|^\beta\nabla u\big) + \eta\,\Delta u,$$

quando $\boldsymbol{f}$ atende a condições gerais, expostas a seguir. $\mathbb{B}(t_0;t)$ e $\mathbb{U}_p(t_0;t)$ também serão definidas a seguir.

## 1 Introdução

Consideraremos o problema regularizado

$$\begin{cases} u_t + div\big(\boldsymbol{f}(x,t,u)\big) = div\big(|u|^\alpha|\nabla u|^\beta\nabla u\big) + \eta\,\Delta u, & x\in\mathbb{R}^n,\ t>0, \\ u(\cdot,0) = u_0 \ \in\ L^{p_0}(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n), \end{cases} \tag{1}$$

onde $\eta > 0$ está fixo e $1 \leq p_0 < \infty$ é dado; $\alpha$ e $\beta$ são constantes, com $\alpha,\beta \geq 0$ e $\alpha+\beta > 0$; e a função $\boldsymbol{f}(x,t,u)$ satisfaz $|\boldsymbol{f}(x,t,u)| \leq B(T)|u|^{\kappa+1}$, onde $B(T) < \infty$, definida adequadamente para $\kappa \geq 0$, $\forall\ x\in\mathbb{R}^n$, $t\geq 0$, $u\in\mathbb{R}$, denota a *variação* de $\boldsymbol{f}(x,t,u)$ em $\mathbb{R}^n$ e controla o tamanho de suas derivadas, e apresentaremos as ideias que permitem obter para suas soluções a seguinte estimativa fundamental na norma do sup:

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p,\alpha,\beta,\kappa).\max\Big\{\big\|u(\cdot,t_0)\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)};\big(\mathbb{B}(t_0;t)\big)^{\delta_1}\big(\mathbb{U}_p(t_0;t)\big)^{\delta_2}\Big\}, \quad \forall\ t>0, \tag{2}$$

bem como estipular os valores de $\delta_1$ e $\delta_2$ para os quais a estimativa é válida. As grandezas $\mathbb{B}(t_0;t)$ e $\mathbb{U}_p(t_0;t)$ são definidas como $\mathbb{B}(t_0;t) := \sup\limits_{t_0\leq\tau\leq t}\big(B(\tau)\big)$, para $0 \leq t_0 \leq t < T_*$, e $\mathbb{U}_p(t_0;t) := \sup\limits_{t_0\leq\tau\leq t}\Big(\|u(\cdot,\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\Big)$, para $1 \leq p_0 \leq p \leq \infty$. A existência de solução suave para o problema regularizado (1) em um determinado intervalo $[0,T_*)$ é garantida pela teoria geral de equações parabólicas (ver, por ex., [3]). As ideias aqui apresentadas podem ser vistas com mais detalhes, por exemplo, em [1], onde estão aplicadas a uma equação um pouco mais simples; ou em [2], onde $\boldsymbol{f}(x,t,u)$ satisfaz a uma condição adicional de estabilidade.

A seguir, indicaremos os principais passos a percorrer no caminho de se obter (2).

## 2 Principais Resultados

Inicialmente derivamos a importante desigualdade de energia

$$\frac{d}{dt}\big\|u(\cdot,t)\big\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q + q\,(q-1)\int_{\mathbb{R}^n}\big|u(x,t)\big|^{q-2+\alpha}|\nabla u(x,t)|^{\beta+2}dx \leq q\,(q-1)\int_{\mathbb{R}^n}\big|u(x,t)\big|^{q-2}\nabla u(x,t)\cdot \boldsymbol{f}(x,t,u)dx, \qquad (1)$$

válida para as soluções de (1), para todo $q$ satisfazendo $q \geq p \geq p_0$ e $q \geq 2$, e para todo $t \in (0,T_*)\backslash E_q$, onde $E_q \subset (0,\infty)$ é um conjunto de medida nula. Para $p \geq p_0$, alteramos a hipótese $p_0 \leq p \leq q$ para $\sigma p \leq q < \infty$, com $\sigma$ satisfazendo a $\sigma \geq 1$ e $\sigma \geq 1 + \frac{\gamma_-}{p}$, onde $\gamma_-$ denota a parte negativa de $\gamma = \frac{\kappa(\beta+2)-(\alpha+\beta)}{(\beta+1)}$ ($p$ deve satisfazer, adicionalmente, a condição $p \geq \frac{n(\kappa-(\alpha+\beta))}{(\beta+1)}$), e, juntamente com a desigualdade de energia (1), usamos a desigualdade de interpolação do tipo Sobolev-Nirenberg-Gagliardo (SNG):

$$\|w(\cdot,t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|w(\cdot,t)\|_{L^s(\mathbb{R}^n)}^{1-\theta}\,\|\nabla w(\cdot,t)\|_{L^{\widetilde{p}}(\mathbb{R}^n)}^{\theta}, \quad \forall\ w \in C_0^1(\mathbb{R}^n),$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$, e $r$, $s$ e $\widetilde{p}$ satisfazem a $0 < s \leq r \leq \infty$, $1 \leq \widetilde{p} \leq \infty$, e $\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{\widetilde{p}} - \frac{1}{n}\right)\theta + \frac{(1-\theta)}{s}$, para provar, em duas etapas, o que chamamos de *Lema Fundamental*, um resultado que relaciona as normas $L^q$ e $L^{q/\sigma}$ das soluções $u(\cdot,t)$:

**Lema 2.1. (Lema Fundamental)** *Seja $u(\cdot,t) \in L^{\infty}_{loc}([0,T_*), L^{\infty}(\mathbb{R}^n))$ solução do problema (1), para $0 \leq t < T_*$. Se $q$ satisfaz a $q \geq 2$ e $\sigma p \leq q < \infty$, então, para cada $0 \leq t_0 < T_*$, vale*

$$\mathbb{U}_q(t_0;t) \leq \max\left\{\big\|u(\cdot,t_0)\big\|_{L^q(\mathbb{R}^n)};\ K(q)\,\mathbb{B}(t_0;t)^{\frac{n(\sigma-1)}{(\beta+1)(q-\sigma a)}}\,\mathbb{U}_{q/\sigma}(t_0;t)^{\frac{(q-a)}{(q-\sigma a)}}\right\},$$

*onde* $a = \dfrac{n[\kappa-(\alpha+\beta)]}{(\beta+1)}$ *e* $K(q) = \left(\dfrac{(q+\alpha+\beta)}{(\beta+2)}\right)^{\frac{n(\sigma-1)}{q-\sigma a}}.(C_1)^{\frac{(q+\gamma)}{(q+\alpha+\beta)}\frac{n(\sigma-1)}{(q-\sigma a)}}.(C_2)^{\frac{(\beta+2)}{(q+\alpha+\beta)}}$

Utilizamos o Lema Fundamental, juntamente com um procedimento iterativo, para obtermos, em mais algumas etapas, o resultado principal deste trabalho, uma estimativa para limitação da norma do sup da solução $u(\cdot,t)$ do problema (1), para $0 < t < T_* \leq \infty$:

**Teorema 2.1.** *Seja $u(\cdot,t) \in L^{\infty}_{loc}([0,T_*), L^{\infty}(\mathbb{R}^n))$ solução do problema (1), para $0 \leq t < T_*$. Dado $p \geq p_0$, para cada $0 \leq t_0 < t < T_*$ vale*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p,\alpha,\beta,\kappa).\max\left\{\big\|u(\cdot,t_0)\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)};\ \big(\mathbb{B}(t_0;t)\big)^{\delta_1}\big(\mathbb{U}_p(t_0;t)\big)^{\delta_2}\right\}, \quad \forall\ t > 0,$$

*onde* $\delta_1 = \frac{n}{n(\alpha+\beta-\kappa)+p(\beta+1)}$ *e* $\delta_2 = \frac{p(\beta+1)}{n(\alpha+\beta-\kappa)+p(\beta+1)}$.

**Obs:** Os valores de $\delta_1$ e $\delta_2$ obtidos são compatíveis por análise de escalas.

## References


[1] BRAZ E SILVA, P.; SCHÜTZ, L.; ZINGANO, P. R. - On some energy inequalities and supnorm estimates for advection-diffusion equations in $\mathbb{R}^n$, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, v. 93, 90-96, 2013.

[2] CHAGAS, J. Q.; GUIDOLIN, P. L.; ZINGANO, P. R. - Norma do sup para equações de advecção-difusão duplamente não lineares: um caso de decrescimento, *Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics*, v. 5, N. 1, 2017. DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0034

[3] FRIEDMAN, A. - *Partial Differential Equations*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.

[4] LADYZHENSKAYA, 0. A.; SOLONNIKOV, V. A.; URALCEVA, N. N. - *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, American Mathematical Society, Providence, 1968.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *29–30*

# REGULARITY PRINCIPLE ON SEQUENCE SPACES

NACIB ALBUQUERQUE[1,†] & LISIANE REZENDE[1,‡]

[1]DM / CCEN , UFPB, PB, Brasil

[†]ngalbqrq@mat.ufpb.br, [‡]lirezendestos@gmail.com

**Abstract**

A quite general anisotropic regularity principle in sequence spaces is proved. As applications we provide an inclusion theorem and improve results regarding Hardy–Littlewood inequalities for multilinear forms.

## 1 Introduction

Regularity techniques are crucial in many fields of pure and applied sciences. Recently, Pellegrino, Teixeira, Santos and Serrano addressed a regularity problem in sequence spaces with deep connections with the Hardy–Littlewood inequalities (see [3]). Despite of the general status of the result, basic facts are used along its proof:

**Lemma 1.1** (Classical Linear Inclusion). *If $s \geq r$, $q \geq p$ and $\frac{1}{p} - \frac{1}{r} \leq \frac{1}{q} - \frac{1}{s}$, then every absolutely $(r;p)$-summing linear operator is absolutely $(s;q)$-summing.*

**Lemma 1.2** (Inclusion on $\ell_p$ spaces). *For $q \geq p > 0$, $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_p$.*

**Lemma 1.3** (Minkowski's inequality). *For any $0 < p \leq q < \infty$ and for any scalar matrix $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$,*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|^q\right)^{p/q}\right)^{1/p}.$$

The techniques and arguments explored paves the way to a stronger anisotropic regularity principle for sequence spaces. As application, an anisotropic inclusion theorem for summing operators is obtained and a new Hardy–Littlewood inequality for multilinear operators arise.

## 2 Main Results

Initially some useful notation is established. For $\mathbf{p} \in [1,+\infty]^m$ and each $k \in \{1,\ldots,m\}$ , we define $\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\geq k} := \frac{1}{p_k} + \cdots + \frac{1}{p_m}$. When $k=1$ we write $\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|$ instead of $\left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\geq 1}$. Let $m \geq 2$ and $Z_1$, $V$ and $w_1,\ldots,W_m$ be arbitrary non-empty sets and $Z_2,\ldots,Z_m$ be vector spaces. Let also $R_k : Z_k \times W_k \to [0,\infty)$ and $S : Z_1 \times \cdots \times Z_m \times V \to [0,\infty)$ be arbitrary maps, with $k = 1,\ldots,m$, satisfying

$$R_k(\lambda z, w) = \lambda R_k(z,w) \quad \textit{and} \quad S(z_1,\ldots,z_{j-1},\lambda z_j, z_{j+1},\ldots,z_m,\nu) = \lambda S(z_1,\ldots,z_{j-1},z_j,z_{j+1},\ldots,z_m,\nu)$$

for all scalars $\lambda \geq 0$ and $j,k \in \{2,\ldots,m\}$. We shall work with each $p_k \geq 1$ and also assuming that

$$\sup_{w\in W_k}\left(\sum_{j=1}^{n_k} R_k\left(z_j^k, w\right)^{p_k}\right)^{\frac{1}{p_k}} < \infty, \quad k = 1,\ldots,m.$$

The Regularity Principle provided read as follows.

**Theorem 2.1** (Anisotropic Regularity Principle [1])**.** *Let $m$ be a positive integer, $r \geq 1$, $\mathbf{s}, \mathbf{p}, \mathbf{q} \in [1, +\infty)^m$ be such that $q_k \geq p_k$, for $k = 1, \ldots, m$ and $\frac{1}{r} - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| + \left|\frac{1}{\mathbf{q}}\right| > 0$. Assume that there exists a constant $C > 0$ such that*

$$\sup_{\nu \in V} \left( \sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_m=1}^{n_m} S\left(z_{j_1}^1, \ldots, z_{j_m}^m, \nu\right)^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \cdot \prod_{k=1}^{m} \sup_{w \in W_k} \left( \sum_{j=1}^{n_k} R_k\left(z_j^k, w\right)^{p_k} \right)^{\frac{1}{p_k}},$$

*for all $z_j^{(k)} \in Z_k$ and $n_k \in \mathbb{N}$ with $k = 1, \ldots, m$. Then*

$$\sup_{\nu \in V} \left( \sum_{j_1=1}^{n_1} \left( \cdots \left( \sum_{j_m=1}^{n_m} S\left(z_{j_1}^1, \ldots, z_{j_m}^m, \nu\right)^{s_m} \right)^{\frac{s_{m-1}}{s_m}} \cdots \right)^{\frac{s_1}{s_2}} \right)^{\frac{1}{s_1}} \leq C \cdot \prod_{k=1}^{m} \sup_{w \in W_k} \left( \sum_{j=1}^{n_k} R_k\left(z_j^k, w\right)^{q_k} \right)^{\frac{1}{q_k}},$$

*for all $z_j^{(k)} \in Z_k$ and $n_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, \ldots, m$, with $\frac{1}{s_k} - \left|\frac{1}{\mathbf{q}}\right|_{\geq k} = \frac{1}{r} - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\geq k}$, for $k \in \{1, \ldots, m\}$.*

An improvement of Bayart's inclusion result [2, Theorem 1.2] is also obtained.

**Theorem 2.2** (Inclusion Theorem)**.** *Let $m$ be a positive integer, $r \geq 1$, $\mathbf{s}, \mathbf{p}, \mathbf{q} \in [1, +\infty)^m$ are such that $q_k \geq p_k$, for $k = 1, \ldots, m$ and $\frac{1}{r} - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right| + \left|\frac{1}{\mathbf{q}}\right| > 0$. Then*

$$\Pi^m_{(r;\mathbf{p})}\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right) \subset \Pi^m_{(\mathbf{s};\mathbf{q})}\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right),$$

*for any Banach spaces $X_1, \ldots, X_m$, with $\frac{1}{s_k} - \left|\frac{1}{\mathbf{q}}\right|_{\geq k} = \frac{1}{r} - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\geq k}$, for each $k \in \{1, \ldots, m\}$, and the inclusion operator has norm 1.*

The announced version of Hardy-Littlewood is the following.

**Theorem 2.3.** *Let $m$ be a positive integer and $\mathbf{p} \in [1, +\infty)^m$ such that $|1/\mathbf{p}| < 1$ and $p_1, \ldots, p_m \leq 2m$. Then, for all continuous $m$-linear forms $A : \ell_{p_1} \times \cdots \times \ell_{p_m} \to \mathbb{K}$*

$$\left( \sum_{j_1=1}^{\infty} \left( \cdots \left( \sum_{j_m=1}^{\infty} \left\| A\left(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m}\right) \right\|^{s_m} \right)^{\frac{s_{m-1}}{s_m}} \cdots \right)^{\frac{s_1}{s_2}} \right)^{\frac{1}{s_1}} \leq D^{\mathbb{K}}_{m,p,\mathbf{s}} \|A\|$$

*with $s_k = \left[\frac{1}{2} + \frac{m-k+1}{2m} - \left|\frac{1}{\mathbf{p}}\right|_{\geq k}\right]^{-1}$, for $k = 1, \ldots, m$.*

## References


[1] ALBUQUERQUE, N. AND REZENDE, L. - Anisotropic Regularity Principle in sequence spaces and applications, arXiv:1706.00821v2 [math.FA], 2017.

[2] BAYART, F. - Multiple summing maps: coordinatewise summability, inclusion theorems and $p$-Sidon sets, arXiv:1704.04437v1 [math.FA], 2017.

[3] PELLEGRINO, D., SANTOS., J., SERRANO, D. AND TEIXEIRA, E. - Regularity principle in sequence spaces and applications. *Bulletin des Science Mathematics*, in press.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *31–32*

# CONSTRUCTING HOLOMORPHIC FUNCTIONS WITH DISTINGUISHED PROPERTIES

THIAGO R. ALVES[1,†] & GERALDO BOTELHO[2,‡]

[1]ICE, UFAM, AM, Brasil
Partially supported by PDJ Ciência sem Fronteiras CNPq Grant 50756/2015-1, [2]FAMAT, UFU, MG, Brasil
Supported by CNPq Grant 305958/2014-3 and Fapemig Grant PPM-00490-15

[†]tralves.math@gmail.com, [‡]botelho@ufu.br

**Abstract**

In this work we develop a method to construct the following types of holomorphic functions $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ on some open subsets $U$ of an infinite dimensional complex Banach space: (i) $f$ is bounded holomorphic on $U$ and is continuously but not uniformly continuously extended to $\overline{U}$; (ii) $f$ is continuous on $\overline{U}$ and holomorphic of bounded type on $U$ but $f$ is unbounded on $U$; (iii) $f$ is holomorphic of bounded type on $U$ and $f$ cannot be continuously extended to $\overline{U}$. The technique we develop is powerful enough to provide, in the cases (ii) and (iii) above, large algebraic structures formed by such functions (up to the null function, of course).

## 1 Introduction

The study of algebras of holomorphic functions is a classical topic in function theory. When the subject comes to holomorphic functions of infinitely many variables, several different properties of such functions should be considered (see, e.g, [3]). A central question is the existence, or not, of functions enjoying certain important properties. It is usually a very difficult task to construct such functions. A cornerstone in this study was the construction, by Aron, Cole and Gamelin [2], of a bounded holomorphic function on the open unit ball of an infinite dimensional complex Banach space that is continuously but not uniformly continuously extended to the closed unit ball (let us call such functions *Aron-Cole-Gamelin functions*). The main purpose of our work is to develop a method to construct holomorphic functions of infinitely many variables satisfying certain prescribed distinguished properties. For instance, we show how to construct, for the first time to the best of our knowledge, Aron-Cole-Gamelin functions on certain open sets not necessarily the open unit ball.

The method we develop is powerful enough to go, in certain cases, beyond the mere existence of such special holomorphic functions. The sets formed by such functions usually fail to be linear subspaces of the underlying space of holomorphic functions, even if the null function is added. In the last 20 years many authors have devoted their attention to the existence, or not, of linear structures within nonlinear sets. The recent monograph [1] gives an account of how productive this trend in Functional Analysis, called Lineability, has been. A whole chapter is devoted to lineability in spaces of holomorphic functions. The method we develop in this work allows us to prove, in the cases (ii) and (iii) described in the Abstract, the existence of large algebraic structures, such as closed infinite dimensional subspaces and free subalgebras, formed by such special holomorphic functions (up to the null function).

## 2 Main Results

Let $E$ be an infinite dimensional complex Banach space and $U$ be an open subset of $E$. Let us describe the algebras of holomorphic functions we shall deal with:

• $\mathcal{H}^\infty_{uc}(U)$ denotes the algebra of all uniformly continuous functions $f\colon \overline{U} \longrightarrow \mathbb{C}$ which are bounded and holomorphic on $U$.

• $\mathcal{H}_c^\infty(U)$ denotes the algebra of all continuous functions $f\colon \overline{U} \longrightarrow \mathbb{C}$ which are bounded and holomorphic on $U$.

• $\mathcal{H}_b(U)$ denotes the algebra of all holomorphic functions $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ of bounded type, that is, functions that are bounded on each open subset $V \subset U$ such that $d_U(V) := dist(V, E \setminus U) = \inf\{\|x-y\| : x \in V, y \in E \setminus U\} > 0$.

• $\mathcal{H}_{bc}(U)$ denotes the algebra of all continuous functions $f\colon \overline{U} \longrightarrow \mathbb{C}$ such that $f|_U \in \mathcal{H}_b(U)$.

Let us also consider the set $\widetilde{\mathcal{H}}_{bc}(U) := \{f|_U : f \in \mathcal{H}_{bc}(U)\}$.

We work with open subsets of infinite dimensional Banach spaces satisfying certain conditions regarding the existence of strong peak points for $\mathcal{H}_{uc}^\infty(U)$ (for a definition see, e.g., [4]). The set of all strong peak points for $\mathcal{H}_{uc}^\infty(U)$ will be denoted by $\mathcal{SP}(\mathcal{H}_{uc}^\infty(U))$. Let us describe the main results we prove:

**Theorem 2.1.** *If $\mathcal{SP}(\mathcal{H}_{uc}^\infty(U))$ is not a relatively compact subset of $E$, then there exists a sequence of holomorphic functions $(g_n)_{n=1}^\infty$ in $\mathcal{H}_{uc}^\infty(U)$ such that the function $g\colon \overline{U} \longrightarrow \mathbb{C}$, $g(x) := \sum\limits_{n=1}^\infty g_n(x)$, belongs to $\mathcal{H}_c^\infty(U) \setminus \mathcal{H}_{uc}^\infty(U)$. Moreover, the series $\sum\limits_{n=1}^\infty g_n$ converges to $g$ in $\mathcal{H}_{bc}(U)$.*

In the proof of Theorem 2.1 we provide a method to construct functions in $\mathcal{H}_c^\infty(U)$ but not in $\mathcal{H}_{uc}^\infty(U)$, where $U$ is not necessarily the open unit ball. This method is used in order to prove the following two theorems:

**Theorem 2.2.** *If $\mathcal{SP}(\mathcal{H}_{uc}^\infty(U))$ is not a relatively compact subset of $E$, then there exists a sequence of holomorphic functions $(g_n)_{n=1}^\infty$ in $\mathcal{H}_{uc}^\infty(U)$ such that the function $g\colon \overline{U} \longrightarrow \mathbb{C}$ , $g(x) := \sum\limits_{n=1}^\infty g_n(x)$, belongs to $\mathcal{H}_{bc}(U) \setminus \mathcal{H}_c^\infty(U)$. Furthermore, the series $\sum\limits_{n=1}^\infty g_n$ converges to $g$ in $\mathcal{H}_{bc}(U)$.*

**Theorem 2.3.** *If $\mathcal{SP}(\mathcal{H}_{uc}^\infty(U)) \neq \emptyset$, then the set $\mathcal{H}_b(U) \setminus \widetilde{\mathcal{H}}_{bc}(U)$ is nonempty.*

A subset $B$ of a topological vector space $V$ is called *spaceable* if there exists a closed infinite dimensional vector subspace $W$ of $V$ such that $W \subset B \cup \{0\}$. As consequences of the proofs of Theorems 2.2 and 2.3, we can obtain:

**Corollary 2.1.** *If $\mathcal{SP}(\mathcal{H}_{uc}^\infty(U))$ is not a relatively compact subset of $E$, then the set $\mathcal{H}_{bc}(U) \setminus \mathcal{H}_c^\infty(U)$ is spaceable.*

**Corollary 2.2.** *If $\mathcal{SP}(\mathcal{H}_{uc}^\infty(U)) \neq \emptyset$, then the set $\mathcal{H}_b(U) \setminus \widetilde{\mathcal{H}}_{bc}(U)$ is spaceable.*

Let $X$ be an arbitrary set and let $\mathcal{A}$ be an algebra of functions $f\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$. We recall that a subset $B \subset \mathcal{A}$ is said to be *strongly algebrable* if there exists a subalgebra $\mathcal{B}$ of $\mathcal{A}$ which contains an infinite algebraically independent set of generators such that $\mathcal{B} \subset B \cup \{0\}$. The method we develop allows us to prove the following two theorems.

**Theorem 2.4.** *If the set $\mathcal{SP}(\mathcal{H}_{uc}^\infty(U))$ is not relatively compact in $E$, then $\mathcal{H}_{bc}(U) \setminus \mathcal{H}_c^\infty(U)$ is strongly algebrable.*

**Theorem 2.5.** *If $\mathcal{SP}(\mathcal{H}_{uc}^\infty(U)) \neq \emptyset$, then $\mathcal{H}_b(U) \setminus \widetilde{\mathcal{H}}_{bc}(U)$ is strongly algebrable.*

## References


[1] ARON, R. M., BERNAL-GONZÁLEZ, L., PELLEGRINO, D. M. AND SEOANE-SEPÚLVEDA, J. B. - *Lineability: The Search for Linearity in Mathematics*, Monographs and Research Notes in Mathematics. CRS Press, Boca Raton, FL, 2016.

[2] ARON, R. M.; COLE, B. J. AND GAMELIN, T. W. - The spectra of algebras of analytic functions associated with a Banach space. *J. Reine Angew. Math.*, **415**, 51-93, 1991.

[3] DINEEN, S. - *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces.*, Springer, 1999.

[4] LARSEN, R. - *Banach Algebras*, Marcel-Dekker, 1973.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *33–34*

# LINEABILITY IN SEQUENCE AND FUNCTION SPACES

GUSTAVO ARAÚJO[1,†]

[1]Departamento de Matemática, Centro de Ciências e Tecnologia, UEPB, PB, Brasil

[†]gdasaraujo@gmail.com

**Abstract**

It is proved the existence of large algebraic structures –including large vector subspaces or infinitely generated free algebras– inside, among others, the family of Lebesgue measurable functions that are surjective in a strong sense, and the family of nonconstant differentiable real functions vanishing on dense sets. Lineability in special spaces of sequences is also investigated. Some of our findings complete or extend a number of results by several authors. The results presented here are part of a joint paper with L. Bernal-González, G.A. Muñoz-Fernández, J.A. Prado-Bassas and J.B. Seoane-Sepúlveda.

## 1 Introduction and notation

Lebesgue was probably the first to show an example of a real function on the reals satisfying the rather surprising property that it takes on each real value in any nonempty open set. The functions satisfying this property are called *everywhere surjective*. Of course, such functions are nowhere continuous but, as we will see later, it is possible to construct a *Lebesgue measurable* everywhere surjective function. Entering a very different realm, in 1906 Pompeiu [3] was able to construct a nonconstant differentiable function on the reals whose derivative *vanishes on a dense set*. In this work, among other things, we consider the families consisting of each of these kinds of functions, as well as two special families of sequences, and analyze the existence of large algebraic structures inside all these families.

The search of large algebraic structures of mathematical objects enjoying certain special or unexpected properties is called lineability. Nowadays the topic of lineability has had a major influence in many different areas on mathematics, from Real and Complex Analysis, to Set Theory, Operator Theory, and even (more recently) in Probability Theory. Our main goal here is to continue with this ongoing research.

A number of concepts have been coined in order to describe the algebraic size of a given set (see [2]). If $X$ is a vector space, $\alpha$ is a cardinal number and $A \subset X$, then $A$ is said to be *$\alpha$-lineable* if there exists a vector space $M$ with $\dim(M) = \alpha$ and $M \setminus \{0\} \subset A$, and *maximal lineable* in $X$ if $A$ is $\dim(X)$-lineable. If, in addition, $X$ is a topological vector space, then $A$ is said to be *dense-lineable* in $X$ whenever there is a dense vector subspace $M$ of $X$ satisfying $M \setminus \{0\} \subset A$, and *maximal dense-lineable* in $X$ whenever there is a dense vector subspace $M$ of $X$ satisfying $M \setminus \{0\} \subset A$ and $\dim(M) = \dim(X)$. When $X$ is a topological vector space contained in some (linear) algebra then $A$ is called *algebrable* if there is an algebra $M$ so that $M \setminus \{0\} \subset A$ and $M$ is infinitely generated; $A$ is called *densely algebrable* in $X$ if, in addition, $M$ can be taken dense in $X$; $A$ is called *$\alpha$-algebrable* if there is an $\alpha$-generated algebra $M$ with $M \setminus \{0\} \subset A$; $A$ is called *strongly $\alpha$-algebrable* if there exists an $\alpha$-generated *free* algebra $M$ with $M \setminus \{0\} \subset A$; $A$ is called *densely strongly $\alpha$-algebrable* if, in addition, the free algebra $M$ can be taken dense in $X$.

Let us fix some other notations. The symbol $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ will stand for the vector space of all real continuous functions endowed with the topology of the convergence in compacta. By $\mathcal{MES}$ it is denoted the family of Lebesgue measurable everywhere surjective functions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is said to be a *Pompeiu function* provided that it is differentiable and $f'$ vanishes on a dense set in $\mathbb{R}$. The symbol $\mathcal{P}$ stand for the vector space of Pompeiu functions.

## 2 Main Results

Here we will present several lineability properties of the families $\mathcal{MES}$ and $\mathcal{P}$ and also of the subsets of convergent and divergent series for which classical tests of convergence fail. Moreover, convergence in measure versus convergence almost everywhere will be analyzed in the space of sequences of measurable Lebesgue functions on the unit interval. For more details see [1]. From now on $\mathfrak{c}$ denotes the cardinality of the continuum.

**Theorem 2.1.** *The set $\mathcal{MES}$ is $\mathfrak{c}$-lineable.*

The previous result is quite surprising, since it is well known that the class of everywhere surjective functions contains a $2^{\mathfrak{c}}$-lineable set of non-measurable ones (called *Jones functions*).

Now we present a result on lineability of the set of Pompeiu functions that are not constant on any interval.

**Theorem 2.2.** *The set of functions in $\mathcal{P}$ that are nonconstant on any non-degenerated interval of $\mathbb{R}$ is densely strongly $\mathfrak{c}$-algebrable in $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.*

In view of the last theorem one might believe that the expression "$f'$ vanishes on a dense set" (see the definition of $\mathcal{P}$) could be replaced by the stronger one "$f' = 0$ almost everywhere". But this is not possible because every differentiable function is an N-function –that is, it sends sets of null measure into sets of null measure– and every continuous N-function on an interval whose derivative vanishes almost everywhere must be a constant.

Our goal now is to present a result which shows that the set of convergent series for which the ratio test or the root test fails –that is, provide no information whatsoever– is lineable in a rather strong sense. The same result is obtained for divergent series. Let $\omega := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ be the space of all real sequences and its subset $\ell_1$, the space of all absolutely summable real sequences.

**Theorem 2.3.** *The following four sets are maximal ($\mathfrak{c}$-) dense-lineable in $\ell_1$, $\ell_1$, $\omega$ and $\omega$, respectively:*

*a) The set of sequences in $\ell_1$ for whose generated series the ratio test fails;*

*b) The set of sequences in $\ell_1$ for whose generated series the root test fails;*

*c) The set of sequences in $\omega$ that generate divergent series for which the ratio test fails;*

*d) The set of sequences in $\omega$ that generate divergent series for which the root test fails.*

Let $m$ be the Lebesgue measure on $\mathbb{R}$. From now on we will restrict ourselves to the interval $[0,1]$, which of course has finite measure $m([0,1]) = 1$. Denote by $L_0$ the vector space of all Lebesgue measurable functions $[0,1] \to \mathbb{R}$, where two functions are identified whenever they are equal almost everywhere (a.e.) in $[0,1]$. Two natural kinds of convergence of functions of $L_0$ are a.e.-convergence and convergence in measure. It is well known that convergence in measure of a sequence $(f_n)$ to $f$ implies a.e.-convergence to $f$ of some subsequence $(f_{n_k})$, but, generally, this convergence cannot be obtained for the whole sequence $(f_n)$.

**Theorem 2.4.** *Let $L_0^{\mathbb{N}}$ be the space of all sequences of measurable functions $[0,1] \to \mathbb{R}$, endowed with the product topology. The family of Lebesgue classes of sequences $(f_n) \in L_0^{\mathbb{N}}$ such that $f_n \to 0$ in measure but $(f_n)$ does not converge almost everywhere in $[0,1]$ is maximal ($\mathfrak{c}$-) dense-lineable in $L_0^{\mathbb{N}}$.*

## References


[1] ARAÚJO, G., BERNAL-GONZÁLEZ, L., MUÑOZ-FERNÁNDEZ, G.A., PRADO-BASSAS, J.A. AND SEOANE-SEPÚLVEDA, J.B. - Lineability in sequence and function spaces. *Studia Math.*, **237**(2), 119-136, 2017.

[2] ARON, R.M., BERNAL-GONZÁLEZ, L., PELLEGRINO, D.M., SEOANE-SEPÚLVEDA, J.B. - *Lineability: The search for linearity in Mathematics*, Monographs and Research Notes in Mathematics, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2016.

[3] POMPEIU, D. - Sur les functions dérivées. *Mathematische Annalen*, **63**, 326-332, 1906.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *35–36*

# COVERING NUMBERS OF ISOTROPIC KERNELS ON TWO-POINT HOMOGENEOUS SPACES

DOUGLAS AZEVEDO[1,†] & VICTOR S. BARBOSA[2,‡]

[1]DAMAT, UTFPR-CP, PR, Brasil, [2]Centro Tecnológico de Joinville, UFSC, SC, Brasil

[†]dgs.nvn@gmail.com, [‡]victor.sb@ufsc.br

**Abstract**

In this work we present upper and lower estimates for the covering numbers of the unit ball of a reproducing kernel Hilbert space associated to a continuous isotropic kernel on a compact two-point homogeneous space (CTPHS). These estimates are obtained from estimates on the decay of the Fourier-Jacobi coefficients of the kernel via applications of the Funk-Hecke formula and the Schoenberg series representation of an isotropic kernel on CTPHS and also by the use of cubature formulas on these spaces.

## 1 Introduction

Let $\mathbb{M}^d$ denote a $d$ dimensional compact two-point homogeneous space. It is well known that spaces of this type belong to one of the following categories ([6]): the unit spheres $S^d$, $d = 1, 2, \ldots$, the real projective spaces $\mathbb{P}^d(\mathbb{R})$, $d = 2, 3, \ldots$, the complex projective spaces $\mathbb{P}^d(\mathbb{C})$, $d = 4, 6, \ldots$, the quaternionic projective spaces $\mathbb{P}^d(\mathbb{H})$, $d = 8, 12, \ldots$, and the Cayley projective plane $\mathbb{P}^d(Cay)$, $d = 16$.

An isotropic function $K$ on $\mathbb{M}^d \times \mathbb{M}^d$ can be written in the form

$$K(x, y) = K_r^d(\cos(|xy|/2)), \quad x, y \in \mathbb{M}^d,$$

for some function $K_r^d : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, here called the *isotropic part* of $K$.

In this work we deal with some properties of a class of positive-definite functions $K : \mathbb{M}^d \times \mathbb{M}^d \to \mathbb{R}$ which are isotropic on $\mathbb{M}^d$. That is, isotropic functions on $\mathbb{M}^d \times \mathbb{M}^d$ for which

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i c_j K(x_i, x_j) \geq 0,$$

for all $n = 1, 2, 3, ..., x_1, ..., x_n \in \mathbb{M}^d$ and $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$. We will call such functions isotropic kernels on $\mathbb{M}^d$.

Next, we present the Funk-Hecke formula for the present setting. This formula plays an important role in spherical analysis (see [3]).

**Theorem 1.1** (Funk-Hecke Formula)**.** *Let $S$ be a spherical harmonic of $\mathcal{H}_k^d$ and $K$ be a function in $L_1^{\alpha,\beta}([-1, 1])$. If $w \in \mathbb{M}^d$, then the application $x \in \mathbb{M}^d \mapsto K(\cos(|xw|/2)S(x)$ belongs to $L^1(\mathbb{M}^d)$ and*

$$\int_{\mathbb{M}^d} K(\cos(|xw|/2)S(x)d\sigma_d(x) = \lambda_k^{\alpha,\beta}(K)S(w) \tag{1}$$

*in which*

$$\lambda_k^{\alpha,\beta}(K) := \int_{-1}^{1} R_k^{\alpha,\beta}(t)K(t)d\nu_{\alpha,\beta}(t).$$

The series representation of continuous positive-definite isotropic kernel may be reobtained as a consequence of a combination of Mercer's theorem and the Funk-Hecke formula. For more information on such series representation of isotropic kernels we refer to [2, 5].

**Lemma 1.1.** *Let $K$ be an isotropic kernel on $\mathbb{M}^d$. Then*

$$K(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k c_k^{\alpha,\beta}R_k^{\alpha,\beta}\left(\cos\left(|xy|/2\right)\right),\ x,y\in\mathbb{M}^d.$$

*The convergence is uniform and absolute. Particularly, $\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k k^{d-1}<\infty$.*

From now on, in addition to our setting, we will consider a class of continuous, positive-definite isotropic kernels on $\mathbb{M}^d$ for which the Fourier-Jacobi coefficients have a polynomial decay. That is, we will assume that the sequence $\{\lambda_k\}$ satisfies

$$\lambda_k \asymp k^{-\xi}, \tag{2}$$

for some $\xi>d$. This assumption is a suitable consideration in many situations (see [4, 7]).

## 2 Main Results

If $A$ is a subset of a metric space $M$ and $\epsilon>0$, the covering number $\mathcal{C}(A,\epsilon):=\mathcal{C}(A,\epsilon;M)$ is defined as the minimal number of balls in $M$ of radius $\epsilon$ which cover the set $A$. Clearly, $\mathcal{C}(A,\epsilon)<\infty$ whenever $A$ is a compact subset of $M$.

In the work we present upper and lower bounds for the covering numbers of the embedding $I_K:\mathcal{H}_K\to C(\mathbb{M}^d)$, in which $\mathcal{H}_K$ is the reproducing kernel Hilbert space associated to $K$ and $C(\mathbb{M}^d)$ denotes the space of (real-valued) continuous functions on $\mathbb{M}^d$.

The main result to be proved in this work is described below.

**Theorem 2.1** ([1]). *Let $\epsilon>0$ and $K$ be an isotropic kernel on $\mathbb{M}^d$ for which the Fourier-Jacobi coefficients satisfies (2). Then there exist positive numbers $A,B>0$ such that the covering numbers of the embedding $I_K:\mathcal{H}_K\to C(\mathbb{M}^d)$ satisfy*

$$A\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{\frac{2d}{\xi}}\le \ln(\mathcal{C}(\epsilon,I_K))\le B\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{\frac{2d}{\xi-d}}\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right).$$

## References


[1] AZEVEDO, D. AND BARBOSA, V.S. - Covering numbers of isotropic reproducing kernels on compact two-point homogeneous spaces. *Math. Nach.*, to appear.

[2] GANGOLLI, R. - Positive definite kernels on homogeneous spaces and certain stochastic processes related to Lévy's Brownian motion of several parameters. *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B* , **3**, 121-226, 1967.

[3] GROEMER, H. - *Geometric applications of Fourier series and spherical harmonics.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 61. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[4] NARCOWICH, F.J.; SCHABACK, R. AND WARD, J.D. - Approximation in Sobolev Spaces by Kernel Expansions. *J. Approx. Theory*, **114**, 70-83, 2002.

[5] SCHOENBERG, I.J. - Positive definite functions on spheres. *Duke Math. J.*, **9**, 96-108, 1942.

[6] WANG, HSIEN-CHUNG - Two-point homogeneous spaces. *Ann. Math.*, **55**, no. 2, 177-191, 1952.

[7] ZU CASTELL, W. AND FILBIR, F. - Radial basis functions and corresponding zonal series expansions on the sphere. *J. Approx. Theory*, **134**, 65-79, 2005.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *37–38*

# LINEARIZATION OF MULTIPOLYNOMIALS

GERALDO BOTELHO[1,†], EWERTON R. TORRES[1,‡] & THIAGO VELANGA[2,§].

[1]FAMAT, UFU, MG, Brasil - supported by FAPEMIG and CNPq, [2]IMECC, UNICAMP, SP, Brasil - supported by FAPERO and CAPES

[†]botelho@ufu.br, [‡]ewertonrtorres@gmail.com, [§]thiagovelanga@unir.br

**Abstract**

In this work, using projective tensor products of symmetric projective tensor products, we provide a linearization theorem for multipolynomials between Banach spaces. In particular we construct the preduals of the spaces of scalar-valued multipolynomials.

## 1 Introduction

The concept of multipolynomials between Banach spaces, intended to be a unification of theories of multilinear operators and homogeneous polynomials, was introduced by the third author in [5, 6].

**Definition 1.1.** *Let $m \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_m, F$ be Banach spaces over $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$ and $n_1, \ldots, n_m$ be positive integers. A map*

$$P\colon E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$$

*is a continuous $(n_1, \ldots, n_m)$-homogeneous polynomial if for all $j \in \{1, \ldots, m\}$ and $a_1 \in E_1, \ldots, a_{j-1} \in E_{j-1}, a_{j+1} \in E_{j+1}, \ldots, a_m \in E_m$, the map*

$$x_j \in E_j \mapsto P(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_m) \in F,$$

*is a continuous $n_j$-homogeneous polynomial. The set $\mathcal{P}({}^{n_1}E_1, \ldots, {}^{n_m}E_m; F)$ of all such maps is a linear space with the obvious algebraic operations and becomes a Banach space when endowed with the norm*

$$\|P\| = \sup\{\|P(x_1, \ldots, x_m)\| : \|x_j\| \leq 1, j = 1, \ldots, m\}.$$

Linearization of nonlinear operators is a standard technique that enables the use of linear functional analysis in nonlinear analysis. For example, for the linearization of homogeneous polynomials see [4], for the linearization of multilinear operators see [1], for the linearization of bounded holomorphic functions see [3]. Following this line, in this work we prove a linearization theorem for multipolynomials.

## 2 Main Results

First we identify a prototype of a multipolynomial through which every multipolynomial factors. To do so, we recall the following notation: given $n \in \mathbb{N}$ and Banach spaces $E_1, \ldots, E_n, E$, by

$$E_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi E_n$$

we denote the completed projective tensor product of $E_1, \ldots, E_n$ (see [1]); and by

$$\widehat{\otimes}_{n,s}^{\pi_s} E$$

the completed $n$–fold $s$-projective symmetric tensor product of $E$ (see [2]).

**Proposition 2.1.** *The map*

$$\sigma\colon E_1\times\cdots\times E_m\longrightarrow\left(\widehat{\otimes}^{\pi_s}_{n_1,s}E_1\right)\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi\left(\widehat{\otimes}^{\pi_s}_{n_m,s}E_m\right)$$

*given by*

$$\sigma(x_1,\ldots,x_m)=(\otimes^{n_1}x_1)\otimes\cdots\otimes(\otimes^{n_m}x_m)\,,$$

*is a norm 1 continuous $(n_1,\ldots,n_m)$-homogeneous polynomial, that is* $\sigma\in\mathcal{P}\left({}^{n_1}E_1,\ldots,{}^{n_m}E_m;\left(\widehat{\otimes}^{\pi_s}_{n_1,s}E_1\right)\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi\left(\widehat{\otimes}^{\pi_s}_{n_m,s}E_m\right)\right)$*, and* $\|\sigma\|=1$.

**Theorem 2.1.** *For every $P\in\mathcal{P}({}^{n_1}E_1,\ldots,{}^{n_m}E_m;F)$ there exists a unique continuous linear operator* $P_L\colon\left(\widehat{\otimes}^{\pi_s}_{n_1,s}E_1\right)\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi\left(\widehat{\otimes}^{\pi_s}_{n_m,s}E_m\right)\longrightarrow F$ *such that $P_L\circ\sigma=P$ and $\|P_L\|=\|P\|$.*

$$\begin{tikzcd}
E_1\times\cdots\times E_m \arrow[rr, "P"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & F \\
& \left(\widehat{\otimes}^{\pi_s}_{n_1,s}E_1\right)\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi\left(\widehat{\otimes}^{\pi_s}_{n_m,s}E_m\right) \arrow[ur, "P_L"'] &
\end{tikzcd}$$

*Moreover, the correspondence $P\mapsto P_L$ is an isometric isomorphism between the spaces*

$$P\in\mathcal{P}({}^{n_1}E_1,\ldots,{}^{n_m}E_m;F)\ \textit{and}\ \mathcal{L}\left(\left(\widehat{\otimes}^{\pi_s}_{n_1,s}E_1\right)\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi\left(\widehat{\otimes}^{\pi_s}_{n_m,s}E_m\right);F\right).$$

As consequences we obtain that spaces of scalar-valued multipolynomials are dual spaces (with explicit preduals) and that multipolynomials can be identified with multilinear operators.

**Corollary 2.1.** *(a)* $\mathcal{P}({}^{n_1}E_1,\ldots,{}^{n_m}E_m)\overset{1}{=}\left(\left(\widehat{\otimes}^{\pi_s}_{n_1,s}E_1\right)\widehat{\otimes}_\pi\cdots\widehat{\otimes}_\pi\left(\widehat{\otimes}^{\pi_s}_{n_m,s}E_m\right)\right)'$.
*(b)* $\mathcal{P}({}^{n_1}E_1,\ldots,{}^{n_m}E_m;F)\overset{1}{=}\mathcal{L}\left(\widehat{\otimes}^{\pi_s}_{n_1,s}E_1,\ldots,\widehat{\otimes}^{\pi_s}_{n_m,s}E_m;F\right)$.

## References


[1] DEFANT, A. AND FLORET, K. - *Tensor norms and operator Ideals*, N.-Holl. Math. Stud. 176, North-Holland, 1993.

[2] FLORET, K. - Natural norms on symmetric tensor products of normed spaces, *Note Mat.*, **17**, 153-188, 1997.

[3] MUJICA, J. - Linearization of bounded holomorphic mappings on Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **324**, 867-887, 1991.

[4] RYAN, R. - *Applications of topological tensor products to infinite dimensional holomorphy*, Thesis - Trinity College, 1980.

[5] VELANGA, T. - Ideals of polynomials between Banach spaces revisited, arXiv:1703.02362 [math.FA].

[6] VELANGA, T. - Multilinear mappings versus homogeneous polynomials, arXiv:1706.04703 [math.FA].

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *39–40*

# MID SUMMABLE SEQUENCES: AN ANISOTROPIC APPROACH

JAMILSON R. CAMPOS[1,†], DANIEL PELLEGRINO[1,‡] & JOEDSON SANTOS[1,§].

[1]Departamento de Ciências Exatas, UFPB, PB, Brasil

[†]jamilson@dcx.ufpb.br, [‡]dmpellegrino@gmail.com, [§]joedsonmat@gmail.com

**Abstract**

The notion of mid $p$-summable sequences was introduced by Karn and Sinha in 2014 and recently explored by Botelho *et al.* in 2017. In this paper we design a theory of mid summable sequences in the anisotropic setting. As a particular case of our results, we prove that mid $p$-summable sequences are mid $q$-summable whenever $p \leq q$, an inclusion result that seems to have been not proved yet in the literature.

## 1 Introduction

The notion of mid summable sequences was first designed in 2014 by Karn and Sinha [4] and in 2016 it was revisited by Botelho *et al.* [2]. If $p \in [1, \infty)$, a sequence $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ in $E$ is called mid $p$-summable when

$$((x_n^*(x_j))_{j=1}^{\infty})_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(\ell_p), \quad \text{whenever } (x_n^*)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E^*).$$

The space of all mid $p$-summable sequences of $E$ is denoted by $\ell_p^{mid}(E)$ and it is a Banach space, when equipped with a suitable norm given in [2].

We extend this notion to the anisotropic setting. More precisely, we define a family of generalized sequence spaces, called mid $(q,p)$-summable sequence spaces, denoted by $\ell_{q,p}^{mid}(E)$, that encompasses the space $\ell_p^{mid}(E)$ as a particular instance. We also prove a result that relates the space $\ell_{q,p}^{mid}(E)$ with a class of absolutely summing operators. This result gives us, in particular, proofs for some new properties/theorems for the theory of mid summable sequences and mid summing operators.

The letters $E, F$ shall denote Banach spaces over $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. The symbol $E \overset{1}{\hookrightarrow} F$ means that $E$ is a linear subspace of $F$ and $\|x\|_F \leq \|x\|_E$ for every $x \in E$. By $\mathcal{L}(E;F)$ we denote the Banach space of all continuous linear operators $T\colon E \longrightarrow F$ endowed with the usual sup norm. By $\Pi_{p;q}$ we denote the ideal of absolutely $(p;q)$-summing linear operators [3]. If $p = q$ we simply write $\Pi_p$. We use the standard notation of the theory of operator ideals [5].

Due to the nature of this short communication, the proofs of all presented results will be omitted.

## 2 Main Results

We begin with the definition of our new space: a sequence $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}}$ is *mid $(q,p)$-summable* if $((x_n^*(x_j))_{n=1}^{\infty})_{j=1}^{\infty} \in \ell_q(\ell_p)$, whenever $(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E^*)$. We denote the set of the mid $(q,p)$-summable $E$-valued sequences by $\ell_{q,p}^{mid}(E)$. Of course, if $q = p$ we recover the space $\ell_p^{mid}(E)$.

The expression $\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{q,p} := \sup_{(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_p^w(E^*)}} \left( \sum_{j=1}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^*(x_j)|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q}$ defines a complete norm on the space $\ell_{q,p}^{mid}(E)$. It is immediate that if $q \leq r$, then $\ell_{q,p}^{mid}(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_{r,p}^{mid}(E)$ and, similarly to [2, Proposition 1.4], we prove that the space $\ell_{q,p}^{mid}(E)$ can be placed in the chain $\ell_q(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_{q,p}^{mid}(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_q^w(E)$.

The following proposition is useful to determine ideal properties for classes of operators characterized by transformations of vector valued sequences from/into our sequence space. The definitions and the study of sequence classes are presented in [1].

**Proposition 2.1.** *The correspondence $E \mapsto \ell_{q,p}^{mid}(E)$ is a finitely determined and linearly stable sequence class.*

If $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$, the operator $\Psi_x : E^* \to \ell_q$, given by $\Psi_x(x^*) := (x^*(x_j))_{j=1}^{\infty}$ is well-defined, linear and continuous, with $\|\Psi_x\| = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{q,w}$. Furthermore, thanks (but not exclusively) to Minkowski's inequality, we obtain an important result on mid $(q,p)$-summable sequences in terms of absolutely summing operators:

**Theorem 2.1.** *Let $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$. Consider the following sentences:*
**(a)** $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q,p}^{mid}(E)$.
**(b)** $\Psi_x \in \Pi_p(E^*; \ell_q)$.
*So, if $q \leq p$, then* (i) $\Rightarrow$ (ii) *and $\pi_p(\Psi_x) \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{q,p}$. If $q \geq p$, then* (ii) $\Rightarrow$ (i) *and $\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{q,p} \leq \pi_p(\Psi_x)$. Of course, the sentences are equivalent and the equality of norms holds when $q = p$.*

It is known that $\Pi_r(E;F) \overset{1}{\hookrightarrow} \Pi_s(E;F)$, if $r \leq s$ (see [3], Theorem 10.4). Joining this inclusion result and the Theorem 2.1 we obtain the next proposition.

**Proposition 2.2.** *If $(q,p)$ and $(r,s)$ are parameters such that $q \leq p \leq s \leq r$, then for every Banach space $E$ we have $\ell_{q,p}^{mid}(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_{r,s}^{mid}(E)$. In particular, $\ell_p^{mid}(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_q^{mid}(E)$, if $p \leq q$.*

The inclusion obtained in above proposition for $\ell_p^{mid}(E)$ has not been established in the paper [4] neither in the paper [2]. As far as we know it had not been proved yet in the literature.

In view of Theorem 2.1, we obtain a Pietsch Domination-like Theorem for weakly mid summing operators (defined in [2]).

**Theorem 2.2.** *Let $T \in \mathcal{L}(E;F)$. The following statements are equivalent:*
**(a)** *$T$ is weakly mid $p$-summing.*
**(b)** *There are a constant $C > 0$ and a regular Borel probability measure $\mu$ on $B_{F''}$ such that*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x^*(T(x_j))|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \cdot \left(\int_{B_{F''}} |\varphi(x^*)|^p d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ for all } x^* \in B_{F'} \text{ and all } (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E). \tag{1}$$

## References


[1] BOTELHO, G. AND CAMPOS, J. R. - On the transformation of vector-valued sequences by multilinear operators. *Monatsh. Math.*, **183**, 415–435, 2017.

[2] BOTELHO, G., CAMPOS, J. R. AND SANTOS, J. - Operator ideals related to absolutely summing and Cohen strongly summing operators. *Pacific J. Math.*, **287**, 1–17, 2017.

[3] DIESTEL, J., JARCHOW, H. AND TONGE, A. - *Absolutely Summing Operators*, Cambridge University Press, 1995.

[4] KARN, A. AND SINHA, D. - An operator summability of sequences in Banach spaces. *Glasg. Math. J.* , **56**, no. 2, 427-437, 2014.

[5] PIETSCH, A. - *Operator Ideals*, North-Holland, 1980.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** 41–42

# STRONG ALGEBRABILITY ON CERTAIN SET OF ANALYTIC FUNCTIONS

M. LILIAN LOURENÇO[1,†] & DANIELA M. S. VIEIRA[1,‡]

[1]Instituto de Matemática e Estatística, USP, SP, Brasil

[†]mllouren@ime.usp.br, [‡]danim@ime.usp.br

**Abstract**

We show that the set of analytic functions from $\mathbb{C}^2$ into $\mathbb{C}^2$, which are not Lorch-analytic is spaceable and strongly $\mathfrak{c}$-algebrable, but is not residual in the space of entire functions from $\mathbb{C}^2$ into $\mathbb{C}^2$.

## 1 Introduction

In the last two decades there has been a crescent interest in the search of nice algebraic-topological structures within sets (mainly sets of functions or sequences) that do not enjoy themselves such structures. Here, we study algebraic structures in certain set of analytic functions. Now we fix the notation. The space of all analytic functions from $\mathbb{C}^2$ into $\mathbb{C}^2$ will be denoted by $\mathcal{H}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$. Consider $\mathbb{C}^2$ as a Banach algebra with the usual product and the $l^2_\infty$-norm. We denote the set of all (L)-analytic functions from $\mathbb{C}^2$ into $\mathbb{C}^2$ by $\mathcal{H}_L(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$. This class of functions was introduced by E. R. Lorch in [3] and has been investigated in [3, 4].

We call by $\mathcal{G} = \mathcal{H}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2) \setminus \mathcal{H}_L(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$. As we see, there has been different ways to define and also to understand analytic functions. In our work we are interested to see, in a linear/algebraic sense, if these diferences are big or not. In this direction, our aim in this note is to establish some structure in the set $\mathcal{G}$. Indeed, we show that $\mathcal{G}$ is spaceable and strongly $\mathfrak{c}$-algebrable, but is not topologically large. Research on the theme of describing spaceability, algebrability and residuality has been carried on in recent years. We refer to [1, 2] for a background about these concepts and a good history of the publication on the theme.

## 2 Main Results

E. R. Lorch in [3] introduced a definition of analytic functions (see Definition 2.1), that have for their domains and ranges a complex commutative Banach algebra with identity.

**Definition 2.1.** *Let $E$ be a commutative Banach algebra over $\mathbb{C}$ with identity. A mapping $f : E \longrightarrow E$ is* ***Lorch-analytic*** *(or* ***(L)-analytic****)* ***in*** *$\omega \in E$ if there exists $\zeta \in E$ such that $\lim_{h\to 0} \dfrac{\|f(\omega + h) - f(\omega) - \zeta \cdot h\|}{\|h\|} = 0$. We say that $f$ is* (L)-analytic in *$E$ if $f$ is* (L)-analytic *in every point of $E$.*

It is known that a (L)-analytic function is differentiable in the Fréchet sense and hence holomorphic. However, not every Fréchet-differentiable function on a commutative Banach algebra with identity is analytic in the Lorch sense. Let us give an example. Let $F : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ be given by $F(z, w) = (w, z)$, so $F$ is analytic but it is not (L)-analytic. Thus the set $\mathcal{G} = \mathcal{H}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2) \setminus \mathcal{H}_L(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ is not empty and $\mathcal{G}$ is not a vector space. Then it seems natural to study some algebraic structure inside $\mathcal{G}$. In this note we consider $E = \mathbb{C}^2$ with the usual product and the sup norm.

A function $\varphi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ defined by $\varphi(z, w) = \left(\sum_{j=1}^m a_j e^{b_j z}, \sum_{k=1}^n c_k e^{d_k w}\right)$, for all $(z, w) \in \mathbb{C}^2$, $a_j, b_j, c_k, d_k \in \mathbb{C}$, $j = 1, \cdots, m$ and $k = 1, \cdots, n$, such that $a_i' s$ and $c_j' s$ are not all zero, and $b_j' s$ are distinct and $d_k' s$ are distinct, is called a **two-variable exponential like function**. We will denote by $\mathcal{E}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ the set of all two-variable exponential like functions $\varphi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$.

Using the function $F : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ given in the example above and the functions in $\mathcal{E}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ we present, in the next proposition, a family of functions which belong to $\mathcal{G}$, and that will be useful for our results.

**Proposition 2.1.** *1. For each $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$, then $\varphi \circ F \in \mathcal{G}$.*

*2. For each $\alpha > 0$ consider $f_\alpha : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ given by $f_\alpha(z, w) = (e^{\alpha w}, e^{\alpha z})$. Then $\{f_\alpha\}$ is a linearly independent set in $\mathcal{H}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ and $[f_\alpha : \alpha > 0] \subset \mathcal{G} \cup \{0\}$.*

We remark that as a consequence of Propostion 2.1(1), we have that $\mathcal{G}$ is maximal lineable.

In [1, Theorem 7.4.1] the authors showed a general theorem, which allowed us to prove the next result.

**Proposition 2.2.** *$\mathcal{G}$ is spaceable.*

Naturally, if $\mathcal{G}$ is spaceable then it implies $\mathcal{G}$ is lineable. Since $\mathcal{H}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ is a separable Fréchet space, and $\mathcal{H}_L(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ is a vector subspace of $\mathcal{H}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$, by [1, Theorem 7.3.3] we have that $\mathcal{G}$ is dense-lineable.

In [1, Theorem 7.5.1], the authors give a criterion for strong algebrability and as a consequence of this result we have the following.

**Proposition 2.3.** *$\mathcal{G}$ is strongly $\mathfrak{c}$-algebrable.*

We will finish this note with comments on the no residualness of the set $\mathcal{G}$ in $\mathcal{H}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$. As $\mathcal{H}_L(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ is of the second category, then the set $\mathcal{G}$ is not residual in $\mathcal{H}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$. Indeed, $\mathcal{H}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2) \setminus \mathcal{G} = \mathcal{H}_L(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$, and $\mathcal{H}_L(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ is Fréchet space. So $\mathcal{G}$ is not topologically big.

## References

[1] ARON, R., BERNAL-GONZÁLEZ, L., PELLEGRINO, D.M. AND SEOANE-SEPÚLVEDA, J.B. - *Lineability. The Search for Linearity in Mathematics*, Monographs and Research Notes in Mathematics. FL, CRC Press, 2016.

[2] BERNAL-GONZÁLEZ,L., PELLEGRINO, D.M. AND SEOANE-SEPÚLVEDA, J.B. - Linear subsets of nonlinear sets in topological vector spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **51**, 71-130, 2013.

[3] LORCH, E.R. - The theory of analytic functions in normed abelian vector rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **54**, 414-425, 1943.

[4] MORAES, L.A. AND PEREIRA, A. L. - Spectra of algebras of Lorch analytic mappings. *Topology*, **48**, 91-99, 2009.

[5] MORAES, L.A. AND PEREIRA, A.L. - Duality in spaces of Lorch analytic mappings. *Quart. J. Math*, **67**, 431-438, 2016.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *43–44*

# MULTI-BUMP SOLUTIONS FOR CHOQUARD EQUATION WITH DEEPENING POTENTIAL WELL

CLAUDIANOR O. ALVES[1,†], ALÂNNIO B. NÓBREGA[1,‡] & MINBO YANG[2,§].

[1]UFCG - partially supported by CNPq/Brazil 301807/2013-2 and INCT-MAT, [2]Department of Mathematics, Zhejiang Normal University(China) - partially supported by NSFC (11571317, 11271331) and ZJNSF(LY15A010010) and UFCG

[†]coalves@mat.ufcg.edu.br, [‡]alannio@mat.ufcg.edu.br, [§]mbyang@zjnu.edu.cn

**Abstract**

In this work we study the existence of multi-bump solutions for the following Choquard equation

$$-\Delta u+(\lambda a(x)+1)u=\big(\frac{1}{|x|^{\mu}}*|u|^{p}\big)|u|^{p-2}u \text{ in } \mathbb{R}^3,$$

where $\mu\in(0,3), p\in(2,6-\mu)$, $\lambda$ is a positive parameter and the nonnegative continuous function $a(x)$ has a potential well $\Omega:=int(a^{-1}(0))$ which possesses $k$ disjoint bounded components $\Omega:=\cup_{j=1}^{k}\Omega_j$. We prove that if the parameter $\lambda$ is large enough, then the equation has at least $2^k-1$ multi-bump solutions.

## 1 Introduction

The nonlinear Choquard equation

$$-\Delta u+V(x)u=\Big(\frac{1}{|x|^{\mu}}*|u|^{p}\Big)|u|^{p-2}u \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3, \tag{1}$$

$p=2$ and $\mu=1$, goes back to the description of the quantum theory of a polaron at rest by S. Pekar in 1954 [6] and the modeling of an electron trapped in its own hole in 1976 in the work of P. Choquard, as a certain approximation to Hartree-Fock theory of one-component plasma [5]. In some particular cases, this equation is also known as the Schrödinger-Newton equation, which was introduced by Penrose in his discussion on the selfgravitational collapse of a quantum mechanical wave function [7].

In the present work, we are interested in the nonlinear Choquard equation with deepening potential well

$$-\Delta u+(\lambda a(x)+1)u=\Big(\frac{1}{|x|^{\mu}}*|u|^{p}\Big)|u|^{p-2}u \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3, \tag{$(C)_\lambda$}$$

where $\mu\in(0,3), p\in(2,6-\mu)$ and $a(x)$ is a nonnegative continuous function with $\Omega=int(a^{-1}(0))$ being a non-empty bounded open set with smooth boundary $\partial\Omega$. Moreover, $\Omega$ has $k$ connected components, more precisely,

$$\Omega=\bigcup_{j=1}^{k}\Omega_j \tag{2}$$

with

$$dist(\Omega_i,\Omega_j)>0 \quad \text{for} \quad i\neq j. \tag{3}$$

Moreover, we suppose that there exists $M_0>0$ such that

$$|\{x\in\mathbb{R}^3;\, a(x)\leq M_0\}|<+\infty. \tag{4}$$

The purpose of the present paper is to study the existence and the asymptotic shape of the solutions for $(C)_\lambda$ when $\lambda$ is large enough, more precisely, we will show the existence of multi-bump type solutions.

The existence and multiplicity of the multi-bump solutions for elliptic problems were considered in [1, 5]. In the more works about multi-bump solution the several authors use the penalization method developed in [3].

In our argues, we will avoid the penalization arguments found in [3], because by using this method we are led to assume more restrictions on the constants $\mu$ and $p$. For that reason, instead of the penalization method, we will follow the approach explored by Alves and Nóbrega in [2], which showed the existence of multi-bump solution for a elliptic problem considering the biharmonic operator. Thus, as in [2], we will work directly with the energy functional associated with $(C)_\lambda$, and we will modify in a different way the set of pathes where Deformation Lemma is used.

## 2 Main Results

The main results of this paper is the following:

**Theorem 2.1.** *Suppose that $\mu \in (0,3)$ and $p \in [2, 6-\mu)$. Then problem $(C)_{\infty,\Gamma}$ possesses a least energy solution $u$ that is nonzero on each component $\Omega_j$ of $\Omega_\Gamma$, $j \in \Gamma$.*

**Theorem 2.2.** *Suppose that $\mu \in (0,3)$ and $p \in (2, 6-\mu)$. There exists a constant $\lambda_0 > 0$, such that for any non-empty subset $\Gamma \subset \{1, \cdots, k\}$ and $\lambda \geq \lambda_0$, the problem $\big(C\big)_\lambda$ has a positive solution $u_\lambda$, which possesses the following property: For any sequence $\lambda_n \to \infty$ we can extract a subsequence $(\lambda_{n_i})$ such that $(u_{\lambda_{n_i}})$ converges strongly in $H^1(\mathbb{R}^3)$ to a function $u$, which satisfies $u = 0$ outside $\Omega_\Gamma = \bigcup_{j\in\Gamma} \Omega_j$, and $u_{|\Omega_\Gamma}$ is a least energy solution for $(C)_{\infty,\Gamma}$ in the sense of Theorem 2.1.*

## References


[1] C.O. Alves, Existence of multi-bump solutions for a class of quasilinear problems, *Adv. Nonlinear Stud.* **6**(2006),491–509 .

[2] C.O. Alves & A.B. Nóbrega, Existence of multi-bump solutions for a class of elliptic problems involving the biharmonic operator, Monatsh. Math. **183**(2017), 35-60.

[3] M. del Pino & P. Felmer, *Local Mountain Pass for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **4**(1996), 121–137.

[4] Y. Ding & K. Tanaka, *Multiplicity of positive solutions of a nonlinear Schrödinger equation,* Manus. Math., **112**, (2003), 109–135.

[5] E. H. Lieb, *Existence and uniqueness of the minimizing solution of Choquard's nonlinear equation*, Studies in Appl. Math., **57**(1976/77), 93–105.

[6] S. Pekar, *Untersuchungüber die Elektronentheorie der Kristalle*, Akademie Verlag, Berlin, 1954.

[7] R. Penrose, *On gravity's role in quantum state reduction,* Gen. Relativ. Gravitat., **28**(1996) , 581–600.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *45–46*

# RADIAL POSITIVE SOLUTION FOR SUPERCRITICAL FRACTIONAL SCHRÖDINGER EQUATIONS

J. A. CARDOSO[1,†], D. S. DOS PRAZERES[1,‡] & U. B. SEVERO[2,§].

[1]Department of Mathematics, Federal University of Sergipe, Brazil, [2]Department of Mathematics, Federal University of Paraíba, Brazil

[†]anderson@mat.ufs.br, [‡]disson@mat.ufs.br, [§]uberlandio@mat.ufpb.br

**Abstract**

In this work we are concerned with the existence of radial solution for a supercritical nonlinear differential equation directed by the fractional Laplacian

$$(-\Delta)^s u + u = u^{p-1} + \mu u^{q-1} \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N,$$

where $s \in (0,1),\ N \geq 3,\ 2 < p < 2_s^* = 2N/(N-2s) \leq q$ and $\mu$ is a positive parameter.

## 1 Introduction

In the last years have appeared a lot of works related with equations involving non-local operators, because this types of operators have had a key role in the modern study of the mathematical models associated with economy, free boundary problems, population dynamics etc, see [4, 8, 9, 11]. The most famous non-local operator is the so called fractional Laplacian

$$(-\triangle)^s u = P.V. \int_{R^n} \frac{u(y)-u(x)}{|y-x|^{n+2s}}.$$

Recently have growth the interest about a new area in the study of physics called "fractional quantum mechanics", see [6], where appear the fractional Schröedinger equation

$$ih\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = D_s(-\triangle)^{s/2}\partial\psi(x,t) + V(x,t)\psi(x,t)$$

and its standard wave solutions its related with the equation

$$(-\Delta)^s u + V(x)u = u^{p-1} + \mu u^{q-1} \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N.$$

Some works that treat about of this equation for the sub-critical problem are [5, 7, 10], to the critical problem we have [3, 12, 13, 14], besides we would like to cite this two texts [1, 2] that treat about related topics. The supercritical case offer us a extra difficult as remarked above. In this paper we treat about the existence of non-trivial solutions for the following equation,

$$(-\Delta)^s u + u = u^{p-1} + \mu u^{q-1} \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

where $s \in (0,1),\ N \geq 3,\ 2 < p < 2_s^* = 2N/(N-2s) \leq q$ and $\mu$ is a positive parameter.

In order to prove our result, first we going to truncate the problem to treat with the approximated equations

$$(-\Delta)^s u_{\mu k} + u_{\mu k} = u_{\mu k}^{p-1} + f_{\mu k}(u_{\mu k}) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N.$$

After this we show a uniform bound estimate for the $u_{\mu k}$s what means that for $k$ sufficiently large the $u_{\mu k}$s are, in fact, solutions of (1).

## 2 Main Results

The main goal of this article is to prove that there exist non-trivial solutions of the problem (1) when the parameter $\mu$ is small. In a more precisely way we show the following result,

**Theorem 2.1.** *To $\mu > 0$ sufficiently small, the equation (1) has at least a positive radial solution.*

## References


[1] Di Nezza, E.; Palatucci, G. and Valdinoci, E. Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces, *Bull. Sci. Math.* **136**, 521-573 (2012).

[2] Bisci, G. M.; Radulescu, V. D. and Servadei, R. *Variational methods for nonlocal fractional problems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **162**, Cambridge University Press, Cambridge (2016).

[3] do Ó, J. M.; Miyagaki, H. and Squassina, M. Critical and subcritical fractional problems with vanishing potentials, *Commun. Contemp. Math.* **18**, 1550063 (2016).

[4] Silvestre, L. Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the Laplace operator, *Comm. Pure Appl. Math.* **60**, 67-112 (2007).

[5] Cheng, M. Bound state for the fractional Schrödinger equation with unbounded potential, *J. Math. Phys.* **53**, 043507 (2012).

[6] Laskin, N. Fractional Quantum Mechanics, *Physical Review* **E62**, 3135-3145 (2000).

[7] Felmer, P.; Quaas, A. and Tan, J. Positive solutions of the nonlinear Schrödinger equation with the fractional Laplacian, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.* A **142**, 1237-1262 (2012).

[8] Fife, P. C. An integrodifferential analog of semilinear parabolic PDEs, in *Partial differential equations and applications*, 137–145, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 177, Dekker, New York (1996).

[9] Cont, R. and Tankov, P. *Financial modelling with jump processes.* Chapman and Hall/CRC Financial Mathematics Series. Chapman Hall/CRC, Boca Raton, FL, (2004).

[10] Secchi, S. Ground state solutions for nonlinear fractional Schrödinger equations in $\mathbb{R}^N$, *J. Math. Phys.* **54**, 031501 (2013).

[11] Hutson, V.; Martinez, S.; Mischaikow, K. and Vickers, G. T. The evolution of dispersal, *J. Math. Biol.* **47**, 483-517 (2003).

[12] Chang, X. and Wang, Z.-Q. Ground state of scalar field equations involving a fractional Laplacian with general nonlinearity, *Nonlinearity* **26**, 479-494 (2013).

[13] Shang, X. and Zhang. J. Ground states for fractional Schrödinger equations with critical growth. *Nonlinearity* **27**, 187-207 (2014).

[14] Shang, X.; Zhang, J. and Yang, Y. On fractional Schrödinger equation in $\mathbb{R}^N$ with critical growth, *J. Math. Phys.* **54**, 121502 (2013).

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *47–48*

# MULTIPLICITY OF SOLUTIONS FOR A NONHOMOGENEOUS QUASILINEAR ELLIPTIC PROBLEM WITH CRITICAL GROWTH

CLAUDINEY GOULART[1,†], MARCOS L. M. CARVALHO[2,‡] & EDCARLOS D. SILVA[2,§].

[1]Coordenação do Curso de Matemática, Regional Jataí, UFG, GO, Brasil, [2]Instituto de Matemática , UFG, GO, Brasil

[†] claudiney@ufg.br, [‡]marcos_leandro_carvalho@ufg.br, [§]edcarlos@ufg.br

**Abstract**

It is establish existence and multiplicity of solutions for a quasilinear elliptic problem driven by Φ-Laplacian operator. These solutions are also built as ground state solutions using the Nehari method. The main difficult arises from the fact that Φ-Laplacian operator is not homogeneous and the nonlinear term is indefinite.

## 1 Introduction

In this work we consider the quasilinear elliptic problem driven by the Φ-Laplacian operator given by

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi u &= \lambda a(x)|u|^{q-1}u + b(x)|u|^{p-1}u \text{ in } \Omega, \\ u &= 0, \text{ in } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

where $\lambda > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is bounded and smooth domain. Throughout this work we assume that $\phi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ is of $C^2$ class which satisfies the following conditions

$(\phi_1)$ $\lim_{t\to 0} t\phi(t) = 0, \lim_{t\to\infty} t\phi(t) = \infty$;

$(\phi_2)$ $t \mapsto t\phi(t)$ is strictly increasing;

$(\phi_3)$ $-1 < \ell - 2 := \inf_{t>0} \frac{(t\phi(t))''t}{(t\phi(t))'} \leq \sup_{t>0} \frac{(t\phi(t))''t}{(t\phi(t))'} =: m - 2 < N - 2.$

On the nonlinear problem (2) we shall assume the following inequalities $1 < q + 1 < \ell \leq m < p + 1 < \ell^*$ and $1 < \ell \leq m < N, \ell^* = \ell N/(N - \ell)$. Furthermore, we shall assume the following assumption

$(H)$ $p(m - \ell) < ((p + 1) - \ell)(m - (q + 1)),\ a, b \in L^\infty(\Omega), a^+, b^+ \not\equiv 0.$

Due to the nature for the nonlinear operator

$$\Delta_\Phi u = \operatorname{div}(\phi(|\nabla u|)\nabla u)$$

we shall work in the framework of Orlicz-Sobolev spaces $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Throughout this paper we define

$$\Phi(t) = \int_0^t s\phi(s)ds, t \in \mathbb{R}.$$

Recall that hypotheses $(\phi_1) - (\phi_2)$ allows us to use Orlicz and Orlicz-Sobolev spaces. Here we emphasize that hypothesis $(\phi_3)$ ensures that $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ is a reflexive and separable Banach space.

Quasilinear elliptic problem such as problem (2) have been considered in order to explain many physical problems arising from Nonlinear Elasticity, Plasticity, Generalized Newtonian Fluids, Non-Newtonian Fluids and Plasma Physics. For further applications and more details we infer the reader to [4, 5, 7] and the references therein.

## 2 Main Results

Using a regularity result for quasilinear elliptic problems we can state the following multiplicity result

**Theorem 2.1.** *Suppose* $(\phi_1) - (\phi_3)$ *and* $(H)$*. Then problem* (2) *admits at least two positive ground state solutions* $u^+, u^-$ *which belongs to* $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ *whenever* $0 < \lambda < \lambda_1$.

Quasilinear elliptic problems driven by $\Phi$-Laplacian operator have been extensively considered during the last years. We refer the reader to important works [1, 2, 3]. In [2] the authors considered existence of positive solutions for quasilinear elliptic problems where the nonlinear term is superlinear at infinity.

In order to achieve our results we shall consider the Nehari manifold $\mathcal{N}_\lambda$ introduced in [6]. In this work the main difficult is that $a$ and $b$ is not defined in sign, i.e, we consider also the case where $a, b$ are sign changing functions. In order to overcome this difficulty we split the Nehari manifold into two parts $\mathcal{N}_\lambda = \mathcal{N}_\lambda^+ \cup \mathcal{N}_\lambda^-$. In this way, we obtain that problem (2) admits at least two positive solutions thanks to the fact that the fibering maps give us an unique projection in each part ${\mathcal{N}_\lambda}^{\pm}$.

## References


[1] ALVES, C.O., CARVALHO, M.L. AND GONCALVES, J. V. - On existence of solution of variational multivalued elliptic equations with critical growth via the Ekeland principle. Vol. 17. *Communications in Contemporary Mathematics* **6**, 1450038 (2015)

[2] CARVALHO, M.L., GONCALVES, J.V. AND DA SILVA, E.D.- On quasilinear elliptic problems without the Ambrosetti Rabinowitz condition. *Journal Anal. Mat. Appl* **426**, 466–483 (2015)

[3] CARVALHO, M.L., F. J. S. A. CORRÊA, GONCALVES, J.V., AND DA SILVA, E.D. - Sign changing solutions for quasilinear superlinear elliptic problems. (preprint)

[4] DIBENEDETTO, E. - $C^{1,\gamma}$ local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations. vol. 7. *Nonlinear Anal.* **8**, 827–850 (1985)

[5] FUKAGAI, N., ITO, M. AND NARUKAWA, K. - Positive solutions of quasilinear elliptic equations with critical Orlicz-Sobolev nonlinearity on $\mathbb{R}^N$. *Funkcialaj Ekvacioj* **49**, 235–267 (2006)

[6] NEHARI, Z. - On a class of nonlinear second-oder equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **95**, 101–123 (1960)

[7] TAN, Z. AND FANG, F. - Orlicz-Sobolev versus Hölder local minimizer and multiplicity results for quasilinear elliptic equations. *J. Math. Anal. Appl.* **402**, 348–370 (2013)

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *49–50*

# MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES NODAIS DO TIPO MULTI-BUMP PARA UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍPTICOS COM CRESCIMENTO EXPONENCIAL CRÍTICO EM $\mathbb{R}^2$

DENILSON S. PEREIRA[1,†]

[1]Unidade Acadêmica de Matemática, UFCG, PB, Brasil.

[†]denilsonsp@mat.ufcg.edu.br

**Abstract**

No presente trabalho, estabelecemos a existência e multiplicidade de soluções nodais do tipo multi-bump para a seguinte classe de problemas elípticos

$$\begin{cases} -\Delta u + (\lambda V(x) + 1)u = f(u), & \text{in } \mathbb{R}^2, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^2), \end{cases} \tag{1}$$

onde $\lambda \in (0, \infty)$, $f$ é uma função com crescimento exponencial crítico e $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função contínua verificando algumas hipóteses.

## 1 Introdução

No presente trabalho, consideramos a classe de problemas (1), no caso em que a não-linearidade $f$ é uma função com crescimento exponencial crítico em $\pm\infty$, isto é, quando existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|t|\to+\infty} \frac{|f(s)|}{e^{\alpha s^2}} = 0, \ \forall \alpha > \alpha_0; \ \lim_{|t|\to+\infty} \frac{|f(s)|}{e^{\alpha s^2}} = +\infty, \ \forall \alpha < \alpha_0.$$

Em [5], Ding e Tanaka consideraram o problema (1) em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, assumindo que $\Omega := int\ V^{-1}(\{0\})$ tem $k$ componentes conexas e $f(s) = |s|^{q-2}s$, com $2 < q < \frac{2N}{N-2}$. Neste artigo, os autores provaram que (1) tem pelo menos $2^k - 1$ soluções multi-bump positivas, para $\lambda$ suficientemente grande. O mesmo tipo de resultado foi obtido por Alves, de Morais Filho e Souto em [4] e Alves e Souto [5], assumindo agora que $f$ tem crescimento crítico para o caso $N \geq 3$ e exponencial crítico quando $N = 2$, respectivamente.

Em [2], Alves mostrou pela primeira vez a existência e multiplicidade de soluções nodais do tipo multi-bump para (1) em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, quando a não linearidade $f$ tem crescimento subcrítico. No presente trabalho, ver [1], estabelecemos o mesmo tipo de resultado para o caso $N = 2$ em que $f$ tem crescimento exponencial crítico.

## 2 Resultado Principal

Supomos que $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e não negativa tal que $\Omega := int\ V^{-1}(\{0\})$ satisfaz:

$(H1)$ $\Omega$ é não-vazio, limitado, com fronteira $\partial\Omega$ suave e $V^{-1}(\{0\}) = \overline{\Omega}$;

$(H2)$ $\Omega$ tem $k$ componentes conexas denotadas por $\Omega_j$, $j \in \{1, ..., k\}$, as quais verificam $dist(\Omega_j, \Omega_i) > 0$, para $i \neq j$.

Para a função $f$ admitimos as seguintes hipóteses.

$(f_1)$ Existe $C > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq Ce^{4\pi|s|^2} \ \text{ para todo } \ s \in \mathbb{R};$$

$(f_2)$ $\displaystyle\lim_{s\to 0} \frac{f(s)}{s} = 0;$

$(f_3)$ Existe $\theta > 2$ tal que

$$0 < \theta F(s) := \theta \int_0^s f(t)dt \leq sf(s), \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$(f_4)$ A função $s \to \dfrac{f(s)}{|s|}$ é estritamente crescente em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$(f_5)$ Existem constantes $p > 2$ e $C_p > 0$ tais que

$$sgn(s)f(s) \geq C_p|s|^{p-1} \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R},$$

com

$$C_p > \left[\frac{2k\theta(p-2)}{p(\theta-2)} \cdot S_p\right]^{(p-2)/2}, \tag{2}$$

onde

$$S_p = \max_{1 \leq j \leq k} \left\{ \inf_{u \in \mathcal{M}_j} \int_{\Omega_j} |u|^p \right\}$$

e

$$\mathcal{M}_j = \left\{ u \in H_0^1(\Omega_j) : \quad u^\pm \neq 0 \text{ e } \int_{\Omega_j} (|\nabla u^\pm|^2 + |u^\pm|^2) = \int_{\Omega_j} |u^\pm|^p \right\}.$$

O nosso principal resultado é o seguinte:

**Teorema 2.1.** *Suponha que as hipóteses $(H_1)-(H_2)$ e $(f_1)-(f_5)$ sejam válidas. Então, para qualquer subconjunto não-vazio $\Gamma$ de $\{1, ..., k\}$, existe $\lambda^* > 0$ tal que, para $\lambda \geq \lambda^*$, o problema (1) tem uma solução nodal $u_\lambda$. Além disso, a família $\{u_\lambda\}_{\lambda \geq \lambda^*}$ tem a seguinte propriedade: Para qualquer sequência $\lambda_n \to \infty$, podemos extrair uma subsequência $\lambda_{n_i}$ tal que $u_{\lambda_{n_i}}$ converge forte em $H^1(\mathbb{R}^2)$ para uma função $u$ a qual satisfaz $u(x) = 0$ para $x \notin \Omega_\Gamma := \cup_{j \in \Gamma} \Omega_j$, e a restrição $u|_{\Omega_j}$ é uma solução nodal com energia mínima de*

$$-\Delta u + u = f(u), \quad em \quad \Omega_j, \; u|_{\partial \Omega_j} = 0 \; para \; j \in \Gamma.$$

**Agradecimento:** Este trabalho corresponde a uma parte de minha tese de doutorado, sob orientação do prof. C.O. Alves, ao qual agradeço pela excelente orientação.

## References

[1] C. O. Alves e D. S. Pereira. *Multiplicity of Multi-Bump Type Nodal Solutions for A Class of Elliptic Problems with Exponential Critical Growth in* $\mathbb{R}^2$. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, **60(2)** (2017), 273-297.

[2] C. O. Alves, *Multiplicity of multi-bump type nodal solutions for a class of elliptic problems in* $\mathbb{R}^N$, Topol. Methods Nonlinear Anal. **34** (2009), 231–250.

[3] C. O. Alves e M. A. S. Souto, *Multiplicity of positive solutions for a class of problems with exponential critical growth in* $\mathbb{R}^2$, J. Differential Equations **244** (2008), 1502-1520.

[4] C. O. Alves , D.C. de Morais Filho e M. A. S. Souto *Multiplicity of positive solutions for a class of problems with critical growth in* $\mathbb{R}^N$, Proc. Edinb. Math. Soc., **52** (2009), 1-21.

[5] Y. H. Ding e K. Tanaka, *Multiplicity of positive solutions of a nonlinear Schrödinger equation*, Manuscripta Math. **112** (2003), 109-135.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *51–52*

# A NONLOCAL $(P_1(X), P_2(X))$-LAPLACE EQUATION WITH DEPENDENCE ON THE GRADIENT AND NONLINEAR NEUMANN BOUNDARY CONDITIONS

GABRIEL RODRIGUEZ V.[1,†], EUGENIO CABANILLAS L.[1,‡], JUAN B. BERNUI B.[1,§] & CARLOS E. NAVARRO P. [2,§§]

[1]Instituto de Investigación, Facultad de Ciencias Matemáticas-UNMSM, Lima-Perú, [2]Instituto de Investigación, Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática -UNMSM, Lima-Perú

[†]cleugenio@yahoo.com, [‡]grodriguezv@unmsm.edu.pe, [§]jbernuibunmsm.edu.pe, [§§]cnavarrodp@unmsm.edu.pe

**Abstract**

The object of this work is to study the existence of solutions for a nonlocal $(p_1(x), p_2(x))$ Laplace equation with dependence on the gradient and nonlinear Neumann boundary conditions. We establish our results by using the Brezi's theorem for pseudomonotone operators in the framework of variable exponent Sobolev spaces.

## 1 Introduction

This paper is devoted to the study of the following nonlocal $(p_1(x), p_2(x))$ problem

$$\begin{aligned} -M_1(L_1(u))\ \mathrm{div}(|\nabla u|^{p_1(x)-2}\nabla u) - M_2(L_2(u))\ \mathrm{div}(|\nabla u|^{p_2(x)-2}\nabla u) &= f(x,u,\nabla u)|u|_{s(x)}^{t(x)} \text{ in } \Omega \\ M_1(L_1(u))|\nabla u|^{p_1(x)-2}\frac{\partial u}{\partial \nu} + M_2(L_2(u))|\nabla u|^{p_2(x)-2}\frac{\partial u}{\partial \nu} &= g(x,u) \text{ on } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded smooth domain and $p_i(x) \in C(\overline{\Omega})$ with $p_i(x) > 1$ for any $x \in \overline{\Omega}$ i=1,2 , $L_i(u) = \int_\Omega \frac{1}{p_i(x)}|\nabla u|^{p_i(x)}\,dx$ , and $M_i, f,$ and $g$ are functions that satisfy conditions which will be stated later. In [2, 3, 4] the authors consider the problem (1), with $M_1 = M_2 = 1$ , $p_1 \neq p_2; p_1, p_2$ continuous functions and $f = f(x,u)$, they showed existence of solutions via the mountain pass theorem and its variants. We observe that, since the nonlinearity $f$ depends on the gradient of the solution, the problem (1) has no variational structure, so the most usual variational techniques can not be applied directly. Motivated by the above references and [1] we deal with the existence of solutions for nonlocal $(p_1(x), p_2(x))$ problem (1).

## 2 Notations and Main Results

In order to discuss problem (1.1), we need some theories on $W^{1,p(x)}(\Omega)$ wich we call a variable exponent Sobolev space. Denoted by $M(\Omega)$ the set of all measurable real functions defined on $\Omega$. Write

$$C_+(\overline{\Omega}) = \{p : p \in C(\overline{\Omega}), p(x) > 1 \ \ for\ any\ x \in \overline{\Omega}\}$$

$$h^- := \min_{\overline{\Omega}} h(x), \qquad h^+ := \max_{\overline{\Omega}} h(x) \quad \text{for every } h \in C_+(\overline{\Omega}),$$

$L^{p(x)}(\Omega) = \{u \in M(\Omega) : \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx < +\infty\}$ with the norm

$$|u|_{L^{p(x)}(\Omega)} = |u|_{p(x)} = inf\{\lambda > 0 : \int_\Omega |\frac{u(x)}{\lambda}^{p(x)}|dx \leq 1\},$$

and $W^{1,p(x)}(\Omega) = \{u \in L^{p(x)}(\Omega) : |\nabla| \in L^{p(x)}(\Omega)\}$ with the norm

$$||u||_{1,p(x)} = |u|_{p(x)} + |\nabla u|_{p(x)}, \quad \forall u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$$

We denote $X := W_0^{1,p_1(x)}(\Omega)\bigcap W_0^{1,p_2(x)}(\Omega)$, with its norm given by

$$\|u\| := \|u\|_{p_1(x)} + \|u\|_{p_2(x)},\ \forall\ u\in X \quad \text{and} \quad p_M(x) = \max\{p_1(x), p_2(x)\}\ , p_m(x) = \min\{p_1(x), p_2(x)\}$$

Assume that the following assumptions hold:

$(M_0)$ $M_i : [0, +\infty[\to]m_0, +\infty[$ $(i = 1, 2)$ are continuous and nondecreasing functions with $m_0 > 0$.

$(F_1)$ $f : \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisfy the Carathéodory condition in the sense that $f(.,u,\xi)$ is measurable for all $(u,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ and $f(x,.,.)$ is continuous for almost all $x\in\Omega$
$(F_2)$ $|f(x,u,\xi)| \le k(x) + |u|^{\eta(x)} + |\xi|^{\delta(x)}$ a.e. $x\in\Omega$, all $(u,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$, where
$k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+,\ k\in L^{p'_M(x)}(\Omega)$ and $0\le\eta(x) < p_m^- - 1, 0\le\delta(x) < (p_m^- - 1)/p'^+_M$.
$(G_1)$ $|g(x,t)| \le c_1 + c_2|u|^{\beta(x)}$, $\forall(x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}$, where $\beta\in C_+(\overline{\Omega}), \beta^+ < p_m^-$

**Theorem 2.1.** *Assume that hypotheses $(M_0)$, $(F_1)$, $(F_2)$ and $(G_1)$ hold. Then (1) has a weak solution in $X$.*

**Proof** We apply the Brezi's theorem for pseudo-monotone operators . ■

## References


[1] AVCI M., AYAZOGLU R. - Solutions of nonlocal $(p_1(x), p_2(x))$- Laplacian Equations, *Int. J. Part. Diff Eq.*, Volume 2013, Article ID 364251, http://dx.doi.org/10.1155/2013/364251.

[2] LIU D., WANG X., YAO J. -On $(p_1(x); p_2(x))$-Laplace operator , to appear, arXiv:1205.1854.

[3] LIU D., WANG X.,YAO J. - On Solutions for Neumann boundary value problems involving $(p_1(x); p_2(x))$-Laplace operator, arXiv:1205.3765.

[4] YUCEDAG Z. - Infinitely many nontrivial solutions for nonlinear problem involving $(p_1(x), p_2(x))$ -Laplace operator, *Acta Universitatis Apulensis* , **40** , 315-331, 2014.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *53–54*

# QUASI-LINEAR SCHRÖDINGER-POISSON SYSTEM UNDER AN EXPONENTIAL CRITICAL NONLINEARITY: EXISTENCE AND ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF SOLUTION

GIOVANY M. FIGUEIREDO[1,†] & GAETANO SICILIANO[2,‡]

[1]Departamento de Matemática, UnB, DF, Brasil, [2]USP, SP, Brasil

[†]giovany@unb.br, [‡]sicilian@ime.usp.br

**Abstract**

In this paper we consider the following quasilinear Schrödinger-Poisson system in a bounded domain in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} -\Delta u + \phi u = f(u) & \text{in } \Omega, \\ -\Delta \phi - \varepsilon^4 \Delta_4 \phi = u^2 & \text{in } \Omega, \\ u = \phi = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

depending on the parameter $\varepsilon > 0$. The nonlinearity $f$ is assumed to have critical exponencial growth. We first prove existence of nontrivial solutions $(u_\varepsilon, \phi_\varepsilon)$ and then we show that as $\varepsilon \to 0^+$ these solutions converges to a nontrivial solution of the associated Schrödinger-Poisson system, that is by making $\varepsilon = 0$ in the system above.

## 1 Introduction

In this paper we study the following system

$$\begin{cases} -\Delta u + \phi u = f(u) & \text{in } \Omega, \\ -\Delta \phi - \varepsilon^4 \Delta_4 \phi = u^2 & \text{in } \Omega, \\ u = \phi = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{$P_\varepsilon$}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is a smooth and bounded domain, $\Delta_4 = \operatorname{div}(|\nabla \phi|^2 \nabla \phi)$ is the 4−Laplacian and $f$ satisfies adequate hypothesis that we call $(f_1) - (f_4)$, allowing to have exponential critical growth.

As explained in [1] (see also [2, 4]) the system appears by studying a quantum physical model of extremely small devices in semi-conductor nanostructures and takes into account the quantum structure and the longitudinal field oscillations during the beam propagation. This is reflected into the fact that the dielectric permittivity depends on the electric field by

$$c_{\text{diel}}(\nabla \phi) = 1 + \varepsilon^4 |\nabla \phi|^2, \quad \varepsilon > 0 \text{ and constant.}$$

We refere the reader to [3] where the system is deduced in the framework of Abelian Gauge Theories.

We define

$$X := H_0^1(\Omega) \cap W_0^{1,4}(\Omega)$$

which is a Banach space under the norm

$$\|\phi\|_X := |\nabla \phi|_2 + |\nabla \phi|_4.$$

Note that $X \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

By a solution of ($P_\varepsilon$) we mean a pair $(u_\varepsilon, \phi_\varepsilon) \in H_0^1(\Omega) \times X$ such that

$$\forall v \in H_0^1(\Omega): \quad \int_\Omega \nabla u_\varepsilon \nabla v + \int_\Omega \phi_\varepsilon u_\varepsilon v = \int_\Omega f(u_\varepsilon) v \tag{1}$$

$$\forall \xi \in X: \quad \int_\Omega \nabla \phi_\varepsilon \nabla \xi + \varepsilon^4 \int_\Omega |\nabla \phi_\varepsilon|^2 \nabla \phi_\varepsilon \nabla \xi = \int_\Omega \xi u_\varepsilon^2. \tag{2}$$

The main results of this paper are the following.

**Theorem 1.1.** *Assume that conditions* $(f_1) - (f_4)$ *hold. Then, for every* $\varepsilon > 0$ *problem* $(P_\varepsilon)$ *admit a solution* $(u_\varepsilon, \phi_\varepsilon) \in H_0^1(\Omega) \times X$*. Moreover* $\phi_\varepsilon, u_\varepsilon$ *are nonnegative.*

We study also the asymptotic behaviour of the solutions $u_\varepsilon, \phi_\varepsilon$ as $\varepsilon \to 0^+$ obtaining the following

**Theorem 1.2.** *Let* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *be a function satisfying conditions* $(f_1) - (f_2)$ *and consider the Schrödinger-Poisson system*

$$\begin{cases} -\Delta u + \phi u = f(u) & \text{in } \Omega, \\ -\Delta \phi = u^2 & \text{in } \Omega, \\ u = \phi = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$P_0$}$$

*If* $\{u_\varepsilon, \phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *are solutions of* $(P_\varepsilon)$ *satisfying also* $\|u_\varepsilon\|^2 \leq 2\pi/(\alpha_0 + 1)$ *then,*

1. $\lim_{\varepsilon\to0^+} u_\varepsilon = u_0$ *in* $H_0^1(\Omega)$,

2. $\lim_{\varepsilon\to0^+} \phi_\varepsilon = \phi_0$ *in* $H_0^1(\Omega)$,

*where* $(u_0, \phi_0)$ *is a nontrivial solution of* $(P_0)$.

## References


[1] N. Akhmediev, A. Ankiewicz and J.M. Soto-Crespo, *Does the nonlinear Schrödinger equation correctly describe beam equation ?* Optics Letters **18** (1993), 411- 413.

[2] K. Benmilh and O. Kavian, *Existence and asymptotic behaviour of standing waves for quasilinear Schrödinger-Poisson systems in* $\mathbb{R}^3$ , Ann. I. H. Poincaré - AN **25** (2008) 449–470.

[3] G. M. Figueiredo and G. Siciliano, *Existence and asymptotic behaviour of solutions for a quasi-linear Schrödinger-Poisson system under a critical nonlinearity* arXiv:1707.05353.

[4] R. Illner, O. Kavian and H. Lange, *Stationary Solutions of Quasi-Linear Schrödinger-Poisson System,* Journal Diff. Equations **145** (1998) 1-16.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *55–56*

# MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA UMA EQUAÇÃO DE KIRCHHOFF COM NÃO-LINEARIDADE TENDO CRESCIMENTO ARBITRÁRIO

HENRIQUE R. ZANATA[1,†] & MARCELO F. FURTADO[1,‡]

[1]Departamento de Matemática, UnB, DF, Brasil

[†]henriquerz@hotmail.com, [‡]mfurtado@unb.br

**Abstract**

Provamos a existência de infinitas soluções $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ para a equação de Kirchhoff

$$-\left(\alpha + \beta \int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u = a(x)|u|^{q-1}u + \mu f(x,u) \text{ em } \Omega,$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave, o potencial $a(x)$ pode mudar de sinal, $0 < q < 1$, $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, $\mu > 0$ e a função $f$ tem crescimento arbitrário no infinito. Na demonstração, utilizamos métodos variacionais e um argumento de truncamento.

## 1 Introdução

Utilizando métodos variacionais, estudamos a existência de infinitas soluções para a seguinte equação de Kirchhoff, em que a não-linearidade é côncava perto da origem, mas tem crescimento arbitrário no infinito:

$$(P) \qquad \begin{cases} -\left(\alpha + \beta \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u = a(x)|u|^{q-1}u + \mu f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave, $0 < q < 1$, $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ e $\mu > 0$. As principais hipóteses sobre $f$ são

$(f_0)$ $f \in C(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e existe $\delta > 0$ tal que $f(x,s)$ é ímpar em $s$ para todo $x \in \Omega$ e $|s| \leq \delta$;

$(f_1)$ $f(x,s) = o(|s|^q)$, quando $s \to 0$, uniformemente em $x \in \Omega$.

Para introduzir a hipótese sobre a regularidade do potencial $a(x)$, consideramos a sequência $(p_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $p_1 = 2^* := 2N/(N-2)$, se $N \geq 3$, ou $p_1$ é qualquer valor em $(1, +\infty)$, se $N \in \{1, 2\}$, e

$$p_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{Np_n}{N - 2p_n} & , \quad \text{se } 2p_n < N \\ \\ p_n + 1 & , \quad \text{se } 2p_n \geq N , \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}$. Um cálculo direto mostra que $(p_n)$ é crescente e ilimitada e, portanto, está bem definido o valor $m := \min\{n \in \mathbb{N} : 2p_n > N\}$. A principal hipótese sobre $a(x)$ é

$(a_0)$ $a \in L^{\sigma_q}(\Omega)$, com $\sigma_q := p_m/(1-q)$.

Denotamos por $H$ o espaço de Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega)$ com a norma $\|u\| = (\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x)^{1/2}$. Do ponto de vista variacional, a equação em $(P)$ é a equação de Euler-Lagrange do funcional energia

$$I(u) = \frac{\alpha}{2}\|u\|^2 + \frac{\beta}{4}\|u\|^4 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega a(x)|u|^{q+1}dx - \mu \int_\Omega F(x,u)dx ,$$

onde $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt$. Como não temos controle sobre $f$ no infinito, $I$ não está bem definido em todo o espaço $H$. Porém, por conta de $(f_0) - (f_1)$, é finito para toda função $u \in H \cap L^\infty(\Omega)$ com $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ suficientemente pequena.

## 2 Resultados Principais

Seguindo argumento análogo ao usado em [2], provamos os resultados abaixo.

**Teorema 2.1.** *Se* $0 < q < 1$*, a função* $f$ *satisfaz* $(f_0) - (f_1)$ *e o potencial* $a(x)$ *satisfaz* $(a_0)$ *e*

$(a_1)$ *existe* $a_0 > 0$ *tal que* $a(x) \geq a_0$*, q.t.p. em* $\Omega$*,*

*então para todo* $\alpha > 0$*,* $\beta \geq 0$ *e* $\mu > 0$*, o problema* $(P)$ *tem uma sequência de soluções* $(u_k) \subset H$ *tal que* $\|u_k\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ *quando* $k \to \infty$*. Além disso,* $I(u_k) < 0$ *e* $I(u_k) \to 0$ *quando* $k \to \infty$*.*

**Teorema 2.2.** *Se* $0 < q < 1$*, a função* $f$ *satisfaz* $(f_0) - (f_1)$ *e o potencial* $a(x)$ *satisfaz* $(a_0)$ *e*

$(\widetilde{a_1})$ *existem* $a_0 > 0$ *e um aberto* $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ *tais que* $a(x) \geq a_0$*, q.t.p. em* $\widetilde{\Omega}$*,*

*então o problema* $(P)$ *tem uma sequência de soluções* $(u_k) \subset H$ *tal que* $I(u_k) < 0$ *e* $I(u_k) \to 0$ *quando* $k \to \infty$*, em cada um dos seguintes casos:*

*(i)* $\alpha > 0$*,* $\beta \geq 0$ *e* $\mu \in (0, \mu^*)$*, para algum* $\mu_* > 0$*;*

*(ii)* $\beta \geq 0$*,* $\mu > 0$ *e* $\alpha \in (\alpha^*, \infty)$*, para algum* $\alpha^* > 0$*.*

**Teorema 2.3.** *Suponha que* $0 < q < 1$*, a função* $f$ *satisfaz* $(f_0)$ *e*

$(\widetilde{f_1})$ $f(x,s) = o(|s|)$*, quando* $s \to 0$*, uniformemente em* $x \in \Omega$*,*

*e o potencial* $a(x)$ *satisfaz* $(a_0)$ *e* $(\widetilde{a_1})$*. Então vale a mesma conclusão do Teorema 2.1.*

## References


[1] FURTADO, M. F. AND ZANATA, H. R. - Multiple solutions for a Kirchhoff equation with nonlinearity having arbitrary growth. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **96**, 98-109, 2017.

[2] WANG, Z-Q. - Nonlinear boundary value problems with concave nonlinearities near the origin. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, **8**, 15-33, 2001.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *57–58*

# MULTIPLE SOLUTIONS FOR AN INCLUSION QUASILINEAR PROBLEM WITH NON-HOMOGENEOUS BOUNDARY CONDITION THROUGH ORLICZ SOBOLEV SPACES

JEFFERSON A. SANTOS[1,†] & RODRIGO C. M. NEMER[1,‡]

[1]Unidade Acadêmica de Matemática, UFCG, PB, Brasil

[†]jefferson@mat.ufcg.edu.br, [‡]rodrigo@mat.ufcg.edu.br

**Abstract**

In this work we study multiplicity of nontrivial solution for the following class of differential inclusion problems with non-homogeneous Neumann condition through Orlicz-Sobolev spaces,

$$\begin{cases} -div\big(\phi(|\nabla u|)\nabla u\big) + \phi(|u|)u \in \lambda\partial F(u) \text{ in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \in \mu\partial G(u) \text{ on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a domain, $N \geq 2$ and $\partial F(u)$ is the generalized gradient of $F(u)$. The main tools used are Variational Methods for Locally Lipschitz Functional and Critical Point Theory.

## 1 Introduction

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, be a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$ and consider a continuous function $\phi : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$. For $\lambda, \mu > 0$, we study existence of nonnegative solutions for the differential inclusion problem with non-homogeneous Neumann condition

$$(P_{\lambda,\mu}) \qquad \begin{cases} -div\big(\phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u\big) + \phi(|u|)u \in \lambda\partial F(u) \text{ in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \in \mu\partial G(u(x)) \text{ on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are locally Lipschitz and $\partial F(t) = \{s \in \mathbb{R};\ F^o(t; r) \geq sr,\ r \in \mathbb{R}\}$, where $F^o(t; r)$ denotes the generalized directional derivative of $t \mapsto F(t)$ in the direction of $r$, that is $F^o(t; r) = \limsup\limits_{y \to t,\ s \to 0} \dfrac{F(y + sr) - F(y)}{s}$. Analogously, we define $\partial G(t)$ and $G^o(t; r)$. It is well know (see e.g. [2, 4]) that if $F$ is of class $C^1$, then $\partial F(t) = \{F'(t)\}$. In this case, one has an equation in $(P_{\lambda,\mu})$, instead of an inclusion.

Kristály, Marzantowicz, and Varga [3] studied the problem $(P_{\lambda,\mu})$ for $\phi(t) = |t|^{p-2}$. By using a result of Ricceri [5], they guaranteed the existence of three critical points for a nonsmooth functional associated to the problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u \in \lambda\partial F(u) \text{ in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \in \mu\partial G(u) \text{ on } \partial\Omega. \end{cases}$$

More recently, Alves, Gonçalves and Santos [1] established existence of nontrivial solutions for the problem

$$-\text{div}(\phi(|\nabla u|)\nabla u) - b(u)u \in \lambda\partial F(x, u) \text{ in } \Omega,$$

where $\lambda > 0$ is a parameter and $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ is a $C^1$-function, $b$ is a continous function and $F$ is locally Lipschitz.

## 2 Main Results

The main result of this paper is the following:

**Theorem 2.1.** *Let $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be locally Lipschitz functions satisfying the conditions*

$(F_1)$ *there is $c_1 > 0$ such that*

$$|\xi| \leq c_1(1 + b(|t|)|t|),\ \xi \in \partial F(t),\ t \in \mathbb{R},$$

*with $b : (0, +\infty] \to \mathbb{R}$ a $C^1$ function verifying*

$$m < b_0 \leq \frac{b(t)t^2}{B(t)} \leq b_1 < l^*, \tag{$b_1$}$$

*for all $t > 0$, with*

$$(b(t)t)' > 0,\ t > 0, \tag{$b_2$}$$

*and $B(t) = \int_0^{|t|} b(s)s\ ds$;*

$(F_2)$ $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\max\{|\xi|; \xi \in \partial F(t)\}}{\phi(|t|)|t|} = 0,$

$(F_3)$ $\displaystyle\limsup_{|t| \to +\infty} \frac{F(t)}{\Phi(t)} \leq 0;$

$(F_4)$ *assume that $F(0) = 0$ and there is $t_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ such that $F(t_0) > 0$;*

$(G_1)$ *there is $c_2 > 0$ such that*

$$|\xi| \leq c_2(1 + \overline{b}(|s|)|s|),\ \xi \in \partial G(s),\ s \in \mathbb{R},$$

*where $\overline{b} : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ satisfies $(b_1) - (b_2)$, with $\overline{B}(t) = \int_0^{|t|} \overline{b}(s)sds$, $b_0 = \overline{b}_0$ and $b_1 = \overline{b}_1$, $1 < \overline{b}_0 \leq \overline{b}_1 < \overline{l}^* = \frac{l(N-1)}{N-l}$.*

*Then there exists a nondegenerate compact interval $[a, b] \subset (0, +\infty)$ and a number $r > 0$ such that for every $\lambda \in [a, b]$, there is $\mu_0 \in (0, \lambda + 1]$ such that for each $\mu \in [0, \mu_0]$, the problem $(P_{\lambda,\mu})$ has at least three distinct solutions with $W^{1,\Phi}$-norms less than $r$.*

## References


[1] C.O. Alves, J.V. Gonçalves and J.A. Santos, *Strongly Nonlinear Multivalued Elliptic Equations on a Bounded Domain*, J Glob Optim, v.58, p.565-513 (2014).

[2] K. C. Chang, *Variational methods for nondifferentiable functionals and their applications to partial differential equations.* J. Math. Analysis Aplic., 80, 102-129 (1981).

[3] A. Kristály, W. Marzantowicz and C. Varga, *A non-smooth three critical points theorem with applications in differential inclusions*, J. Glob. Optim. Volume 46, Number 1 (2010), 49-62.

[4] D. Motreanu and P.D. Panagiotopoulos, *Minimax Theorems and Qualitative Properties of the Solutions of Hemivariational Inequalities*, Nonconvex Optim. Appl. 29 Kluwer, Dordrecht, 1998.

[5] B. Ricceri, *Minimax theorems for limits of parametrized functions having at most one local minimum lying in a certain set.* Topol. Appl. 153, 3308-3312 (2006).

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *59–60*

# POSITIVE GROUND STATES FOR A CLASS OF SUPERLINEAR $(P, Q)$-LAPLACIAN COUPLED SYSTEMS INVOLVING SCHRÖDINGER EQUATIONS

J. C. DE ALBUQUERQUE[1,†], EDCARLOS D. DOMINGOS[1,‡] & JOÃO MARCOS DO Ó[2,§].

[1]Instituto de Matemática e Estatística, UFG, GO, Brasil, [2]Departamento de Matemática, UFPB, PB, Brasil

[†]joserre@gmail.com, [‡]eddomingos@hotmail.com, [§]jmbo@pq.cnpq.br

**Abstract**

We study the existence of positive ground state solutions for a class of $(p, q)$-Laplacian coupled systems involving Schrödinger equations. We deal with periodic and asymptotically periodic potentials. The nonlinear terms are "superlinear" at 0 and at $\infty$ and are assumed without the well known Ambrosetti-Rabinowitz condition at infinity. Our approach is variational and based on minimization technique over the Nehari manifold.

## 1 Introduction

We study the existence of positive ground state solutions for the following class of $(p, q)$-Laplacian coupled systems

$$\begin{cases} -\Delta_p u + a(x)|u|^{p-2}u = f(u) + \alpha\lambda(x)|u|^{\alpha-2}u|v|^{\beta}, & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta_q v + b(x)|v|^{q-2}v = g(v) + \beta\lambda(x)|v|^{\beta-2}v|u|^{\alpha}, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{S}$$

where $N \geq 3$ and $1 \leq p \leq q < N$. Here the coefficient $\lambda(x)$ of the coupling term is related with the potentials by the condition $|\lambda(x)| \leq \delta a(x)^{\alpha/p} b(x)^{\beta/q}$ where $\delta \in (0, 1)$ and $\alpha/p + \beta/q = 1$. We deal with periodic and asymptotically periodic potentials. The nonlinearities $f$ and $g$ are two continuous and subcritical functions which do not satisfy the Ambrosetti-Rabinowitz condition at infinity. In fact, we suppose that $f$ is $p$-superlinear and $g$ is $q$-superlinear. Thus, we have established the existence of ground states for a large class of nonlinear terms and potentials.

Elliptic systems of gradient type has been extensively studied by many authors motivated by the great variety of applications. Our main contribution is to prove the existence of ground states for a large class of $(p, q)$-coupled systems defined in $\mathbb{R}^N$ which include several particular classes of nonlinear Schrödinger equations and linearly coupled systems. The prototypical example when $p = q = 2$ and $\alpha = \beta = 1$ is the following linearly coupled system

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = f(u) + \lambda(x)|v|, & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + b(x)v = g(v) + \lambda(x)|u|, & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{1}$$

In [2], the authors studied the existence of ground states for (1) when $N = 2$. For the case $N \geq 2$ we refer to [1]. For existence results concerning to $(p, q)$-Laplace elliptic systems we refer to [3]. Our work was motivated by some papers concerning the study of linearly coupled systems by using variational approach. Firstly, we study the periodic case, when $a, b, \lambda \in C(\mathbb{R}^N)$ are 1-periodic in each $x_1, x_2, ..., x_N$ and satisfy the following assumptions:

$(V_1)$ $a(x), b(x) \geq 0$, for all $x \in \mathbb{R}^N$ and

$$\nu_{a,p} := \inf_{u \in E_{a,p}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^p \, \mathrm{d}x : \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \, \mathrm{d}x = 1 \right\} > 0,$$

$$\nu_{b,q} := \inf_{v \in E_{b,q}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^q \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|v|^q \, \mathrm{d}x : \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q \, \mathrm{d}x = 1 \right\} > 0.$$

$(V_2)$ $|\lambda(x)| \leq \delta a(x)^{\alpha/p} b(x)^{\beta/q}$, for some $\delta \in (0, 1)$ such that $1/q - \delta \max\left\{\frac{\alpha}{p}, \frac{\beta}{q}\right\} \geq 0$.

$(V_2')$ We suppose $(V_2)$ holds and there exists $R > 0$ such that $\lambda(x) \geq \lambda > 0$, for all $x \in B_R(0)$.

Since we are looking for positive ground states, we assume that $f(t) = g(t) = 0$, for all $t \leq 0$. Furthermore, we make the following assumptions on the nonlinearities:

$(F_1)$ $f, g \in C^1(\mathbb{R})$, $f(t) = o(t^{p-1})$, $g(t) = o(t^{q-1})$, as $t \to 0$ and $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^{p-1}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{g(t)}{t^{q-1}} = +\infty$.

$(F_2)$ There exist $C_1, C_2 > 0$, $r \in (p, p^*)$ and $s \in (q, q^*)$ such that

$$f(t) \leq C_1(1 + t^{r-1}) \quad \text{and} \quad g(t) \leq C_2(1 + t^{s-1}), \quad \text{for all } \ t \geq 0.$$

$(F_3)$ $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t^{p-1}}$ and $t \mapsto \dfrac{g(t)}{t^{q-1}}$ are strictly increasing on $(0, +\infty)$.

$(F_4)$ $0 \leq F(t) := \int_0^t f(\tau)\, \mathrm{d}\tau \leq F(|t|)$ and $0 \leq G(t) := \int_0^t g(\tau)\, \mathrm{d}\tau \leq G(|t|)$, for all $t \geq 0$.

## 2 Main Results

**Theorem 2.1.** *If ($V_1$)-($V_2$) and ($F_1$)-($F_3$) hold, then there exists a ground state solution for System* (S). *Moreover, we have the following conclusions:*

*(i) Assume also that ($F_4$) holds and $\lambda(x) \geq 0$ for all $x \in \mathbb{R}^N$, then there exists a nonnegative ground state for System* (S)*;*

*(ii) Assume also that ($V_2'$),($F_4$) hold and $\lambda(x) \geq 0$ for all $x \in \mathbb{R}^N$, then there exists a positive ground state for System* (S)*, for some $\lambda > 0$.*

We are also concerned with the existence ground states for System (S) when the functions $a(x), b(x)$ and $\lambda(x)$ are asymptotically periodic. In this case we add the following hypothesis:

$(V_3)$ $a_o(x), b_o(x), \lambda_o(x) \in C(\mathbb{R}^N)$ are periodic, $a(x) < a_o(x)$, $b(x) < b_o(x)$, $\lambda_o(x) < \lambda(x)$, for all $x \in \mathbb{R}^N$ and

$$\lim_{|x|\to+\infty} |a_o(x) - a(x)| = \lim_{|x|\to+\infty} |b_o(x) - b(x)| = \lim_{|x|\to+\infty} |\lambda(x) - \lambda_o(x)| = 0.$$

The class of systems (S) imposes some difficulties. The first one is the lack of compactness due to the fact that the system is defined in the whole Euclidean space $\mathbb{R}^N$. We deal with the loss of homogeneity for the elliptic system (S) due the fact that we consider also the case $p \neq q$. Moreover, System (S) involve strongly coupled Schrödinger equations because of the coupling terms in the right hand side. Another difficulty is that the nonlinearities does not verify the well known Ambrosetti-Rabinowitz condition. In order to obtain ground states, we use a variational approach based on minimization technique over the Nehari manifold.

## References


[1] Ambrosetti, A., Cerami, G. and Ruiz, D. - Solitons of linearly coupled systems of semilinear non-autonomous equations on $\mathbb{R}^N$. *J. Funct. Anal.* **254**, 2816–2845, 2008.

[2] do Ó, J.M. and Albuquerque, J.C. - Positive ground sate of coupled systems of Schrödinger equations in $\mathbb{R}^2$ involving critical exponential growth. *Math. Meth. Appl. Sci.* , 1–16, 2017. https://doi.org/10.1002/mma.4498

[3] Vélin, J. - On an existence result for a class of $(p, q)$-gradient elliptic systems via a fibering method. *Nonlin. Analysis* **75**, 6009–6033, 2012.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *61–62*

# CONCENTRATION OF SOLUTIONS OF AN ASYMPTOTICALLY LINEAR SCHRÖDINGER SYSTEM

RAQUEL LEHRER[1,†] & SÉRGIO H. M. SOARES[2,‡]

[1]CCET, Unioeste, PR, Brasil, [2]ICMC, USP- São Carlos, SP, Brasil

[†]rlehrer@gmail.com, [‡]monari@icmc.usp.br

**Abstract**

We consider a saturable coupled Schrödinger system with two competing potential functions and we prove the existence of bound states (solutions with finite energy). We also show that these solutions concentrate at a point in the limit. We use variational methods for this study.

## 1 Introduction

We consider the following saturable coupled Schrödinger system with two competing potential functions, for $N \geq 3$:

$$(P_\varepsilon)\begin{cases} -\varepsilon^2\Delta u + a(x)u &= \dfrac{u^2+v^2}{1+s(u^2+v^2)}u + \lambda v \\ -\varepsilon^2\Delta v + b(x)v &= \dfrac{u^2+v^2}{1+s(u^2+v^2)}v + \lambda u \end{cases}$$

with $u(x), v(x) \to 0$ when $|x| \to \infty$ and $u(x), v(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^N$. Here, $0 < s < 1$ and $0 < \lambda < 1$ are given parameters. We assume the following conditions for the continuous functions $a, b : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$:

$(H_1)$ There exists $\alpha_0 > \lambda > 0$ such that
$$a(x), b(x) > \alpha_0,\ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

$(H_2)$ $\lim_{|x|\to\infty} a(x) = a_\infty$ and $\lim_{|x|\to\infty} b(x) = b_\infty$.

$(H_3)$ $a(x) < a_\infty$ and $b(x) < b_\infty, \forall x \in \mathbb{R}^N$.

## 2 Main Results

We iniciate our study by considering, for each $\xi \in \mathbb{R}^N$ fixed, the following autonomous system in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$:

$$(P_\xi)\begin{cases} -\Delta u + a(\xi)u &= \dfrac{u^2+v^2}{1+s(u^2+v^2)}u + \lambda v \\ -\Delta v + b(\xi)v &= \dfrac{u^2+v^2}{1+s(u^2+v^2)}v + \lambda u \end{cases}$$

with $u(x), v(x) \to 0$ when $|x| \to \infty$ and $u(x), v(x) > 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}^N$. Our first result is this:

**Theorem 2.1.** *For each $\xi \in \mathbb{R}^N$, problem $(P_\xi)$ has a radial ground state positive solution, obtained by the Mountain Pass Theorem.*

We use the notation $C(\xi)$ to indicate the Mountain Pass level associated with the problem $(P_\xi)$.

Next, we prove the existence of solution for the problem $(P_1)$, i.e., we consider that $\varepsilon = 1$. With these two results we than prove that

**Theorem 2.2.** *There exists a $\varepsilon_0 > 0$ such that $(P_\varepsilon)$ possesses a solution for every $\varepsilon$ such that $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.*

Now we study the asymptotic behavior of the solutions, when the parameter $\varepsilon$ goes to zero. Our main result is:

**Theorem 2.3.** *Assume $(H_1) - (H_3)$ hold. Then there exists $\varepsilon_0 > 0$ such that $(P_\varepsilon)$ has a solution $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$ for every $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Moreover, for some subsequence, $u_{\varepsilon_j}$ and $v_{\varepsilon_j}$ possess local (hence global) maximums $p_{\varepsilon_j}, q_{\varepsilon_j}$, respectively, which converge to $y^*$ where*

$$C(y^*) = \inf_{\xi \in \mathbb{R}^N} C(\xi).$$

**Proof** This proof can be found in [2] and it follows some ideas found in [1].

The first author has financial support from FAPESP-2016/20798-5.

## References

[1] ALVES, C. O. AND SOARES, S. H. M. - *Existence and concentration of positive solutions for a class gradient systems*, NoDEA Nonlinear Differ. Equ. Appl. **12**,437-457, 2005.

[2] LEHRER,R. AND SOARES, S. H. M. - *Existence and concentration of positive solutions for a saturable coupled Schrödinger system*, preprint.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *63–64*

# MULTIPLICITY OF SOLUTIONS TO FOURTH-ORDER SUPERLINEAR ELLIPTIC PROBLEMS UNDER NAVIER CONDITIONSS

THIAGO RODRIGUES CAVALCANTE[1,†] & EDCARLOS D. DA SILVA[1,†]

[1]Instituto de Matemática, UFG, GO, Brazil,

[†]edcarlos@ufg.br

**Abstract**

We establish the existence and multiplicity of solutions for a class of fourth-order superlinear elliptic problems under Navier conditions on the boundary. Here we do not use the Ambrosetti-Rabinowitz condition; instead we assume that the nonlinear term is a nonlinear function which is nonquadratic at infinity.

## 1 Introduction

In this work we shall consider the fourth-order elliptic problem

$$\begin{aligned} \alpha\Delta^2 u + \beta\Delta u &= f(x,u) \quad \text{in } \Omega, \\ u = \Delta u &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

where $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$ is the biharmonic operator, $N \geq 4, \Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a smooth bounded domain, $\alpha > 0$, $\beta \in (-\infty, \alpha\lambda_1)$. Problem (1) is called fourth-order elliptic problem under Navier boundary conditions. Here and throughout this paper $\lambda_1$ denotes the first eigenvalue problem on $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. The nonlinear term $f$ is a continuous function which is superlinear at infinity and at the origin. Latter on, we shall consider the assumptions on the nonlinear term $f$.

The weak solutions for problem (1) are precisely the critical points for the functional of $C^1$ class $I : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ given by

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \alpha|\Delta u|^2 - \beta|\nabla u|^2\, dx - \int_\Omega F(x,u)\, dx, \tag{2}$$

where the primitive for $f$ is denoted by $F(x,u) = \displaystyle\int_0^u f(x,t)dt\ x \in \Omega,\ t \in \mathbb{R}$.

Throughout this work we assume that $f \in C^0(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Furthermore, we shall consider the following hypotheses

(H1) There exist $a_1 > 0$ and $p \in (2, 2_*)$ such that

$$|f(x,t)| \leq a_1(1 + |t|^{p-1}), \quad \text{for any } (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$$

where $2_* = 2N/(N-4)$.

(H2) $\lim_{|t|\to\infty} \frac{f(x,t)}{t} = +\infty$ uniformly in $\Omega$;

(H3) There exists $f_0 \in [0, \mu_1)$ such that

$$\lim_{|t|\to 0} \frac{f(x,t)}{t} = f_0 \quad \text{uniformly in } \Omega,$$

where $\mu_1 = \lambda_1(\alpha\lambda_1 - \beta) > 0$.

We will consider the following condition nonquadraticity condition

(NQ) setting $H(x,t) := f(x,t)t - 2F(x,t)$, we have that

$$\lim_{|t|\to\infty} H(x,t) = +\infty, \text{ uniformly for } x \in \Omega.$$

## 2 Main Results

In this talk we shall consider the existence of a nontrivial solution for problem (1) via the mountain pass theorem. Applying the strong maximum principle we ensure the existence of one positive and one negative solution. Our main first result can be stated as

**Theorem 2.1.** *Suppose that $f$ satisfies* (H1)–(H3) *and* (NQ). *Then problem* (1) *admits at least one nontrivial solution.*

It is worthwhile to mention that the functional energy associated with the problem (1) admits the mountain pass geometry. Besides that, this functional possesses the compactness condition given by the Cerami condition. So that there exists a nontrivial critical point of the functional which is one weak and nontrivial solution for problem (1)

Our second result can be written in the following form

**Theorem 2.2.** *Suppose that $f$ satisfies* (H1)–(H3) *and* (NQ). *Then problem* (1) *admits at least two nontrivial solutions $u, w \in \mathcal{H}$ satisfying $u > 0$ and $w < 0$ in $\Omega$.*

Now, using some symmetric conditions and the Symmetric Mountain Pass Theorem, our third result can be stated in the following form

**Theorem 2.3.** *Suppose that $f$ satisfies* (H1)–(H3) *and* (NQ). *Assume also that $t \to f(x,t)$ is an odd function for any $x \in \Omega$ fixed. Then the problem* (1) *admits infinitely many nontrivial solutions.*

The theorem just above can be proven using the symmetric mountain pass which permit us to find an unbounded sequence of nontrivial solution for the elliptic problem (1). For early results on fourth elliptic problem we refer the reader to [2, 3, 4].

### References


[1] Furtado, M.F ; da Silva, Edcarlos, Superlinear elliptic problems under the Nonquadriticty condition at infinity *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics.*, (2015).

[2] Yang Pu, Xing-Ping Wu and Chun-Lei Tang, Fourth-order Navier boundary value problem with combined nonlinearities. *J. Math. Annal. 398: 798-813*, (2013).

[3] Chun Li, Zeng-Qi Ou, and Chun-Lei Tang, Existence and Multiplicity of Nontrivial Solutions for a Class of Fourth-Order Elliptic Equations. *Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis 101155: 597193*, (2013).

[4] Anna Maria Micheletti, Angela Pistoia Nontrivial solutions for some fourth order semilinear elliptic problems *Nonlinear Analyses, 34: 509–523*, (1998).

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *65–66*

# EXISTENCE OF SOLUTIONS FOR KIRCHHOFF TYPE INEQUALITY INVOLVING THE FRACTIONAL LAPLACIAN AND NONLOCAL SOURCE

W BARAHONA M[1,†], E CABANILLAS L[1,‡], J. LUQUE R[1,§] & R DE LA CRUZ M[1,§§]

[1]Universidad Nacional Mayor de San Marcos, FCM, Lima, PERU

[†]wilbara_73@yahoo.es, [‡]cleugenio@yahoo.com, [§]jluquer@unmsm.edu.pe, [§§]rodema_71@yahoo.es

**Abstract**

In this research, we prove a result on the existence of weak solutions for a Kirchhoff type problem involving the fractional laplacian and nonlocal source. By means of the Galerkin method combined with a penalization technique and the theory of fractional Sobolev spaces, we establish our result.

## 1 Introduction

The objective of this paper is to study the following nonlinear fractional Kirchhoff type inequality

$$\begin{gathered} u \in W_0, \qquad u \leq \psi \qquad \text{a.e. in } \Omega \\ \langle M(\|u\|_{w_0}^2)(-\Delta)^s u - \int_\Omega k(x,y)H(u(y))dy, v-u\rangle \geq \langle f(x,u), v-u\rangle \quad \forall v \in W_0, \quad v \leq \psi \text{ a.e. in } \Omega \end{gathered} \tag{1}$$

where $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ is bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$ ,$M, k, H$and $f$ are given fuctions; $s \in ]0,1[$ , $2 < \frac{N}{s}$ , $r > 1$ and the space $W_0$ will be specified later.
The fractional partial differential equations arise from a variety of applications in physics, probability, and finance, see for instance [1] and the references therein. Recently in [2] the existence of weak solutions for a nonlocal elliptic variational inequality is obtained by using a penalization method and the Schauder's fixed point theorem. Motivated by the above papers and [3], we consider (1) to study the existence of weak solutions; we note that this problem has no variational structure, so the most usual variational techniques can not be used directly.

## 2 Notations and Main Results

We denote $Q = \mathbb{R}^{2n} \setminus (\mathcal{C}\Omega \times \mathcal{C}\Omega)$ and $\mathcal{C}\Omega := \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. We define $W$, the usual fractional Sobolev space

$$W = \big\{u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} : u|_\Omega \in L^2(\Omega), \int\int_Q \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\, dx\, dy < \infty\big\},$$

where $u|_\Omega$ represents the restriction to $\Omega$ of function $u(x)$. Also, we define the following linear subspace of $W$,

$$W_0 = \big\{u \in W : u = 0 \text{ a.e. in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega\big\}.$$

The linear space $W$ is endowed with the norm

$$\|u\|_W := \|u\|_{L^2(\Omega)} + \Big(\int\int_Q \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\, dx\, dy\Big)^{1/2}.$$

It is easily seen that $\|\cdot\|_W$ is a norm on $W$ and $C_0^\infty(\Omega) \subseteq X_0$ . Also, we know that $W_0$, endowed with the norm

$$\|v\|_{W_0} = \Big(\int\int_Q \frac{|v(x)-v(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\, dx\, dy\Big)^{1/2} \quad \text{for all } v \in W_0, \tag{2}$$

is a Hilbert space.

**Theorem 2.1.** *Suppose that the following conditions hold*

*M) the function* $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *is a continuous function and there is a constant* $m_0 > 0$ *such that*

$$M(t) \geq m_0 \qquad \textit{for all} \qquad t \geq 0.$$

*F)* $f(x,t) : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *is a continuous function and satisfies the subcritical condition*

$$|f(x,t)| \leq c_1(|t|^{\alpha-1}+1) \qquad \textit{for some} \quad 2 < \alpha < 2^* = \begin{cases} \frac{2N}{N-2} & \textit{if } N \geq 3, \\ +\infty & \textit{if } N = 1,2. \end{cases}$$

*H)* $H \in C(\mathbb{R})$ *satisfying* $|H(s)| \leq c_2|s|^r, \qquad r > 1$

*K)* $k(x,y)$ *is a non-positive* $L^2(\Omega \times \Omega)$ *function.*

*If* $\|k\|_{L^p(\Omega\times\Omega)}$ *is sufficiently small,* $\psi \in L^2(\Omega)$ *and, in addition,* $f$ *satisfies*

$$f(x,u)u \leq a|u|^2 + b|u| \tag{3}$$

*for some constants* $a, b > 0$*, problem* (1) *has at least one weak solution*

**Proof** We apply the Galerkin method and a penalization technique. ■

## References

[1] L. CAFFARELLI - *Non-local diffusions, drifts and games*, Nonlinear partial differential equations, Abel Symposia **7**, Springer, Heidelberg, 37-52, 2016.

[2] XIANG M. -A variational inequality involving nonlocal elliptic operators, *Fixed Point Th. App.* , **148**, DOI 10.1186/s13663-015-0394-2 , 2015.

[3] MATALONI S., MATZEU M.- Semilinear integrodifferential problems with non-symetric kernels via mountain-pass techniques,*Adv. Nonlin. Stud.*, **5** (1), 23-32, 2005.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *67–68*

# O PROBLEMA DE RIEMANN PARA UMA CLASSE DE CAMPOS VETORIAIS COMPLEXOS

CAMILO CAMPANA[1,†]

[1]Universidade Federal de São Carlos, UFSCar, SP, Brasil

[†]camilo.mat.ufes@gmail.com

**Abstract**

Este trabalho trata do Problema de Riemann semilinear para uma classe de campos vetoriais complexos. A existência de solução Hölder contínua é estabelecida quando o índice associado é não negativo.

## 1 Introdução

Seja $L$ um campo vetorial complexo definido em $\mathbb{R}^2$. Descreveremos a seguir o Problema de Riemann para o campo $L$. Seja dada uma curva simples fechada $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ de classe $C^{1+\epsilon}$. O problema consiste em encontrar funções $u^+$ e $u^-$ definidas, respectivamente, no interior e no exterior de $\Gamma$ tais que a função $u$ que coincide com $u^+$ no interior e com $u^-$ no exterior satisfaz

$$\begin{cases} Lu = au + b\overline{u} + f & \text{em} \quad \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \\ u^+ = Gu^- + g & \text{sobre} \quad \Gamma, \quad u(\infty) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

onde $G, g \in C^\alpha(\Gamma)$, $0 < \alpha < 1$, $|G| \neq 0$ em $\Gamma$.

O conjunto dos pontos em $\mathbb{R}^2$ em que $L$ não é elíptico,

$$\Sigma = \{\mathsf{p} \in \mathbb{R}^2 \ ; \ L_{\mathsf{p}} \text{ e } \overline{L}_{\mathsf{p}} \text{ são linearmente dependentes}\},$$

é chamado de conjunto característico de $L$.

A classe de campos vetoriais complexos em estudo neste trabalho, denotada por $\mathcal{X}$, é uma classe de campos $L$ que são hipocomplexos em $\mathbb{R}^2$ e que possuem a seguinte propriedade: para cada componente conexa $\Sigma_j$, do conjunto característico $\Sigma$ de $L$, existe uma constante $\sigma_j > 0$ tal que para cada $\mathsf{p} \in \Sigma_j$, existem um aberto $U$, $\mathsf{p} \in U$, e coordenadas locais $(s,t)$ centradas em $\mathsf{p}$ tal que a função

$$Z_{\sigma_j}(s,t) = s + i\frac{t|t|^{\sigma_j}}{1+\sigma_j}$$

é uma integral primeira de $L$.

Seja $L$ um campo pertencente a classe $\mathcal{X}$. Seja $Z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ uma integral primeira global de $L$. Como em [1] associamos ao campo $L$ o operador integral (do tipo Cauchy-Pompeiu):

$$T_Z f(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(\xi,\eta)}{Z(\xi,\eta) - Z(x,y)} d\xi d\eta, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

para $f \in L^p$. As propriedades do operador $T_Z$ são usadas para estabelecer a resolubilidade do problema (1). Em [2] o problema (1) foi estudado para campos com conjunto característico compacto.

## 2 Resultados Principais

Sejam $G$, $Z$ e $\Gamma$ como acima. Seja $\mathrm{Ind}_{L,\Gamma}G = \delta\mathrm{ind}(G)$, onde $\mathrm{ind}(G)$ é o índice de $G$ sobre $\Gamma$ e $\delta = \pm 1$. Quando $Z$ preserva orientação $\delta = 1$ e quando $Z$ inverte orientação $\delta = -1$. Seja $\tau$ o máximo dos $\sigma_j$.

**Teorema 2.1.** *Sejam $a$, $b \in L^{(p,p')}(\mathbb{R}^2) \cap L^{p,\nu}_Z(\mathbb{R}^2)$, e $|Z|^\kappa f \in L^{(p,p')}(\mathbb{R}^2)$ com $1 < p' < 2 + \sigma < p$ e $\nu = 2(1 - \tau)$, com $\tau = \sigma/(\sigma + 1)$. Se $\mathrm{Ind}_{L,\Gamma}G \geq 0$, então o problema de Riemann (1) possui uma solução $u$ Hölder contínua.*

A demonstração usa as boas propriedades do operador integral $T_Z$ e teoremas de ponto fixo. Além do princípio da Similaridade para o campo vetorial $L$.

O autor possui financiamento da FAPESP - 2016/21969-8.

## References

[1] CAMPANA, C., DATTORI DA SILVA, P.L. E MEZIANI, A. - *Properties of solutions of a class of hypocomplex vector fields.* Contemporary Mathematics - American Mathematical Society, v. 681, p. 29-50, 2017.

[2] CAMPANA, C., E MEZIANI, A. - Boundary value problems for a class of planar complex vector fields, *Jornal of Differential Equations* (2016), Volume 261, 10, 5609-5636.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *69–70*

# LINEAR DYNAMIC OF CONVOLUTION OPERATORS ON SPACES OF ENTIRE FUNCTIONS

VINÍCIUS V. FÁVARO[1,†] & JORGE MUJICA[2,‡]

[1]FAMAT, UFU, MG, Brasil,

Supported by FAPEMIG grant APQ-03181-16 and CNPq grant 307517/2014-4, [2]IMECC, UNICAMP, SP, Brasil

[†]vvfavaro@gmail.com, [‡]mujica@ime.unicamp.br

**Abstract**

In this work we will prove that every nontrivial convolution operator on certain spaces of entire functions on normed spaces is strongly mixing in the gaussian sense, in particular frequently hypercyclic. We also prove a result of this type for convolution operators on the space of all entire functions on a $(DFC)$-space, that is a locally convex space of the form $E = F_c'$, where $F_c'$ is the dual of a Fréchet space $F$ endowed with the compact-open topology. The last result generalizes a result of the same type obtained on a $(DFN)$-space, that is the strong dual of a Fréchet nuclear space.

## 1 Introduction

A continuous linear operator $T\colon X \longrightarrow X$, where $X$ is a topological vector space, is *hypercyclic* if the orbit of $x$, given by $\{x, T(x), T^2(x), \ldots\}$ is dense in $X$ for some $x \in X$. There are several branches of the study of hypercyclic operators and other versions of hypercyclicity. Particularly, many authors have devoted their work to the study of hypercyclicity (and other versions of it) of operators on spaces of entire functions. The study of hypercyclic translation and differentiation operators on spaces of entire functions of one complex variable can be traced back to Birkhoff [2] and MacLane [4]. In 1991, Godefroy and Shapiro [3] pushed these results further by proving that every nontrivial convolution operator on spaces of entire functions of several complex variables is hypercyclic. We recall that a *convolution operator* on $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ is a continuous linear operator that commutes with translations. In this work we are particularly interested in exploring convolution operators that are strongly mixing in the gaussian sense, a stronger ergodicity property than (frequent) hypercyclicity.

There are several criteria to determine if an operator is hypercyclic or satisfies some version of hypercyclicity. Using a recent criterion of Bayart and Matheron [1] we prove that every nontrivial convolution operator on certain spaces of entire functions on normed spaces is strongly mixing in the gaussian sense, in particular frequently hypercyclic.

Having in mind that $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ is separable and that no convolution operator on it is (frequently) hypercyclic (see [3, Theorem 4.1]), general results are not to be expected for arbitrary separable spaces of entire functions on locally convex spaces. The best one can get are results on separable spaces of entire functions on certain locally convex spaces. In this work we will also prove a result of this type for convolution operators on the space of all entire functions on $(DFC)$-spaces. As most important consequences of this result we obtain the same kind of result for $(DFN)$ and $(DFM)$-spaces. Recall that a $(DFM)$-space is the strong dual of a Fréchet and Montel space.

## 2 Main Results

**Definition 2.1.** Let $X$ be a separable Fréchet space. A continuous linear operator $T\colon X \to X$ is said to be *frequently hypercyclic* if there exists $x \in X$ such that, for every nonempty open set $U \subset X$ we have that

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{\operatorname{card}\{0 \le n \le N-1 : T^n x \in U\}}{N} > 0.$$

**Definition 2.2.** Let $X$ be a topological vector space and $T\colon X \to X$ be a continuous linear operator, and let $\mu$ be a Borel probability measure on $X$.

(a) $\mu$ is said to be $T$-*invariant* if $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ for every Borel set $A \subset X$.

(b) $\mu$ is said to have *full measure* if $\mu(U) > 0$ for every nonempty open set $U \subset X$.

(c) $T$ is said to be *strongly mixing with respect to* $\mu$ if for any two Borel sets $A, B \subset X$ we have that

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap T^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B).$$

The main results we obtain are the following:

**Theorem 2.1.** *Let $E$ be a normed space with separable dual, and let $(\mathcal{P}_\Theta(^m E))_{m=0}^\infty$ be a $\pi_1$-holomorphy type. If $L$ is a nontrivial convolution operator on the space $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ of all entire functions of $\Theta$ bounded type from $E$ to $\mathbb{C}$, then $L$ is strongly mixing with respect to an $L$-invariant Borel probability measure $\mu$ on $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$, with full support. In particular $L$ is frequently hypercyclic.*

**Theorem 2.2.** *Let $E = F_c'$, where $F$ is a separable Fréchet space with the approximation property. Then every nontrivial convolution operator on the space $\mathcal{H}(E)$ of all entire functions from $E$ to $\mathbb{C}$, is strongly mixing with respect to an $L$-invariant Borel probability measure $\mu$ on $\mathcal{H}(E)$, with full support. In particular $L$ frequently hypercyclic.*

The proofs of both rest on the following criterion:

**Theorem 2.3.** *(see [1, Theorem 1.1]) Let $X$ be a separable Fréchet space and let $L\colon X \to X$ be a continuous linear operator. Assume that for any $D \subset \partial\Delta$ such that $\partial\Delta \setminus D$ is dense in $\partial\Delta$, the linear span of $\bigcup_{\lambda\in\partial\Delta\setminus D} \ker(L-\lambda)$ is dense in $X$. Then $L$ is strongly mixing with respect to an $L$-invariant Borel probability measure $\mu$ on $X$, with full support.*

**Remark 2.1.** *The first author regrets that the second author passed away (quite prematurely). The first author thanks J. Mujica for, more than a collaborator, had been a friend and mentor.*

## References


[1] BAYART, F. AND MATHERON, E. - Mixing operators and small subsets of the circle. *J. Reine Angew. Math.*, **715**, 75-123, 2016.

[2] BIRKHOFF, G. D. - Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **189**, 473-475, 2010.

[3] FÁVARO, V. V. AND MUJICA, J. - Hypercyclic convolution operators on spaces of entire functions. *J. Operator Theory*, **76**, 141-158, 2016.

[4] GODEFROY, G. AND SHAPIRO, J. H. - Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds. *J. Funct. Anal.*, **98**, 229-269, 1991.

[5] MACLANE, G. R. - Sequences of derivatives and normal families. *J. Anal. Math.*, **2**, 72-87, 1952.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *71–72*

# PREDUALS OF SPACES OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS AND THE APPROXIMATION PROPERTY

BLAS MELENDEZ[1,†]

[1]IMECC, UNICAMP, SP, Brasil
The author is supported by CNPq
[†]ra143857@ime.unicamp.br

**Abstract**

Let $U$ be a balanced open subset of a Hausdorff complex locally convex space $E$. In this work we characterize the predual $G(U)$ of the space of holomorphic functions as the projective limit of the preduals of spaces of holomorphic functions that are bounded on certain subsets of $U$. As an application we prove that if $E$ is a Banach space, then it has the approximation property if and only if $G(U)$ has the approximation property.

## 1 Introduction

Let $E$ be a locally convex space, assumed complex and Hausdorff. Let $U$ be a nonvoid open subset of $E$. In 1976, Mazet [1] proved the existence of a complete locally convex space $G(U)$ such that $G(U)' = \mathcal{H}(U)$, where $\mathcal{H}(U)$ denotes the space of holomorphic functions from $U$ into $\mathbb{C}$, with the compact-open topology $\tau_0$. The space $G(U)$ is called the predual of $\mathcal{H}(U)$. Mujica and Nachbin [3, Theorem 2.1] gave a new proof of this result and defined $G(U)$ as

$$G(U) = \{u \in \mathcal{H}(U)' : u|_{B_{\mathcal{U}}^{\alpha}} \text{ is } \tau_0\text{-continuous for every } \alpha, \mathcal{U}\},$$

where $\alpha = (\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ is a sequence of positive real numbers and $\mathcal{U} = (U_n)_{n=1}^{\infty}$ is a countable increasing open cover of $U$. The space $G(U)$ is endowed with the topology of uniform convergence on all sets

$$B_{\mathcal{U}}^{\alpha} = \{f \in \mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{U}) : \|f\|_{U_n} \leq \alpha_n \text{ for every } n \in \mathbb{N}\},$$

where

$$\|f\|_{U_n} = \sup_{x \in U_n} |f(x)|,$$

and $\mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{U})$ denotes the Fréchet space

$$\mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{U}) = \{f \in \mathcal{H}(U) : f(U_n) \text{ is bounded in } \mathbb{C} \text{ for every } n \in \mathbb{N}\},$$

endowed with the topology of uniform convergence on all sets $U_n$.

In [2, Theorem 2.1] Mujica also constructed the predual $G^{\infty}(\mathcal{U})$ of $\mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{U})$ which is the complete locally convex space and Hausdorff given by

$$G^{\infty}(\mathcal{U}) = \{u \in \mathcal{H}^{\infty}(\mathcal{U})' : u|_{B_{\mathcal{U}}^{\alpha}} \text{ is } \tau_0\text{-continuous for every } \alpha\},$$

endowed with the topology of uniform convergence on all the sets $B_{\mathcal{U}}^{\alpha}$, where $\alpha$ runs over the sequences of positive numbers.

In this work we give necessary and sufficient conditions for $G(U)$ to have the approximation property, when $U$ is a balanced open subset of a complex Banach space. We also give a new proof of a result due to Aron and Schottenloher [1, Theorem 2.2], which stating that if $E$ is a complex Banach space with the approximation property then $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$, with the compact-open topology, has the approximation property.

## 2 Main result

The main result in this work is the following theorem.

**Theorem 2.1.** *Let $U$ be a balanced open subset of a Banach space $E$. Then $G(U)$ has the approximation property if and only if $E$ has the approximation property.*

Our proof of Theorem 2.1 rests on the following results.

**Theorem 2.2.** *(see [2, Theorem 4.2]) Let $U$ be a balanced open subset of a Banach space $E$, and let $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of balanced bounded open subsets of $U$ such that $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ and $\rho_n U_n \subset U_{n+1}$, with $\rho_n > 1$, for every $n \in \mathbb{N}$. Then $G^\infty(\mathcal{U})$ has the approximation property if and only if $E$ has the approximation property.*

**Theorem 2.3.** *Let $U$ be a balanced open subset of a Banach space $E$. Then*

$$G(U) = \mathrm{proj}_{\mathcal{U}} G^\infty(\mathcal{U})$$

*topologically, where $\mathcal{U} = (U_n)_{n=1}^{\infty}$ runs over the countable increasing open covers of $U$ satisfying the following conditions:*

*(a) $U_n$ is balanced and bounded for every $n \in \mathbb{N}$;*

*(b) there is a sequence $(\rho_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $\rho_n > 1$, such that $\rho_n U_n \subset U_{n+1}$ for every $n \in \mathbb{N}$.*

*Furthermore, The projective limit $\mathrm{proj}_{\mathcal{U}} G^\infty(\mathcal{U})$ is reduced, that is, the canonical projection*

$$\Pi_{\mathcal{U}} \colon \mathrm{proj}_{\mathcal{U}} G^\infty(\mathcal{U}) \to G^\infty(\mathcal{V})$$

*has dense range, for every $\mathcal{U}$.*

**Proof of Theorem 2.1** Let us first suppose that $G(U)$ has the approximation property. By Proposition 2.6 of [3] the space $E$ is topologically isomorphic to a complemented subspace of $G(U)$. Hence $E$ has the approximation property. Conversely, let us suppose that $E$ has the approximation property. By Theorem 2.2, $G^\infty(\mathcal{U})$ has the approximation property for each $\mathcal{U}$ countable increasing open cover of $U$ satisfying the conditions above. Since the reduced projective limit of spaces with the approximation property has the approximation property, it follows at once from Teorem 2.3 that $G(U)$ has the approximation property. □

As we said in the introduction we obtain, as an immediate consequence of Theorem 2.1, a well-known result due to Aron and Schottenloher [1]:

**Corollary 2.1.** *Let $U$ be a balanced open subset of a Banach space $E$. Then $E$ has the approximation property if and only if $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$ has the approximation property.*

### References

[1] Aron, R. M. and Shottenloher, M. - Compact holomorphic mappings on Banach spaces and the approximation property. *J. Funct. Anal.*, **21**, 7-30, 1976.

[2] Mazet, P. - *Analytic Sets in Locally Convex Spaces.*, North-Holland Math. Stud., vol. 89, North-Holland, Amsterdan, 1984.

[3] Mujica, J. - *Linearization of holomorphic mappings of bounded type.*, Progress in Fuctional Analysis (peñíscola, 1990), North-Holland Math. Stud., vol. 170, pp. 149-162, North-Holland, Amsterdam, 1992.

[4] Mujica, J. and Nachbin, L. - Linearization of holomorphic mappings on locally convex spaces. *J. Math. Pures Appl.* (9), **71**, 543-560, 1992.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *73–74*

# DESIGUALDADE DE CAFFARELLI-KOHN-NIRENBERG EM ESPAÇOS MÉTRICOS

WILLIAN I. TOKURA[1,†], LEVI R. ADRIANO[1,‡] & CHANGYU XIA[2,§].

[1]Instituto de Matemática e Estatística, UFG, GO, Brasil, [2]Instituto de Matemática, Unb, DF, Brasil

[†]tokura@posgrad.ufg.br, [‡]levi@ufg.br, [§]xia@mat.unb.br

**Abstract**

Neste trabalho, nós provamos que se um espaço métrico com medida satisfaz a propriedade de volume duplicado juntamente com a desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg com mesmo expoente $n(n \geq 2)$, então o espaço tem crescimento de volume $n$-dimensional. Como aplicação, nós obtemos resultados de rigidez métrica e topológica de variedades que suportam a desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg.

## 1 Introdução

Seja $\mathbb{R}^n$ o espaço Euclideano $n$-dimensional, denote por $dx$ o elemento de volume associado à métrica canônica $g_0$ e considere $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções suaves em $\mathbb{R}^n$ com suporte compacto.

Entre as famílias mais gerais de desigualdades, Caffarelli, Kohn e Nirenberg em [2] forneceram uma condição suficiente para existência de uma constante $C$, tal que

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\gamma r}|u|^r dx\Big)^{\frac{1}{r}} \leq C\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha p}|\nabla u|^p dx\Big)^{\frac{a}{p}}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\beta q}|u|^q dx\Big)^{\frac{1-a}{q}}, \quad u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{1}$$

para parâmetros $n \geq 2$ e $p, q, r, \sigma, \alpha, \gamma$.

Denotaremos por $C_{opt}(\mathbb{R}^n)$ a melhor constante para esta desigualdade, ou seja,

$$C_{opt}(\mathbb{R}^n)^{-1} = \inf_{u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)-\{0\}} \frac{\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha p}|\nabla u|^p dx\Big)^{\frac{a}{p}}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\beta q}|u|^q dx\Big)^{\frac{1-a}{q}}}{\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\gamma r}|u|^r dx\Big)^{\frac{1}{r}}}$$

Em [1], [3], [6] os autores consideram o estudo das variedades Riemannianas com curvatura de Ricci não negativa e que suportam uma classe particular da desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg. Em particular, em [1], [3] e [6] os autores obtem resultados de rigidez métrica e topológica.

Neste trabalho, nós extendemos o resultado principal de Kristály e Ohta em [4] para a classe de Caffarelli-Kohn-Nirenberg e obtemos alguns resultados de rigidez métrica e topológica para variedades Riemannianas.

## 2 Resultados Principais

**Teorema 2.1.** *Considere $\alpha$, $\beta$, $\sigma$, $p$, $q$, $r$ como no Teorema 1.2 de [5]. Seja (X,d,m) um espaço métrico próprio $n$-dimensional com medida e assuma que para algum $x_0 \in X$, $C \geq C_{opt}(\mathbb{R}^n)$ e $C_0 \geq 1$ a desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (1) ocorra em $X$ juntamente com a seguinte condição*

$$\frac{\mathsf{m}(B_R(x))}{\mathsf{m}(B_r(x))} \leq C_0\Big(\frac{R}{r}\Big)^n, \quad x \in X, \ \ e \ \ 0 < r < R \tag{1}$$

*e*

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\mathsf{m}(B_R(x_0))}{\mathsf{m}_E(\mathbb{B}_r(0))} = 1 \tag{2}$$

*onde* $B_r(x) := \{y \in X : d(x,y) < r\}$, $\mathbb{B}_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$ *e* $\mathsf{m}_E$ *é a medida n-dimensional de Lebesgue. Então , nós temos*

$$\mathsf{m}(B_\rho(x)) \geq C_0^{-1}\Big(\frac{C_{opt}(\mathbb{R}^n)}{C}\Big)^{\frac{pq}{q-p}\frac{1}{a}} \mathsf{m}_E(\mathbb{B}_\rho(0)), \quad \rho > 0, \quad x \in X. \tag{3}$$

**Demonstração** É análoga à demontração do Teorema 3.3 de [1] e do Teorema 1.2 de [6].

Como consequência do Teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov, nós obtemos os seguintes resultados a partir do Teorema (2.1)

**Teorema 2.2.** *Dado um inteiro* $n \geq 2$, *existe* $\epsilon(n) > 0$ *tal que toda variedade Riemanniana completa não compacta* $(M^n, g)$ *com curvatura de Ricci não negativa em que a desigualdade*

$$\Big(\int_M r(x)^{\gamma r}|u|^r dv\Big)^{\frac{1}{r}} \leq (C_{opt}(\mathbb{R}^n) + \epsilon(n))\Big(\int_M r(x)^{\alpha p}|\nabla u|^p dv\Big)^{\frac{a}{p}}\Big(\int_M r(x)^{\beta q}|u|^q dv\Big)^{\frac{1-a}{q}}, \quad u \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$$

*é satisfeita, é difeomorfa ao espaço Euclideano* $\mathbb{R}^n$.

**Teorema 2.3.** *Seja* $(M^n, g)$ *uma variedade Riemanniana completa não compacta com curvatura de Ricci não negativa e suponha que a seguinte desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg ocorra*

$$\Big(\int_M r(x)^{\gamma r}|u|^r dv\Big)^{\frac{1}{r}} \leq C_{opt}(\mathbb{R}^n)\Big(\int_M r(x)^{\alpha p}|\nabla u|^p dv\Big)^{\frac{a}{p}}\Big(\int_M r(x)^{\beta q}|u|^q dv\Big)^{\frac{1-a}{q}}, \quad u \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$$

*Então* $M$ *é isometrica ao espaço Euclideano* $\mathbb{R}^n$.

## References


[1] ADRIANO, L.; XIA, CHANGYU - Sobolev type inequalities on Riemannian manifolds. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* **371** (2010), 372–383.

[2] CAFFARELLI, L.; KOHN, R., AND NIREMBERG, L. - First order interpolation inequalities with weights. *Compositio Mathematica.* **53** (1984), 259–275.

[3] DO CARMO, M. P.; XIA, CHANGYU - Complete manifolds with non-negative Ricci curvature and the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities. *Compositio Mathematica.* **140** (2004), 818–826.

[4] KRISTÁLY, A.; OHTA, SHIN-ICHI - Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequality on metric measure spaces with applications. *Mathematische Annalen.* **357** (2013), 711–726.

[5] LAM, NGUYEN; LI, GUOZHEN - Sharp constants and optimizers for a class of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities. *Advanced Nonlinear Studies, 0(0), pp. -. Retrieved 14 Jun. 2017, from doi:10.1515/ans-2017-0012*, 2017.

[6] XIA, CHANGYU - The Gagliardo-Nirenberg inequalities and manifolds of non-negative Ricci curvature. *Journal of Functional Analysis* **224** (2005), 230–241.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *75–76*

# EXISTÊNCIA, UNICIDADE E DECAIMENTO EXPONENCIAL VIA TÉCNICAS DE SEMIGRUPO PARA UM SISTEMA ACOPLADO UNIDIMENSIONAL: LEIS DE CATTANEO VERSUS FOURIER

RENATO FABRÍCIO COSTA LOBATO[1,†] & MAURO DE LIMA SANTOS[2,‡]

[1]FACET/CUBT, UFPA, PA, Brasil, Abaetetuba, [2]ICEN, UFPA, PA, Brasil, Belém

[†]renatolobato@ufpa.br, [‡]ls@ufpa.br

**Abstract**

Neste trabalho, analisamos um sistema de equações diferenciais de ondas acopladas, sob o ponto de vista da existência, unicidade e estabilização exponencial. Temos por referência, os trabalhos de **Mahmoud Najafi**, os quais tratam de sistemas de equações de ondas acoplados em paralelo. Para formulação do Problema utilizou-se a lei de Fourier-Cattaneo. A lei de Fourier implica no fato de que uma perturbação térmica em qualquer ponto de um corpo será instantaneamente sentida, mas de forma desigual em todos os outros pontos do referido corpo. Em outras palavras, a lei de Fourier prevê que os sinais térmicos se propagam com velocidade infinita, o que na prática não acontece, configurando assim o que se conhece como paradoxo da lei de Fourier. Várias modificações da equação da lei de Fourier tem sido propostas afim de "corrigir" o paradoxo citado. A principal delas é lei de Maxwell-Cattaneo.

## 1 Introdução

No que se segue, consideremos o sistema hiperbólico de equações diferenciais parciais, dado por

$$\begin{aligned}
u_{tt} - c_1^2 u_{xx} + \alpha(u-v) + \beta(u_t - v_t) + \delta\theta_x &= 0 \;\; em \;\; ]0,\ell[\times]0,\infty[ \qquad (1)\\
v_{tt} - c_2^2 v_{xx} + \alpha(v-u) + \beta(v_t - u_t) + \delta\theta_x &= 0 \;\; em \;\; ]0,\ell[\times]0,\infty[ \qquad (2)\\
\varrho\theta_t + q_x + \delta u_{xt} + \delta v_{xt} &= 0 \;\; em \;\; ]0,\ell[\times]0,\infty[ \qquad (3)\\
\tau q_t + \gamma q + \theta_x &= 0 \;\; em \;\; ]0,\ell[\times]0,\infty[. \qquad (4)
\end{aligned}$$

As constantes positivas $\varrho$, $\tau$, $\delta$ e $\gamma$ referem-se a hipóteses em termoelasticidade. Aqui, consideramos as seguintes condições de bordo

$$u(0,t) = u(\ell,t) = v(0,t) = v(\ell,t) = \theta_x(0,t) = \theta_x(\ell,t) = q(0,t) = q(\ell,t) = 0. \qquad (5)$$

para todo $t > 0$ e condições iniciais

$$\begin{gathered}
u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), v(x,0) = v_0(x), v_t(x,0) = v_1(x) \qquad (6)\\
\theta(x,0) = \theta_0(x) = q(x,0) = q_0(x) = 0, \forall x \in (0,\ell).
\end{gathered}$$

## 2 Resultados Principais

Para os resultados que se seguem, vamos considerar

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & Id & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ c_1^2\partial_{xx} - \alpha Id & -\beta Id & \alpha Id & \beta Id & -\delta\partial_x & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & Id & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \alpha Id & \beta Id & c_2^2\partial_{xx} - \alpha Id & -\beta Id & -\delta\partial_x & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & -\frac{\delta}{\varrho}\partial_x & \mathcal{O} & -\frac{\delta}{\varrho}\partial_x & \mathcal{O} & -\frac{1}{\rho_3}\partial_x \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & -\frac{1}{\tau}\partial_x & -\frac{\gamma}{\tau}Id \end{pmatrix}. \tag{7}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = (H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)) \times H_0^1(0,L) \times (H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)) \times H_0^1(0,L) \times H_*^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \tag{8}$$

$$e$$

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times L_*^2(0,L) \times L^2(0,L) \tag{9}$$

**Teorema 2.1. (Existência e Unicidade de Soluções)** *Existe uma única solução $U = (u, \varphi, v, \psi, \theta, q)^T$ para o sistema (1)-(4), com $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, satisfazendo*

$$U \in C(\mathbb{R}^+; \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}^+; \mathcal{H}).$$

**Teorema 2.2. (Estabilização Exponencial)** *A solução $U = (u, \varphi, v, \psi, \theta, q)^T$ do sistema (1)-(4) decai exponencialmente.*

## References


[1] **A. Borichev, Y. Tomilov**, *Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups*, Math. Ann. 347 (2) (2009) 455-478.

[2] **A. Pazy**, *semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer-Verlag, New York, (1983).

[3] **Mahmoud Najafi**, *Stabilizability of Coupled Wave Equations in Parallel Under Various Boundary Conditions* IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, VOL. 42, NO. 9, SEPTEMBER 1997.

[4] **Mahmoud Najafi, G. R. Sarhangi, and H. Wang**, *Study of Exponential Stability of Coupled Wave Systems via Distribuded Stabilizer.* Hindawi Publishing Corporation. IJMMS 28:8 (2001) 479 - 491.

[5] **M. Najafi, G. R. Sarhangi and H. Wang**, *The study of stability of coupled wave equations under various end conditions*, Proceedings of 31st Conferences on Decision and Control, Tucson, Arizona, (1992), 374-379.

[6] **R. F. C. Lobato, S.M. S. Cordeiro, M. L. Santos, and D. S. Almeida Júnior**, *Optimal Polynomial Decay to Coupled Wave Equations and Its Numerical Properties. Hindawi Publishing Corporation.* Journal of Applied Mathematics.Volume 2014. Article ID 897080.

[7] **Salim A. Messaoudi and Belkacem Said-Houari**, *Exponential stability in one-dimensional non-linear thermoelasticity with second sound.* Math. Meth. Appl. Sci. DOI: 10.1002/mma.556.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *77–78*

# A NONLINEAR MODEL FOR VIBRATIONS OF A BAR

M. MILLA MIRANDA[1,†], A. T. LOUREDO[1,‡] & L. A. MEDEIROS[2,§]

[1]Departamento de Matemática, UEPB, PB, Brasil, [2]Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM, RJ, Brasil

[†]mmillamiranda@gmail.com, [‡]aldolouredo@gmail.com, [§].

**Abstract**

This paper is concerned with the existence and decay of weak solutions of a quasilinear hyperbolic problem

## 1 Introduction

In [5] was deduced a mathematical model to describe the vibrations of the cross sections of a bar which is clamped in an end and in the other end is glued a mass.

In this paper we analyze the existence and decay of weak solutions of the above problem in the general n-dimensional case.

## 2 Notations and Main Results

Let $\Omega$ be an open bounded set of $\mathbb{R}^n$ whose boundary $\Gamma$ is constituted of two parts $\Gamma_0$ and $\Gamma_1$ such that $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \phi$. By $\nu(x)$ is denoted the unit exterior normal at $x \in \Gamma_1$. Let $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ be the Hilbert space

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ on } \Gamma_0\}$$

provided with the scalar product

$$((u, v)) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx.$$

Consider functions $\sigma_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ such that

$$\sigma_i \text{is globally Lipschits, increasing and } \sigma_i(0) = 0 \ (i = 1, 2, ..., n).$$

**Theorem 2.1.** *Consider*

$$u^0, u^1 \in H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega) \ \textit{with}\ \frac{\partial u^0}{\partial \nu} = \frac{\partial u^1}{\partial \nu} = 0 \ \textit{on}\ \Gamma_1.$$

*Then there exits a unique function $u$ in the class*

$$u \in L^\infty_{loc}(0, \infty; H^1_{\Gamma_0}(\Omega));\ u' \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, \infty; H^1_{\Gamma_0}(\Omega));$$
$$u'' \in L^\infty_{loc}(0, \infty; L^2(\Omega)) \cap L^2_{loc}(0, \infty; H^1_{\Gamma_0}(\Omega));\ u'' \in L^\infty_{loc}(0, \infty; L^2(\Gamma_1))$$

*such that $u$ satisfies the equations*

$$u'' - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}[\sigma_i(\frac{\partial u}{\partial x_i}) + \frac{\partial u'}{\partial x_i}] = 0 \ \textit{in}\ L^2_{loc}(0, \infty; H^1_{\Gamma_0}(\Omega));$$
$$\sum_{i=1}^{n} \left[\sigma_i(\frac{\partial u}{\partial x_i}) + \frac{\partial u'}{\partial x_i}\right] \nu_i + u'' = 0 \ \textit{in}\ L^2_{loc}(0, \infty; H^{1/2}(\Gamma_1))$$

*and the initial conditions*

$$u(0) = u^0 \ , \ u'(0) = u^1.$$

■

Let $\hat{\sigma}_i = \displaystyle\int_0^s \sigma_i(\tau)\ d\tau$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Consider

$$E(t) = \frac{1}{2}|u'(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \hat{\sigma}_i(\frac{\partial u}{\partial x_i})\ dx + \frac{1}{2}|u'(t)|^2_{L^2(\Gamma_1)} \ , \ t \geq 0.$$

Assume

$$s^2 \leq b_i\hat{\sigma}_i(s) \ , \ \forall s \in \mathbb{R} \ (b_i \text{ positive constant} \ , \ i = 1, 2, ..., n).$$

**Theorem 2.2.** *Let $u$ be the solution obtained in Theorem 2.1.Then*

$$E(t) = 3E(0)exp(-\frac{2}{3}\eta t) \ , \ \forall t \geq 0$$

*for some positive constant $\eta$.*

**Proof** In the proof of Theorem 2.1, we use the Faedo-Galerkin method with a special basis, the theory of monotone operators and results of trace theorems. The decay of solutions is derived by using a Liapunov functional.

## References


[1] Dafermos,M.-*The mixed initial boundary value problem for equations of nonlinear one dimensional viscoelasticity*, J.Diff. Eq. 6(1969),71-86.

[2] Lions, J.L.-*Problmes aux Limites dans les Équations aux Dérivées Partielles-Interpolation, Vol. 1, Oeuvres choisies de Jacques Louis Lions,* SMAI, EDP Sciences, Paris, 2003.

[3] Mac Camy, R.C.and Mizel, V.J.-*Existence and nonexistence in the large of solutions to quasilinear wave equations,* Arch. Rat. Mech. Anal. 25(1967),299-320.

[4] Maia, S.A. and Milla Miranda, M.-*Existence and decay of solutionsof an abstract second order nonlinear problem,* J. Math. Anal. Appl. 358(2009),445-456.

[5] Medeiros, L.A. and Pereira, D.C.-*Problemas de Contorno para Operadores Diferenciais Parciais NÃ£o Lineares,* IM-UFRJ, junho 1990, Rio de Janeiro, RJ.

[6] Milla Miranda, M.,Louredo, A.T. and Medeiros, L.A.-*Longitudinal vibrations of a bar,* Atas X ENAMA, 2016.

[7] Timoshenko, S., Young, D. and Weaver, W.-*Vibrations Problems in Engineering,* John Wiley Sons, New York, 1974.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *79–80*

# JOINT UPPER SEMICONTINUITY FOR PARABOLIC EQUATIONS WITH SPATIALLY VARIABLE EXPONENTS

JACSON SIMSEN[1,†], MARIZA S. SIMSEN[1,‡] & MARCOS R. T. PRIMO[3,§]

[1]Instituto de Matemática e Computação, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, Minas Gerais, Brazil, [2]Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná, Brazil
This work has been partially supported by Science without Borders-CAPES-PVE-Process 88881.030388/2013-01

[†]jacson@unifei.edu.br, [‡]mariza@unifei.edu.br, [§]mrtprimo@uem.br

**Abstract**

This talk is based on [9] where we we consider an evolutionary problem with spatially variable exponents and we prove continuity of the flows and upper semicontinuity of global attractors when the exponents and coefficients in the diffusion and absorption terms vary simultaneously.

## 1 Introduction

In this talk we shall present a study of a problem of the form

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\lambda(t)}{\partial t} - \operatorname{div}(D_\lambda|\nabla u_\lambda(t)|^{p_\lambda(x)-2}\nabla u_\lambda(t)) + A_\lambda(x)|u_\lambda(t)|^{p_\lambda(x)-2}(t)u_\lambda(t) = B(u_\lambda(t)), \ \ t>0, \\ u_\lambda(0) = u_{0\lambda}, \end{cases} \tag{1}$$

under homogeneous Neumann boundary conditions, where $\lambda \in \mathbb{N}$, $u_{0\lambda} \in H := L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ is a smooth bounded domain. Also, $B : H \to H$ is a globally Lipschitz map with Lipschitz constant $L \geq 0$, $D_\lambda(\cdot), p_\lambda(\cdot) \in C^1(\bar{\Omega})$, $A_\lambda \in L^\infty(\Omega)$ $0 < \beta \leqslant D_\lambda(x), A_\lambda \in L^\infty(\Omega) \leqslant M < +\infty$, a.e. in $\Omega$ and finally $2 < p^- \leq p(x) \leq p_\lambda(x) \leq p_\lambda^+ \leq a$, for all $\lambda \in \mathbb{N}$, where $a > 2$ is a positive constant, $p^- := \min_{x\in\overline{\Omega}} p_\lambda(x)$ and $p_\lambda^+ := \max_{x\in\overline{\Omega}} p_\lambda(x)$.

In [4], if $p_\lambda(\cdot) \in C(\bar{\Omega})$, the authors proved that the family of global attractors for the problem

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\lambda}{\partial t} - \operatorname{div}(D_\lambda|\nabla u_\lambda|^{p_\lambda(x)-2}\nabla u_\lambda) = B(u_\lambda), \ \ t>0, \\ u_\lambda(0) = u_{0\lambda}, \end{cases} \tag{2}$$

under homogeneous Dirichlet boundary conditions, is upper semicontinuous at infinity, with $p_\lambda(x) = p(x)$, for every $x \in \Omega$ and $\lambda \in \mathbb{N}$, with $D_\lambda \to D_0$ in $L^\infty(\Omega)$, as $\lambda \to 0$. Also, considering $D_\lambda \equiv D \geq 1$, they proved upper and lower semicontinuity of global attractors when $D \to \infty$.

In [7], if $n \geq 1$, $p_\lambda(\cdot) \in C^1(\bar{\Omega})$ and $p_\lambda(\cdot) \to p$ ($p > 2$ constant) as $\lambda \to \infty$ in $L^\infty(\Omega)$, we investigated in which way the parameter $p(x)$ affects the dynamic of the problem (1) with $A_\lambda \equiv 1$ and $D_\lambda \equiv 1$.

In [8], if $n \geq 1$, $p_\lambda(\cdot) \in C(\bar{\Omega})$, $A_\lambda \equiv 1$, $p_\lambda(\cdot) \to p$ ($p > 2$ constant) as $\lambda \to \infty$ in $L^\infty(\Omega)$ and $D_\lambda(x) = D_\lambda \to \infty$ as $\lambda \to \infty$, we investigated in which way the parameters $(p_\lambda(x), D_\lambda)$, affects the dynamic of the problem (1).

## 2 Main Results

In this talk, assuming that $D_\lambda(\cdot), p_\lambda(\cdot) \in C^1(\bar{\Omega})$, we shall prove continuity of the solutions with respect to the initial conditions and parameters $(D_\lambda, A_\lambda, p_\lambda)$ when $p_\lambda(\cdot) \to p$, $A_\lambda(\cdot) \to A(\cdot)$ and $D_\lambda \to D(\cdot)$ in $L^\infty(\Omega)$ as $\lambda \to \infty$, where $p^- > 2$, $p_\lambda$ is the variable exponent, $D_\lambda$ and $A_\lambda$ are the coefficients in the diffusion and absorption terms, respectively and $u_{0\lambda} \to u_0$ in $H$. After that, we obtain the upper semicontinuity of the family of global attractors $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{N}}$ of (1) on $\lambda$ at $\infty$ in topology of $H$.

First observe that the limit problem is given by

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t)}{\partial t} - \operatorname{div}(D|\nabla u(t)|^{p(x)-2}\nabla u(t)) + A(x)|u(t)|^{p(x)-2}u(t) = B(u(t)), \quad t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1}$$

**Lemma 2.1.** *Given* $T > 0$, $M := \{u_\lambda : \lambda \in \mathbb{N}, u_\lambda$ *is a solution of (1) with* $u_\lambda(0) = u_{0\lambda}$ *and* $u_{0\lambda} \to u_0$ *in* $H$, *as* $\lambda \to +\infty\}$ *is relatively compact in* $C([0,T];H)$.

**Theorem 2.1.** *For each* $\lambda \in \mathbb{N}$ *let* $u_\lambda$ *be a solution of (1) with* $u_\lambda(0) = u_{0\lambda}$. *Suppose that there exists* $C > 0$, *independent of* $\lambda$, *such that* $\|u_{0\lambda}\|_{X_\lambda} \leq C$ *for all* $\lambda \in \mathbb{N}$ *and* $u_{0\lambda} \to u_0$ *in* $H$ *as* $\lambda \to \infty$. *Then, for each* $T > 0$, $u_\lambda \to u$ *in* $C([0,T];H)$ *as* $\lambda \to \infty$ *where* $u$ *is a solution of (1) with* $u(0) = u_0$.

Thus, following the same arguments as in Theorem 6 in [5] we conclude:

**Theorem 2.2.** *The family of global attractors* $\{\mathcal{A}_\lambda;\ \lambda \in \mathbb{N}\}$ *associated with problem (1) is upper semicontinuous on* $\lambda$ *at infinity, in the topology of* $H$.

## References


[1] J. Simsen, A global attractor for a $p(x)$-Laplacian inclusion, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **351** (2013) 87–90.

[2] J. Simsen and C.B. Gentile, Well-posed $p$-laplacian problems with large diffusion, *Nonlinear Anal.* **71** (2009) 4609–4617.

[3] J. Simsen, C.B. Gentile, On $p$-Laplacian differential inclusions - Global existence, compactness properties and asymptotic behavior, *Nonlinear Anal.* **71**, (2009), 3488–3500.

[4] J. Simsen and M.S. Simsen, PDE and ODE Limit Problems for $p(x)$-Laplacian Parabolic Equations, *J. Math. Anal. Appl.* **383** (2011) 71–81.

[5] J. Simsen, M.S. Simsen and M.R.T. Primo, Continuity of the flows and upper semicontinuity of global attractors for $p_\lambda(x)$-Laplacian parabolic problems, *J. Math. Anal. Appl.* **398** (2013) 138–150.

[6] J. Simsen, M.S. Simsen and M.R.T. Primo, On $p_\lambda(x)$-Laplacian parabolic problems with non-globally Lipschitz forcing term, *Zeitschrift fur Analysis und Ihre Anwendungen* **33** (2014) 447–462.

[7] J. Simsen, M.S. Simsen and M.R.T. Primo, A Takeuchi-Yamada type equation with variable exponents, *to appear in Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática.*

[8] J. Simsen, M.S. Simsen and M.R.T. Primo, Reaction-Diffusion equations with spatially variable exponents and large diffusion, *Communications on Pure and Applied Analysis* **15** (2016), 495–506.

[9] J. Simsen, M. S. Simsen and M. R. T. Primo, Joint upper semicontinuity for parabolic equations with spatially variable exponents, *to appear in Nonlinear Studies.*

[10] J. Simsen, M.S. Simsen and F.B. Rocha, Existence of solutions for some classes of parabolic problems involving variable exponents, *Nonlinear Studies* **21** (2014) 113–128.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *81–82*

# EXPONENTIAL STABILITY FOR A STRUCTURE WITH INTERFACIAL SLIP AND FRICTIONAL DAMPING

CARLOS A. RAPOSO[1,†]

[1]Institute of Mathematics, UFBA, BA, Brasil and UFSJ, MG, Brasil

[†]raposo@ufsj.edu.br

**Abstract**

In this work we prove the exponential stability for a laminated beam consisting of two identical layers of uniform density, which is a system closely related to the Timoshenko beam theory, taking into account that an adhesive of small thickness is bonding the two layers and produce the interfacial slip. It is assumed that the thickness of the adhesive bonding the two layers is small enough so that the contribution of its mass to the kinetic energy of the entire beam may be ignored.

## 1 Introduction

There are few manuscripts that deal with systems of interfacial slip, we cite [1, 3] and the recent work [3] where was established the existence of smooth finite dimensional global attractors for the corresponding solution semigroup. In [1], Hansen and Spies derived the mathematical model (1) for two-layered beams with structural damping due to the interfacial slip

$$\begin{aligned} &\rho u_{tt} + G(\psi - u_x)_x = 0,\ x \in (0,1),\ t \geq 0, \\ &I_\rho(3S_{tt} - \psi_{tt}) - G(\psi - u_x) - D(3S_{xx} - \psi_{xx}) = 0,\ x \in (0,1),\ t \geq 0, \\ &3I_\rho S_{tt} + 3G(\psi - u_x) + 4\delta_0 S + 4\gamma_0 S_t - 3DS_{xx} = 0,\ x \in (0,1),\ t \geq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

where $u(x,t)$ denotes the transverse displacement, $\psi(x,t)$ represents the rotation angle, and $S(x,t)$ is proportional to the amount of slip along the interface at time $t$ and longitudinal spatial variable $x$. The coefficients $\rho, G, I_\rho, D, \delta_0, \gamma_0$ are the density, the shear stiffness, mass moment of inertia, flexural rigidity, adhesive stiffness, and adhesive damping of the beams. The equation $3I_\rho S_{tt} + 3G(\psi - u_x) + 4\delta_0 S + 4\gamma_0 S_t - 3DS_{xx} = 0$ describes the dynamics of the slip. In [5] was proved that the frictional damping $4\gamma_0 S_t$ created by the interfacial slip alone is not enough to stabilize the system (1) exponentially to its equilibrium state. The natural question is: does the dissipation process caused by the full damped system imply the exponentially stability?

## 2 Energy of the system

The energy of the system given by

$$E(t) = \frac{1}{2}\left[3\rho_1||u_t||^2 + 3k||\psi - u_x||^2 + \rho_2||s_t||^2 + b||s_x||^2 + 4\delta||s||^2 + 3\rho_2||(s-\psi)_t||^2 + 3b||(s-\psi)_x||^2\right]$$

satisfies

$$\frac{d}{dt}E(t) = -3\alpha||u_t|| - 4\gamma||s_t||^2 - 3\beta||(s-\psi)_t||^2.$$

Observe that the functional of energy restores some terms of energy with a negative sign. We are interested in building the functional of Lyapunov that restores the full energy of the system with negative sign. The main result is given in the sequel.

## 3 Main result: Exponential stability

**Theorem 3.1.** *The problem (1) is exponentially stable, that is,*

$$E(t) \leq C\, E(0)\, e^{-w\,t}, \text{ for some } C > 0,\, w > 0.$$

**Proof** See [3].

## References


[1] HANSEN, S.W AND SPIES R. - Structural damping in a laminated beams due to interfacial slip. *J. Sound Vibration*, **204**, 183-202, 1997.

[2] FENG, B. MA, T.F. MONTEIRO, R.N. AND RAPOSO, C.A. - Dynamics of Laminated Timoshenko Beams. *J Dyn Diff Equat.*, (2017). doi:10.1007/s10884-017-9604-4

[3] RAPOSO, C.A. - Exponential stabilty for a structure with interfacial slip and frictional damping. *Applied Mathematics Letters*, **53**, 85-91, 2016.

[4] J.-M. WANG, J.-M., XU, G.-Q. AND YUNG, S.-P. - Exponential stabilization of laminated beams with structural damping and boundary feedback controls. *SIAM J. Control Optim.*, **44**, 1575-1597, 2005.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *83–84*

# DINÂMICA ASSINTÓTICA PARA EQUAÇÃO NAVIER-STOKES-VOIGT NÃO AUTÔNOMA EM DOMÍNIOS LIPSCHITZ

XINGUANG YANG[1,†], BAOWEI FENG[2,‡], THALES MAIER SOUZA[3,§] & TAIGE WANG[4,§§]

[1]College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang, China, [2]College of Economic Mathematics, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu, China, [3]entro tecnológico Joinville, UFSC, Joinville, Brasil, [4]Departament of Mathematics, Virginia Tech, Blacksburg

[†]yangxinguang@hotmail.com, [‡]bwfeng@swufe.edu.cn, [§]thales.maier@ufsc.br, [§§]tigerwtg@math.vt.edu

**Abstract**

Este trabalho foca na regularidade ótima e na dinâmica a longo prazo de soluções da equação de Navier-Stokes-Voigt com forças não autônomas em domínios não suaves. Considerando os dados iniciais em espaços adequados, pode-se mostrar que o problema gera um processo de evolução e mostramos, também, a existência de uma atrator uniforme consistindo em trajetórias completas.

## 1 Introdução

Uma versão do modelo Navier-Stokes-Voigt é uma modificação da equação de Navier-Stokes adicionando uma regularização pseudoparabólica $-\alpha^2\Delta u_t$ do campo velocidade $u$. Esta regularização é bem sucedida em aproximações numéricas para modelos de oceano. Esta aproximação estratégica pode ser encontrada no trabalho de Oskolkov [2].

Considere o problema de valor inicial e de fronteira não homogênea para equação de 2D-Navier-Stokes-Voigt incompreenssível não autônoma, em um domínio limitado Lipschitz $\Omega \subset \mathbb{R}^2$,

$$
\begin{aligned}
& u_t - \alpha^2\Delta u_t - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f(x,t), \quad \text{em} \quad \Omega_\tau,\\
& \text{div} u = 0, \quad \text{em} \quad \Omega_\tau,\\
& u(x,t)|_{\partial\Omega} = \varphi, \quad \varphi\cdot n = 0, \quad \text{em} \quad \partial\Omega_\tau,\\
& u(\tau,x) = u_\tau(x), \quad \text{em} \quad \Omega,
\end{aligned}
$$

onde $n$ é o vetor normal unitário exterior de $\partial\Omega$, $\Omega_\tau = \Omega\times(\tau,+\infty)$, $\partial\Omega_\tau = \partial\Omega\times(\tau,+\infty)$, $\tau\in\mathbb{R}$ é o tempo inicial, $\nu$ é as viscosidade cinemática do fluido, $u=(u_1,u_2)$ é o vetor velocidade desconhecido, $p$ é a pressão, a constante $\alpha>0$ é um parâmetro caracterizando a elasticidade do fluido, a função $\varphi\in L^\infty(\partial\Omega)$ é uma função que independe do tempo, e a força externa $f(x,t)\in L^2_b(\mathbb{R};H)$ (Espaço das funções de translação limitada).

Usando a função ''background" para o problema de Stokes (Veja [1]), se $f$ é apenas uma força externa de translação limitada, provamos a existência de uma única solução global e a dependencia contínua dos dados iniciais em $V$. O processo de evolução contínuo gerado pelas soluções do problema é dissipativo e usando a condição-(C) uniforme provamos a compacidade assintótica uniforme do processo. Assim, usando propriedades do operador de Stokes, estabelecemos a existência de um atrator uniforme.

## 2 Resultados Principais

Considere,

$$H = \overline{\{u;\ u\in(C_0^\infty(\Omega))^2,\ \text{div} u = 0\}}^{(L^2(\Omega))^2}$$

munido com norma $|\cdot|$ e produto interno $(\cdot,\cdot)$ usuais de $(L^2(\Omega))^2$ e $V = \overline{\{u;\ u \in (C_0^\infty(\Omega))^2,\ \mathrm{div} u = 0\}}^{(H^1(\Omega))^2}$ munido com norma $\|\cdot\|$ e produto interno $((\cdot,\cdot))$ usuais de $(H_0^1(\Omega))^2$.

**Teorema 2.1.** *Sejam $u_\tau \in V$, $f \in L_b^2(\mathbb{R}; H)$, $\varphi \in L^\infty(\partial\Omega)$, e $\varphi \cdot n = 0$ em $\partial\Omega$. Então o problema admite uma única solução fraca que depende continuamente dos dados iniciais, com $u(t,x) \in C([\tau,+\infty); V)$.*

**Prova:** Para mostrar a existência de soluções usamos procedimentos padrão de Faedo-Galerkin, veja [3]. ∎

Seja $f_0 \in L_b^2(\mathbb{R}; H)$. A boa colocação do problema gera uma família de processos $U_f(t,\tau) : V \to V$, $f \in \mathcal{H}(f_0)$, definida pelo operador solução, isto é, $U_f(t,\tau)u_\tau = u(t)$, onde $u$ é a única solução e $f$ pertence aos espaço de símbolos $\mathcal{H}(f_0)$.

**Teorema 2.2.** *A família de processos $U_f(t,\tau)$ associada ao problema, possui um conjunto uniformemente absorvente em $V$, isto é, existe um conjunto $B_0$ tal que, para todo limitado $B$ de $V$ e qualquer $\tau \in \mathbb{R}$, existe algum tempo $t_0(B,\tau) \geq \tau$ de maneira que*

$$\bigcup_{f \in \mathcal{H}(f_0)} U_f(t,\tau)B \subset B_0, \quad \textit{para todo} \quad t \geq t_0$$

**Prova:** Seja $D \subset V$ qualquer conjunto limitado e $v_\tau \in D$, podemos mostrar que existe um constante $d > 0$ tal que

$$(|v_\tau|^2 + \alpha\|v_\tau\|^2)e^{\int_\tau^t(-C\nu)ds} + \int_\tau^t e^{-C\nu(t-s)}2K_0^2 ds \leq d^2,$$

onde $K_0^2 = C\left[\frac{1}{\varepsilon}\|\varphi\|^2_{L^\infty(\partial\Omega)} + \varepsilon\|\varphi\|^2_{L^\infty(\partial\Omega)}\right]$. Pode-se mostrar que

$$|U_f(t,\tau)v_\tau|^2 + \alpha^2\|U_f(t,\tau)v_\tau\|^2 \leq d^2 + C\|f_0\|^2_{L_b^2(\mathbb{R};H)}$$

Note que existe um tempo $T_d \geq \tau$ tal que $d^2 \leq C\|f_0\|^2_{L_b^2(\mathbb{R};H)}$. Portanto existe um raio $\rho_V > 0$ tal que $U_f(t,\tau)D \subset B_V(0,\rho_V)$ para $t \geq T_d$, onde $B_V(0,\rho_V)$ é uma bola uniformemente absorvente em $V$ centrada em zero e raio $\rho_V$. ∎

**Teorema 2.3.** *A família de processos $U_f(t,\tau)$ é uniformemente assintoticamente compacta em $V$, isto é, sempre que $\{u_\tau^{(n)}\}$ for uma sequência limitada em $V$, $f^{(n)} \subset \mathcal{H}(f_0)$ e $\{t_n\} \subset (\tau,\infty)$ com $t_n \to \infty$, então o conjunto $\{U_{f^{(n)}}(t_n,\tau)u_\tau^{(n)}\}$ deverá ser precompacto em $V$.*

Finalmente, o resultado principal, que resulta da combinação dos teoremas anteriores.

**Teorema 2.4.** *A família de processos $U_f(t,\tau)$ associado ao problema admite um atrator compacto uniforme $\mathcal{A}_{\mathcal{H}(f_0)} = \bigcup_{f \in \mathcal{H}(f_0)} \mathcal{K}_f(\tau)$ em $V$. Aqui $\mathcal{K}_f(\tau)$ é o núcleo não vazio em $V$ que contém quase todas as trajetórias completas limitadas.*

## References


[1] BROWN, R. M., PERRY, P. A. AND SHEN, Z. - On the dimension of the attractor of the nonhomogeneous Navier-Stokes equations in non-smooth domains. *Indiana Univ. Math. J.*, **49**, 1-34, 2000.

[2] OSKOLKOV, A. P. - The uniqueness and solvability in the large of boundary value problems for the equations of motion of aqueous solutions of polymers. *Zap. Nauchn. Sem.*, **38**, 98-136, 1973.

[3] WU, D. AND ZHONG, C. - The attractors for nonhomogeneous nonautonomous Navier-Stokes equations. *J. Math. Anal. Appl.*, **321**, 426-444, 2006.

[4] YANG, X., FENG, B., MAIER SOUZA, T. AND WANG, T. - Long-time dynamics for a non-autonomous Navier-Stokes-Voigt equation in Lipschitz domains, submitted.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *85–86*

# LINHAS ASSINTÓTICAS DE CAMPOS DE PLANOS EM $\mathbb{R}^3$ EM UMA VIZINHANÇA DO CONJUNTO PARABÓLICO

DOUGLAS H. CRUZ[1,†] & RONALDO A. GARCIA[1,‡]

[1]Instituto de Matemática e Estatística, UFG, GO, Brasil

[†]dhc@posgrad.ufg.br, [‡]ragarcia@mat.ufg.br

**Abstract**

Linhas assintóticas de campo de planos em $\mathbb{R}^3$ são definidas por uma equação diferencial implícita e no caso em que o campo de planos é integrável, elas coincidem com as linhas assintóticas que estudamos em geometria diferencial de superfícies em $\mathbb{R}^3$. Neste trabalho vamos ilustrar o comportamento das linhas assintóticas em uma vizinhança do conjunto parabólico no caso mais genérico.

## 1 Introdução

Em geometria diferencial de superfícies em $\mathbb{R}^3$, uma linha assintótica de uma superfície é uma curva onde a curvatura normal da superfície ao longo desta curva é igual a zero quando calculada na direção de um vetor tangente da curva. Uma referência para este assunto é o livro [1]. Agora, considere um campo de planos $\xi$ em $\mathbb{R}^3$ definido pelo núcleo da 1-forma $\omega = a(x,y,z)dx + b(x,y,z)dy + c(x,y,z)dz = \langle (a,b,c), (dx,dy,dz)\rangle = \langle \eta, dr\rangle$, onde $\eta = (a,b,c)$ é o campo de vetores em $\mathbb{R}^3$ ortogonal ao campo de planos $\xi = Ker(\omega)$ definido acima e $dr = (dx,dy,dz)$.

A curvatura normal $k_n$ do campo de planos $\xi$ é definida por $k_n = \frac{\langle d\eta, dr\rangle}{\langle dr, dr\rangle}$. Esta definição tem como inspiração as ideias de Euler desenvolvidas em [2] para o estudo de curvatura de superfície em $\mathbb{R}^3$. A curvatura normal $k_n$ é o primeiro passo no estudo de geometria diferencial de campos de planos em $\mathbb{R}^3$. Uma referência para este assunto é o livro [3]. A curvatura normal $k_n$ de um campo de planos satisfaz a fórmula de Euler (para campo de planos) dada por $k_n = k_1 cos^2(\theta) + k_2 sen^2(\theta)$, onde $k_1$ e $k_2$ são as curvaturas principais do campo de planos. Os demais conceitos da geometria diferencial de superfícies também são definidos para geometria diferencial de campo de planos. Em particular, podemos definir a curvatura de Gauss de um campo de planos, que neste trabalho vamos denotar por $\mathcal{K}$. Quando o campo de planos é integrável, todos os conceitos coincidem com os da geometria diferencial de superfícies.

Uma linha assintótica de um campo de planos em $\mathbb{R}^3$ é uma curva onde a curvatura normal do campo de planos ao longo desta curva é igual a zero quando calculada na direção de um vetor tangente da curva. As linhas assintóticas do campo de planos $\xi$ são definidas pela seguinte equação diferencial implícita:

$$\langle \eta, dr\rangle = 0 \quad e \quad \langle d\eta, dr\rangle = 0. \tag{1}$$

As linhas assintóticas do campo de planos $\xi$ são as curvas integrais da equação diferencial (1). A equação (1) define duas folheações (uma folheaçao será ilustrada pela cor azul e a outra pela cor vermelha nas figuras 1, 2 e 3) de linhas assintóticas na região do espaço $\mathbb{R}^3$ onde a curvatura de Gauss do campo de planos é negativa ($\mathcal{K} < 0$) e o comportamento local das linhas assintóticas nesta região é como na figura 1. Mais precisamente, cada folheaçao se comporta localmente como um fluxo tubular. Na região do espaço $\mathbb{R}^3$ onde a curvatura de Gauss do campo de planos é positiva ($\mathcal{K} > 0$), as linhas assintóticas são curvas complexas e este caso não será estudado aqui.

As linhas assintóticas se comportam de modo interessante na vizinhança da região do espaço $\mathbb{R}^3$ onde a curvatura de Gauss do campo de planos é igual a zero ($\mathcal{K} = 0$). Esta região é chamada de conjunto parabólico. O caso mais genérico é quando o conjunto parabólico é uma superfície regular (a superfície de cor verde ilustrada na figura 2) e as linhas assintóticas são transversais à superfície de pontos parabólicos. O teorema 2.1 ilustra este caso.

A inspiração para este trabalho são os trabalhos [3] e [4], que fazem parte da bonita história contada em [5], uma história onde o ponto de início são as linhas de curvatura principais de superfícies em $\mathbb{R}^3$. Linhas de curvatura principais de campos de planos em $\mathbb{R}^3$ foram estudadas em [6].

## 2 Resultados Principais

**Teorema 2.1.** *Seja $\mathbb{M}^2$ uma superfície regular de pontos parabólicos de um campo de planos em $\mathbb{R}^3$. No caso em que as linhas assintóticas são transversais à $\mathbb{M}^2$, o comportamento das linhas assintóticas em uma vizinhança de $\mathbb{M}^2$ é como na figura 2 (veja também a figura 3). Mais precisamente, em uma vizinhança de $\mathbb{M}^2$, as linhas assintóticas se comportam como curvas com cúspide do tipo $(t^2, t^3, t^5)$, veja a figura 4.*

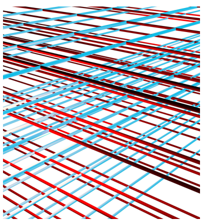
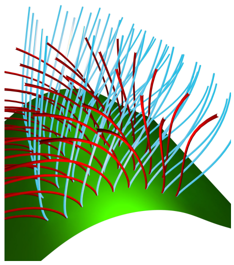
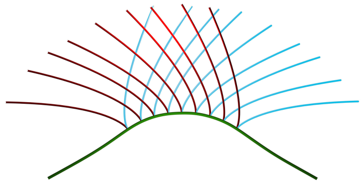
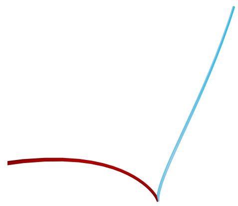

Figura 1: Linhas assintóticas em uma região onde a curvatura de Gauss do campo de planos é negativa. Figura 2: Linhas assintóticas em uma vizinhança da superfície (de cor verde) de pontos parabólicos. Figura 3: Visualização frontal da figura 2. Figura 4: Imagem de uma curva com cúspide do tipo $(t^2, t^3, t^5)$.

**Observação 2.** *Um teorema análogo ao teorema 2.1 pode ser enunciado para as linhas de Rodrigues (também conhecidas como linhas de curvatura do segundo tipo), que são as curvas tangentes às direções principais do segundo tipo (veja [3]). As linhas de Rodrigues genericamente se comportam como curvas com cúspide do tipo $(t^2, t^3, t^4)$ em uma vizinhança da superfície regular de pontos singulares das linhas de Rodrigues.*

## References


[1] GARCIA, R. AND SOTOMAYOR, J. - *Differential equations of classical geometry, a qualitative theory*, Publicações Matemáticas do IMPA, 27o Colóquio Brasileiro de Matemática, 2009.

[2] EULER, L. - Recherches sur la courbure des surfaces, *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, **16**, 119-143, 1760.

[3] AMINOV, Y. - *The geometry of vector fields*, Gordon and Breach Publishers, Amsterdam, 2000.

[4] GARCIA, R. AND SOTOMAYOR, J. - Structural stability of parabolic points and periodic asymptotic lines, *Mat. Contemp.*, **12**, 83-102, 1997.

[5] GARCIA, R.; GUTIERREZ, C. AND SOTOMAYOR, J. - Structural stability of asymptotic lines on surfaces immersed in $\mathbb{R}^3$, *Bull. Sci. Math.*, **123**, 599-622, 1999.

[6] GARCIA, R. AND SOTOMAYOR, J. - Historical comments on Monge's ellipsoid and the configurations of lines of curvature on surfaces, *Antiq. Math. Seria* VI, **10**, 169-182, 2016.

[7] GOMES, A. - *Geometria extrínseca de campos de vetores em* $\mathbb{R}^3$, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Goiás, 2016.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *87–88*

# APPROXIMATE CONTROLLABILITY FOR A ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION WITH THE FIXED ENDPOINT CONTROL

ISAíAS PEREIRA DE JESUS[1,†]

[1]DM, UFPI, PI, Brasil

[†]isaias@ufpi.edu.br

**Abstract**

In this work we will study the approximate controllability for a one-dimensional wave equation in domains with moving boundary. This equation models the motion of a string where an endpoint is fixed and the other one is moving. When the speed of the moving endpoint is less than the characteristic speed, the controllability of this equation is established.

## 1 Introduction

As in [1], given $T > 0$, we consider the non-cylindrical domain defined by

$$\widehat{Q} = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x < \alpha_k(t),\ \ t \in (0,T)\right\},$$

where

$$\alpha_k(t) = 1 + kt, \qquad 0 < k < 1.$$

Its lateral boundary is defined by $\widehat{\Sigma} = \widehat{\Sigma}_0 \cup \widehat{\Sigma}_0^*$, with

$$\widehat{\Sigma}_0 = \{(0,t);\ t \in (0,T)\} \quad \text{and} \quad \widehat{\Sigma}_0^* = \widehat{\Sigma} \backslash \widehat{\Sigma}_0 = \{(\alpha_k(t),t);\ t \in (0,T)\}.$$

We also represent by $\Omega_t$ and $\Omega_0$ the intervals $(0, \alpha_k(t))$ and $(0,1)$, respectively. Consider the following wave equation in the non-cylindrical domain $\widehat{Q}$:

$$\left| \begin{array}{l} u'' - u_{xx} = 0 \quad \text{in} \quad \widehat{Q}, \\ u(x,t) = \begin{cases} \widetilde{w}(t) & \text{on} \quad \widehat{\Sigma}_0, \\ 0 \quad \text{on} \quad \widehat{\Sigma}_0^*, \end{cases} \\ u(x,0) = u_0(x), \ \ u'(x,0) = u_1(x) \ \ \text{in} \ \ \Omega_0, \end{array} \right. \tag{1}$$

The control system of this paper is the same as that of [2] and [3]. But motivated by [1], we extend the result in [2] and [3], and the controllability result is obtained when $k \in (0,1)$.

## 2 Main Results

Associated with the solution $u = u(x,t)$ of (1), we will consider the (secondary) functional

$$\widetilde{J}_2(\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2) = \frac{1}{2}\int_{\widehat{Q}} (u(\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2) - \widetilde{u}_2)^2\, dxdt + \frac{\widetilde{\sigma}}{2}\int_{\widehat{\Sigma}_2} \widetilde{w}_2^2\, d\widehat{\Sigma}, \tag{1}$$

and the (main) functional

$$\widetilde{J}(\widetilde{w}_1) = \frac{1}{2}\int_{\widehat{\Sigma}_1} \widetilde{w}_1^2\, d\widehat{\Sigma}, \tag{2}$$

where $\widetilde{\sigma} > 0$ is a constant and $\widetilde{u}_2$ is a given function in $L^2(\widehat{Q})$.

The control problem that we will consider is as follows: the follower $\widetilde{w}_2$ assumes that the leader $\widetilde{w}_1$ has made a choice. Then, it tries to find an equilibrium of the cost $\widetilde{J}_2$ , that is, it looks for a control $\widetilde{w}_2 = \mathfrak{F}(\widetilde{w}_1)$ (depending on $\widetilde{w}_1$), satisfying:

$$\widetilde{J}_2(\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2) \leq \widetilde{J}_2(\widetilde{w}_1, \widehat{w}_2), \quad \forall\, \widehat{w}_2 \in L^2(\widehat{\Sigma}_2). \tag{3}$$

In another way, if the leader $\widetilde{w}_1$ makes a choice, then the follower $\widetilde{w}_2$ makes also a choice, depending on $\widetilde{w}_1$, which minimizes the cost $\widetilde{J}_2$, that is,

$$\widetilde{J}_2(\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2) = \inf_{\widehat{w}_2 \in L^2(\widehat{\Sigma}_2)} \widetilde{J}_2(\widetilde{w}_1, \widehat{w}_2). \tag{4}$$

This is equivalent to (3). This process is called Stackelberg-Nash strategy; see Díaz and Lions [4].

As in [1], we assume that

$$T > \frac{e^{\frac{2k(1+k)}{(1-k)^3}} - 1}{k} \tag{5}$$

and

$$0 < k < 1. \tag{6}$$

**Theorem 2.1.** *Assume that (5) and (6) hold. Let us consider $\widetilde{w}_1 \in L^2(\widehat{\Sigma}_1)$ and $\widetilde{w}_2$ a Nash equilibrium in the sense (4). Then $(u(T), u'(T)) = (u(., T, \widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2), v'(., T, \widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2))$, where $u$ solves the optimality system, generates a dense subset of $L^2(\Omega_t) \times H^{-1}(\Omega_t)$.*

**Proof** To prove theorem, we apply Holmgren's Uniqueness Theorem (cf. [5]; and see also [1] for additional discussions). ∎

## References


[1] Cui, L., Jiang, Y., Wang, Y., *Exact controllability for a one-dimensional wave equation with the fixed endpoint control.* Boundary Value Problems, (2015). doi: 10.1186/s13661-015-0476-4.

[2] Jesus, I., *Hierarchic control for the one-dimensional wave equation in domains with moving boundary*, Nonlinear Analysis: Real World Applications **32** (2016) 377-388.

[3] Jesus, I., *Hierarchical control for the wave equation with a moving boundary*, Journal of Optimization Theory and Applications, **171** (2016) 336-350.

[4] Díaz J., Lions, J.-L., *On the approximate controllability of Stackelberg-Nash strategies. in: J.I. Díaz (Ed.), Ocean Circulation and Pollution Control Mathematical and Numerical Investigations*, 17-27, Springer, Berlin, 2005.

[5] Hörmander L., *Linear partial differential operators* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 116. Academic Press. Inc., Publishers, New York, 1963.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *89–90*

# GLOBAL SOLUTIONS OF A PARABOLIC PROBLEM WITH NEGATIVE ENERGY

M. MILLA MIRANDA[1,†], A. T. LOUREDO[2,‡] & M. R. CLARK[3,§]

[1]Departamento de Matemática, UEPB, PB, Brasil, [2]Departamento de Matemática, UFPI, PI, Brasil

[†]millamiranda@gmail.com, [‡]aldolouredo@gmail.com, [§]marcondesclark@gmail.com

**Abstract**

This paper is concerned with the existence of global weak solution of a parabolic problem whose energy can be negative.

## 1 Introduction

Motivated by [4], where is consider a parabolic problem with the Laplacian operator and $\rho(x) = c$, $c$ constant, we study the following parabolic problem

$$u' - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + |u|^{\rho(x)} = 0$$

## 2 Main Results

Let $\Omega$ be an open and bounded set of $\mathbb{R}^n$ with boundary $\Gamma$ of class $C^2$. Let $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 2$ be and consider the Sobolev space $W_0^{1,p}(\Omega)$ with the norm

$$\|v\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^p dx$$

Consider $p^* = \frac{np}{n-p}$, $n < p$, for $n \geq 3$.

$$(H1)\;\left|\begin{array}{l} \rho \in C^0(\overline{\Omega}) \text{ with } p-1 < \rho^- \leq \rho(x) \leq \rho^+ \text{ satisfying} \\ \rho^+ < p^* - 1 \text{ with } n \geq 3 \text{ and } \rho^- > p-1, \text{ if } n = 1, 2. \end{array}\right.$$

We have

$$W_0^{1,p}(\Omega) \overset{comp}{\hookrightarrow} L^{\rho^+ + 1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho(x)+1}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \tag{1}$$

Also

$$\|v\|_{L^{\rho(x)+1}(\Omega)} \leq K\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}, \ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \text{ (K positive constat)}$$

Introduce the notations

$$l_1 = \frac{K^{\rho^- + 1}}{2(\rho^- + 1)}, \ l_2 = \frac{K^{\rho^+ + 1}}{2(\rho^- + 1)}$$

and

$$\lambda_0 = \min\left\{\left(\frac{1}{4pl_1}\right)^{\frac{1}{\rho^- + 1 - p}}, \left(\frac{1}{4pl_2}\right)^{\frac{1}{\rho^- + 1 - p}}\right\} > 0.$$

**Theorem 2.1.** *Assume hypothesis $(H1)$. Let $u^0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ such that*

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} < \lambda_0$$

*and*
$$\frac{1}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + l_1\|u\|^{\rho^-+1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + l_2\|u\|^{\rho^++1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} < \frac{1}{2p}\lambda_0^p.$$
*Then there exists a function u in the class*
$$\begin{aligned} &u \in L^\infty(0,\infty; W_0^{1,p}(\Omega)) \\ &u' \in L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega)) \end{aligned}$$
*such that*
$$\left| \begin{array}{l} u' - \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + |u|^{\rho(x)} = 0 \ \mathit{in} \ L^2_{loc}(W^{-1,p'}(\Omega)), \\ u(0) = u^0. \end{array}\right.$$

**Proof** In the proof of Theorem 2.1, we use the Faedo-Galerkin method, the Tartar'approach, the theory of monotone operators and results of compactness. ■

## References


[1] H, Brezis and T, Cazenave., - *Nonlinear Evolution Equations*, IM-UFRJ, Rio, 1994.

[2] Lions, J.L, - *Problèmes aux limites dans les Ã©quations aux derivÃ©es partielles. Oeuvres Choisies de Jacques Louis Lions Vol. I, EDP Sciences Ed.* Paris (2003) pp. 431-588.

[3] lions, j. l. - *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéares.*, Dunod-Gauthier Villars, Paris, First edition, 1969.

[4] Tartar, L., - *Topics in Nonlinear Analysis*, Uni. Paris Sud, Dep. Math., Orsay, France, (1978)

[5] Medeiros, L.A., D.C. Pereira., - *Problemas de Contorno para Operadores Diferenciais Parciais NÃ£o Lineares.* IM-UFRJ, junho 1990, Rio de Janeiro, RJ.

[6] Maia, S. - Milla Miranda, M - *Existence and decay of solutions of an abstract second order nonlinear problem.* J. Math. Analysis Appl., 358 (2009), pp. 445-456.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *91–92*

# ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF WEAK AND STRONG SOLUTIONS OF THE BOUSSINESQ EQUATIONS

MARíA A. RODRíGUEZ-BELLIDO[1,†], MARKO A. ROJAS-MEDAR[2,‡], ALEX SEPÚLVEDA[3,§] & HERME SOTO[4,§§]

[1]EDAN, US, Sevilla, Spain,
partially supported by MINECO grants MTM2015-69875-P (Ministerio de Economía y Competividad, Spain) with the participation of FEDER, [2]Instituto de Alta Investigación, UTA, Arica, Chile, [3]DME, UFRO, Temuco, Chile, partially supported by DI15-0021, [4]DME, UFRO, Temuco, Chile,
Partially supported by DI17-0071

[†]angeles@us.es, [‡]marko.medar@gmail.com, [§]alex.sepulveda@ufrontera.cl, [§§]herme.soto@ufrontera.cl

**Abstract**

The asymptotic behavior is presented for the two-dimensional non-stationary Boussinesq problem. If the data satisfy a uniqueness condition corresponding to the stationary Bopussinesq problem, we then obtain the convergence of the non-stationary Boussinesq problem to the stationary Boussinesq problem.

## 1 Introduction

We consider the stability of weak and/or strong solutions for the equations that describe the motion of a viscous chemical active fluid in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, with smooth boundary $\partial\Omega$ over a time interval $[0, T)$, $0 < T \leq \infty$. These equations are given at the level of Oberbeck-Boussinesq approximations by (see [2]):

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \alpha\theta\mathbf{g} + \mathbf{j}, \\ \theta_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\theta - \kappa\Delta\theta = f, \\ \text{div } \mathbf{u} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

together with the following boundary and initial conditions:

$$\mathbf{u}(x,t) = 0, \ \theta(x,t) = 0, \ \text{on } \partial\Omega \times (0,T). \tag{2}$$

$$\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x), \ \theta(x,0) = \theta_0(x), \quad \text{in } \Omega. \tag{3}$$

The unknowns are the functions $\mathbf{u}(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $\theta \in \mathbb{R}$ and $p(x,t) \in \mathbb{R}$ which denote the velocity vector, the temperature and the pressure at time $t \in [0,T)$, at point $x \in \Omega$ respectively. Moreover, $\mathbf{j}(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{g}(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,t) \in \mathbb{R}$ are known external sources; $\mu > 0$ is the viscosity of fluid and $\kappa$ is the thermal coefficient. The functions $\mathbf{u}_0$ and $\theta_0$ are given functions on the variable $x \in \Omega$. The nonhomogeneous case for $\theta$ can be treated by using an appropriate lifting and the obvious changes in the statement of the results.

The associated stationary model is:

$$\begin{cases} (\mathbf{u}_\infty \cdot \nabla)\mathbf{u}_\infty - \mu\Delta\mathbf{u}_\infty + \nabla p_\infty = \alpha\theta_\infty\mathbf{g}_\infty + \mathbf{j}_\infty, \\ (\mathbf{u}_\infty \cdot \nabla)\theta_\infty - \kappa\Delta\theta_\infty = f_\infty, \\ \text{div } \mathbf{u}_\infty = 0, \mathbf{u}_\infty = 0, \ \ \theta_\infty = 0. \end{cases} \tag{4}$$

We will use the usual spaces of the theory for the Navier-Stokes equations. Our results read as follows:

**Theorem 1.1.** *Let $\mathbf{u}, \theta$ be a weak solution of (1)-(3) and $\mathbf{u}_\infty, \theta_\infty$ be a weak solution of (4). If*

$$c\|\mathbf{u}_\infty\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)} + \frac{1}{4\kappa}(c\|\theta_\infty\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)} + c'\alpha\|\mathbf{g}_\infty\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)}) < \mu, \tag{5}$$

*where $c$ and $c'$ are constants depending only on $\Omega$, then there exists $\gamma > 0$ such that*

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\infty\|^2 + \|\theta(t) - \theta_\infty\|^2 \\ &\qquad \leq C_2 e^{-\gamma(t-T)}(\alpha\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_\infty\|^2 + \|\theta_0 - \theta_\infty\|^2) + C \sup_{T \leq t < \infty} \|\mathbf{g}(t) - \mathbf{g}_\infty\|^2_{\mathbf{L}^3(\Omega)}. \\ &\qquad + C \sup_{T \leq t < \infty} \|\mathbf{j}(t) - \mathbf{j}_\infty\|^2 + C \sup_{T \leq t < \infty} \|f(t) - f_\infty\|^2, \ \forall t \geq T,\end{aligned}$$

*for any given $T > 0$, which yields*

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\infty\|^2 + \|\theta(t) - \theta_\infty\|^2 \\ &\qquad \leq O(e^{-\gamma t} + \|\mathbf{g}(t) - \mathbf{g}_\infty\|^2_{\mathbf{L}^3(\Omega)} + \|\mathbf{j}(t) - \mathbf{j}_\infty\|^2 + \|f(t) - f_\infty\|^2).\end{aligned}$$

**Remark 1.1.** *The condition (5) is an uniqueness condition of solution for the stationary Boussinesq problem.*

The following assumptions on the initial data are required for the next result.

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}, \ \theta_0 \in H_0^1(\Omega), \\ \mathbf{g} \ \in L^\infty([0,\infty); \mathbf{L}^3(\Omega)) \ \mathbf{j}, \in L^\infty([0,\infty); \mathbf{L}^2(\Omega)) \ f \in L^\infty([0,\infty); L^2(\Omega)), \\ \|\nabla \mathbf{u}_0\| + \|\nabla\theta_0\| + \sup_{t \geq 0}(\|\mathbf{g}(t)\| + \|\mathbf{j}(t)\| + \|f(t)\|) \leq C, \\ \lim\limits_{t\to\infty} \|\mathbf{g}(t) - \mathbf{g}_\infty\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)} = 0, \ \lim\limits_{t\to\infty} \|\mathbf{j}(t) - \mathbf{j}_\infty\| = 0, \ \lim\limits_{t\to\infty} \|f(t) - f_\infty\| = 0.\end{array}\right. \tag{6}$$

Our result read as follows:

**Theorem 1.2.** *There exists $\beta > 0$ such that:*

$$\begin{aligned}&\|\nabla\mathbf{u}(t) - \nabla\mathbf{u}_\infty\|^2 + \|\nabla\theta(t) - \nabla\theta_\infty\|^2 + \|\nabla\varphi(t) - \nabla\varphi_\infty\|^2 \\ &\qquad \leq C_1 e^{-\beta(t-T)}(\|\nabla\mathbf{u}_0 - \nabla\mathbf{u}_\infty\|^2 + \|\nabla\theta_0 - \nabla\theta_\infty\|^2) \\ &\qquad + C_2 e^{-\beta(t-T)}(\alpha\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_\infty\|^2 + \|\theta_0 - \theta_\infty\|^2) + C \sup_{T \leq t < \infty} \|\mathbf{g}(t) - \mathbf{g}_\infty\|^2_{\mathbf{L}^3(\Omega)}. \\ &\qquad + C \sup_{T \leq t < \infty} \|\mathbf{j}(t) - \mathbf{j}_\infty\|^2 + C \sup_{T \leq t < \infty} \|f(t) - f_\infty\|^2, \ \forall t \geq T,\end{aligned}$$

*for any given $T > 0$, which yields*

$$\begin{aligned}&\|\nabla\mathbf{u}(t) - \nabla\mathbf{u}_\infty\|^2 + \|\nabla\theta(t) - \nabla\theta_\infty\|^2 \\ &\qquad \leq O(e^{-\beta t} + \|\mathbf{g}(t) - \mathbf{g}_\infty\|^2_{\mathbf{L}^3(\Omega)} + \|\mathbf{j}(t) - \mathbf{j}_\infty\|^2 + \|f(t) - f_\infty\|^2).\end{aligned}$$

In [3], we prove similar results for the 3D case and also, we prove the $H^2$-stability.

## References


[1] CLIMENT-EZQUERRA, B.; POBLETE-CANTELLANO, M. AND ROJAS-MEDAR, M. A.- On the convergence of spectral approximations for the heat convection equations. *Rev. Mat. Complut.* **29** 405-422, 2016.

[2] JOSEPH, D.D.- *Stability of fluid motion.*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[3] RODRÍGUEZ-BELLIDO, M.A., ROJAS-MEDAR, M.A, SEPÚLVEDA, A. AND SOTO, H. - Asymptotic behavior of weak and strong solutions of the Boussinesq equations, in preparation (2017).

[4] ROJAS-MEDAR, M.A. AND LORCA, S.- The equations of a viscous incompressible chemical active fluid I: uniqueness and existence of the local solutions, *Rev. Mat. Apl.*, **16**, 57-80, 1995.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *93–94*

# ESCOAMENTO ESTACIONÁRIO DE UM FLUIDO INCOMPRESSÍVEL ASSIMÉTRICO EM DOMÍNIOS COM FRONTEIRA NÃO COMPACTA

FÁBIO V. SILVA[1,†]

[1]Instituto de Matemática e Estatística, UFG, GO, Brasil

[†]fabios@ufg.br

**Abstract**

Consideramos o escoamento estacionário de um fluido assimétrico, incompressível, viscoso, em domínios em $\mathbb{R}^3$ com canais ilimitados, de seções transversais variáveis, nos quais não necessariamente valha a desigualdade de Poincaré. Estendemos para este tipo de fluidos os resultados obtidos em [5]. Mostramos a existência de soluções para o problema de valores de fronteira, para valores arbitrários do fluxo da velocidade nas seções transversais dos canais.

## 1 Introdução

O escoamento estacionário de um fluido assimétrico incompressível, viscoso é governado pelo sistema de equações

$$\left.\begin{aligned}(\nu+\nu_r)\Delta v+(v\cdot\nabla)v+\nabla p=2\nu_r\nabla\times w+f,\quad \nabla\cdot v=0\\ (c_a+c_d)\Delta w-(c_0-c_a+c_d)\nabla\nabla\cdot w+(v\cdot\nabla)w+4\nu_r w=2\nu_r\nabla\times v+g\end{aligned}\right\},\quad \text{em}\quad \Omega \tag{1}$$

em que as incógnitas são $v, w, p$; $f, g$ são forças externas dadas e as constantes positivas $\nu, \nu_r, c_0, c_a, c_d$ são parâmetros do modelo, obedecendo $c_0 - c_a + c_d > 0$, e cujo significado físico pode ser encontrado em [2, 3]. Este modelo, que tem as equações de Navier-Stokes como o caso particular $\nu_r = 0, w = 0$, é devido a Erigen [2] e descreve fluidos não newtonianos com tensor de estresse assimétrico e cujas partículas sofrem translação e rotação. As equações representam a conservação do momento linear, a incompressibilidade e a conservação do momento angular.

O domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ em que o escoamento ocorre é a junção de uma porção limitada, $\Omega_0$, com canais ilimitados $\Omega_i$, isto é

$$\Omega = \Omega_0 \cup \Big(\cup_{i=1}^N \Omega_i\Big),$$

em que $\Omega_i$, em coordenadas locais, se exprime como $\Omega_i = \{(\overline{x}^i, x_3^i) \mid 0 < x_3^i < \infty, |\overline{x}^i| < g_i(x_3^i)\}, \overline{x}^i = (x_1^i, x_2^i)$.

Em [1], supondo $0 < c \le g_i(t) \le C < \infty,\ i = 1, \dots, N$ estabelecemos a existência de soluções do sistema (1), para $N = 2$, juntamente com as condições

$$v, w = 0, \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \qquad \int_{\Sigma_i(t)} v\cdot n\, d\sigma = \phi_i,\ i = 1, \dots, N, \quad \sum_{i=1}^N \phi_i = 0 \tag{2}$$

em que $\Sigma_i(t) = \Omega_i \cap \{(x_1^i, x_2^i, x_3^i) \mid x_3^i = t\}$ denota a seção transversal de $\Omega_i$ por um plano de equação $x_3^i = t$, $n$ é o vetor unitário normal a $\Sigma_i(t), \phi_i \in \mathbb{R}$ dados. As soluções em [1], $v, w \in H^1_{\text{loc}}(\Omega)$ foram obtidas satisfazendo

$$\sup_{t>0}\ t^{-1}\int_0^t \int_{\Sigma_i(t)} |\nabla v|^2 + |\nabla w|^2\, dx < \infty,\ i = 1, 2. \tag{3}$$

Isto é natural pois, de $0 < c \le g_i(t) \le C < \infty,\ i = 1, 2$, conclui-se $0 < m \le |\Sigma_i(t)| \le M < \infty,\ i = 1, 2$, e a partir de

$$\int_{\Sigma_i(t)} v\cdot n\, d\sigma = \phi_i$$

pode-se mostrar que a um fluxo, $\phi_i$, não-nulo através de uma seção transversal, corresponde um campo de velocidades com integral de Dirichlet infinita [4].

## 2 Resultados Principais

Supondo que $g_i(t)$ satisfaçam $g_i(t) \geq g_0 > 0$ e $|g_i(t_2) - g_i(t_1)| \leq M|t_1 - t_2|$ para todos $t, t_1, t_2 > 0,\ i = 1, \ldots, N$ e que alguns canais são 'estreitos' e outros 'largos'

$$\int_0^\infty g_i^{-4}(t)\, dt = +\infty,\ i = 1, \ldots, \ell; \qquad \int_0^\infty g_i^{-4}(t)\, dt < +\infty,\ i = \ell + 1, \ldots, N$$

combinamos argumentos em [5, sec. 4],[4] para demonstrar

**Teorema 2.1.** *Dados $\phi_1, \ldots, \phi_N \in \mathbb{R}$ com $\phi_1 + \cdots + \phi_N = 0$, o problema (1)-(2) admite ao menos uma solução fraca $v, w \in H^1_{loc}(\Omega)$. A solução satisfaz*

$$\int_0^t \int_{\Sigma_i(t)} |\nabla v|^2 + |\nabla w|^2\, dx \leq C\Big(1 + \int_0^t g_i^{-4}(\tau)\, d\tau\Big)$$

*para alguma constante $C > 0$, se o canal $\Omega_i$ for 'estreito'.*

**Observação 3.** *A unicidade das soluções ainda segue sob investigação.*

### References


[1] SILVA, F. V. - Os problemas de Leray e de Ladyzhenskaya-Solonnikov para fluidos micropolares. *Tese de Doutorado,* IMECC-UNICAMP, 2004.

[2] ERINGEN, A. C. - Theory of micropolar fluids, *J. Math. Mech.*, **16**, 1-18, 1966.

[3] ŁUKASZEWICZ, G. - *Micropolar fluids. Theory and applications*, Birkhâuser, Boston, MA, 1999.

[4] GALDI, G. P. - *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations.* Vol-2, Springer-Verlag, New York, 1994.

[5] LADYZHENSKAYA, O. A.; SOLONNIKOV, V. A. - Determination of solutions of boundary-value problems for stationary Stokes and Navier-Stokes equations having an unbounded Dirichlet integral. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, **96**, 117-160, 1980. [Trad. inglesa: J. Soviet Math., 21, 1983, 728-761.]

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *95–96*

# IDEAL EXTENSIONS OF CLASSES OF LINEAR OPERATORS

GERALDO BOTELHO[1,†] & XIMENA MUJICA[2,‡]

[1]FAMAT - UFU, Brasil - Supported by CNPq Grant 305958/2014-3 and Fapemig Grant PPM-00490-15, [2]DMat - UFPR

[†]botelho@ufu.br, [‡]xmujica@ufpr.br

**Abstract**

We study the problem of extending classes of linear operators between Banach spaces to operator ideals. We establish necessary and sufficient conditions on a class $\mathfrak{B}$ of Banach spaces and on a class $\mathcal{O}$ of operators taking values in Banach spaces belonging to $\mathfrak{B}$ so that $\mathcal{O}$ can be extended to an operator ideal. As applications we characterize the extendability of the class of quasi-$\tau(p)$-summing operators, we construct the operator ideal generated by an ideal of bilinear functionals and we prove that the class of weak*-sequentially compact operators taking values in dual spaces is not extendable to an operator ideal.

*Dedicated to the memory of Jorge Mujica (1946-2017).*

## 1 Introduction

In [4] Pietsch studies $\tau$-summing and $\sigma$-nuclear operators, which we extended to the multiliear case in [3] and [1] respectively. In the latter article we present a duality relation between the dual space of $\sigma(p)$-nuclear operators $[\mathcal{L}_{\sigma(p)}(E_1,\ldots,E_n;F)]'$ , and $\tau(p)$-summing operators $\mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1',\ldots,E_n';F')$, as long as $F$ is a reflexive space. To withdraw reflexivity of $F$ we introduced the concept of quasi-$\tau(p)$-summing operators, and succeed in showing $[\mathcal{L}_{\sigma(p)}(E_1,\ldots,E_n;F)]'$ and $\mathcal{L}_{q\tau(p)}(E_1',\ldots,E_n';F')$ are isometrically isomorphic. However, the latter space is not a mutilinear operator ideal.

Thus we ask ourselves if a given class of linear operators between Banach spaces can be extended to an operator ideal (in the sense of Pietsch [4]). If yes, how? More precisely, denoting by $\mathcal{L}(E;F)$ the space of bounded linear operators from the Banach space $E$ to the Banach space $F$ and by $BAN$ the class of all (real or complex) Banach spaces, by a *class of operators* we mean a subclass $\mathcal{O}$ of the class of all bounded continuous linear operators between Banach spaces endowed with a (complete) $p$-norm $\|\cdot\|_{\mathcal{O}}$, that is: for certain Banach spaces $E$ and $F$, a linear subspace $\mathcal{O}(E;F)$ of $\mathcal{L}(E;F)$ and a (complete) $p$-norm $\|\cdot\|_{\mathcal{O}}$ on $\mathcal{O}(E;F)$ are given. The question is: given a class of operators $(\mathcal{O},\|\cdot\|_{\mathcal{O}})$, is there a $p$-normed ($p$-Banach) operator ideal $\mathcal{I}$ such that $\mathcal{I}(E;F)=\mathcal{O}(E;F)$ isometrically for all $E,F\in BAN$ for which $\mathcal{O}(E;F)$ has been given?

In this paper we shall treat the case that $\mathcal{O}$ is a class of operators defined on arbitrary Banach spaces and taking values in Banach spaces belonging to a given class $\mathfrak{B}\subset BAN$. Given a class $\mathfrak{B}$ of Banach spaces, for every Banach space $E$ and every $F\in\mathfrak{B}$, we are given a $p$-normed ($p$-Banach) space $(\mathcal{O}(E;F),\|\cdot\|_{\mathcal{O}})$. The question is obvious: under which conditions on $\mathfrak{B}$ and on $\mathcal{O}$ is the latter extendable to a $p$-normed ($p$-Banach) operator ideal?

## 2 Main Results

For convenient definitions for $\mathfrak{B}$ subclass of the class $BAN$ of all Banach spaces over $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ and a $p$-normed $\mathfrak{B}$-class of operators $(\mathcal{O},\|\cdot\|_{\mathcal{O}})$, we have:

**Proposition 2.1.** *Let $\mathfrak{B}$ be an admissible class and $(\mathcal{I},\|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ be a p-normed (p-Banach) operator ideal. Then the class*

$$\mathcal{I}(\mathfrak{B}):=\{\mathcal{I}(E;F):E\in BAN,F\in\mathfrak{B}\},\ \|\cdot\|_{\mathcal{I}(\mathfrak{B})}:=\|\cdot\|_{\mathcal{I}},$$

*is a p-normed (p-Banach) $\mathfrak{B}$-operator ideal. Moreover,* $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ *is an extension of* $(\mathcal{I}(\mathfrak{B}), \|\cdot\|_{\mathcal{I}(\mathfrak{B})})$.

**Theorem 2.1.** *Let $\mathfrak{B}$ be an admissible class of Banach spaces. The following are equivalent for a p-normed (p-Banach) $\mathfrak{B}$-class of operators* $(\mathcal{O}, \|\cdot\|_{\mathcal{O}})$*:*
(a) $(\mathcal{O}, \|\cdot\|_{\mathcal{O}})$ *is a p-normed (p-Banach) $\mathfrak{B}$-operator ideal.*
(b) *Defining*

$$\mathcal{O}^{\mathfrak{B}-\mathrm{ext}}(E;F) = \{u \in \mathcal{L}(E;F) : i_F \circ u \in \mathcal{O}(E;\widetilde{F})\}\ ,\ \|u\|_{\mathcal{O}^{\mathfrak{B}-\mathrm{ext}}} = \|i_F \circ u\|_{\mathcal{O}},$$

*for all Banach spaces $E$ and $F$, then* $(\mathcal{O}^{\mathfrak{B}-\mathrm{ext}}, \|\cdot\|_{\mathcal{O}^{\mathfrak{B}-\mathrm{ext}}})$ *is a p-normed (p-Banach) operator ideal that extends $\mathcal{O}$.*
(c) *The class* $(\mathcal{O}, \|\cdot\|_{\mathcal{O}})$ *is extendable.*

We wish to answer the following:

**Question 1.** Is it true that $\mathcal{L}_{q\tau(p)}(E;F') = \mathcal{L}_{\tau(p)}(E;F')$ isometrically for all $E, F \in BAN$?

Our hope was that the above theorem might answer wether $\tau(p)$-summing and quasi-$\tau(p)$-summing operators are one and the same. However there still is no answer, since if the answer to Question 1 turns out to be affirmative, then $(\mathcal{L}_{\tau(p)}, \|\cdot\|_{\tau(p)})$ shall be an ideal extension of $(\mathcal{L}_{q\tau(p)}, \|\cdot\|_{q\tau(p)})$. The first application of our extension result asserts that the extendability of $(\mathcal{L}_{q\tau(p)}, \|\cdot\|_{q\tau(p)})$ is equivalent to the answer of Question 1 being affirmative.

While we don't know yet what happens in the above situation, we do have a result in the negative:

Bearing in mind the characterizations of compact and weakly compact operators via convergent sequences, the following definition is quite natural:

**Definition 2.1.** An operator $u\colon E \longrightarrow F'$ is *weak*-sequentially compact* if for every bounded sequence $(x_j)_j$ in $E$, the sequence $(u(x_j))_j$ admits a weak* convergent subsequence in $F'$.

**Proposition 2.2.** *The class of weak*-sequentially compact operators taking values in dual spaces is not extendable to an operator ideal.*

## References


[1] BOTELHO, G. AND MUJICA, X. - The space of $\sigma(p)$-nuclear linear and multilinear operators and their duals. *Linear Algebra Appl.*, **519**, 219–237, 2017.

[2] DIESTEL, J. - *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer, 1984.

[3] MUJICA, X. - $\tau(p;q)$-summing mappings and the domination theorem. *Port. Math.*, **65** no. 2, 211–226, 2008.

[4] PIETSCH, A. - Operator Ideals, *North Holland*, 1980.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *97–98*

# COMPLEX SYMMETRY OF TOEPLITZ OPERATORS

SAHIBZADA WALEED NOOR[1,†]

[1]IMECC, UNICAMP, SP, Brasil

[†]waleed@ime.unicamp.br

**Abstract**

In this talk we consider the problem of characterizing the Toeplitz operators $T_\phi$ that are complex symmetric on the Hardy-Hilbert space of the open unit disk $\mathbb{D}$. We focus mainly on symbols $\phi$ that are continuous on the unit circle $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$. The main new idea here is to relate the complex symmetry of $T_\phi$ with a particular geometric property of the closed curve $\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$. Specifically, a closed curve $\gamma$ is called *nowhere winding* if the winding number of $\gamma$ is 0 about every point not in the range of $\gamma$. It is shown that if $T_\phi$ is complex symmetric, then $\phi$ is a nowhere winding curve. We derive several consequences of this phenomena.

## 1 Introduction

A bounded operator $T$ on a separable Hilbert space $\mathcal{H}$ is *complex symmetric* if there exists an orthonormal basis for $\mathcal{H}$ with respect to which $T$ has a self-transpose matrix representation. An equivalent definition also exists. A *conjugation* is a conjugate-linear operator $C : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ that satisfies the conditions

(a) $C$ is *isometric*: $\langle Cf, Cg\rangle = \langle g, f\rangle \ \forall\ f, g \in \mathcal{H}$,

(b) $C$ is *involutive*: $C^2 = I$.

We say that $T$ is $C$-*symmetric* if $CT = T^*C$, and complex symmetric if there exists a conjugation $C$ with respect to which $T$ is $C$-symmetric.

Complex symmetric operators on Hilbert spaces are natural generalizations of complex symmetric matrices, and their general study was initiated my Garcia, Putinar, and Wogen ([1],[2],[3],[4]). The class of complex symmetric operators includes a large number of concrete examples including all normal operators, binormal operators, Hankel operators, truncated Toeplitz operators, and the Volterra integral operator.

Let $L^2$ be the space of square-integrable measurable functions, $L^\infty$ the space of essentially bounded functions, and $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ the space of continuous functions on the unit circle $\mathbb{T}$. A holomorphic function $f$ on $\mathbb{D}$ belongs to the Hardy-Hilbert space $H^2$ if

$$||f|| = \sup_{0\leq r<1} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \right)^{1/2} < \infty.$$

For each $\phi \in L^\infty$, the *Toeplitz operator* $T_\phi : H^2 \to H^2$ is defined by

$$T_\phi f = P(\phi f)$$

where $P$ is the orthogonal projection of $L^2$ onto $H^2$ and $\phi$ is the *symbol* of $T_\phi$. The question of characterizing Toeplitz operators that are complex symmetric on $H^2$ was first posed by Guo and Zhu in [5].

## 2 Main Results

Let $\gamma : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ closed curve, and let $\Omega_\gamma$ denote the complement of the range of $\gamma$ in $\mathbb{C}$. Then the *winding number* of $\gamma$ about $z \in \Omega_\gamma$, also called the *index* of $z$ with respect to $\gamma$, is defined by

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \tag{1}$$

$\mathrm{Ind}_\gamma$ is an integer-valued function on $\Omega_\gamma$ which measures the number of times $\gamma$ winds around $z$. A closed curve $\gamma : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ will be called a *nowhere winding* curve if $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$ for each $z \in \Omega_\gamma$.

The main result of this work is

**Lemma 2.1.** *If $\phi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ and $T_\phi$ is complex symmetric, then $\phi$ is a nowhere winding curve.*

The following corollaries then follow imediately:

**Corollary 2.1.** *If $\phi$ is a simple closed curve, then $T_\phi$ is not complex symmetric.*

**Corollary 2.2.** *If $\phi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ and $T_\phi$ is complex symmetric, then $\sigma(T_\phi) = \mathcal{R}(\phi)$.*

**Corollary 2.3.** *If $\phi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ and $T_\phi$ is complex symmetric, then $T_\phi$ is invertible if and only if $\phi$ has no zeros on $\mathbb{T}$.*

Finally it is shown that there are plently of non-normal complex symmetric Toeplitz operators with continuous symbols, and which may even be chosen with prescribed spectra.

**Lemma 2.2.** *For any continuous curve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, there exists a complex symmetric Toeplitz operator $T_{\phi_\gamma}$ with spectrum equal to the range of $\gamma$. If the range of $\gamma$ is not a line segment then $T_{\phi_\gamma}$ is also non-normal.*

### References


[1] GARCIA, S. R. AND PUTINAR, M. - Complex symmetric operators and applications. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **358**, 1285-1315 (electronic), 2006.

[2] GARCIA, S. R. AND PUTINAR, M. - Complex symmetric operators and applications. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **359**, 3913-3931 (electronic), 2007.

[3] GARCIA, S. R. AND WOGEN, W. R. -Complex symmetric partial isometries. *J. Funct. Anal.*, **257**,1251-1260, 2009.

[4] GARCIA, S. R. AND WOGEN, W. R. - Some new classes of complex symmetric operators. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **362**, 6065-6077, 2010.

[5] GUO, K. AND ZHU, S. - A canonical decomposition of complex symmetric operators. *J. Operator Theory*, **72**, 529-547, 2014.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *99–100*

# COERÊNCIA E COMPATIBILIDADE DO IDEAL DAS APLICAÇÕES $\gamma$-SOMANTES

JOILSON RIBEIRO[1,†] & FABRICIO SANTOS[1,‡]

[1]Instituto de Matemática e Estatística, UFBA, BA, Brasil

[†]joilsonor@ufba.br, [‡]fabriciosantos1311@outlook.com

**Abstract**

O objetivo principal deste trabalho é estudar a Coerência e a Compatibilidade do par $(\mathcal{P}, \mathcal{M})$, onde $\mathcal{M}$ representa a classe dos ideais estudados em [4]. Para cumprir tal meta, foi necessário introduzir uma abordagem abstrata dos polinômios $\gamma$-somantes $\mathcal{P}$. A partir de então, o trabalho é voltado a provar a Coerência e Compatibilidade deste par, de acordo com [3].

## 1 Introdução e Principais Resultados

Existe na literatura uma grande quantidade de classes de operadores somantes que foram estudados por diversos autores. A título de exemplo, podemos citar os operadores $(p, q)$-absolutamente somantes, os quase somantes, os Cohen fortemente somantes, dentre outros. Como essas classes possuiam várias propriedades em comuns, surgiu então a preocupação de criar uma classe abstrata de operadores somantes que pudesse generalizar a maior quantidade possivel das já existentes na literatura. Pensando nessa direção, D. Serrano-Rodríguez introduziu em [4] a classe abstrata dos operadores multilineares $\gamma$-somantes. Este trabalho mostra que esta classe é um ideal de Banach de aplicações multileares. No entanto, há de se observar que o trabalho de abstração não é uma tarefa fácil. Por exemplo, o próprio trabalho [4] continha pequenas lacunas, que foram preenchidas com o trabalho de G. Botelho e J. Campos em [2].

Não existia, até então na literatura o estudo da classe abstrata dos polinômios $n$-homogêneos $\gamma$-somantes. E é exatamente a primeira parte da proposta deste trabalho. Começamos com a seguinte definição:

**Definição 1.1.** *Sejam $E$ e $F$ espaços de Banach. Dizemos que um polinômio $n$-homogêneo $P : E \to F$ é $\gamma_{s,s_1}$-somante no ponto $a \in E$ se*

$$(P(a + x_j) - P(a))_{j=1}^{\infty} \in \gamma_s(F),$$

*sempre que $(x_j) \in \gamma_{s_1}(E)$.*

O espaço dos polinômios $n$-homogêneos $\gamma_{s,s_1}$-somantes no ponto $a \in E$ será denotado por $\mathcal{P}^{(a)}_{\gamma_{s,s_1}}({}^nE; F)$ e o espaço dos polinômios $n$-homogêneos $\gamma_{s,s_1}$-somantes no ponto em todo ponto será denotado por $\mathcal{P}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}({}^nE; F)$. Vamos assumir, a partir daqui, que as classes de sequências sejam finitamente determinada e linearmente estáveis. Este conceitos foram introduzidos na literatura em [2]. Assumindo esses conceitos, foi possível mostrar o seguinte resultado:

**Teorema 1.1.** *Seja $P \in \mathcal{P}({}^nE; F)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $P \in \mathcal{P}^{(ev)}_{\gamma_{s,s_1}}({}^mE; F)$;

(b) *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\left\| (P(a + x_j) - P(a))_{j=1}^{n} \right\|_{\gamma_s(F)} \leq C \left( \|a\| + \left\| (x_j)_{j=1}^{n} \right\|_{\gamma_{s_1}(E)} \right)^m$$

*para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, ..., x_m, a \in E$.*

(c) *Exist* $C > 0$ *satisfying*

$$\left\|\left(P(a+x_j)-P(a)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} \leq C\left(\|a\| + \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_1}(E)}\right)^m \tag{1}$$

*para todo* $a \in E$ *e* $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_1}(E)$.

Este tipo de resultado é importante pois, além de ser uma caracterização dos elementos do espaço por desigualdades, pode-se definir uma norma no espaço. A norma, denotada por $\pi^{(ev)}(\cdot)$, foi definida como sendo o ínfimo das constantes $C$ que satisfazem a desigualdade (1).

Também foi mostrada a igualdade dos conjuntos $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ e $\mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}^{(ev)}$ onde $\mathcal{P}_{\mathcal{M}} := \{P \in \mathcal{P}; \check{P} \in \mathcal{M}\}$ e $\mathcal{M} = \prod_{\gamma_{s,s_1}}^{m,ev}$.

Um resultado clássico na literatura (veja, por exemplo, [1, pág. 46]) é que se $\mathcal{M}$ é um ideal de Banach de operadores multilineares, o conjunto $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$, quando equipado com a norma $\|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} := \left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{M}}$, é um ideal de Banach de polinômios $n$-homogêneos. Desta forma, tinhamos (a princípio) duas possíveis normas para o conjunto dos polinômios em estudo. Porém, foi mostrado que estas normas coincidem.

Desta forma, temos em mãos o par $\left(\mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}^{m,(ev)}, \prod_{\gamma_{s,s_1}}^{m,(ev)}\right)_{m=1}^{N}$, onde $\mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}^{m,(ev)}$ é o ideal de Banach de polinômios homogêneos (que acabou de ser construído) e $\prod_{\gamma_{s,s_1}}^{m,(ev)}$ que é o ideal de Banach de aplicações multilineares, introduzido na literatura por D. Serrano-Rodriguéz em [4]. O caminho natural agora, é estudar a questão da Coerência e da Compatibilidade, introduzida na literatura por D. Pellegrino e J. Ribeiro em [3].

A chave para mostrar a Coerência e Compatibilidade foi exigir que a classe de chegada, $\gamma_s$, tenha a propriedade de ser $\mathbb{K}$-fechada, isto é, a classe $\gamma_s$ é $\mathbb{K}$-fechada quando, para toda $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_s(\mathbb{K})$ e $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_s(E)$, a sequência $(z_j)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_s(E)$, onde $z_j = x_j y_j$ e

$$\left\|(z_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(E)} \leq \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(\mathbb{K})} \left\|(y_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(E)}.$$

Apesar desta exigência ser algo aparentemente restritivo, as principais classes envolvidadas possuem essa propriedade. A título de exemplo, podemos citar que as seguintes classes $\ell_p\langle E\rangle$, $\ell_p(E)$, $\ell_p^{mid}(E)$ e $\ell_p^{w}(E)$ possuem a referida propriedade. Assim, foi possível mostrar o seguinte teorema:

**Teorema 1.2.** *A sequência* $\left(\left(\mathcal{P}_{\gamma_{s,s_1}}^{m,ev}, \pi^{m+1,ev}(\cdot)\right), \left(\prod_{\gamma_{s,s_1}}^{m,ev}, \pi_{\gamma_{s,s_1}}^{m,ev}(\cdot)\right)\right)_{m=1}^{\infty}$ *é coerente e compatível com* $\prod_{\gamma_{s,s_1}}$.

## References


[1] BOTELHO, G.; BRAUNSS, H.-A; JUNEK, H. AND PELLEGRINO, D. - Holomorphy types and ideals of multilinear mappings, *Studia Math*, **177**, 43-65, 2006.

[2] BOTELHO, G. AND CAMPOS, J. - On the transformation of vector-valued sequences by linear and multilinear operators, *Monatshefte fur Mathematik*, **183**, 415-435, 2017.

[3] PELLEGRINO, D. AND RIBEIRO, J. - On multi-ideals and polynomial ideals of Banach spaces: a new approach to coherence and compatibility, *Monatshefte fur Mathematik*, **173**, 379-415, 2014.

[4] SERRANO-RODRÍGUEZ, D. M. - Absolutely $\gamma$-summing multilinear operators, *Linear Algebra and its Applications*, **439**, 4110-4118, 2013.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *101–102*

# ÍNDICE DAUGAVETIANO POLINOMIAL

ELISA R. SANTOS[1,†]

[1]Faculdade de Matemática, UFU, MG, Brasil

[†]elisars@ufu.br

**Abstract**

Dado um espaço de Banach complexo de dimensão infinita $X$, mostraremos que

$$\sup\{m \geq 0 : \|Id + P\| \geq 1 + m\|P\| \ \text{ para todo } \ P \in \mathcal{P}_K(X)\} = \inf\{\omega(P) : P \in \mathcal{P}_K(X), \|P\| = 1\},$$

generalizando o resultado provado para operadores por M. Martín em 2003.

## 1 Introdução

Seja $X$ um espaço de Banach. Denotaremos por $X^*$ o dual topológico de $X$, por $K(X)$ o espaço dos operadores lineares compactos em $X$, por $\mathcal{P}_K(X)$ o espaço dos polinômios compactos em $X$ e, por $S_X$ e $S_{X^*}$ as esferas unitárias de $X$ e $X^*$, respectivamente.

Se $X$ tem dimensão infinita, então os operadores compactos em $X$ são não inversíveis e, portanto, $\|Id+T\| \geq 1$ para todo $T \in K(X)$. Isto permitiu M. Martín [4] definir o conceito de *índice de Daugavet* de um espaço de Banach $X$ de dimensão infinita da seguinte forma

$$\text{daug}(X) = \sup\{m \geq 0 : \|Id + T\| \geq 1 + m\|T\| \ \text{ para todo } \ T \in K(X)\}. \tag{1}$$

Claramente $0 \leq \text{daug}(X) \leq 1$. Quando $\text{daug}(X) = 1$ tem-se que o espaço $X$ tem a *propriedade de Daugavet* [3], isto é, todo operador linear contínuo de posto um $T$ em $X$ satisfaz

$$\|Id + T\| = 1 + \|T\|.$$

Entre outros resultados M. Martín apresentou uma relação entre o índice daugavetiano de um espaço de Banach $X$ e a imagem numérica de operadores compactos em $X$. Lembremos que dada uma função limitada $\Phi : S_X \to X$, sua *imagem numérica* é o conjunto

$$V(\Phi) = \big\{x^*(\Phi(x)) : \ x \in S_X, \ x^* \in S_{X^*}, \ x^*(x) = 1\big\}.$$

Denotemos $\omega(\Phi) = \sup \text{Re}V(\Phi)$. M. Martín provou que

$$\text{daug}(X) = \inf\{\omega(T) : T \in K(X), \|T\| = 1\} = \sup\{m : \omega(T) \geq m\|T\| \ \text{ para todo } \ T \in K(X)\}. \tag{2}$$

Mostraremos neste trabalho que os valores em (1) e (2) também coincidem para polinômios em espaços de Banach complexos de dimensão infinita.

## 2 Resultado Principal

Sejam $X$ um espaço de Banach complexo de dimensão infinita e $P \in \mathcal{P}_K(X)$ dado por $P = P_0 + P_1 + \cdots + P_n$ com $P_j \in \mathcal{P}(^jX; X)$ para $j = 0, \ldots, n$. Por [1, Proposition 3.4], temos que $P_1 \in K(X)$. E pela Desigualdade de Cauchy, segue que

$$\|Id + P_1\| \leq \|Id + P\|.$$

Já que $P_1 \in K(X)$ e $X$ tem dimensão infinita, temos que $\|Id + P_1\| \geq 1$ e consequentemente $\|Id + P\| \geq 1$. Além disso, temos

$$\omega(P) = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\|Id + \alpha P\| - 1}{\alpha}$$

por [2, Theorem 2]. Donde segue que $\omega(P) \geq 0$ para todo $P \in \mathcal{P}_K(X)$. Provemos o resultado principal do trabalho fazendo uso das ideias de M. Martín [4].

**Proposição 2.1.** *Seja $X$ um espaço de Banach complexo de dimensão infinita. Então*

$$\inf \{\omega(P) : P \in \mathcal{P}_K(X), \|P\| = 1\} = \sup \{m \geq 0 : \|Id + P\| \geq 1 + m\|P\| \text{ para todo } P \in \mathcal{P}_K(X)\}.$$

*Proof.* Não é difícil verificar que

$$\inf \{\omega(P) : P \in \mathcal{P}_K(X), \|P\| = 1\} = \sup \{k : \omega(P) \geq k\|P\| \text{ para todo } P \in \mathcal{P}_K(X)\}.$$

Seja $k$ uma constante tal que $\omega(P) \geq k\|P\|$ para todo $P \in \mathcal{P}_K(X)$. Dado $Q \in \mathcal{P}_K(X)$ e $x \in S_X$, $x^* \in S_{X^*}$ com $x^*(x) = 1$, temos

$$\|Id + Q\| \geq \|x + Q(x)\| \geq |x^*(x + Q(x))| = |1 + x^*(Q(x))| \geq 1 + \text{Re } x^*(Q(x)).$$

Tomando o supremo sobre todos $x \in S_X$, $x^* \in S_{X^*}$ com $x^*(x) = 1$, obtemos

$$\|Id + Q\| \geq 1 + \omega(Q) \geq 1 + k\|Q\|.$$

Isto implica que $\sup \{m \geq 0 : \|Id + P\| \geq 1 + m\|P\| \text{ para todo } P \in \mathcal{P}_K(X)\} \geq k$. Logo,

$$\sup \{m \geq 0 : \|Id + P\| \geq 1 + m\|P\| \text{ para todo } P \in \mathcal{P}_K(X)\} \geq \sup \{k : \omega(P) \geq k\|P\| \text{ para todo } P \in \mathcal{P}_K(X)\}.$$

Para obter a desigualdade contrária, seja $m \geq 0$ tal que $\|Id + P\| \geq 1 + m\|P\|$ para todo $P \in \mathcal{P}_K(X)$. Fixe $Q \in \mathcal{P}_K(X)$ e observe que

$$\|Id + \alpha Q\| \geq 1 + m\|\alpha Q\| = 1 + m\alpha\|Q\| \text{ para todo } \alpha > 0.$$

Assim,

$$\omega(Q) = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\|Id + \alpha Q\| - 1}{\alpha} \geq m\|Q\|.$$

Como $Q$ é qualquer, segue que $m \in \{k : \omega(P) \geq k\|P\| \text{ para todo } P \in \mathcal{P}_K(X)\}$. Portanto,

$$\sup \{m \geq 0 : \|Id + P\| \geq 1 + m\|P\| \text{ para todo } P \in \mathcal{P}_K(X)\} \leq \sup \{k : \omega(P) \geq k\|P\| \text{ para todo } P \in \mathcal{P}_K(X)\}.$$

□

Segundo a proposição acima, podemos definir o *índice daugavetiano polinomial* de $X$ como o valor

$$\text{daug}_p(X) = \sup \{m \geq 0 : \|Id + P\| \geq 1 + m\|P\| \text{ para todo } P \in \mathcal{P}_K(X)\} = \inf \{\omega(P) : P \in \mathcal{P}_K(X), \|P\| = 1\},$$

generalizando as ideias do índice daugavetiano.

## References


[1] ARON, R. M. AND SCHOTTENLOHER, M. - Compact Holomorphic Mappings on Banach Spaces and the Approximation Property. *J. Funct. Anal.*, **21**, 7-30, 1976.

[2] HARRIS, L. A. - The Numerical Range of Holomorphic Functions in Banach Spaces. *American J. Math.*, **93**, 1005-1019, 1971.

[3] KADETS, V. M., SHVIDKOY, R. V., SIROTKIN, G. G., WERNER, D. - Banach spaces with the Daugavet property. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **352**, 855-873, 2000.

[4] MARTÍN, M. - The Daugavetian index of a Banach space. *Taiwanese J. Math.*, **7**, 631-640, 2003.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *103–104*

# UM PRINCíPIO DE REGULARIDADE EM ESPAÇOS DE SEQUÊNCIAS E APLICAÇÕES

D. PELLEGRINO[1,†], J. SANTOS[1,‡], D. RODRíGUEZ[2,§] & E. TEIXEIRA[3,§§]

[1]Depto. de Matemática, UFPB, PB, Brasil, [2]Depto. de Matemática, UFPE, PE, Brasil, , [3]Department of Mathematics, UCF, FL, EUA

[†]pellegrino@pq.cnpq.br, [‡]joedsonmat@gmail.com, [§]dserrano@kent.edu, [§§]eduardo.teixeira@ucf.edu

**Abstract**

Neste trabalho mostraremos um princípio de regularidade não linear em espaços de sequências que produz estimativas universais para séries especiais definidas neles. Como consequências, estabelecemos novos teoremas de inclusão para a classe dos operadores múltiplos somantes e também resolvemos o problema de classificação de todos os pares de expoentes admissíveis na desigualdade anisotrópica de Hardy-Littlewood.

## 1 Introdução

Os argumentos de regularidade são ferramentas fundamentais na análise de uma variedade de problemas e muitas vezes possibilitam descobertas importantes no domínio da matemática e suas aplicações. Os resultados de regularidade obtidos estão baseados no seguinte problema:

**Problem 1.1** Sejam $p \geq 1$ um número real, $X, Y, W_1, W_2$ conjuntos não vazios, $Z_1, Z_2, Z_3$ espaços normados e $f\colon X \times Y \to Z_1,\ g\colon X \times W_1 \to Z_2,\ h\colon Y \times W_2 \to Z_3$ funções particulares. Assuma que exista uma constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{m_1}\sum_{j=1}^{m_2} \|f(x_i, y_j)\|^p \leq C \left(\sup_{w\in W_1} \sum_{i=1}^{m_1} \|g(x_i, w)\|^p\right) \cdot \left(\sup_{w\in W_2} \sum_{j=1}^{m_2} \|h(y_j, w)\|^p\right), \tag{1}$$

para todos $x_i \in X$, $y_j \in Y$ e $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$. Será que existem constantes (universais) positivas $\epsilon \sim \delta$ e $\tilde{C}_{\delta,\epsilon}$ tais que

$$\left(\sum_{i=1}^{m_1}\sum_{j=1}^{m_2} \|f(x_i, y_j)\|^{p+\delta}\right)^{\frac{1}{p+\delta}} \leq \tilde{C}_{\delta,\epsilon} \cdot \left(\sup_{w\in W_1} \sum_{i=1}^{m_1} \|g(x_i, w)\|^{p+\epsilon}\right)^{\frac{1}{p+\epsilon}} \left(\sup_{w\in W_2} \sum_{j=1}^{m_2} \|h(y_j, w)\|^{p+\epsilon}\right)^{\frac{1}{p+\epsilon}}, \tag{2}$$

para todos $x_i \in X$, $y_j \in Y$ e $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$?

## 2 Resultados Principais

Iremos estabelecer um princípio de regularidade não linear que resolve o Problema 1 em um contexto mais geral e expande amplamente a investigação iniciada em [3] sobre propriedades de inclusão para somas em um índice.

Sejam $Z_1$, $V$ e $W_1$, $W_2$ conjuntos arbitrários não vazios e $Z_2$ um espaço vetorial. Para $t = 1, 2$, considere

$$R_t\colon Z_t \times W_t \longrightarrow [0, \infty) \quad \text{e} \quad S\colon Z_1 \times Z_2 \times V \longrightarrow [0, \infty)$$

duas aplicações satisfazendo

$$R_2\left(\lambda z, w\right) = \lambda R_2\left(z, w\right), \quad S\left(z_1, \lambda z_2, v\right) = \lambda S\left(z_1, z_2, v\right) \quad \text{para todo escalar real } \lambda \geq 0.$$

E assuma também que

$$\sup_{w\in W_t} \sum_{j=1}^{m_t} R_t\left(z_{t,j}, w\right)^{p_1} < \infty, \quad t = 1, 2.$$

**Teorema 2.1** (Princípio de Regularidade)**.** *Sejam* $1 \leq p_1 \leq p_2 < 2p_1$ *e assuma*

$$\left(\sup_{v\in V}\sum_{i=1}^{m_1}\sum_{j=1}^{m_2} S(z_{1,i}, z_{2,j}, v)^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq C\left(\sup_{w\in W_1}\sum_{i=1}^{m_1} R_1\left(z_{1,i}, w\right)^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}\left(\sup_{w\in W_2}\sum_{j=1}^{m_2} R_2\left(z_{2,j}, w\right)^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}},$$

*para todos* $z_{1,i} \in Z_1, z_{2,j} \in Z_2,\ i = 1, ..., m_1,\ j = 1, ..., m_2$ *e* $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$. *Então*

$$\left(\sup_{v\in V}\sum_{i=1}^{m_1}\sum_{j=1}^{m_2} S(z_{1,i}, z_{2,j}, v)^{\frac{p_1p_2}{2p_1-p_2}}\right)^{\frac{2p_1-p_2}{p_1p_2}} \leq C\left(\sup_{w\in W_1}\sum_{i=1}^{m_1} R_1\left(z_{1,i}, w\right)^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}\left(\sup_{w\in W_2}\sum_{j=1}^{m_2} R_2\left(z_{2,j}, w\right)^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}},$$

*para todos* $z_{1,i} \in Z_1, z_{2,j} \in Z_2,\ i = 1, ..., m_1,\ j = 1, ..., m_2$ *e* $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$.

Também conseguimos provar um princípio de regularidade bastante útil para a somabilidade anisotrópica de sequências.

**Teorema 2.2** (Princípio de Regularidade Anisotrópico)**.** *Sejam* $p_1, p_2, r_1, r_2 \geq 1$ *e* $p_3 \geq p_1$ *e* $r_3 \geq r_1$ *com*

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{p_1} \leq \frac{1}{r_3} - \frac{1}{p_3}.$$

*Então*

$$\sup_{v\in V}\left(\sum_{i=1}^{m_1}\left(\sum_{j=1}^{m_2} S(z_{1,i}, z_{2,j}, v)^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq C\left(\sup_{w\in W_1}\sum_{i=1}^{m_1} R_1\left(z_{1,i}, w\right)^{r_1}\right)^{\frac{1}{r_1}}\left(\sup_{w\in W_2}\sum_{j=1}^{m_2} R_2\left(z_{2,j}, w\right)^{r_2}\right)^{\frac{1}{r_2}},$$

*para todos* $z_{1,i} \in Z_1, z_{2,j} \in Z_2,\ i = 1, ..., m_1,\ j = 1, ..., m_2$ *e* $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ *implica*

$$\sup_{v\in V}\left(\sum_{i=1}^{m_1}\left(\sum_{j=1}^{m_2} S(z_{1,i}, z_{2,j}, v)^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}\cdot p_3}\right)^{\frac{1}{p_3}} \leq C\left(\sup_{w\in W_1}\sum_{i=1}^{m_1} R_1\left(z_{1,i}, w\right)^{r_3}\right)^{\frac{1}{r_3}}\left(\sup_{w\in W_2}\sum_{j=1}^{m_2} R_2\left(z_{2,j}, w\right)^{r_2}\right)^{\frac{1}{r_2}}$$

*para todos* $z_{1,i} \in Z_1, z_{2,j} \in Z_2,\ i = 1, ..., m_1,\ j = 1, ..., m_2$ *e* $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$.

**Aplicações:** O Teorema 2.1 fornece resultados de inclusão para operadores múltiplos somantes [2, 4]. O Teorema 2.2 é a ferramenta fundamental para a classificação de todos os expoentes anisotrópicos da desigualdade de Hardy-Littlewood [1].

## References


[1] HARDY, G. AND LITTLEWOOD, J. E. - Bilinear forms bounded in space $[p, q]$. *Quart. J. Math.*, **5**, 241-254, 1934.

[2] MATOS, M. C. - Fully absolutely summing mappings and Hilbert Schmidt operators. *Collect. Math.*, **54**, 111-136, 2003.

[3] PELLEGRINO, D., SANTOS, J. AND SEOANE-SEPÚLVEDA, J. - Some techniques on nonlinear analysis and applications. *Adv. Math.*, **229**, 1235-1265, 2012.

[4] PÉREZ-GARCÍA, D. AND VILLANUEVA, I. - Multiple summing operators on Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, **165**, 86-96, 2003.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *105–106*

# CLASSES FORTEMENTE COERENTES E COMPATÍVEIS DE APLICAÇÕES MULTILINEARES E POLINÔMIOS HOMOGÊNEOS

JOILSON RIBEIRO[1,†], FABRICIO SANTOS[1,‡] & EWERTON R. TORRES[2,§]

[1]IME, UFBA, BA, Brasil, [2]FAMAT, UFU, MG, Brasil

[†]joilsonor@ufba.br, [‡]briciofisico@hotmail.com, [§]ewertonrtorres@gmail.com

**Abstract**

Neste trabalho introduzimos o conceito de classes fortemente coerentes e compatíveis para multi-ideais de aplicações multilineares e ideais de polinômios homogêneos, mostrando suas similaridades e distinções com relação a abordagens anteriores.

## 1 Introdução

Existem diversas formas de comparar distintos níveis de multilinearidade (para aplicações multilineares) e graus de homogeneidades (para polinômios homogêneos), veja por exemplo [3]. Quando trabalhamos com níveis (ou graus) consecutivos temos uma discussão acerca da coerência da classe, já se comparamos um determinado nível com o primeiro, isto é, com as aplicações lineares (ou polinômios 1-homogêneos) da classe a discussão é sobre a compatibilidade da classe com o ideal obtido. Seguindo o espírito de [4] apresentamos nossa definição:

**Definição 1.1.** *Sejam $\mathcal{M}$ uma classe de aplicações multilineares e $\mathcal{U}$ uma classe polinômios homogêneos, ambas munidas de uma norma, e $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. A sequência $(\mathcal{U}_k, \mathcal{M}_k)_{k=1}^{N}$, onde o indice $k$ indica o grau de multilinearidade (grau de homogeneidade) das aplicações (polinômios) que estão na classe $\mathcal{M}$ ($\mathcal{U}$, respectivamente), com $\mathcal{U}_1 = \mathcal{M}_1 = \mathcal{I}$, é fortemente coerente se existem constantes $\beta_1, \beta_2$ e $\beta_3$ tais que, para quaisquer espaços de Banach $E$ e $F$, valem para todo $k = 1, ..., N-1$:*

*(CH1) Se $T \in \mathcal{M}_{k+1}(E_1, \ldots, E_{k+1}; F)$ e $a_j \in E_j$ para $j = 1, \ldots, k+1$, então*

$$T_{a_j} \in \mathcal{M}_k(E_1, \ldots, E_{j-1}, E_{j+1}, \ldots, E_{k+1}; F) \text{ e } \left|\left|T_{a_j}\right|\right|_{\mathcal{M}_k} \leq \beta_1 \left|\left|T\right|\right|_{\mathcal{M}_{k+1}} \left|\left|a_j\right|\right|.$$

*(CH2) Se $P \in \mathcal{U}_{k+1}\left({}^{k+1}E; F\right)$ e $a \in E$, então*

$$P_a \in \mathcal{U}_k\left({}^{k}E; F\right) \text{ com } \left|\left|P_a\right|\right|_{\mathcal{U}_k} \leq \beta_2 \max\left\{\left|\left|\check{P}\right|\right|_{\mathcal{M}_{k+1}}, \left|\left|P\right|\right|_{\mathcal{U}_{k+1}}\right\}\left|\left|a\right|\right|.$$

*(CH3) Se $T \in \mathcal{M}_k(E_1, \ldots, E_k; F)$ e $Q \in \mathcal{L}(E_{k+1}, \ldots, E_{k+n})$, então*

$$QT \in \mathcal{M}_{k+n}(E_1, \ldots, E_{k+n}; F) \text{ e } \|QT\|_{\mathcal{M}_{k+n}} \leq \beta_3 \|Q\| \cdot \|T\|_{\mathcal{M}_k}.$$

*(CH4) Se $P \in \mathcal{U}_k\left({}^{k}E; F\right)$ e $Q \in \mathcal{P}\left({}^{n}E\right)$, então*

$$QP \in \mathcal{U}_{k+n}\left({}^{k+n}E; F\right).$$

*(CH5) $P$ pertence a $\mathcal{U}_k({}^{k}E; F)$ se, e só se, $\check{P}$ pertence a $\mathcal{M}_k({}^{k}E; F)$.*

*Agora $(\mathcal{U}_k, \mathcal{M}_k)_{k=1}^{N}$, é fortemente compatível com $\mathcal{I}$ se existem constantes $\alpha_1$, $\alpha_2$ e $\alpha_3$ tais que, para todo $n \in \{2, \ldots, N\}$, valem:*

*(CP1) Se* $k \in \{1,\ldots,n\}, T \in \mathcal{M}_n(E_1,\ldots,E_n;F)$ *e* $a_j \in E_j$*, para todo* $j \in \{1,...,n\} \backslash k$*, então*

$$T_{a_1,\ldots,a_{k-1},a_{k+1},\ldots,a_n} \in \mathcal{I}(E_k;F) \text{ e } \|T_{a_1,\ldots,a_{k-1},a_{k+1},\ldots,a_n}\|_{\mathcal{I}} \leq \alpha_1 \|T\|_{\mathcal{M}_n} \|a_1\| \cdots \|a_{k-1}\| \cdot \|a_{k+1}\| \cdots \|a_n\|.$$

*(CP2) Se* $P \in \mathcal{U}_n(^nE;F)$ *e* $a \in F$*, então*

$$P_{a^{n-1}} \in \mathcal{I}(E;F) \text{ e } ||P_{a^{n-1}}||_{\mathcal{I}} \leq \alpha_2 \max\left\{\left|\left|\check{P}\right|\right|_{\mathcal{M}_n}, ||P||_{\mathcal{U}_n}\right\} ||a||^{n-1}.$$

*(CP3) Se* $u \in \mathcal{I}(E_n;F)$ *e* $Q \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_{n-1})$*, então*

$$Qu \in \mathcal{M}_n(E_1,...,E_n;F) \text{ e } ||Qu||_{\mathcal{M}_n} \leq \alpha_3 ||Q|| \, ||u||_{\mathcal{I}}.$$

*(CP4) Se* $u \in \mathcal{I}(E;F)$ *e* $P \in \mathcal{P}\left(^{n-1}E\right)$*, então*

$$Pu \in \mathcal{U}_n(^nE;F).$$

*(CP5)* $P$ *pertence a* $\mathcal{U}_n(^nE;F)$ *se, e só se,* $\check{P}$ *pertence a* $\mathcal{M}_n(^nE;F)$*.*

## 2 Resultados Principais

O conteúdo da próxima proposição nos mostra que a Definição 1.1 é mais restritiva do que a apresentada em [4].

**Proposição 2.1.** *Se* $(\mathcal{U}_k, \mathcal{M}_k)_{k=1}^N$ *é fortemente coerente e fortemente compatível com* $\mathcal{I}$*, então* $(\mathcal{U}_k, \mathcal{M}_k)_{k=1}^N$ *é coerente e compatível com* $\mathcal{I}$ *segundo [4].*

Considerando

$$\mathcal{P}_{\mathcal{M}} := \left\{P \in \mathcal{P}; \check{P} \in \mathcal{M}\right\} \text{ com } \|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} := \|\check{P}\|_{\mathcal{M}},$$

então a proposição seguinte fornece uma maneira natural de, a partir de um multi-ideal $\mathcal{M}$, obter um ideal de polinômios de modo que tal par seja fortemente coerente e fortemente compatível com o ideal $\mathcal{M}_1$ dos operadores lineares que estão em $\mathcal{M}$.

**Proposição 2.2.** *Seja* $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ *um multi-ideal simétrico satisfazendo as condições (CH1), (CH3) e (CH5) da Definição 1.1. Então a classe* $(\mathcal{P}_{\mathcal{M}}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}})$ *satisfaz as condições (CH2) e (CH4). Em particular, se as constantes* $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$*, então* $\left((\mathcal{M}_n, \|\cdot\|_{\mathcal{M}_n}), (\mathcal{P}_{\mathcal{M}_n}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}_n}})\right)_{n=1}^N$ *é fortemente coerente e fortemente compativel com o ideal* $\mathcal{M}_1$*.*

**Exemplo 2.1.** Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores. O conhecido ideal de composição $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$ (veja [1]) e o método da $\mathcal{I}$-limitação $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}$, introduzido em [2] são exemplos de multi-ideais que, pela proposição acima tornam o par $\left((\mathcal{M}_n, \|\cdot\|_{\mathcal{M}_n}), (\mathcal{P}_{\mathcal{M}_n}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}_n}})\right)_{n=1}^N$ fortemente coerente e fortemente compatível com $\mathcal{I}$ e $(\mathcal{L}_{\mathcal{I}})_1$, respectivamente.

## References

[1] Botelho, G., Pellegrino, D. and Rueda P. - On composition ideals of multilinear operators and homogeneous polynomials. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **43**, 1139-1155, 2007.

[2] Botelho, G. and Torres, E. R. - Techniques to generate hyper-ideals of multilinear operators. *Linear Multilinear Algebra*, **65**, 1232-1246, 2017.

[3] Carando, D., Dimant, V. and Muro, S. - Coherent sequences of polynomial ideals on Banach spaces. *Math. Nachr.* **282**, no. 8, 1111-1133, 2009.

[4] Pellegrino, D. and Ribeiro, J. - On multi-ideals and polynomial ideals of Banach spaces: a new approach to coherence and compatibility. *Monatsh. Math.*, **173**, no. 3, 379-415, 2014.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *107–108*

# RESIDUALIDADE E ALGEBRABILIDADE FORTE EM CERTOS SUBCONJUNTOS DA ÁLGEBRA DE DISCO

MARY L. LOURENÇO[1,†] & DANIELA M. VIEIRA[1,‡]

[1]IME-USP, SP, Brasil

[†]mllouren@ime.usp.br, [‡]danim@ime.usp.br

**Abstract**

Mostramos que o conjunto das funções que pertencem à álgebra de disco mas não pertencem a alguma álgebra de Dales-Davie é fortemente $\mathfrak{c}$-algebrável e é residual na álgebra de disco.

## 1 Introdução

Nas últimas duas décadas tem havido um grande e crescente interesse na procura por estruturas algébricas e topológicas em conjuntos sem tais estruturas. Acredita-se que este tipo de investigação tenha começado em 1966 [4] por Gurariy. Após este trabalho, a bibliografia no tema tornou-se extensa. O livro [1], de 2016, é uma excelente referência sobre o assunto, coletando os diversos resultados já conhecidos, bem como apresentando novas técnicas, resultados e assuntos relacionados.

Em 2016, no X Enama, apresentamos resultados relativos a certos subconjuntos da álgebra de disco. Na ocasião, obtivemos resultados relativos a espaçabilidade e algebrabilidade de tais conjuntos. Tais resultados foram posteriormente publicados em [5]. Neste trabalho apresentaremos novos resultados obtidos para tais conjuntos.

Seja $D \subset \mathbb{C}$ o disco aberto unitário, isto é, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. A álgebra de Banach de todas as funções contínuas em $\overline{D}$ que são analíticas em $D$ com a norma do *sup* é denotada por $\mathcal{A}(D)$, e é chamada de **álgebra de disco**.

Seja $X \subset \mathbb{C}$ um conjunto compacto e perfeito. Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ é **diferenciável em** $z_0 \in X$ se o seguinte limite existe:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \left\{ \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},\, z \in X \right\}.$$

Uma função complexa $f$ é **diferenciável em** $X$ se ela é diferenciável em todo ponto de $X$. A álgebra de todos as funções em $X$ com derivads $n$-ésimas contínuas será denotado por $\mathcal{D}^n(X)$, e $\mathcal{D}^\infty(X)$ denota a álgebra das funções em $X$ com derivadas de todas as ordens contínuas. Denotaremos por $f^{(n)}$ a $n$-ésima derivada de $f$ e $\|f\|_X = \sup_{z \in X} |f(z)|$.

Seja $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números positivos tais que $M_0 = 1$, e para cada $n \geq 1$,

$$\frac{M_n}{M_k\, M_{n-k}} \geq \binom{n}{k} \quad (0 \leq k \leq n).$$

Sob estas condições a sequência $M = (M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é chamda de **sequência algébrica**.

A **álgebra de Dales-Davie** em $X$ é então definida da seguinte forma:

$$\mathcal{D}(X, M) = \left\{ f \in D^\infty(X) : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|f^{(n)}\|_X}{M_n} < +\infty \right\}.$$

A norma em $\mathcal{D}(X, M)$ é definida por $\|f\| = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\|f^{(n)}\|_X}{M_n}$. Quando $(M_n)$ é uma sequência algébrica, temos que $\mathcal{D}(X, M)$ é uma álgebra normada. Estas álgebras foram introduzidas e estudadas por Dales e Davie in 1973 [3].

Quando $X = \overline{D}$ temos que $\mathcal{D}(\overline{D}, M)$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}(D)$. No entanto, $\mathcal{H}(M) = \mathcal{A}(D) \setminus \mathcal{D}(\overline{D}, M)$ não é um espaço vetorial, e portanto não é uma álgebra. Em [5] mostramos que $\mathcal{H}(M)$ é algebrável e espaçável, para várias sequências algébricas $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Neste trabalho, mostraremos que $\mathcal{H}(M)$ é fortemente $\mathfrak{c}$-algebrável e residual. Para os conceitos de espaçabilidade, algebrabilidade e residualidade, indicamos [1].

## 2 Resultados Principais

Antes de apresentar os resultados, recordemos algumas definições. Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Se $S = \{z_i : i \in I\}$ é um subconjunto de $\mathcal{B}$, a **álgebra gerada por** $S$ é o conjunto

$$\mathcal{A}(S) = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \, z_i^j, \; \alpha_j \in \mathbb{K}, \; z_i \in S, \; k \in \mathbb{N}, \; i \in I \right\},$$

e $S$ é chamado de **sistema de geradores de** $\mathcal{A}(S)$. Um sistema de geradores $S$ é **minimal** se para todo $i_0 \in I$, $z_{i_0} \notin \mathcal{A}(S \setminus \{z_{i_0}\})$. Por fim, $S$ é **livre** ou **algébricamente independente** se $P(z_{i_1}, \cdots, z_{i_n}) = 0$ implicar em $P = 0$, para $P \in \mathbb{C}[z_1, \cdots, z_n]$ e $z_{i_1} \cdots, z_{i_n} \in S$.

Sejam $Y$ um espaço vetorial topológico e $A \subset Y$. Dizemos que $A$ é: **algebrável** se existe uma álgebra $\mathcal{B} \subset A \cup \{0\}$, tal que $\mathcal{B}$ possui um sistema minimal infinito de geradores; $A$ é **fortemente** $\alpha$**-algebrável** se $A$ possui um sistema livre de generadores $S$ tal que $\text{card}(S) = \alpha$. Denotaremos $\text{card}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$. Se $Y$ é um espaço de Fréchet, um subconjunto $A \subset Y$ é **residual em** $Y$ se $Y \setminus A = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$, com $\overset{\circ}{\overline{F_n}} = \emptyset$. Sendo assim, pelo Teorema de Baire, conjuntos residuais são topologicamente grandes.

Nossos novos resultados sobre $\mathcal{H}(M)$ são os seguintes.

**Teorema 2.1.** *Seja $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência algébrica tal que $M_n \leq n!$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\mathcal{H}(M)$ é:*

*(1) fortemente $\mathfrak{c}$-algebrável.*

*(2) residual em $\mathcal{A}(D)$.*

Em [5], já havíamos mostrado que $\mathcal{H}(M)$ é algebrável. No entanto, o sistema de geradores era enumerável. Para encontrar um sistema não enumerável, utilizamos os resultados [1, Theorem 7.5.1] e [5, Theorem 3.3], que são relativos a funções do tipo exponencial. Para a demonstração de (2), nos inspiramos em [2, Theorem 1].

### References


[1] ARON, R. M., BERNAL-GONZÁLEZ, L., PELLEGRINO, D. M. AND SEOANE-SEPÚLVEDA, J. B. - *Lineability. The Search for Linearity in Mathematics*, Monographs and Research Notes in Mathematics. FL, CRC Press, 2016.

[2] BERNAL-GONZÁLEZ, L. AND BONILLA, A. - Families of strongly annular functions: linear structure. *Rev. Mat. Complut.*, **26**, 283-297, 2013.

[3] DALES, H. G. AND DAVIE, A. M. - Quasianalytic Banach function algebras. *J. Funct. Anal.*, **13**, 28-50, 1973.

[4] GURARIY, V. I. - Subspaces and bases in spaces of continuous functions. *(Russian) Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **167**, 971-973, 1966.

[5] LOURENÇO, M. AND VIEIRA, D. M. - Algebrability of some subsets of the disk algebra. *Bull. Belg. Math. Soc.*, **23**, 505-514, 2016.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *109–110*

# RESULTADOS TIPO FUJITA PARA SISTEMAS ACOPLADOS

RICARDO CASTILLO[1,†] & MIGUEL LOAYZA[1,‡]

[1]DMAT, UFPE, PE, Brasil

[†]castillo@dmat.ufpe.br, [‡]miguel@dmat.ufpe.br

**Abstract**

Consideramos o seguinte problema parabólico de $m$ equações acopladas ($m \geq 1$)

$$\begin{cases} u_{it} - \Delta u_i = & f_i(t)u_{i+1}^{p_i} \quad \text{em } \Omega \times (0,T)(i = 1...m-1), \\ u_{mt} - \Delta u_m = & f_m(t)u_1^{p_m} \quad \text{em } \Omega \times (0,T), \end{cases}$$

com condições homogêneas de Dirichlet na fronteira $\partial\Omega$, e condições iniciais em $C_0(\Omega)$. Onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio regular limitado ou não limitado, $p_i$ é uma constante não negativa, e $f_i \in C[0,\infty)$. Encontramos condições que determinam quando uma solução do problema explode ou é global. Estas condições são expressadas em termos do comportamento assintótico das soluções do problema linear homogêneo $u_t - \Delta u = 0$.

## 1 Introdução

Seja o seguinte sistema parabólico acoplado

$$\begin{cases} u_{it} - \Delta u_i = & f_i(t)u_{i+1}^{p_{i+1}} \quad \text{em } \Omega \times (0,T)(i = 1...m-1), \\ u_{mt} - \Delta u_m = & f_m(t)u_1^{p_m} \quad \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u_i = & 0 \quad \text{em } \partial\Omega \times (0,T)(i = 1,...,m), \\ u_i(0) = & u_{i0} \quad \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é qualquer domínio com fronteira regular, $m \in \mathbb{N}$ é arbitrário, $u_{i0} \in C_0(\Omega)$, $u_{i0} \geq 0$, $p_i > 0 (i = 1,...,m)$, e $f_i \in C[0,\infty)(i = 1,...,m)$. É conhecido que o problema (1) tem uma solução $(u_1,...,u_m) \in C([0,T_{max}),[C_0(\Omega)]^m)$ definida num intervalo maximal $[0,T_{max})$ satisfazendo

$$u_i(t) = \quad S(t)u_{i0} + \int_0^t S(t-\sigma)f_i(\sigma)u_{i+1}^{p_i}(\sigma)d\sigma(i = 1,...,m), \tag{2}$$

para qualquer $t \in [0,T_{max})$, onde $(S(t))_{t\geq 0}$ é o semigrupo com condições de Dirichlet na fronteira, e $u_{m+1} = u_1$. Além disso : ou $T_{max} = +\infty$ (solução global) ou $T_{max} < \infty$ e $\limsup_{t\to T_{max}}(\sum_{i=1}^m \|u_i(t)\|_\infty) = +\infty$ ( explosão em tempo finito).

Fujita no trabalho seminal publicado em 1966 (veja [2], [3], [3] ), estudou o problema (1), no caso quando $\Omega = \mathbb{R}^N$, $f_i = constante = 1$, $u_i = u_1$, $u_{i0} = u_{10}$, e $p_i = p_1 > 1$. Mostrou o seguinte, se $1 < p < p^\star = 1 + \frac{2}{N}$ as soluções do problema (1) explodem em tempo finito para qualquer condição inicial $u_{10}$ não trivial e não negativa, e quando $1 + \frac{2}{N} < p$ existem soluções não triviais e não negativas do problema (1). O valor $p^\star$ é conhecido como expoente crítico de fujita. Em 1990, Meier [2], estudou o problema (1) no caso $m = 1$, considerou nas suas hipótesis o comportamento assintótico do problema linear homogêneo, obtendo resultados tipo Fujita, como consequência de um resultado mais geral, válido para domínios arbitrários. Os resultados de Meier foram extendidos recentemente para o caso de sistemas acoplados de duas equações ($m = 2$) em 2015 [3], e em 2016 [3]. Neste trabalho extendemos o trabalho de Meier para uma quantidade arbitrária de equações acopladas (1).

## 2 Resultados Principais

Considerando os seguintes valores : $D = (\prod p_i) - 1 > 0$, $\alpha_i = D^{-1}$(quando $m = 1$), $\alpha_i = D^{-1}\left[\sum_{j=1}^{N-1}(\prod_{k=0}^{j-1} p_{i+k}) + 1\right]$ (quando $m > 1$), e $p_{m+i} = p_i$. Definamos

$$\alpha = \max\{\alpha_i > 0 : i = 1, ..., m\}. \tag{3}$$

**Teorema 2.1.** *Sejam $f_i \in C[0,\infty)$, $p_i \geq 1$ $(i = 1, ..., m)$, $\prod_{i=1}^m p_i > 1$, e $\alpha$ definida em (3).*

1. *Se para todo $u_0 \in C_0(\Omega)$, $u_0 \geq 0$, $u_0 \neq 0$ temos*

$$\limsup_{t\to\infty} \|S(t)u_0\|_\infty^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^t \min\{f_i(\sigma); i = 1, ..., m\} d\sigma = \infty, \tag{4}$$

*então qualquer solução não trivial de (1) explode em tempo finito.*

2. *Se existe $w_0 \in C_0(\Omega)$, $w_0 \geq 0$, $w_0 \neq 0$ tal que*

$$\int_0^\infty \max\{f_i(\sigma); i = 1, ..., m\} \|S(\sigma)w_0\|_\infty^{\frac{1}{\alpha}} d\sigma < \infty, \tag{5}$$

*então existe uma solução não trivial e não negativa do problema (1).*

**Observação 4.** *O resultado do Teorema 2.1 é válido para funções $f_i \in C[0,\infty)$ arbitrárias, porém, o resultado é otimal só quando $\max\{f_i(\sigma); i = 1, ..., m\} \sim \min\{f_i(\sigma); i = 1, ..., m\}$. No seguinte Teorema obtemos resultados ótimos no caso em que $\max\{f_i(\sigma); i = 1, ..., m\} \nsim \min\{f_i(\sigma); i = 1, ..., m\}$.*

**Teorema 2.2.** *Sejam $f_i(t) = t^{a_i}$, $a_i > -1$, $p_i \geq 1$ $(i = 1, ..., m)$, e $\prod_{i=1}^m p_i > 1$. Se $\gamma_i$ é definida por*

$$\gamma_i = D^{-1}\left[a_i + 1 + \sum_{j=1}^{m-1}(a_{i+j} + 1)\prod_{k=0}^{j-1} p_{i+k}\right], \tag{6}$$

*e $\gamma = \max\{\gamma_i; i = 1, ..., m\}$. Então, as mesmas conclusões do Teorema 2.1 são verdade quando substituímos as condições (4) e (5) por*

$$\limsup_{t\to\infty} t^\gamma \|S(t)u_0\|_\infty = \infty, \tag{7}$$

$$\max\left\{\int_0^\infty \sigma^{a_i} \ \|S(\sigma)w_0\|_\infty^{(1+a_i)/\gamma} d\sigma; i = 1, ..., m\right\} < \infty, \tag{8}$$

*respectivamente.*

**Prova:** A demonstração do Teorema 2.1 e o Teorema 2.2 é obtido pelo método de iterações (veja [3], e [3]). □

**Observação 5.** *O resultado do Teorema 2.2 é ótimo. Um resultado similar pode ser obtido para o caso $f_i(t) = e^{\beta_i}$ para $\beta_i > 0$ $(i = 1, ..., m)$.*

## References

[1] MEIER, P. *On the critical exponent for reaction-diffusion equations*, Arch. Rational Mech. and Analysis, 109, 63-71, 1990.

[2] CASTILLO R. AND LOAYZA, M. *On the critical exponent for some semilinear reaction-diffusion systems on general domains*, Jour. Math. Anal. Appl, 428, 1117-1134, 2015.

[3] CASTILLO, R., LOAYZA, M. AND DA PAIXÃO, C. S. *Global and nonglobal existence for a strongly coupled parabolic system on a general domain* Journal of Differential Equations, 261, 6, 3344-3365, 2016

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *111–112*

# MEASURE FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INFINITE TIME-DEPENDENT DELAY

CLAUDIO A. GALLEGOS[1,†], HERNÁN R. HENRÍQUEZ[1,‡] & JAQUELINE G. MESQUITA[2,§]

[1]Departamento de Matemática y CC., USACH, Santiago, Chile, [2]Departamento de Matemática, UnB, Brasília, Brasil

[†]claudio.gallegos@usach.cl, [‡]hernan.henriquez@usach.cl, [§]jgmesquita@unb.br

**Abstract**

In this work we introduce measure functional differential equations (MFDEs) with infinite time-dependent delay, and we study the relationship between these equations and generalized ordinary differential equations (GODEs) in Banach spaces.

## 1 Introduction

Measure functional differential equations (in short **MFDEs** ) with finite delay of type

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(y_s, s)dg(s), \quad t \in [t_0, t_0 + \sigma], \tag{1}$$

have been introduced by Ferderson, Mesquita and Slavik in [1]. Here $y$ and $f$ are functions with values in $\mathbb{R}^n$, the integral on the right-hand side of (1) is the Kurzweil-Henstock integral with respect to a nondecreasing function $g$ and as is usual in the theory of functional differential equations, $y_s$ represents the "history" of $y$ at $s$. They showed that functional dynamic equations on time scales represent a special case of **MFDEs**, and they obtained results on the existence and uniqueness of solutions using the theory of generalized ordinary differential equations, which were introduced by J. Kurzweil in 1957 [4]. The case when the equation (1) is considered with infinite delay were later studied by A. Slavik in [5]. He described axiomatically a suitable phase space similarly as classical functional differential equations with infinite delay (see e.g. [2], [3] ), and he obtained results of existence and uniqueness. We focus our attention on the equation (1) with infinite time-dependent delay, that means, we are interested to study the equation

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(y_{r(s)}, s)dg(s), \quad t \in [t_0, t_0 + \sigma], \tag{2}$$

where $r$ is a nondecreasing function such that $r(s) \leq s$, for all $s \in Dom(r)$.

## References

[1] FEDERSON, M.; MESQUITA, J.G. AND SLAVIK, A. - Measure functional differential equations and functional dynamics equations on time scales, *J. Diff. Equations*, **252**, 3816-3847, 2012.

[2] HALE, J. AND KATO, J. - Phase space for retarded equations with infinite delay, *Funkcial. Ekvac.*, **21**, 11-41, 1978.

[3] HINO, Y.; MURAKAMI, S. AND NAITO, T. - *Funcional differential equations with infinite delay*, Springer-Verlag, 1991.

[4] KURZWEIL, J. - Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter, *Czech. Math. J.*, **7(82)**, 418-448, 1957.

[5] SLAVIK, A. - Measure functional differential equations with infinite delay, *Nonlinear Analysis*, **79**, 140-155, 2013.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *113–114*

# A TYPE OF BRÉZIS-OSWALD PROBLEM TO Φ−LAPLACIAN OPERATOR IN THE PRESENCE OF SINGULAR TERMS

MARCOS L. M. CARVALHO[1,†], JOSÉ V. GONÇALVES[1,‡], CARLOS A. P. SANTOS[2,§] & EDCARLOS D. DA SILVA[1,§§]

[1]Instituto de Matemática, UFG, GO, Brasil, [2]Departamento de Matemática, UnB, DF, Brasil

[†]marcos_leandro_carvalho@ufg.br, [‡]goncalves.jva@gmail.com, [§]csantos@unb.br, [§§]edcarlos@ufg.br

**Abstract**

We are concerned in showing an existence result of solutions and a comparison principle for sub and super solutions in $W^{1,\Phi}_{loc}(\Omega)$ to the problem

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi u = f(x,u) \text{ in } \Omega, \\ u > 0 \text{ in } \Omega, \; u = 0 \text{ on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

where $f$ has $\Phi$-sublinear growth and may be singular at $u = 0$. Our results are an improvement and complement of the classical Brézis-Oswald [2] and Diaz-Saa's [3] results to Orlicz-Sobolev setting for singular nonlinearities. Some of our results are news even for the Laplacian operator setting.

## 1 Introduction

We consider the quasilinear problem with a singular nonlinearity (1), where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded domain with smooth boundary, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a Caratheodóri funcition and $\phi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ is of class $C^1$ that satisfies:

($\phi_1$) (i) $t\phi(t) \to 0$ *as* $t \to 0$, (ii) $t\phi(t) \to \infty$ *as* $t \to \infty$;

($\phi_2$) $t \mapsto t\phi(t)$ *is strictly increasing in* $(0,\infty)$;

($\phi_3$) *there exist* $\ell, m \in (1,N)$ *such that:* $\ell - 1 \leq \dfrac{(t\phi(t))'}{\phi(t)} \leq m-1, \; t > 0.$

We extend $t \mapsto t\phi(t)$ to $\mathbb{R}$ as an odd function. Due to the nature of the operator

$$\Delta_\Phi u = \text{div}(\phi(|\nabla u|)\nabla u), \text{ where } \Phi(t) = \int_0^t s\phi(s)ds, t \in \mathbb{R},$$

we shall work in the framework of Orlicz and Orlicz-Sobolev spaces, denoted by $L_\Phi(\Omega)$ and $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ (cf. [1]).

We point out that there is an extensive literature dealing with non-singular problems (i.e. $t_C = 0$ in $(H_3)$) of the type (1) including $\Phi$-sublinear and more general nonlinearities. See, for example, [4] and references therein. However, the problem (1) with singular nonlinearities (i.e. when the nonlinearity $f$ obliges us to take $t_C > 0$ in $(H_3)$) has not been studied yet, but principally by physical and biological reasons, singular problems with different diffusion operators have caught much attention of researchers recently.

## 2 Main Results

The function $f : \Omega \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ is such that:

($\mathbf{H_0}$) there exists a small $t_0 > 0$ such that $f(x,t) \geq 0$ for all $(x,t) \in \Omega \times (0,t_0)$;

($\mathbf{H_1}$) $t \mapsto f(x,t)$, $t > 0$ is a continuous function a.e. $x \in \Omega$ and for each $t > 0$ $x \mapsto f(x,t)$ belongs to $L^\infty(\Omega)$;

($\mathbf{H_2}$) $t \mapsto \dfrac{f(x,t)}{t^{\ell-1}}$ is decreasing on $(0,\infty)$ for a.e. $x \in \Omega$;

($\mathbf{H_3}$) there exist constants $C > 0$, and $t_C \geq 0$ such that $f(x,t) \leq C(1 + t^{\ell-1})$ for all $t > t_C$ and a.e. $x \in \Omega$.

**Definition 2.1.** *Let $u \in W^{1,\Phi}_{loc}(\Omega)$. We say that:* (**i**) *$u \leq 0$ on $\partial\Omega$ if $(u-\epsilon)^+ \in W^{1,\Phi}_0(\Omega)$ for every $\epsilon > 0$;* (**ii**) *$u = 0$ on $\partial\Omega$ if $u$ is non-negative and $u \leq 0$ on $\partial\Omega$;* (**iii**) *$u$ has zero Dirichlet boundary datum if $|u|^{\frac{\ell+\nu-1}{\ell}} \in W^{1,\ell}_0(\Omega)$ for some $\nu > 0$;* (**iv**) *$u$ has zero almost continuous Dirichlet boundary datum if $\lim_{d(x)\to 0} u(x) = 0$, where $d(x)$ stands for the distance function to the bondary of $\Omega$.*

We mean that $u \in W^{1,\Phi}_{loc}(\Omega)$ is a subsolution (supersolution) of (1) if $f(\cdot, u(\cdot)) \in L^1_{loc}(\Omega)$, and

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla \varphi dx \leq (\geq) \int_\Omega f(x,u)\varphi dx$$

holds for every $\varphi \in C^\infty_0(\Omega)$ with $\varphi \geq 0$.

**Definition 2.2.** *A function $u \in W^{1,\Phi}_{loc}(\Omega)$ is a solution of (1) if:*
(**i**) *$u$ is simultaneously a subsolution and a supersolution of (1),*
(**ii**) *$u > 0$ in $\Omega$ in the sense of $essinf_U u > 0$ for each $U \subset\subset \Omega$ given,*
(**iii**) *$u = 0$ on $\partial\Omega$ in the sense of the definition 2.1.*

Let us introduce the extended functions $a_0(x) := \lim_{t\downarrow 0+} \dfrac{f(x,t)}{t^{\ell-1}}$, $a_\infty(x) := \lim_{t\uparrow\infty} \dfrac{f(x,t)}{t^{\ell-1}}$, $x \in \Omega$, and the quantity

$$\lambda(a) := \inf_{v\in W^{1,\Phi}_0,\ \|v\|_\Phi = 1} \left\{ \int_\Omega \Phi(|\nabla v|)dx - \frac{1}{\ell}\int_{[v\neq 0]} a(x)|v|^\ell dx \right\},$$

for any extended function $a : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ given.

**Theorem 2.1. (Comparison Principle)** *Assume that $(\phi_1) - (\phi_3)$, $(H_1)$, and $(H_2)$ holds. Let $u, v \in W^{1,\Phi}_{loc}(\Omega)$ be a subsolution and a supersolution of (1), respectively, such that $u \leq 0$ on $\partial\Omega$ in the sense of definition 2.1, and $v > 0$ in $\Omega$ in the sense of $(ii)$ above. If one of the below item:*
(**i**) *$0 < \lambda(a_\infty) \leq \infty$, $f(x,t) \geq 0$ a.e. $x \in \Omega$, $t > 0$, and $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$,*
(**ii**) *$u, v \in W^{1,\Phi}_0(\Omega)$ and $u/v \in L^\infty(\Omega)$*
*holds, then $u \leq v$ a.e. in $\Omega$.*

**Theorem 2.2.** *Assume that conditions $(\phi_1) - (\phi_3)$, $(H_0) - (H_3)$ hold. Assume also that $f$ is nonnegative function. Then Problem (1) has a unique solution $u \in W^{1,\Phi}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ if $-\infty \leq \lambda(a_0) < 0 < \lambda(a_\infty) \leq \infty$. Additionally, $u$ has zero almost continuous Dirichlet boundary datum, and $u(x) \geq cd(x)$, $x \in \Omega$ for some $c > 0$ independent of $u$. Besides this, if $\lim_{s\to 0} f(x,s)s^\nu = a(x) \in L^1(\Omega)$ uniformilly in $\Omega$, for some $\nu > 0$, then $u$ has zero Dirichlet boundary datum. Moreover, $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ for some $\alpha \in (0,1)$ if $t_C = 0$ can be taken in $(H_3)$.*

## References


[1] Adams, R. A. & Fournier, J. F., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, (2003).

[2] H. Brézis, & L. Oswald, *Remarks on sublinear elliptic equations*, Nonlinear Anal., 10, 55-64, (1986)

[3] J. L. Díaz, J. E. Saa, *Existence et unicité de solutions positives pour certaines équations elliptiques quasilinéaires*, C.R.A.S. de Paris t. 305, Serie I , 521–524, (1987)

[4] Mihailescu, M., Repovs, D., *Multiple solutions for a nonlinear and non-homogeneous problem in Orlicz-Sobolev spaces*, Applied Mathematics and Computation 217, 6624–6632, (2011).

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *115–116*

# ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF AN AUTONOMOUS $N$-DIMENSIONAL THERMOELASTICITY SYSTEM

FLANK D. M. BEZERRA[1,†] & DÉSIO R. R. SILVA[2,‡]

[1]Departamento de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, [2]Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas, Universidade Federal do Rio Grande do Norte

[†]flank@mat.ufpb.br, [‡]desioramirez@gmail.com

**Abstract**

We are interested in studying the asymptotic behavior of solutions in the sense of the global attractors for a thermoelastatic system in a bounded smooth domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, with $n > 1$.

## 1 Introduction

We are concerned with the following initial-boundary value problem

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \operatorname{div}(a(x)\nabla u) - \nabla \operatorname{div} u + \nabla\theta = f(u), & t > 0,\ x \in \Omega, \\ \partial_t\theta - \operatorname{div}(\kappa(x)\nabla\theta) + \operatorname{div}\partial_t u = 0, & t > 0,\ x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

under the initial conditions

$$\mathbf{u}_0(x) = (u(0,x), \partial_t u(0,x), \theta(0,x)) = (u_0(x), u_1(x), \theta_0(x)) \in \mathcal{H},\ x \in \Omega, \tag{2}$$

and the boundary conditions

$$u(t,x) = 0,\ \theta(t,x) = 0,\ t > 0,\ x \in \partial\Omega \tag{3}$$

where $\mathcal{H} = (H_0^1(\Omega))^n \times (L^2(\Omega))^n \times L_0^2(\Omega)$ and $L_0^2(\Omega) = \{\theta \in L^2(\Omega); \int_\Omega \theta(x)dx = 0\}$.

In this problem, the conditions on the map $f$ and the functional parameters $a$ and $\kappa$ are sufficient to well-possedness of the problem in $\mathcal{H}$. The coefficients $a$ and $\kappa$ are real-valued continuously differentiable function defined on $\Omega$ such that there exist constants $j_0 > 0$ and $j_1 > 0$ with the property

$$0 < j_0 \leqslant j(x) \leqslant j_1, \tag{4}$$

for any $x \in \Omega$ where $j = a, \kappa$. We consider $f = (f_1, \dots, f_n)$ a conservative vector field with the functions $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ twice continuously differentiable and $f_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Moreover, for each $\nu > 0$ there exists $C_\nu > 0$ and there exists a constant $C > 0$ such that for every $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, we have

$$f(\xi)\cdot\xi \le \nu|\xi|^2 + C_\nu \quad \text{and} \quad |\nabla f_i(\xi)| \leqslant C\left(1 + \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{\rho-1}\right) \tag{5}$$

for some $1 < \rho < \frac{n}{n-2}$ (if $n \geqslant 3$) or $\rho = \infty$ (if $n = 2$).

It was considered $\theta_0 \in L_0^2(\Omega)$ and $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ star-shaped with respect to a ball $B \subset \mathbb{R}^n$ to guarantee the existence of $\hbar$ such that $\operatorname{div}\hbar = \theta$ in $\Omega$ and $\|\hbar\|_{(H_0^1(\Omega))^n} \leqslant C\|\theta\|_{L^2(\Omega)}$(see [6]), in order to define the functional

$$\mathcal{L}(u,z,\theta) = M\mathcal{E}(u,z,\theta) + \delta_1 \int_\Omega uz dx + \delta_2 \int_\Omega \hbar z dx \tag{6}$$

where $\mathcal{E}(u,z,\theta) = \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(a(x)|\nabla u|^2 + |\operatorname{div} u|^2 + |z|^2 + |\theta|^2\Big)dx - \int_\Omega F(u)dx$ that is the natural energy of the system. The positive constants $C > 0$, $\delta_1, \delta_2$ and $M$ were chosen appropriately. The functional in (6) is used to prove the eistence of a bounded absorbing set.

## 2 Main Results

We were able to show that for $M > 0$ sufficiently large, there exist constants $C_1,\ C_2 \geq 0$ and $C_M,\ c_M,\ M_1,\ M_2 > 0$ such that for all $t \geqslant 0$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leqslant -M_1\mathcal{E}(t) + M_2, \quad \text{and} \quad c_M\mathcal{E}(t) - C_1 \leq \mathcal{L}(t) \leq C_M\mathcal{E}(t) + C_2, \tag{7}$$

where $\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(u, z, \theta)$, $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(u, z, \theta)$, and $S(t)\mathbf{u}_0 = (u, z, \theta) = (u(t), z(t), \theta(t))$ is the solution of (1)-(3).

We wrote $S(t)\mathbf{u}_0 = S_1(t)\mathbf{u}_0 + S_2(t)\mathbf{u}_0$, where $S_1(t)\mathbf{u}_0$ is defined as the solution of (1)-(3) with $f \equiv 0$ and $S_2(t)\mathbf{u}_0 = \int_0^t S_1(t-\xi)\mathbf{F}(S(\xi)\mathbf{u}_0)d\xi,\ t \geqslant 0$ where $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = (0, f^e(u), 0)$, wiht $f^e$ the Nemytiskĭi operator to $f$. Estimates in (7) are sufficient to show Theorem 2.1 and Theorem 2.2.

**Theorem 2.1.** *There exists a $R > 0$ such that for any bounded subset $B$ of $\mathcal{H}$ there exists $t_B > 0$ with the property*

$$S(t)B \subset \mathcal{B}_{\mathcal{H}}(0; R),$$

*for any $t \geqslant t_B$. Here, $\mathcal{B}_{\mathcal{H}}(0; R)$ denotes the open ball in $\mathcal{H}$ centered at origin and of radius $R$.*

**Theorem 2.2.** *There exists positive constants $K$ and $\alpha$ such that*

$$\|S_1(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leqslant Ke^{-\alpha t} \quad \text{for all} \quad t \geqslant 0,$$

*and $S_2(t)$ is a compact operator from $\mathcal{H}$ into itself for all $t > 0$. In particular the nonlinear semigroup $S(\cdot)$ is asymptotically compact.*

As consequence, we have the following results (see [6, Theorem 2.43]).

**Theorem 2.3.** *The nonlinear gradient semigroup associated with the Cauchy problem (1)-(3) has nontrivial global attractor $\mathcal{A}$ in $\mathcal{H}$; namely, the global attractor $\mathcal{A}$ is the unstable set of the equilibrium point.*

### References


[1] DAFERMOS, C. M. - On the existence and the asymptotic stability of solutions to the equations of linear thermoelasticity., *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **29**, 241-271, 1968.

[2] RIVERA, J. E. M. - Asymptotic behaviour in n-dimensional thermoelasticity. *Applied Mathematics Letters* **10.5**, 47-53, 1997.

[3] JIANG, S - Exponential decay and global existence of spherically symmetric solutions in thermoelasticity. *Chinese Annals of Mathematics* **19**, 629-640, 1998.

[4] DURÁN, R. G. AND MUSCHIETTI, M. A. - An explicit right inverse of the divergence operator which is continuous in weighted norms *Studia Mathematica* **148**, 207-219, (2001).

[5] HENRY, D. B., PERISSINITTO, A. AND LOPES, O. - On the essential spectrum of a semigroup of thermoelasticity. *nonlinear analysis, theory, methods & applications*, **21**, 65-75, 1993.

[6] CARVALHO, A. N. LANGA, J. A. AND ROBINSON, J. C. *Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems.* Applied Mathematical Sciences, 182, Springer-Verlag, New York, 2012.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *117–118*

# UM ESTUDO DOS CICLOS LIMITES EM SISTEMAS LINEARES SUAVES POR PARTES NO PLANO CUJA ZONA DE SEPARAÇÃO É UMA POLIGONAL

ANA M. A. SILVA[1,†] & RODRIGO D. EUZÉBIO[2,‡]

[1]Instituto de Matemática e Estatística, UFG, GO, Brasil

[†]anamarias.ufg@gmail.com, [‡]euzebio@ufg.br

**Abstract**

Nos últimos anos houve um interesse considerável no estudo dos sistemas lineares por partes. Existe um interesse especial em estudar a existência, o número e a distribuição dos ciclos limites em sistemas lineares por partes do plano. Em [2], os autores demonstram a existência de três ciclos limites em torno da origem e em [3], os autores demonstram que existem três ciclos limites para todo $\epsilon > 0$ e que não há ciclos limites para todo $\epsilon < 0$. Neste trabalho estudaremos a seguinte classe de sistemas lineares por partes do plano com 2 zonas de separação:

$$\dot{X} = \begin{cases} G^- X, \ H(X,p) < 0 \\ G^+ X, \ H(X,p) \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

onde "."denota a derivada com respeito a variável independente $t$, chamada tempo, $p$ é o vetor parâmetro, $X = (x, y)$, $H(X, p)$ define a região de descontinuidade e

$$G^{\pm} = \begin{bmatrix} {g_{11}}^{\pm} & {g_{12}}^{\pm} \\ {g_{21}}^{\pm} & {g_{22}}^{\pm} \end{bmatrix} \tag{2}$$

é uma matriz com entradas reais satisfazendo as seguintes condições:

**H1** ${g_{12}}^{\pm} < 0$;

**H2** $G^-$ possui autovalores complexos com parte real negativa e $G^+$ possui autovalores complexos com parte real positiva.

**H3** A função $H$ é pelo menos contínua.

Um dos objetivos desse trabalho é dar um exemplo de um sistema planar com duas zonas com mais de três ciclos limites e compreender a construção da zona de separação, que não será um reta e sim uma poligonal. Para isso, fazemos uma generalização da função $(X, p) \mapsto H(X, p)$ de forma que os sistemas estudados em [3] e em [2] sejam um caso particular deste. Este trabalho tem como base o artigo de Braga e Mello [1], publicado em 2014.

## 1 Introdução

**Exemplo 1.1.** *As seguintes matrizes ilustram as três condições definidas acima, dadas respectivamente por:*

$$A^- = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-20}{3} \\ \frac{377}{750} & \frac{-26}{15} \end{bmatrix} \qquad A^+ = \begin{bmatrix} \frac{19}{50} & -1 \\ 1 & \frac{19}{50} \end{bmatrix},$$

*cujos autovalores são dados, respectivamente por:*

$$(-\frac{1}{3} \pm i) \quad e \quad (\frac{19}{50} \pm i).$$

*E, por fim,* $(X,p) \mapsto H(X,p) = x - p$.

### 1.1 Construção da Zona de Separação

Dado um número inteiro $m \geq 1$, considere os seguintes conjuntos:

$\mathcal{X} = \{(x_1, x_2, ..., x_{2m-1}) \in \mathbb{R}^{2m-1}\}$;

$\mathcal{Y} = \{(y_1, y_2, ..., y_{2m}) \in \mathbb{R}^{2m}\}$, com $y_i \neq y_{i+1}$ para todo $i = 1, 2, ..., 2m$;

$\mathcal{B} = \{(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m) \in \mathbb{R}^{2m}\}$, com $\beta_j \in \{0, 1\}$ para todo $j = 1, 2, ..., m$.

Sejam $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $p = (\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{\beta}) \in \mathcal{M} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{B}$, defina $(X, p) \mapsto H(X, p) = x - h(y, p)$ e $h$ é definida por:

$$(y, p) \mapsto h(y, p) = x_1 + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(v(y - y_{2k-1})) - \beta_k v(y - y_{2k}) \tag{3}$$

onde $\alpha_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{y_{2k} - y_{2k-1}}$ para $k = 1, 2, ..., m$, note que $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Defina ainda, $s \in \mathbb{R} \mapsto v(s) = s(u(s))$ tal que $u(s) = \begin{cases} 0, & s < 0 \\ 1, & s \geq 0 \end{cases}$ é a função degrau unitária.

Uma vez que fixamos $p \in \mathcal{M}$, podemos definir o conjunto:

**Definição 1.1.** $\mathcal{L}_p = \{X \in \mathbb{R}^2 \setminus H(X, p) = 0\}$

**Observação 6.** *Um membro de 2 com a função $H$ definida acima será denotado por $(G^-, G^+, H)_m$.*

## 2 Resultados Principais

**Teorema 2.1.** *(Llibre-Ponce): O sistema linear definido em 2 com as matrizes $G^+$ e $G^-$ como no exemplo 1.1 possui três ciclos limites não deslizantes que circundam a origem.*

**Teorema 2.2.** *Existem valores de parâmetros para $p = (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, y_4, \beta_1, \beta_2) \in \mathcal{M}$ tais que $(A^-, A^+, H)_2$ possui $3 < n(p) \leq 7$ ciclos limites não deslizantes ao redor da origem. Mais precisamente, para:*

$p_4 = (1, 2, 2, 3, 4, y_3, y_4, 0, \beta_2)$, $n(p_4) = 4$

$p_5 = (1, 2, 2, 3, 4, y_3, y_4, 1, \beta_2)$, $n(p_5) = 5$

$p_6 = (1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 1, 0)$, $n(p_6) = 6$

$p_7 = (1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 1, 1)$, $n(p_7) = 7$

*onde $n(p_i)$ denota o número de ciclos limites.*

## References


[1] BRAGA, D.C. AND MELLO, L.F. - More Than Three Limit Cycles in Discontinuous Piecewise Linear Differential Systems with Two Zones in the Plane., *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **24**(4), 1450056, 10 pp., 2014.

[2] BRAGA, D.C. AND MELLO, L.F. - Limit cycles in a family of discontinuous piecewise linear differential system with two zones in the plane., *Nonlin. Dyn.*, **73**, 1283-1288, 2013.

[3] LLIBRE, J. AND PONCE, E. - Three nested limit cycles in discontinuous piecewise linear differential systems with two zones., *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B Appl. Algorithms*, **19**(3), 325-335, 2012.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *119–120*

# CONTROLABILIDADE LOCAL NULA DO SISTEMA DE LADYZHENSKAYA-SMAGORINSKY-BOUSSINESQ COM $N-1$ CONTROLES ESCALARES EM UM DOMÍNIO ARBITRÁRIO

JUAN LíMACO FERREL[1,†], DANY NINA HUAMAN[1,‡] & MIGUEL NUÑEZ CHÁVEZ[1,§]

[1]Instituto de Matemática e Estatística, UFF, RJ, Brasil

[†]jlimaco@vm.uff.br, [‡]danynina3003@gmail.com, [§]miguelnunez@mat.uff.br

**Abstract**

Este trabalho apresenta o estudo do controle de um modelo de EDP com turbulência do tipo Ladyzhenskaya-Smagorinsky mais um acoplamento do tipo Boussinesq, isto é, nas equações encontramos não linearidades locais e não locais; o usual termo do transporte e uma viscosidade turbulenta que depende da energia no espaço global mediante do fluxo, tanto para a velocidade do fluido como para a temperatura do mesmo. Provaremos que o sistema é localmente nulo controlável num domínio arbitrário, mas fazendo anular duas componentes do controle da equação da velocidade do fluido. A prova é baseada em técnicas já conhecidas, especificamente usando o teorema da aplicação inversa para espaços em dimensão infinita ou método de Liusternik.

## 1 Introdução

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N, (N = 2 \ \text{ ou } 3)$ um aberto não vazio, limitado, conexo, com $\partial\Omega$ de classe $C^\infty$. Denotamos por $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$ com $T > 0$.
Temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} y_t - \nabla \cdot ((\nu_0 + \nu_1(\|Dy\|^2))Dy) + (y \cdot \nabla)y + \nabla p = v1_\omega + \theta e_N \ \text{ em } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 \ \text{ em } Q, \\ \theta_t - \nabla \cdot ((\nu_0 + \nu_1(\|Dy\|^2))\nabla\theta) + y \cdot \nabla\theta = v_0 1_\omega \ \text{ em } Q, \\ y = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{sobre } \ \Sigma, \\ y(0) = y_0, \quad \theta(0) = \theta_0 \quad \text{em } \ \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

onde $\omega \subset\subset \Omega$ não vazio, $\nu_0 \in \mathbb{R}^+$ chamada constante de viscosidade cinemática, $\nu_1 \in C_b^1(\mathbb{R})$ com $\nu_1 \geq 0$ chamada viscosidade turbulenta.
Denotando $\nu = \nu_0 + \nu_1(0)$, temos o seguinte sistema linear e seu sistema adjunto respectivamente

$$\begin{cases} y_t - \nu\Delta y + \nabla p = f + v1_\omega + \theta e_N \ \text{ em } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 \ \text{ em } Q, \\ \theta_t - \nu\Delta\theta = f_0 + v_0 1_\omega \ \text{ em } Q, \\ y = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{sobre } \ \Sigma, \\ y(0) = y_0, \quad \theta(0) = \theta_0 \quad \text{em } \ \Omega. \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} -\varphi - \nu\Delta\varphi + \nabla\pi = g \ \text{ em } Q, \\ \nabla \cdot \varphi = 0 \ \text{ em } Q, \\ -\psi_t - \nu\Delta\psi = g_0 + \varphi e_N \ \text{ em } Q, \\ \varphi = 0, \quad \psi = 0 \quad \text{sobre } \ \Sigma, \\ \varphi(T) = \varphi^T, \quad \psi(T) = \psi^T \quad \text{em } \ \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

**Definição 1.1.** *Sejam $\beta^*(t)$, $\hat{\beta}(t)$, $\gamma^*(t)$ e $\hat{\gamma}(t)$ funções positivas que explodem no tempo $t = T$.*

**Lema 1.1** (**Desigualdade de Carleman**)**.** *Para $N = 3$ e $\omega \subset\subset \Omega$. Existe uma constante $\lambda_0$ tal que para cada $\lambda > \lambda_0$, existem duas constantes $C(\lambda) > 0$ e $s_0(\lambda) > 0$ tal que para cada $j \in \{1, 2\}$, $g \in L^2(Q)^3$, $g_0 \in L^2(Q)$, $\varphi^T \in H$ e $\psi^T \in L^2(\Omega)$ a solução $(\varphi, \psi)$ de (3) satisfaz para $s \geq s_0$*

$$s^4 \iint_Q e^{-5s\beta^*}(\gamma^*)^4|\varphi|^2 dxdt + s^5 \iint_Q e^{-5s\beta^*}(\gamma^*)^5|\psi|^2 dxdt \leq C \left( \iint_Q e^{-3s\beta^*}(|g|^2 + |g_0|^2)dxdt \right. \tag{4}$$
$$\left. + s^7 \int_0^T \int_\omega e^{-2s\hat{\beta}-3s\beta^*}(\hat{\gamma})^7|\varphi_j|^2 dxdt + s^{12} \int_0^T \int_\omega e^{-4s\hat{\beta}-s\beta^*}(\hat{\gamma})^{\frac{49}{4}}|\psi|^2 dxdt \right).$$

**Prova** Ver [1].

## 2 Resultados Principais

Denotemos

$$\begin{cases} \tilde{\rho} = e^{\frac{3}{2}s\beta^*} \ , \ \tilde{\eta} = e^{s\hat{\beta}+\frac{3}{2}s\beta^*}\hat{\gamma}^{-\frac{7}{2}} \ , \ \tilde{\sigma} = e^{\frac{5}{2}s\beta^*}(\gamma^*)^{-2} \ , \ \zeta = \hat{\rho}\ l^{12}, \\ \hat{\rho} = e^{\frac{3}{2}s\hat{\beta}} \ , \ \ \hat{\eta} = e^{2s\hat{\beta}+\frac{1}{2}s\beta^*}\hat{\gamma}^{-\frac{49}{8}} \ , \ \hat{\sigma} = e^{\frac{5}{2}s\beta^*}(\gamma^*)^{-\frac{5}{2}} \ , \ \ \kappa = \hat{\rho}\ l^{\frac{33}{2}}. \end{cases}$$

**Proposição 2.1.** *Para $N \in \{2, 3\}$ com $j \neq N$, sejam $y_0 \in V$, $\theta_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\tilde{\sigma} f \in L^2(Q)^N$, $\hat{\sigma} f_0 \in L^2(Q)$. Então existem controles $v \in L^2(\omega \times (0, T))^N$, $v_0 \in L^2(\omega \times (0, T))$ tal que o estado associado $(y, p, \theta)$ de (2) satisfaz $v_j \equiv v_N \equiv 0$, com $\tilde{\rho}y$, $\tilde{\eta}v1_\omega \in L^2(Q)^N$, $\tilde{\rho}\theta$, $\hat{\eta}v_0 1_\omega \in L^2(Q)$.*
*Em particular $y(T) = 0$ e $\theta(T) = 0$.*

**Prova** Utiliza-se o lema 1.1.

**Teorema 2.1** (**Teorema Principal**)**.** *Sejam $i < N$ um inteiro positivo e $T > 0$ então o sistema (1) é localmente nulo controlável no tempo $T$ com $N - 1$ controles escalares, isto é, dado $\omega \subset\subset \Omega$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $(y_0, \theta_0) \in V \times H_0^1(\Omega)$ satisfazendo $\|(y_0, \theta_0)\|_{V \times H_0^1(\Omega)} < \delta$ podemos encontrar controles $v \in L^2(\omega \times (0, T))^N$ e $v_0 \in L^2(\omega \times (0, T))$, com $v_i \equiv 0$ e $v_N \equiv 0$, tal que o estado associado $(y, \theta)$ de (1) satisfaz*

$$y(T) = 0 \quad e \quad \theta(T) = 0 \quad em \quad \Omega. \tag{1}$$

**Observação 7.** *Quando $N = 2$, somente é necessário o controle da equação da temperatura.*

## References


[1] NICOLÁS CARREÑO - Local controllability of the N-dimensional Boussinesq system with N-1 scalar controls in an arbitrary control domain. *Mathematical Control and Related Fields (MCRF)*, 2012.

[2] E. FERNÁNDEZ CARA, J. LÍMACO AND S. B. DE MENEZES - Theoretical and numerical local null controllability of a Ladyzhensakaya-Smagorinsky model of turbulence. *Journal of Mathematical Fluids Mechanics*, **99**, 1-37, 2015.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *121–122*

# HIERARQUIC CONTROL FOR NONLINEAR PARABOLIC SYSTEMS WITH TEMPERATURE DEPEND OF OTHER PARAMETERS

JUAN LíMACO FERREL[1,†], DANY NINA HUAMAN[1,‡] & MIGUEL NUÑEZ CHÁVEZ[1,§]

[1]Instituto de Matemática e Estatística, UFF, RJ, Brasil

[†]jlimaco@vm.uff.br, [‡]dany_3003@hotmail.com, [§]miguelnunez9813@gmail.com

**Abstract**

This paper deals with the application of Stackelberg-Nash strategies to the control of parabolic equations. The main result in this paper is that we can obtain null controllability with temperature depending others parameters.

## 1 Introduction

Let $I \subset \mathbb{R}$ be a open bounded interval. Let $T > 0$ be given and let us consider the cylinder $Q = I \times (0,T)$, with lateral boundary $\Sigma = \partial I \times (0,T)$. The usual norm and scalar product in $L^2(I)$ will be respectively denoted by $\|\cdot\|$ and $(\cdot,\cdot)$. We are interested in the proof of the null controllability of a multi-objective parabolic PDE problem in $Q$, where we apply the Stackelberg-Nash strategy; we will assume that only two controls are applied (one leader and only one follower).
We will consider the follows systems

$$\left\{\begin{array}{l} y_t - (a(y)y_x)_x + F(y) = f1_{\mathcal{O}} + v1_\omega \text{ in } Q, \\ y = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma, \\ y(0) = y^0 \quad \text{in} \quad \Omega, \end{array}\right. \tag{1}$$

In system (1), $y$ is the state, the set $\mathcal{O} \subset I$ is the main control domain and $\omega \subset I$ is the secondary control domain (is supposed to be small); $1_{\mathcal{O}}$ and $1_\omega$ are the characteristic functions of $\mathcal{O}$ and $\omega$, respectively; the controls are $f$, $v$, where $f$ is the leader and $v$ is the follower. The function $a \in C^2(\mathbb{R})$ with $a''$ globally Lipschitz, there exists positive constants $a_0, a_1$ such that $a_0 \le a(s) \le a_1, \ \ \forall s \in \mathbb{R}$, exist a positive constant $M$ such that $\sup\limits_{s\in\mathbb{R}}\{|a'(s)|, |a''(s)|\} \le M$, $a'(0) = 0$ and the function $F \in C_b^2(\mathbb{R})$.
Let $\omega_d \subset I$ be open set, representing observation domain for the follower. We will consider the functional for (1)

$$J(f;v) := \frac{\alpha}{2}\iint_{\omega_d\times(0,T)} |y - y_d|^2 dxdt + \frac{\mu}{2}\iint_{\omega\times(0,T)} |v|^2 dxdt, \tag{2}$$

where $\alpha, \mu > 0$ are constants and $y_d \in L^2(\omega_d \times (0,T))$ is given function.
The control process can be described as follows:
**1.** The follower $v$ assume that the leader $f$ has made a choice and intend to be a Nash equilibrium for the costs $J$. Thus, once $f$ has been fixed, we look for a control $v \in L^2(\omega \times (0,T))$ that satisfy

$$J(f;v) = \min_{\hat{v}} J(f;\hat{v}), \tag{3}$$

**Definition 1.1.** *Any function $v$ satisfying (3) is called a Nash equilibrium for $J$ of (1).*

Note that, if the functional $J$ is convex, then $v$ is a Nash equilibrium of (1) if and only if

$$J'(f;v)(\hat{v}) = 0, \quad \forall \hat{v} \in L^2(\omega\times(0,T)), \quad v \in L^2(\omega\times(0,T)) \tag{4}$$

**Definition 1.2.** *Any function $v$ satisfying (4) is called a Nash quasi-equilibrium for $J$ of (1).*

**2.** Once the Nash equilibrium has been identified and fixed for each $f$, we look for a control $\hat{f} \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$ such that

$$J(\hat{f}) = \min_{f} J(f), \tag{5}$$

subject to the restriction of exact controllability

$$y(T) = 0. \tag{6}$$

### 1.1 The main results

Let us study the following problems

**Theorem 1.1.** *Let us assume that $\omega_d \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ and the $\mu > 0$ is sufficiently large. There exists $\epsilon > 0$ and a positive function $\hat{\rho} = \hat{\rho}(t)$ blowing up at $t = T$ with the following property: if $y_d$ is such that*

$$\iint_{\omega_d \times (0,T)} \hat{\rho}^2 |y_d|^2 dxdt < \epsilon, \tag{7}$$

*then, there exist $\epsilon > 0$ such that for any $y^0 \in H_0^1(I)$ with $\|y_0\|_{H_0^1(I)} < \epsilon$, there exist a control $f \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$ and associated Nash quasi-equilibrium $v$ such that the corresponding solutions to (1) satisfy (6).*

A natural question is whether there are semilinear systems for which the concepts of Nash equilibrium and Nash quasi-equilibrium are equivalent. An answer is given by the following result:

**Theorem 1.2.** *Let us assume that $y_d \in L^\infty(\omega_d \times (0,T))$. Suppose that $y^0 \in H_0^1(I)$ sufficiently small. Then, there exists $C > 0$ such that, if $f \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$ and the $\mu$ satisfy*

$$\mu \geq C(1 + \|y^0\|_{H_0^1(I)} + \|f\|_{L^2(\mathcal{O} \times (0,T))}),$$

*the functional $J$ is convex. Thus the function $v$ is a Nash equilibrium for $J$ of (1).*

## References


[1] F. D. Araruna, E. Fernández-Cara and M. C. Santos - *Stackelberg-Nash Controllability for linear and semilinear parabolic equations*, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 21 (2015), 835-856.

[2] O.Y. Imanuvilov and M. Yamamoto - *Carleman inequalities for parabolic equations in Sobolev spaces of negative order and exact controllability for semilinear parabolic equations*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 39 (2003), 227-274.

[3] A. V. Fursikov and O. Y. Imanuvilov - *Controllability of Evolution Equations*, Lecture Note Series. Research Institute of Mathematics. Seoul National University, (1996).

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *123–124*

# COMPLETUDE DAS ÁLGEBRAS DE DALES-DAVIE

VINÍCIUS C. C. MIRANDA[1,†] & MARY LILIAN LOURENÇO[2,‡]

[1]IME, USP, SP, Brasil - Bolsa FAPESP, [2]IME, USP, SP, Brasil

[†]colferai@ime.usp.br, [‡]mllouren@ime.usp.br

**Abstract**

Sejam $X$ um subconjunto compacto e perfeito de $\mathbb{C}$ e $M = (M_n)$ uma sequência de números reais positivos tais que $M_0 = 1$ e $(M_n/(M_k M_{n-k})) \geq \binom{n}{k}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $k = 0, 1, ..., n$. Consideremos a álgebra das funções infinitamente diferencívеis $f : X \to \mathbb{C}$ que satisfazem $\sum_{n=0}^{\infty} \|f^{(n)}\|_X / M_n < \infty$. Essas álgebras de funções foram definidas por Dales e Davis em [3] e denominadas de Álgebras de Dales-Davie por Abtahi e Honary em [2]. Nesse trabalho, reuni-se os resultados conhecidos a respeito da completude de tais álgebra, encontrados em [2, 3, 3].

## 1 Introdução

Sejam $X$ um subconjunto compacto e perfeito de $\mathbb{C}$. O conjunto das funções $f : X \to \mathbb{C}$ com $n$-ésima derivada contínua em $X$ é denotado por $D^n(X)$. O conjunto das funções $f : X \to \mathbb{C}$ infinitamente diferenciáveis em $X$ é denotado por $D^\infty(X)$.

**Definição 1.1.** *Uma sequência $M = (M_n)$ é dita uma sequência algébrica se*

$$M_0 = 1 \quad e \quad \frac{M_n}{M_k M_{n-k}} \geq \binom{n}{k}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall k = 0, 1, ..., n. \tag{1}$$

Dales e Davie, em [3], construiram as álgebras de funções definidas por

$$D(X, M) = \left\{ f \in D^\infty(X) : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{M_n} \|f^{(n)}\|_X < \infty \right\}. \tag{2}$$

Essas álgebras são normadas com a norma $\|f\| = \sum_{n=0}^{\infty} \|f^{(n)}\|_X / M_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $\|f\| = \sum_{n=0}^{n} \|f^{(n)}\|_X / n!$ como a norma em $D^n(X)$.

**Exemplo 1.1.** *Fixe $\alpha \in (0, 1]$. Defina $M = (M_n)$ por $M_0 = 1$ e $M_n = \alpha\, n!, \forall n \in \mathbb{N}$. Em particular, $M$ é uma sequência algébrica.*
*Se $\alpha > 1$, a sequência $M = (M_n)$, definida por $M_0 = 1$ e $M_n = \alpha\, n!, \forall n \in \mathbb{N}$, não é algébrica.*

Em [1], Abtahi e Honary as denominaram por Álgebras de Dales-Davie.
De modo geral, essas álgebras não são de Banach. Em [3], Dales e Davie encontram uma classe de conjuntos compactos e perfeitos em que $D(X, M)$ é Banach. Tais conjuntos são denominados de regulares.

**Definição 1.2.** *Um subconjunto compacto e perfeito de $\mathbb{C}$ é dito regular se, para cada $z_0 \in X$, existir $C_0 > 0$ tal que, para todo $z \in X$, $\delta(z, z_0) \leq C_0 |z - z_0|$, onde $\delta$ é a métrica geodésica.*

## 2 Resultados Principais

O teorema a seguir, provado em [1, 2], reduz o estudo da completude em $D(X, M)$ para as álgebras $D^1(X)$.

**Teorema 2.1.** *Sejam $X$ um subconjunto compacto e perfeito de $\mathbb{C}$ e $M = (M_n)$ uma sequência algébrica. Se $D^1(X)$ for Banach, então $D(X, M)$ também o é.*

**Prova:** Baseia-se na demonstração do Teorema 2.2 de [2].
O teorema a seguir apresenta uma condição necessária e suficiente para a completude em $D^1(X)$.

**Teorema 2.2.** *Sejam $X$ um subconjunto compacto e perfeito de $\mathbb{C}$ e $M = (M_n)$ uma sequência algébrica. Para que $D^1(X)$ seja Banach é necessário e suficiente que para todo $z_0 \in X$, exista $C_0 > 0$ tal que*

$$|f(z) - f(z_0)| \leq C_0|z - z_0| \left(\|f\|_X + \|f'\|_X\right), \tag{1}$$

*para todos $f \in D^1(X), z \in X$.*

**Prova:** Para verificar a condição necessária, valemo-nos da demonstração do Teorema 1.6 em [2]. A suficiência está feita em [3], após a Definição 3.

O teorema a seguir exibe uma condição sobre $X$ que faz com que $D^1(X)$ seja Banach e, portanto, $D(X, M)$.

**Teorema 2.3.** *Sejam $X$ um conjunto regular e $M = (M_n)$ uma sequência algébrica. Então, $D(X, M)$ é Banach.*

**Prova:** Em [3], prova-se que $X$ é regular, então $D^1(X)$ satisfaz (2.1). Donde, pelos Teoremas 2.2 e 2.1, a tese.

O teorema a seguir fornece exemplos de que $D(X, M)$ não é ncessariamente Banach.

**Teorema 2.4.** *Sejam $X \subset \mathbb{C}$ um conjunto compacto e perfeito com uma quantidade infinita de componentes conexas e $M = (M_n)$ uma sequência algébrica. Então, $D(X, M)$ não é Banach.*

**Prova:** Teorema 2.3 de [2].

**Observação 8.** *Se $X \subset \mathbb{C}$ for um conjunto compacto e perfeito com uma quantidade infinita de componentes conexas, então $X$ não pode ser regular.*

**Exemplo 2.1.** *O conjunto*

$$X = \left\{ x + yi \in \mathbb{C} \,|\, \left( x = 0 \ \ ou \ \ \frac{1}{x} \in \mathbb{N} \right) \ \ e \ y \in [0, 1] \right\}$$

*é compacto, perfeito e possui quantidade enumerável de componentes conexas.*

## References


[1] ABTAHI, M. AND HONARY, T. G. - On the maximal ideal space of Dales-Davie algebras of infinitely differentiable functions. *Bull. London Math. Soc.*, **39**, 940-948, 2007.

[2] BLAND, W. J. AND FEINSTEIN, J. F. - Completions of normed algebras of differentiable functions. *Studia Math.*, **170**, 89-111, 2005.

[3] DALES, H. G. AND DAVIE, A. M. - Quasianalytic Banach function algebras. *J. Funct. Anal.*, **13**, 28-50, 1973.

[4] HONARY, T. G. AND MAHYAR, H. - Approximation in Lipschitz algebras of infinitely differentiable functions. *Bull. Korean Math. Soc.*, **36**, 629-636, 1999.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *125–126*

# UMA VERSÃO GENERALIZADA DO TEOREMA DE EXTRAPOLAÇÃO PARA OPERADORES NÃO-LINEARES ABSOLUTAMENTE SOMANTES

LISIANE R. SANTOS[1,†]

[1]Departamento de Matemática, UFPB, PB, Brasil

[†]lirezendestos@gmail.com

**Abstract**

Neste trabalho, dissertamos sobre uma recente versão geral do Teorema de Extrapolação, obtida por Botelho, Pellegrino, Santos e Seoane-Sepúlveda [2], que melhora e unifica vários teoremas do tipo Extrapolação para certas classes de funções que generalizam o ideal dos operadores lineares absolutamente $p$-somantes.

## 1 Introdução

Este é um trabalho de mestrado orientado pelo Prof. Joedson Santos da Universidade Federal da Paraíba.

Sejam $X, Y$ espaços de Banach, $0 < p < \infty$. Denotaremos por $\Pi_p(X;Y)$ o espaço de todos os operadores lineares absolutamente $p$-somantes de $X$ em $Y$. É sabido que quando $p < r$, então $\Pi_p(X;Y) \subseteq \Pi_r(X;Y)$. Um dos problemas interessantes dessa teoria é determinar quando ocorre a coincidência entre essas classes de operadores. Dois resultados importantes nessa linha, chamados de Teorema de Extrapolação, são devidos a Maurey [1, Corollary 91] e Pisier [5, Theorem 5.13] que juntos geram o seguinte resultado:

**Teorema 1.1** (Teorema de Extrapolação)**.** *Sejam $1 < r < q < \infty$ e $X$ um espaço de Banach. Se*

$$\Pi_q(X;\ell_q) = \Pi_r(X;\ell_q),$$

*então*

$$\Pi_q(X;Y) = \Pi_l(X;Y)$$

*para todo espaço de Banach $Y$ e todo $0 < l < q$.*

## 2 Resultado Principal

O resultado principal de [2] é uma generalização não-linear do Teorema 1.1. Para isso, vamos considerar $X_1, ..., X_n, Y$ e $E_1, ..., E_r$ conjuntos (arbitrários) não vazios, $\mathcal{H}$ uma família de aplicações de $X_1 \times \cdots \times X_n$ em $Y$, $K_1, ..., K_t$ espaços topológicos de Hausdorff compactos, $G_1, ..., G_t$ espaços de Banach e também considere as seguintes aplicações arbitrárias:

$$\begin{cases} R_j\colon K_j \times E_1 \times \cdots \times E_r \times G_j \longrightarrow [0,\infty),\ j = 1, ..., t \\ S\colon \mathcal{H} \times E_1 \times \cdots \times E_r \times G_1 \times \cdots \times G_t \longrightarrow [0,\infty). \end{cases}$$

**Definição 2.1.** *Seja $0 < p_1, ..., p_t, p < \infty$, com $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_t}$. Uma aplicação $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ em $\mathcal{H}$ é dita $R_1, ..., R_t$-$S$-abstrata $(p_1, ..., p_t)$-somante se existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{m} S(f, x_j^{(1)}, ..., x_j^{(r)}, b_j^{(1)}, ..., b_j^{(t)})^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{k=1}^{t} \sup_{\varphi \in K_k} \left(\sum_{j=1}^{m} R_k\left(\varphi, x_j^{(1)}, ..., x_j^{(r)}, b_j^{(k)}\right)^{p_k}\right)^{\frac{1}{p_k}} \tag{1}$$

*para todos $x_1^{(s)}, \ldots, x_m^{(s)} \in E_s$, $b_1^{(l)}, \ldots, b_m^{(l)} \in G_l$, $m \in \mathbb{N}$ e $(s, l) \in \{1, ..., r\} \times \{1, ..., t\}$.*

Escrevemos $\mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_t-S,(p_1,\ldots,p_t)}(X_1,\ldots,X_n;Y)$ para denotar o conjunto dessas aplicações $R_1, ..., R_t$-$S$-abstrata $(p_1, ..., p_t)$-somantes. Quando $p_1 = \cdots = p_n = q$ escrevemos simplesmente $\mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_t-S,q}\left(X_1,\ldots,X_n;Y\right)$.

Agora vamos supor a seguinte condição:

(C1) Seja $1 < p < q < \infty$. Se

$$\mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_t-S,q}(X_1,\ldots,X_n;\ell_q) = \mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_t-S,p}(X_1,\ldots,X_n;\ell_q),$$

então para cada $j \in \{1,\ldots,t\}$ existe uma constante $C_j > 0$ tal que para cada medida $\mu^{(j)} \in \mathcal{P}(K_j)$ existe uma medida correspondente $\hat{\mu}^{(j)} \in \mathcal{P}(K_j)$ tal que

$$\left\| R_j\left(\cdot, x^{(1)},\ldots,x^{(r)},b^{(j)}\right)\right\|_{L_q(K_j,\mu^{(j)})} \leq C_j \left\| R_j\left(\cdot, x^{(1)},\ldots,x^{(r)},b^{(j)}\right)\right\|_{L_p(K_j,\hat{\mu}^{(j)})}$$

para todo $\left(x^{(1)},\ldots,x^{(r)},b^{(j)}\right) \in E_1 \times \cdots \times E_r \times G_j$.

Com isso somos capazes de provar o seguinte teorema:

**Teorema 2.1.** *Seja $1 < p < q < \infty$. Se (C1) é válida e*

$$\mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_t-S,q}(X_1,\ldots,X_n;\ell_q) = \mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_t-S,p}(X_1,\ldots,X_n;\ell_q),$$

*então*

$$\mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_t-S,q}(X_1,\ldots,X_n;Y) = \mathcal{H}_{R_1,\ldots,R_t-S,l}(X_1,\ldots,X_n;Y),$$

*para todo espaço de Banach $Y$ e todo $0 < l < q$.*

**Observação 9.** *O Teorema 2.1:*

– *recupera o Teorema 1.1;*

– *estende o teorema de extrapolação não-linear provado em [4, Toerema 3.1] para o intervalo $0 < p < 1$;*

– *melhora os teoremas de extrapolação para polinômios e aplicações multilineares dominadas de [3, Teoremas 4.1 e 4.2].*

## References


[1] MAUREY, B. - Théoremès de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans les espaces $L_p$. *Soc. Math. France, Astérisque*, **11**, Paris, 1974.

[2] BOTELHO, G., PELLEGRINO, D., SANTOS, J. AND SEOANE-SEPÚLVEDA, J. - Abstract extrapolation theorems for absolutely summing nonlinear operators. *J. Math. Anal. Appl.*, **421**, 730-746, 2015.

[3] PELLEGRINO, D. - Cotype and nonlinear absolutely summing mappings. *Math. Proc. Roy. Irish Acad.*, **105A**, 75–91, 2005.

[4] PELLEGRINO, D., SANTOS, J. AND SEOANE-SEPÚLVEDA J. - A general extrapolation theorem for absolutely summing operators. *Bull. Lond. Math. Soc.* , **44**, 480–488, 2012.

[5] PISIER, G. - *Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces*, CBMS Reg. Conf. Ser. Math., vol. 60, Amer. Math. Soc., 1986.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *127–128*

# A ENVOLTÓRIA REGULAR DE UM MULTI-IDEAL

ALUÍZIO A. SILVA[1,†] & GERALDO BOTELHO[1,‡]

[1]Faculdade de Matemática, UFU, MG, Brasil

[†]aluizio1642@gmail.com, [‡]botelho@ufu.br

**Abstract**

O objetivo deste trabalho é estender o conceito de envoltória regular de um ideal de operadores para o caso de ideais de operadores multilineares (multi-ideais).

## 1 Introdução

Desde o trabalho de A. Pietsch [1], ideais de operadores multilineares, ou multi-ideais, entre espaços de Banach têm sido estudados como uma consequência natural da bem sucedida teoria de ideais de operadores. Muitos multi-ideais têm sido investigados e métodos abstratos de gerar ideais de operadores multilineares têm sido introduzidos.

No caso linear, o conceito de procedimento foi introduzido por Pietsch [1]. Dado um ideal de operadores $\mathcal{I}$, define-se um novo ideal $\mathcal{I}^{new}$ que tem propriedades que $\mathcal{I}$ pode não ter. Um desses procedimentos é a *envoltória regular* $\mathcal{I}^{reg}$ de um ideal $\mathcal{I}$ (veja, [1, 4.5]). Neste trabalho estendemos o conceito de envoltória regular para multi-ideais.

**Definição 1.1.** Seja $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ um ideal normado (Banach) de operadores multilineares (ou multi-ideal normado (Banach). Dado $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$, isto é, $A$ pertencente ao espaço de todos os operadores multilineares contínuos de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em $F$, dizemos que $A \in \mathcal{M}^{reg}(E_1, \ldots, E_n; F)$ se $J_F \circ A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F'')$ para todos $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n$ e $F$ espaços de Banach, onde $J_F$ é o mergulho canônico de $F$ em $F''$. Neste caso definimos $\|A\|_{\mathcal{M}^{reg}} = \|J_F \circ A\|_{\mathcal{M}}$ para todo $A \in \mathcal{M}^{reg}$.

## 2 Resultados Principais

**Teorema 2.1.** *Seja $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ um multi-ideal normado (Banach).*
*(a) $(\mathcal{M}^{reg}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}^{reg}})$ é multi-ideal normado (Banach).*
*(b) $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}}) \subset (\mathcal{M}^{reg}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}^{reg}})$, isto é, $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^{reg}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^{reg}} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{M}}$.*
*(c) $(\mathcal{M}^{reg})^{reg} = \mathcal{M}^{reg}$ isometricamente.*

O resultado acima nos permite chamar $\mathcal{M}^{reg}$ de *envoltória regular de* $\mathcal{M}$. Da mesma forma que no caso linear, dizemos que $\mathcal{M}$ é *regular* se $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{reg}$ isometricamente.

**Prova:** (a) Cálculos rotineiros mostram que $(\mathcal{M}^{reg}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}^{reg}})$ é multi-ideal normado. Para a completude, sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n$, $F$ espaços de Banach e $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}^{reg}(E_1, \ldots, E_n; F)$ uma sequência satisfazendo $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|A_j\|_{\mathcal{M}^{reg}} < +\infty$. Por definição, temos $(J_F \circ A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F'')$ e $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|J_F \circ A_j\|_{\mathcal{M}} < +\infty$, logo a série $\sum\limits_{j=1}^{\infty} J_F \circ A_j$ é convergente em $\mathcal{M}$, digamos $\sum\limits_{k=1}^{j} J_F \circ A_k \xrightarrow{j} A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F'')$. Veja que $A_j(E_1 \times \cdots \times E_n) \subset F$, e daí $(J_F \circ A_j)(E_1 \times \cdots \times E_n) = J_F(A_j(E_1 \times \cdots \times E_n)) \subset J_F(F)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $J_F(F)$ é Banach, podemos definir $A' : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow J_F(F)$ dada por $A'(x_1, \ldots, x_n) = A(x_1, \ldots, x_n)$ para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, obtendo $A' \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; J_F(F))$; e considerar o operador $J_F^{-1} \circ A' \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Além disso, pela maneira com que definimos $A'$ temos $A = J_F \circ J_F^{-1} \circ A' \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F'')$ e, daí, $J_F^{-1} \circ A' \in \mathcal{M}^{reg}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Ainda,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{j} A_k - J_F^{-1} \circ A' \right\|_{\mathcal{M}^{reg}} &= \left\| J_F \circ \left( \sum_{k=1}^{j} A_k - J_F^{-1} \circ A' \right) \right\|_{\mathcal{M}} \\
&= \left\| J_F \circ \left( \sum_{k=1}^{j} A_k \right) - J_F \circ (J_F^{-1} \circ A') \right\|_{\mathcal{M}} \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{j} J_F \circ A_k - A \right\|_{\mathcal{M}} \xrightarrow{j} 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} A_j = \lim\limits_{j \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{j} A_k = J_F^{-1} \circ A' \in \mathcal{M}^{reg}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e, com isso, $(\mathcal{M}^{reg}(E_1, \ldots, E_n; F), \| \cdot \|_{\mathcal{M}^{reg}})$ é espaço normado completo. Sem mais, se $(\mathcal{M}, \| \cdot \|_{\mathcal{M}})$ é Banach, então $(\mathcal{M}^{reg}, \| \cdot \|_{\mathcal{M}^{reg}})$ também é.

(b) Vamos provar que $\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F) \subset \mathcal{M}^{reg}(E_1, \ldots, E_n; F)$ para todos $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n$ e $F$ espaços de Banach. Seja $A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Então $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e, pela propriedade de ideal de $\mathcal{M}$, $J_F \circ A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F'')$, logo $A \in \mathcal{M}^{reg}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e, consequentemente, $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^{reg}$. Para a desigualdade das normas,

$$\|A\|_{\mathcal{M}^{reg}} = \|J_F \circ A\|_{\mathcal{M}} \leq \|J_F\| \cdot \|A\|_{\mathcal{M}} = \|A\|_{\mathcal{M}},$$

portanto, $\| \cdot \|_{\mathcal{M}^{reg}} \leq \| \cdot \|_{\mathcal{M}}$.

(c) Pelo item (b), $\mathcal{M}^{reg} \subset (\mathcal{M}^{reg})^{reg}$ e $\| \cdot \|_{(\mathcal{M}^{reg})^{reg}} \leq \| \cdot \|_{\mathcal{M}^{reg}}$. Seja $A \in (\mathcal{M}^{reg})^{reg}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Então $J_F \circ A \in \mathcal{M}^{reg}(E_1, \ldots, E_n; F'')$ e, daí, $J_{F''} \circ J_F \circ A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F^{(iv)})$. Note que

$$J_F \circ A = id_{F''} \circ J_F \circ A = (J_{F'})' \circ J_{F''} \circ J_F \circ A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F''),$$

pela propriedade de ideal de $\mathcal{M}$ e por $(J_{F'})' \circ J_{F''} = id_{F''}$, sendo $id_{F''}$ a identidade de $F''$ e $(J_{F'})'$ o adjunto de $J_{F'}$. Portanto, $A \in \mathcal{M}^{reg}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e, daí, $(\mathcal{M}^{reg})^{reg} \subset \mathcal{M}^{reg}$. E ainda,

$$\begin{aligned}
\|A\|_{\mathcal{M}^{reg}} &= \|J_F \circ A\|_{\mathcal{M}} = \|(J_{F'})' \circ J_{F''} \circ J_F \circ A\|_{\mathcal{M}} \\
&\leq \|(J_{F'})'\| \cdot \|J_{F''} \circ J_F \circ A\|_{\mathcal{M}} = \|J_{F''} \circ J_F \circ A\|_{\mathcal{M}} \\
&= \|J_F \circ A\|_{\mathcal{M}^{reg}} = \|A\|_{(\mathcal{M}^{reg})^{reg}}.
\end{aligned}$$

Com isso, $\| \cdot \|_{\mathcal{M}^{reg}} \leq \| \cdot \|_{(\mathcal{M}^{reg})^{reg}}$ e temos as igualdades dos multi-ideais e das normas. ■

## References

[1] PIETSCH, A. - *Operator Ideals*, North-Holland, 1980.

[2] PIETSCH, A. - Ideals of multilinear functionals (designs of a theory), in *Proceedings of the second international conference on operator algebras, ideals, and their applications in theoretical physics*, 185-199, Teubner, Leipzig, 1983.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *129–130*

# IDEAIS INJETIVOS DE POLINÔMIOS E A PROPRIEDADE DA DOMINAÇÃO

LEODAN TORRES[1,†] & GERALDO BOTELHO[2,‡]

[1]IMECC, UNICAMP, SP, Brasil, [2]FAMAT, UFU, MG, Brasil

[†]leodan.ac.t@gmail.com, [‡]botelho@ufu.br

**Abstract**

Neste trabalho estudamos ideais de polinômios homogêneos entre espaços de Banach, em especial de forma análoga ao caso linear estudamos ideais injetivos de polinômios homogêneos. O objetivo é provar que um ideal de polinômios é injetivo se e somente tem a propriedade da dominação polinomial.

## 1 Introdução

Introduzimos primeiramente a notação usual para ideais de polinômios homogêneos que pode ser encontrada em [1, 3], definimos ideais injetivos e introduzimos a definição da propriedade da dominação para o caso polinomial.

**Definição 1.1.** Um *ideal de polinômios* $\mathcal{Q}$ é uma subclasse da classe $\mathcal{P}$ de todos os polinômios homogêneos contínuos entre espaços de Banach tal que, para todo $m \in \mathbb{N}$ e quaisquer espaços de Banach $E$ e $F$, as componentes

$$\mathcal{Q}(^mE;F) := \mathcal{P}(^mE;F) \cap \mathcal{Q}$$

satisfazem:

(1) $\mathcal{Q}(^mE;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^mE;F)$ que contém os polinômios $m$-homogêneos de tipo finito;

(2) Propriedade de ideal: se $u \in \mathcal{L}(E;F)$, $P \in \mathcal{Q}(^mF;G)$ e $t \in \mathcal{L}(G;H)$, então $t \circ P \circ u \in \mathcal{Q}(^mE;H)$.

Se existe uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} \colon \mathcal{Q} \longrightarrow [0,+\infty)$ tal que

($a$) $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$ restrita a $\mathcal{Q}(^mE;F)$ é uma norma para quaisquer espaços de Banach $E$ e $F$;

($b$) $\|id_{\mathbb{K}}^m : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} : id_{\mathbb{K}}^m(\lambda) = \lambda^m\|_{\mathcal{Q}} = 1$;

($c$) Se $u \in \mathcal{L}(E;F)$, $P \in \mathcal{Q}(^mF;G)$ e $t \in \mathcal{L}(G;H)$, então $\|t \circ P \circ u\|_{\mathcal{Q}} \leq \|t\| \cdot \|P\|_{\mathcal{Q}} \cdot \|u\|^m$,

então $\mathcal{Q}$ é chamado de *ideal normado de polinômios.*

Analogamente ao trabalho feito por Pietsch em [4], introduzimos a seguinte definição:

**Definição 1.2.** Um ideal de polinômios $\mathcal{Q}$ é *injetivo* se dados um polinômio $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$ e uma *injeção métrica* $j \colon F \hookrightarrow G$ tais que $(j \circ P) \in \mathcal{Q}(^mE;G)$, tem-se $P \in \mathcal{Q}(^mE;F)$. Um ideal $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ normado é injetivo se ademais $\|P\|_{\mathcal{Q}} = \|j \circ P\|_{\mathcal{Q}}$.

Como consequência da definição acima, obtemos os seguintes resultados:

**Proposição 1.1.** *Seja $(\mathcal{Q}, \|.\|_{\mathcal{Q}})$ um ideal de polinômios normado. Então existe um único menor ideal de polinômios injetivo $\mathcal{Q}^{inj}$ que contém $\mathcal{Q}$. Se $I_F$ denota a injeção canônica $F \hookrightarrow \ell_\infty(B_{F'})$, então se $P \in \mathcal{P}(^mE,F)$,*

$$P \in \mathcal{Q}^{inj}(^mE,F) \text{ se, e somente se, } I_F \circ P \in \mathcal{Q}.$$

*Com $\|P\|_{\mathcal{Q}^{inj}} := \|I_F \circ P\|_{\mathcal{Q}}$, $(\mathcal{Q}^{inj}, \|.\|_{\mathcal{Q}^{inj}})$ é um ideal de polinômios normado que é Banach se $(\mathcal{Q}, \|.\|_{\mathcal{Q}})$ é Banach. $(\mathcal{Q}^{inj}, \|.\|_{\mathcal{Q}^{inj}})$ é chamado de envoltória injetiva de $(\mathcal{Q}, \|.\|_{\mathcal{Q}})$.*

**Proposição 1.2.** *Um ideal de polinômios $\mathcal{Q}$ é injetivo se, e somente se, $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{inj}$.*

## 2 Resultados Principais

Em [2] Lemma 3.1, é provado que um ideal de operadores lineares $\mathcal{I}$ é injetivo se, e somente se, satisfaz a seguinte propriedade de dominação:

Dados $u \in \mathcal{I}(E;F)$, $v \in \mathcal{L}(E;G)$ tais que

$$\|v(x)\| \leq C\|u(x)\|$$

para todo $x \in E$ e alguma constante $C$ (dependendo eventualmente de $E$, $F$, $G$, $u$, $v$), então $v \in \mathcal{I}(E;G)$.

O objetivo principal deste trabalho é mostrar um resultado análogo para ideais injetivos de polinômios. Para isso precisamos de uma propriedade de dominação que funcione no caso polinomial:

**Definição 2.1.** *Seja $\mathcal{Q}$ um ideal de polinômios. Dizemos que $\mathcal{Q}$ tem a propriedade da dominação polinomial se: Dados $p \in \mathcal{Q}(^mE;F)$, $q \in \mathcal{P}(^mE;G)$ tais que*

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} \lambda_i q(x_i)\right\| \leq C \cdot \left\|\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p(x_i)\right\|$$

*para todos $k \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_k \in E$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ e alguma constante $C$ (dependendo eventualmente de $E$, $F$, $G$, $p$, $q$, $m$), então $q \in \mathcal{Q}(^mE;G)$.*

**Teorema 2.1.** *Um ideal de polinômios $\mathcal{Q}$ é injetivo se, e somente se, $\mathcal{Q}$ tem a propriedade da dominação polinomial.*

## References

[1] BOTELHO, G. - Ideals of polynomials generated by weakly compact operators. *Note Mat.*, **25**, 69-102, 2005.

[2] BOTELHO, G., CAMPOS, J. AND SANTOS, J. - Operator ideals related to absolutely summing and cohen strongly summing operators. *Pacific J. Math.*, **287**, 1-17, 2017.

[3] BOTELHO, G., PELLEGRINO, D., RUEDA, P. - On composition ideals of multilinear mappings and homogeneous polynomials. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*,**43**, 1139-1155, 2007.

[4] DEFANT, A., FLORET, K. - *Tensor Norms and Operator Ideals*, North-Holland Math. Stud. 176, North-Holland, 1993.

[5] PIETSCH, A. - *Operator Ideals*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1980.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *131–132*

# PRESERVAÇÃO DE COMPACIDADE POR CONTINUIDADE GENERALIZADA

MARCELO G. O. VIEIRA[1,†]

[1]Faculdade de Ciências Integradas do Pontal, UFU, MG, Brasil

[†]mgov@ufu.br

**Abstract**

Este trabalho tem por objetivo verificar que compacidade se preserva, de modo apropriado, mediante funções contínuas em um sentido generalizado proposto por Vieira em [2]. Em outras palavras, dados espaços métricos $(Y, d_Y)$ e $(Z, d_Z)$ e um conjunto qualquer $X$ não-vazio, verifica-se que se uma função $f\colon X \to Y$ é continua no sentido generalizado, com respeito a uma aplicação $g\colon X \to Z$, e o conjunto imagem de $g$ é compacto, então o conjunto imagem de $f$ também é compacto.

## 1 Introdução

O conceito de continuidade generalizado adotado neste trabalho é uma generalização do conceito clássico de continuidade, utilizando as ideias de limites generalizados de funções apresentadas por Vieira e Braz em [1].

Sejam $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $P^* = (P, \varepsilon)$ uma partição pontilha pontilhada de $[a,b]$, dada por $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ e $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Dizemos que a *soma de Riemann* de $f$ com respeito a $P^*$, dada por $\mathcal{R}_f(P^*) = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$, tende a $L \in \mathbb{R}$ quando $\|P\| = \max\{(t_i - t_{i-1}) \, : \, t_i \in P\}$ tende 0 se, e somente se, para cada $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $|\mathcal{R}_f(P^*) - L| < \epsilon$, para todo $P^* \in \mathcal{P}^*([a,b])$ com $\|P^*\| < \delta$. O número $L$ é chamado *integral de Riemann* de $f$ no intervalo $[a,b]$ e é denotado por $\int_a^b f(x)\, dx$, isto é,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\|P^*\| \to 0} \mathcal{R}_f(P^*) \tag{1}$$

Note que a ideia de limite presente na definição de integral de Riemann não é como nos limites usuais de funções, para os quais os pontos que tendem a um ponto $a$ no fecho do domínio da função são pontos deste domínio. Na integral de Riemann os objetos que tendem a 0 são as normas das partições pontilhadas e não as próprias partições, enquanto que a soma de Riemann é descrita em função das partições pontilhadas e não em função das suas normas.

Observe que em um limite usual $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ os pontos $x$ que tendem $a$ podem ser rescritos como $x = id(x)$, onde $id$ denota a função identidade definida no domínio da função $f$. Assim, o limite usual pode ser escrito como

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{id(x) \to a} f(x)\,. \tag{2}$$

Pode-se trocar $id(x)$ por uma outra função $g$ na notação de limite usual de $f$ e esta notação ainda possuir algum sentido matemático pertinente? Esta pergunta e a observação realizada sobre o limite da integral de Riemann motivaram Vieira e Braz a proporem em [1] a seguinte definição:

**Definição 1.1.** *Sejam $X$ um conjunto não-vazio, $(Y, d_Y)$ e $(Z, d_Z)$ espaços métricos, $f\colon X \to Y$ e $g\colon X \to Z$ duas aplicações e $z$ um ponto no fecho da imagem $g(X)$. Dizemos que o ponto $y \in Y$ é o* limite generalizado *de $f(x)$ quando $g(x)$ tende a $z$ se, e somente se, para cada $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $d_Y(f(x), y) < \epsilon$, sempre que $0 < d_Z(g(x), z) < \delta$. O limite generalizado de $f$ com respeito à $g$ e ao ponto $z$, será denotado por $\overset{g}{\lim\limits_{g(x) \to z}} f(x)$.*

O exemplo mais evidente de limite generalizado é a integral de Riemann de uma função integrável $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. De fato, considerando o conjunto $\mathcal{P}^*([a,b])$ de partições pontilhadas de $[a,b]$, a integral de Riemann da função $f$ é o limite generalizado da aplicação soma de Riemann $\mathcal{R}_f\colon \mathcal{P}^*([a,b]) \to \mathbb{R}$ com respeito a aplicação norma de partições $\|\cdot\|\colon \mathcal{P}^*([a,b]) \to \mathbb{R}$ e ao ponto $0 \in \mathbb{R}$. Em [1] é apresentado um exemplo evidenciando que limites generalizados e limites usuais não são conceitos equivalentes.

**Definição 1.2.** *Sejam $X$ um conjunto não-vazio, $(Y, d_Y)$ e $(Z, d_Z)$ espaços métricos, $f\colon X \to Y$ e $g\colon X \to Z$ duas aplicações. Dizemos que $f$ é $g$-*contínua no ponto *$a \in X$ se, e somente se,*

$$\overset{g}{\lim_{g(x)\to g(a)}} f(x) = f(a) \tag{3}$$

*Dizemos que $f$ é $g$-*contínua *ou* contínua com respeito a *$g$, caso $f$ seja $g$-contínua em $a$, para todo $a \in X$.*

Em [2] é apresentado exemplo de aplicação $f$ que é $g$-contínua num ponto, mas não é contínua neste ponto.

## 2 Resultados Principais

Nos resultados a seguir considere $X$ como sendo conjunto qualquer não-vazio, $(Y, d_Y)$ e $(Z, d_Z)$ espaços métricos e $f\colon X \to Y$ e $g\colon X \to Z$ duas aplicações.

**Proposição 2.1.** *Tem-se que $\overset{g}{\lim_{g(x)\to z}} f(x) = y$ se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$, com $g(x_n) \to z$, é válido que $f(x_n) \to y$.*

**Teorema 2.1.** *Se $f$ é $g$-contínua e $g(X)$ é compacto, então $f(X)$ é compacto.*

**Teorema 2.2.** *Se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é $g$-contínua e $g(X)$ é compacto, então $f$ assume valor máximo e valor mínimo.*

## References

[1] BRAZ, J. H. S. AND VIEIRA, M. G. O. - Limites generalizados de funções. *Anais da V Semana de Matemática do Pontal*, Ituiutaba - MG, 2014. Disponível em: <http://www.semap.facip.ufu.br/node/30>.

[2] VIEIRA, M. G. O. - Continuidade no contexto de limites generalizados. *Anais da VII Semana de Matemática do Pontal*, Ituiutaba - MG, 2016. Disponível em: <http://www.semap.facip.ufu.br/node/69>.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *133–134*

# EXISTÊNCIA E MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES DE PROBLEMAS ELíPTICOS COM TERMO SEMILINEAR CÔNCAVO-CONVEXO

ANGELO GUIMARÃES[1,†] & JOSÉ VALDO A. GONÇALVES[2,‡]

[1]ICMC, USP, SP, Brasil, [2]IME, UFG, GO, Brasil

[†]g.angelo@usp.br, [‡]goncalves.jva@gmail.com

**Abstract**

Neste trabalho estudamos existência e multiplicidade de soluções fracas do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \sigma|u|^{p^*-2}u + \lambda|u|^{q-2}u + f \ em \ \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um dominio limitado, $\sigma \geq 0,\ \lambda > 0,\ 1 < p < N$, $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u),\ 1 < q < p^*,\ f \in L^{p'}(\Omega)$, $p^* = \frac{pN}{N-p}$ é o expoente crítico de Sobolev e $p' = \frac{p}{p-1}$, é o conjugado de Lebesgue de $p$. Ao tomarmos $f \equiv 0$ e $\sigma = 1$ temos um problema homogêneo com expoente crítico de Sobolev em que utilizamos o Teorema do Passo da Montanha para encontrar existência de uma solução quando $p < q < p^*$. Utilizamos o gênero de Krasnoselskii para encontrar infinitas soluções quando $1 < q < p$. Quando $f \neq 0$ e $\sigma = 0$ temos um problema do tipo não homogêneo que provamos possuir infinitas soluções utilizando um método desenvolvido por P. Rabinowitz.

## 1 Introdução

Neste trabalho, estudamos existencia e multiplicidade de soluções fracas do problema côncavo-convexo envolvendo o operador $p$-Laplaciano

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \sigma|u|^{p^*-2}u + \lambda|u|^{q-2}u + f \ em \ \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um dominio limitado,

$$\sigma \geq 0,\ \ \lambda > 0,\ \ 1 < p < N,$$

$$\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u),$$

$$1 < q < p^*,\ \ f \in L^{p'}(\Omega),$$

onde $p^* = \frac{pN}{N-p}$ é o expoente crítico de Sobolev e $p' = \frac{p}{p-1}$, é o conjugado de Lebesgue de $p$.
Utilizamos como técnica principal, métodos variacionais aplicados ao funcional energia

$$F(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx - \frac{\sigma}{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*} dx - \int_\Omega fu\ dx,\ \ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{3}$$

## 2 Resultados Principais

Inicialmente, estudamos o caso em que $f \equiv 0$ (caso homogêneo) e $\sigma = 1$, de modo que (2) se reescreve como

$$\begin{cases} -\Delta_p u = |u|^{p^*-2}u + \lambda|u|^{q-2}u \ em \ \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{4}$$

Assim o funcional (3) se torna

$$F(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*} dx, \ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{5}$$

Apresentamos a seguir os resultados principais destaparte que são devidos a [1].

**Teorema 2.1.** *Suponha $p < q < p^*$ e $f \equiv 0$. Então existe $\lambda_0 > 0$ tal que para cada $\lambda > \lambda_0$ o problema (4) tem uma solução não trivial $u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

**Teorema 2.2.** *Suponha $\max\{p, p^* - p/(p-1)\} < q < p^*$. Então para cada $\lambda > 0$ existe uma solução não trivial para o problema (4).*

As demonstrações dos Teoremas 2.1 e 2.2 são baseadas no Teorema do Passo da Montanha. Para contornar dificuldades técnicas devido a presença do expoente crítico de Sobolev no problema (4) utilizamos o método de Concentração-Compacidade devido a [2]. ■

Em seguida provamos que o problema (4) possui infinitas soluções quando $1 < q < p$.

**Teorema 2.3.** *Suponha $1 < q < p$. Então existe $\lambda_1 > 0$ tal que, para $0 < \lambda < \lambda_1$, existem infinitas soluções o problema (4).*

A demonstração do Teorema 2.3 utiliza o gênero de Kranoselskii. ■
Finalmente fazemos $\sigma = 0$ de modo que (2) se reescreve como

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^q + f \ em \ \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{6}$$

onde $\Omega$ é um retângulo do $\mathbb{R}^N$. Neste caso o funcional energia se escreve como

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx - \int_\Omega fu \ dx \tag{7}$$

**Teorema 2.4.** *Suponha $\frac{q}{q-1} < \frac{pq}{N(q-p)} - 1$. Então para cada $\lambda > 0$, (6) tem infinitas soluções, que correspondem a uma sequência de valores críticos do funcional (7). A sequência tende ao infinito.*

Na demonstração do teorema 2.4 não é possível aplicar o genero de Krasnoselskii, pois o funcional $I$ não é par. Entretanto, foi possível obter um número infinito de soluções fazendo o uso de uma generalização de um método desenvolvido por P. Rabinowitz para o caso $p = 2$ (ver [1, 3]). ■

## References


[1] GARCIA AZORERO, J; PERAL ALONSO, I - Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a nonsymmetric term. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 323(2), 877-895, 1991.

[2] LIONS, P. L. - *The concentration-compactness principle in the calculus of variati- ons. The limit case. I.*, Rev. Mat. Iberoamericana, 1(1):145-201, 1985.

[3] RABINOWITZ, P. H. - *Multiple critical points of perturbed symmetric functionals.*, Trans. Amer. Math. Soc., 272(2):753-769, 1982.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *135–136*

# MULTIPLICITY OF SOLUTIONS FOR A FOURTH-ORDER ELLIPTIC EQUATION WITH NAVIER BOUNDARY CONDITIONS

DASSAEL FABRíCIO DOS REIS SANTOS[1,†] & JOSÉ VALDO ABREU GONÇALVES[2,‡]

[1]Instituto de Matemática e Estatística, UFG, GO, Brasil

†dassaelfabricio@gmail.com, ‡goncalves.jva@gmail.com

**Abstract**

We show the existence of at least three nontrivial solutions for a class of fourth-order nonlinear elliptic problems with Navier boundary conditions. In this case, the nonlinearity has known behavior near the origin. For this, we will use variational methods and a version of the maximum principle for the fourth-order operator.

## 1 Introduction

Let $\Omega$ be a smooth boundary domain in $\mathbb{R}^N$, with $N > 4$. We show existence of multiple solutions of the nonlinear elliptic problem

$$\alpha\Delta^2 u + \beta\Delta u + g(u) = \mu u \text{ in } \Omega;\ u = \Delta u = 0 \text{ on } \partial\Omega, \tag{1}$$

where $\alpha, \mu$ are positive real parameters, $-\infty < \beta < \alpha\lambda_1$ ($\lambda_1$ is the first eigenvalue of the linear problem $(-\Delta, H_0^1(\Omega)))$, $\Delta^2 = \Delta(\Delta)$ denotes the biharmonic operator and $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ is a continuous function satisfying:
$(\mathbf{g_1})$ $g(z) = o(\mid z \mid)$ at $\mid z \mid \longrightarrow 0$;
$(\mathbf{g_2})$ there exists numbers $z_1 < 0 < z_2$ such that $g(z_1) = \mu z_1$ and $g(z_2) = \mu z_2$;
$(\mathbf{g_3})$ if $G(z) = \displaystyle\int_0^z g(s)ds$ is the potencial function of $g$, then $0 \leq G(z) \leq \dfrac{1}{2}zg(z)$, if $g_\mu^- \leq z \leq g_\mu^+$, and $g$ is locally Lipschitz continuous in $[g_\mu^-, g_\mu^+]$, where

$$g_\mu^- = \inf\{z < 0;\ \mu s - g(s) < 0,\ z < s < 0\} \quad \text{and} \quad g_\mu^+ = \sup\{z > 0;\ \mu s - g(s) > 0,\ 0 < s < z\}.$$

The problem (1) was studied by Struwe [4] when the main operator is the laplacian and $g \in C^1$ satisfies:

$$(\mathbf{g_4}) \lim_{|z|\longrightarrow\infty} \frac{g(z)}{z} = +\infty \text{ and } (\mathbf{g_5}) \ \frac{g(z)}{z} \text{ is decreasing in } (-\infty, 0) \text{ and increasing in } (0, +\infty).$$

In [3], Gonçalves improves the result of Struwe in the sense that the conditions $(g_2)$ and $(g_3)$ are required instead of $(g_4)$ and $(g_5)$, when the main operator is the laplacian. In this work, it shows existence of at least three solutions of problem (1) when $\mu > \lambda_2$, where $\lambda_2$ be a second eigenvalue of the problem $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Other results can also be found in [1, 2, 3].

## 2 Main Results

Let $H = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ the Sobolev space with inner product

$$\langle u, v\rangle_H = \alpha\int_\Omega \Delta u\Delta v dx - \beta\int_\Omega \nabla u\nabla v dx,\ u, v \in H,$$

and norm $\| u \|_H^2 = \langle u, u \rangle_H$. Consider the $C^1$-functional $J : H \longrightarrow \mathbb{R}$ associated with the problem (1) given by

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u|^2 \, dx - \frac{\mu}{2}\int_\Omega u^2 dx + \int_\Omega G(u)dx, \quad u \in H,$$

with Fréchet derivate

$$\langle \nabla J(u), v \rangle = \int_\Omega \Delta u \Delta v dx - \mu \int_\Omega uv dx + \int_\Omega g(u) v dx, \quad u, v \in H.$$

**Definition 2.1.** *We say that $u \in H$ is the weak solution of the problem (1) if verifies*

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v dx - \mu \int_\Omega uv dx + \int_\Omega g(u) v dx = 0, \;\; v \in H.$$

Let $0 < \mu_1 < \mu_2 \le \cdots \le \mu_i \le \cdots$ be the sequence of eigenvalues of the linear problem $(\alpha\Delta^2 + \beta\Delta, H)$ and note that the eigenvalues are of the form $\mu_i = \lambda_i(\alpha\lambda_i - \beta)$, with $i \ge 1$. Our goal is to prove the following result:

**Theorem 2.1.** *Let $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ be a continuous function satisfying $(g_1) - (g_2)$.*
**(i)** *if $\mu \le \mu_1$ and $zg(z) > 0$, for $z \neq 0$, then the problem (1) admits only the trivial solution;*
**(ii)** *if $\mu > \mu_1$, then there exists $u_1 := u_{1,\mu}$ and $u_2 := u_{2,\mu}$, with $u_1, u_2 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \cap H$, solutions of (1) such that*

$$u_1 < 0 < u_2 \text{ in } \Omega \text{ and } \frac{\partial u_2}{\partial \nu} < 0 < \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \text{ in } \partial\Omega. \tag{2}$$

*Moreover,*

$$J(u_1) = \min_{u \in H, u \le 0} J(u) < 0 \quad \text{and} \quad J(u_2) = \min_{u \in H, u \ge 0} J(u) < 0; \tag{3}$$

**(iii)** *if $\mu > \mu_2$ and $(g_3)$ is valid, then there exist a solution $u_3 := u_{3,\mu}$ of (1), other than $u_1$ and $u_2$, with $J(u_3) < 0$;*
**(iv)** *$(\mu_1, 0)$ is a point of bifurcation of (1) with respect to the line of trivial solutions $\{(\mu, 0); \; \mu \in \mathbb{R}\}$ and*

$$\| u_1 \|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \overset{\mu \longrightarrow \mu_1}{\longrightarrow} 0 \quad \text{and} \quad \| u_2 \|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \overset{\mu \longrightarrow \mu_1}{\longrightarrow} 0.$$

The proof of theorem consists to associate with the problem (1) the auxiliary problem

$$\alpha\Delta^2 u + \beta\Delta u = f(\mu, u) \text{ in } \Omega; \;\; u = \Delta u = 0 \text{ on } \partial\Omega, \tag{4}$$

where $f : \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ is a continuous function given by

$$f(\mu, z) = \mu z - g(z), \text{ if } g_\mu^- \le z \le g_\mu^+ \text{ and } f(\mu, z) = 0, \text{ if } z < g_\mu^- \text{ and } z > g_\mu^+, \tag{5}$$

and show that weak solutions to this problem are weak solutions of the problem (1). For proof of this theorem, we use variational methods, a version of the maximum principle for the fourth-order operator and similar ideas to those used in the Mountain Pass Theorem.

## References


[1] Ambrosetti, A. & Lupo, D. - On a class of nonlinear Dirichlet problems with multiple solutions *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, **8**, 1145-1150, 1984.

[2] Gonçalves, J. V. A. - On multiple soluions for a semilinear Dirichlet problem. *Houston Journal of Mathematics*, **12**, 43-53, 1986.

[3] Gonçalves, J. V. A. & Castro, A. - On multiple solutions of nonlinear ellipitic equations with odd nonlinearities. *Springer*, **4**, 21-33, 1980.

[4] Mugnai, D. - Multiplicity of critical points in presence of a linking: Application to a superlinear boundary value problem. *Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, **11**, 379-391, 2004.

[5] Struwe, M. - A note on a result of Ambrosetti and Mancini. *Ann. Math. Pura Appl.*, **131**, 107-115, 1982.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *137–138*

# EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES NÃO TRIVIAIS PARA EQUAÇÃO DE SCHORÖDINGER QUASILINEAR COM CRESCIMENTO SUBCRíTICO

EDCARLOS D. SILVA[1,†] & JEFFERSON DOS S. SILVA[1,‡]

[1]Instituto de Matemática, UFG, GO, Brasil

[†]eddomingos@hotmail.com, [‡] mestrephi@gmail.com

**Abstract**

Neste trabalho estamos interessados em procurar soluções não trivias para a equação quasilinear

$$-\Delta u + V(x)u - \Delta(u^2)u = g(x,u), \qquad x \in \mathbb{R}^N \quad u \in H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \tag{1}$$

onde $N \geq 3$ e $V$ é um potencial positivo. A não linearidade $g(x,s)$ se comporta como $K_0(x)s$ na origem e no infinito como $K_\infty(x)|s|^p$, $1 \leq p \leq 3$. Além do mais, consideramos o caso onde $g(x,s)$ é superlinear no infinito, isto é,

$$\lim_{s \longrightarrow \infty} \frac{g(x,s)}{s^3} = \infty.$$

Para a obtenção de nossos resultados, utilizamos o Teorema de Linking introduzido por Li e Willem no seu célebre artigo [2].

## 1 Introdução

Equações do tipo (1) apresentam algumas dificuldades devido a perda da compacidade. Para contornar essa dificuldade trabalhamos com as seguintes hipóteses sobre o potencial $V$.

$(V_1)$ $\inf_{x \in \mathbb{R}^N} V \geq V_o > 0$;

$(V_2)$ Para qualquer $M > 0$, temos $\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^N |\ V(x) \leq M\right\}\right) < +\infty$

A não linearidade $g(x,s)$ é tal que $g \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e satisfaz em nosso primeiro resultado a seguinte condição de crescimento:

$(g_1)$ Existem $a, b \in L^\alpha(\mathbb{R}^N)$, $\alpha > N/2$ tal que $|g(x,s)| \leq a(x)|s| + b(x)|s|^3$ para todo $x \in \mathbb{R}^N,\ s \in \mathbb{R}$.

Para o nosso segundo resultado, pedimos a seguinte condição de crescimento

$(g_2)$ Existem $\widetilde{a}, \widetilde{b} \in L^\alpha(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\alpha > N/2$ tal que $|g(x,s)| \leq \widetilde{a}(x)|s| + \widetilde{b}(x)|s|^{p-1}$ para todo $x \in \mathbb{R}^N,\ s \in \mathbb{R}$ e $4 < p < 22^*$.

Definimos $G(x,t) = \int_0^t g(x,s)ds$ e introduzimos o conjunto

$$\mathcal{F} = \left\{w : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} | w^+ \not\equiv 0,\ w \in L^\alpha(\mathbb{R}^N),\ \textit{para algum } \alpha > N/2\right\}.$$

Consideraremos as seguintes condições assintóticas na origem e no infinito para $G$.

$(G_0)$ Existe $K_0 \in \mathcal{F}$ tal que $\liminf_{s \to 0} \dfrac{2G(x,s)}{s^2} = K_0(x)$ uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$

$(G_\infty)$ Existe $K_\infty \in \mathcal{F}$ com $K_\infty \in L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$ e $\limsup_{|s| \to +\infty} \dfrac{4G(x,s)}{s^4} = K_\infty(x)$ uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$.

Para boa definição de nosso funcional energia, introduzimos o espaço

$$X := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \mid \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx < +\infty \right\}.$$

Sobre as condições $(V_1) - (V_2)$, o espaço $X$ é um subespaço fechado de $H^1(\mathbb{R}^N)$, portanto um espaço de Banach reflexivo. Além disso, $X$ é Hilbert com a norma

$$\|u\|_X = \left( \int_{\mathbb{R}^N} \left( |\nabla u|^2 + V(x)u^2 \right) dx \right)^{1/2}.$$

As imersões de $X$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$ são contínuas para $2 \leq q \leq 2^*$ e compacta para $2 \leq q < 2^*$, onde $2^*$ é o expoente crítico $\frac{2N}{N-2}$. Facilmente podemos mostrar que $X$ está imerso continuamente no espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Como estamos interessados em usar métodos variacionais, tratamos dos seguintes problemas de autovalores

$$-\Delta u + V(x)u = \lambda(K_0)K_0(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad u \in X \tag{2}$$

$$-\Delta u = \mu(K_\infty)K_\infty(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \tag{3}$$

## 2 Resultados Principais

O primeiro resultado deste texto é dado pelo Teorema a seguir.

**Teorema 2.1.** *Suponha que $V$ satisfaz $(V_1) - (V_2)$ e que $g$ satisfaz $(g_1)$, $(G_0)$ e $(G_\infty)$. Se $\lambda_j(K_0) < 1 < \lambda_{j+1}(K_0)$ e $\mu_1(K_\infty) > 1$, então o problema (1) admite pelo menos duas soluções não triviais.*

No segundo resultado deste resumo, trocamos a condição $(g_1)$ por $(g_2)$ e a condição $(G_\infty)$ pela condição superlinear no infinito

$(g_\infty)$

$$\lim_{s \longrightarrow \infty} \frac{g(x,s)}{s^3} = \infty.$$

Além do mais, pedimos que a não linearidade satisfaz a condição de Ambrosetti-Rabinowitz a seguir:

$(AR)$ Existe $\theta > 4$ tal que $0 < G(x,s) \leq g(x,s)s$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^N$ e $s \neq 0$.

**Teorema 2.2.** *Suponha que $V$ satisfaz $(V_1) - (V_2)$ e que $g$ satisfaz $(g_2)$, $(G_0)$, $(g_\infty)$ e $(AR)$. Se $\lambda_j(K_0) < 1 < \lambda_{j+1}(K_0)$ , então o problema (1) admite pelo menos uma solução não trivial.*

## References


[1] COLIN, M. AND JEANJEAN, L. - *Solutions for a quasilinear Schrödinger equation: a dual approach.*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, (2004), no. 2, 213–226.

[2] Li, S. J. and Willem, M. - *Applications of local linking to critical point theory*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1995), no. 1, 6–32.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *139–140*

# EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO PARA UM PROBLEMA ELíPTICO NO ESPAÇO DAS FUNÇÕES DE VARIAÇÃO LIMITADA

LETICIA S. SILVA[1,†] & MARCOS T. O. PIMENTA[2,‡]

[1]FCT/Unesp, SP, Brasil, [2]DMC, FCT/Unesp, SP, Brasil

[†]leticiadstos@gmail.com, [‡]pimenta@fct.unesp.br

**Abstract**

Neste trabalho mostra-se a existência de solução de variação limitada para um problema envolvendo o operador 1-laplaciano em um domínio exterior com condição de fronteira de Dirichlet. Para isso, será usada uma versão do Teorema do Passo da Montanha.

## 1 Introdução

Neste trabalho, consideramos a equação

$$\begin{cases} -\Delta_1 u = a(x)g(u), \text{ em } \Omega \\ u = 0, \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega$ é domínio exterior em $\mathbb{R}^n$, ou seja, $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus \overline{O}$, com $O$ vizinhança aberta limitada da origem, e também $\Delta_1 u = \text{ div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$. Ainda são satisfeitas as seguintes condições:

(A1) $a(x) \in C(\Omega, \mathbb{R})$ muda de sinal em $\Omega$;
(A2) $a(x) \leq 0$ para $|x| \geq R_0$ para algum $R_0 > 0$;
(A3) $\sup\limits_{x\in\Omega} |a(x)||x| < \infty$;
(G1) $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;
(G2) $g(s) = o(1)$ quando $s \to 0$;
(G3) $|g(s)| \leq C(1 + |s|^{p-1})$ para algum $C > 0$, $1 < p < 1^* = \frac{N}{N-1}$;
(G4) $0 < \theta G(s) \leq sg(s)$ para $s \in \mathbb{R}$, com $\theta > 1$, onde $G(s) = \displaystyle\int_0^s g(t)dt$

Como notação, temos $\Omega^+ = \{x \in \mathbb{R} : a(x) > 0\}$, o espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma $|u|_p = \left(\displaystyle\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{1/p}$ e o espaço $BV(\Omega)$ munido da norma $||u|| = \displaystyle\int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u|\partial\mathcal{H}_{N-1}$.

## 2 Resultados Principais

Uma solução de variação limitada para (1) é uma função $u \in BV(\Omega)$ tal que para todo $v \in BV(\Omega)$ tem-se

$$\mathcal{J}(v) - \mathcal{J}(u) \geq \mathcal{G}'(u)(v-u)dx \tag{1}$$

onde $\mathcal{J}(v) := ||v||$, $\mathcal{G}(v) := \displaystyle\int_\Omega G(v)dx$ , e $\mathcal{G}'(u)(v-u) = \displaystyle\int_\Omega a(x)g(u)(v-u)dx$

Assim, obtemos o seguinte resultado:

**Teorema 2.1.** *Se são satisfeitas (A1) - (A3) e (G1) - (G4), então o problema* (1) *tem solução de variação limitada.*

Em [2], o problema é resolvido para o operador p-laplaciano, $p > 1$. Neste caso, em que lidamos com o 1-laplaciano, o funcional associado a (1): $\Phi(v) = \mathcal{J}(v) - \mathcal{G}(v)$, $v \in BV(\Omega)$, não é de classe $C^1$, não sendo possível utilizar métodos variacionais para encontrar uma solução fraca. Porém, o funcional $\Phi$ é a diferença entre um funcional convexo localmente Lipschtiz $\mathcal{J}$ e um funcional suave $\mathcal{G}$, e pelas condições do problema, ele satisfaz as geometrias de uma versão do Teorema do Passo da Montanha que nos faz obter então uma sequência limitada da qual será obtido um candidato a solução de (1) .

Agradeço à Capes pelo apoio concedido.

## References

[1] ATTOUCH, H. ; BUTTAZZO, G. ; MICHAILLE, G. - *Variational analysis in Sobolev and BV spaces: applications to PDEs and optimization* .

[2] COSTA, R.H. AND SILVA, L. A. - *Solutions for indefinite semilinear elliptic equations in exterior domains.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, **255**, 308-3184, 2001.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *141–142*

# DESIGUALDADE DE DíAZ-SAÁ E APLICAÇÕES

LUCAS G. F. CUNHA[1,†] & MARCOS L. M. CARVALHO[1,‡]

[1]IME, UFG, GO, Brasil

[†]cunha.gunner@gmail.com, [‡]marcosleandrocarvalho@yahoo.com.br

**Abstract**

Apresentaremos a desigualdade de Díaz-Saá e utilizaremos esse resultado para obtermos condições necessárias e suficientes para e existência e unicidade de solução para um problema com operador do tipo p-Laplaciano.

## 1 Introdução

Na literatura podemos encontrar algumas versões da desigualdade que denoimna este trabalho, como por exemplo a versão para funções cujo domínio é o $\mathbb{R}^N$ que foi apresentada em [4]. A versão que veremos a seguir, dada pela equação (1), é para funções adequadas com domínio aberto e limitado, devida a Díaz e Saá que foram os pioneiros no estudo de tais desigualdades para o caso em que $p$ é um número qualquer no intervalo $]1,+\infty[$. Além disso, os autores mostraram que as condições (1)-(3) dadas sobre a funcção $f$ são de fato necessárias e suficientes para unicidade de solução e que podem ser enfraquecidas a fim de garantir a existência de solução para o problema (3). O caso onde $p=2$, assim como algumas ferramentas que foram utilizadas em [2] na demonstração da existência e unicidade de solução para o problema (3), estão presentes em [1].

## 2 Resultados Principais

**Teorema 2.1. (Desigualdade de Díaz-Saá)** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e limitado, $\mathcal{D} = \{u \in L^1(\Omega); u \geq 0, u^{\frac{1}{p}} \in W^{1,p}(\Omega)\}, w_1, w_2 \in L^\infty(\Omega) \cap \mathcal{D}$ tais que $w_1 = w_2$ sobre $\partial\Omega$ e $\dfrac{w_i}{w_j} \in L^\infty(\Omega)$ onde $i, j \in \{1,2\}$. Então,*

$$\int_\Omega |\nabla(w_1^{\frac{1}{p}})|^{p-2}\nabla(w_1^{\frac{1}{p}})\nabla(w_1^{\frac{1-p}{p}}(w_1-w_2))dx - \int_\Omega |\nabla(w_2^{\frac{1}{p}})|^{p-2}\nabla(w_2^{\frac{1}{p}})\nabla(w_2^{\frac{1-p}{p}}(w_2-w_1))dx \geq 0 \tag{1}$$

**Prova:** Para a demonstração do teorema enunciado acima podemos utilizar a Desigualdade de Picone, como em [4] ou simplesmente usarmos a convexidade do funcional $J : L^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por,

$$J(w) = \begin{cases} \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_\Omega |\nabla w^{\frac{1}{p}}|^p dx, w \in \mathcal{D} \\ +\infty, w \in L^1(\Omega) \setminus \mathcal{D} \end{cases}. \tag{2}$$

veja [2].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto, limitado com bordo $\partial\Omega$ regular, usaremos o Teorema 2.1 para garantirmos a unicidade de solução para o segunite problema:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) \text{ em } \Omega \\ u \geq 0,\ u \not\equiv 0 \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}, \tag{3}$$

sujeito as seguintes condições:

1. $t \mapsto f(x,t)$ é contínua em $[0,\infty)$. Além disso, $\forall t \in [0,\infty),\ x \mapsto f(x,t) \in L^\infty(\Omega)$;

2. A função, $t \mapsto \dfrac{f(x,t)}{t^{p-1}}$ é decrescente em $(0,\infty),\ q.t.p.\ x \in \Omega$;

3. $\exists\, C > 0;\ f(x,t) \leq C(t^{p-1}+1),\ \forall t \in [0,\infty),\ q.t.p.\ x \in \Omega$.

**Teorema 2.2.** *A solução de 3, quando existe, é única.*

**Teorema 2.3.** *O problema 3 possui solução se, e somente se,*

$$\lambda_1(-\Delta_p v - a_0|v|^{p-2}v) < 0 < \lambda_1(-\Delta_p v - a_\infty|v|^{p-2}v) \tag{4}$$

*onde,*

$$a_0(x) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{f(x,t)}{t^{p-1}}, \quad a_\infty(x) = \lim_{t\uparrow\infty} \frac{f(x,t)}{t^{p-1}},$$

*e*

$$\lambda_1(-\Delta_p v - a|v|^{p-2}v) = \inf_{\|v\|_p=1} \left\{ \int_\Omega |\nabla v|^p dx - \int_{v\neq 0} a|v|^p dx; v \in W_0^{1,p}(\Omega) \right\}.$$

**Prova:** A demonstração é obtida através da minimização do funcional energia associado ao problema 3 veja [1] e [2].

**Observação:** Utilizando resultados de [3] e [3] podemos garantir que a solução do problema (3) garantida pelos Teoremas 2.2 e 2.3 possui regularidade $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ onde $\alpha \in (0,1]$.

## References


[1] BREZIS, H.; OSWALD, L. - *Remarks on sublinear elliptic equations.*, Nonlinear Anal., **10(1)**:55-64, 1986.

[2] DÍAZ, J. I.; SAÁ, J. E. - *Existence et unicité de solutions positives pour certaines équations elliptiques quasilinéaries.*, Acad. Sci. Paris, p.521-524, 1987.

[3] LIEBERMAN, G. M. - *The natural generalization of the natural conditions of ladyzhenskaya and ural'tseva for elliptic equations.* Commun. In Differential Partial Equations, **16(2&3)**:311-361, 1991.

[4] LIEBERMAN, G. M. - *Bondary regularity for solutions of degenerate elliptic equations.* Nonlinear Anal., **12(11)**:1203-1219, 1988.

[5] CHAÏB, K. - *Extension of díaz-saá's inequality in* $\mathbb{R}^N$ *and application to a system of p-laplacian.* Publ. Mat., **(46)**:473-488,2002.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *143–144*

# SISTEMAS COM TERMO CÔNCAVO-CONVEXO *DOMÍNIO NÃO LIMITADO*

STEFFÂNIO MORENO DE SOUSA[1,†] & JOSÉ VALDO GONÇALVES[1,‡]

[1]IME, UFG, GO, Brasil

[†]steffaniom@gmail.com, [‡]goncalves.jva@gmail.com

**Abstract**

Este trabalho estabelece a existência de solução para Sistemas com Termo Côncavo-Convexo em Domínio Não-Limitado para o operador p-Laplaciano. Estendendo, de certa forma, o problema estudado no artigo [3]. A grande dificuldade que surge ao considerar um sistema, é a troca de informação para mostrar a existência de uma super-solução para o mesmo.

## 1 Introdução

Neste trabalho consideremos o seguinte Sistemas com Termo Côncavo-Convexo em Domínio Não-Limitado:

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)u^{p-1} = \lambda u^{\alpha_1} + v^{\beta_1} \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta_q v + V(x)v^{q-1} = \lambda v^{\alpha_2} + u^{\beta_2} \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u, v > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1}$$

onde $0 < \alpha_i < \beta_i < \infty$ para $i = 1, 2$ e $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisfaz

$(V_0)$ $V(x) \geq \delta_0$, quando $|x| \geq R_0$, para algum $\delta_0, R_0 > 0$;

$(V_1)$ $V(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^N$.

E consideraremos o problema auxiliar, seguinte, para construir a sub e super-solução de (1). Seja

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)u^{p-1} = f(x, u, v) \text{ em } \Omega, \\ -\Delta_q v + V(x)v^{q-1} = g(x, u, v) \text{ em } \Omega, \\ u, v \geq 0 \text{ em } \Omega \text{ e } u, v = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

$(F_0)$ $f(x, \cdot, v)$, $f(x, u, \cdot)$, $g(x, \cdot, v)$, $g(x, u, \cdot)$ são não-decrescentes,

$(F_1)$ $f, g$ são Caracthéodory,

$(F_2)$ $f(., u(.), v(.)), g(., u(.), v(.)) \in L^\infty(\Omega)$, quando $u, v \in L^\infty(\Omega)$,

**Teorema 1.1.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ domínio limitado. Suponhamos $(F_0)$, $(F_1)$, $(F_2)$, $(V_0)$, $(V_1)$ e que existam $(\underline{u}, \underline{v})$, $(\overline{u}, \overline{v})$ sub e supersolução de (2), respectivamente, onde $\underline{u} \leq \overline{u}$ e $\underline{v} \leq \overline{v}$. Então (2) tem uma solução fraca $(u, v)$ tal que*

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \qquad \underline{v} \leq v \leq \overline{v}.$$

**Teorema 1.2. (Existência de uma família de sub-soluções)** *Seja $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e satisfaça $(V_0)$ e $(V_1)$. Então para cada $n \geq 1$ e cada $\lambda \in (0, \Lambda)$ existem $\underline{u}_n, \underline{v}_n \in C^1(\overline{B_n})$ tais que*

$$\begin{cases} -\Delta_p \underline{u}_n + V(x)\underline{u}_n^{p-1} \leq \lambda \underline{u}_n^{\alpha_1} + v_n^{\beta_1}, \quad v_n \in [\underline{v}_n, \overline{v}_n] \\ -\Delta_q \underline{v}_n + V(x)\underline{v}_n^{q-1} \leq \lambda \underline{v}_n^{\alpha_2} + u_n^{\beta_2}, \quad u_n \in [\underline{u}_n, \overline{u}_n] \\ \underline{u}_n = \underline{v}_n = 0 \quad em \quad \partial B_n \quad u_n, v_n > 0 \quad em \quad B_n. \end{cases} \tag{3}$$

*E além disso, sendo $\overline{u}, \overline{v}$ super-solução em $\mathbb{R}^N$ do problema (1), e fazendo $\overline{u}_n = \overline{v}_n = 0$ em $B_n^c$, temos então $u_n$ e $v_n$ são crescente, isto é,*

$$0 \leq \underline{u}_1 \leq \underline{u}_2 \leq \ldots \leq \underline{u}_n \leq \ldots \leq \overline{u} \quad em\ \mathbb{R}^N,$$
$$0 \leq \underline{v}_1 \leq \underline{v}_2 \leq \ldots \leq \underline{v}_n \leq \ldots \leq \overline{v} \quad em\ \mathbb{R}^N.$$

**Teorema 1.3. (Existência de uma super-solução)** *Seja $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e satisfaça $(V_0)$ e $(V_1)$. Então existe $\Lambda > 0$ tal que para cada $\lambda \in (0, \Lambda)$ existem $M_\lambda^1 > 0$, $M_\lambda^2 > 0$, $\overline{u} \equiv \overline{u}_\lambda \in C^1(\mathbb{R}^N)$ e $\overline{v} \equiv \overline{v}_\lambda \in C^1(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \overline{u}|^{p-2} \nabla \overline{u} \nabla \phi + V(x) \overline{u}^{p-1} \phi dx \geq \lambda \int_{\mathbb{R}^N} (\overline{u}^{\alpha_1} + v^{\beta_1}) \phi dx, \quad v \in [\underline{v}, \overline{v}] \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \overline{v}|^{p-2} \nabla \overline{v} \nabla \phi + V(x) \overline{v}^{p-1} \phi dx \geq \lambda \int_{\mathbb{R}^N} (\overline{v}^{\alpha_2} + \overline{u}^{\beta_2}) \phi dx, \quad u \in [\underline{u}, \overline{u}] \\ \overline{u},\ \overline{v} \quad em \quad \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

*para $\phi,\ \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, onde $\phi,\ \psi \geq 0$.*

## 2 Resultado Principal

**Teorema 2.1.** *Suponha que $0 < \alpha_1 < p - 1 < \beta_1$ e $0 < \alpha_2 < q - 1 < \beta_2$. Se além disso $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $V$ satisfaz $(V_0), (V_1)$, então existe $\Lambda > 0$ tal que para cada $\lambda \in (0, \Lambda)$ o problema (1) admite uma solução $u \equiv u_\lambda \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, e $v \equiv v_\lambda \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, satisfazendo*

$$0 < u \leq \lambda^{\frac{1}{\beta_1 - \alpha_1}} \left( \frac{(p-1) - \alpha_1}{\beta_1 - (p-1)} \right)^{\frac{1}{\beta_1 - \alpha_1}} \equiv M_\lambda^1$$
$$0 < v \leq \lambda^{\frac{1}{\beta_2 - \alpha_2}} \left( \frac{(q-1) - \alpha_2}{\beta_2 - (q-1)} \right)^{\frac{1}{\beta_2 - \alpha_2}} \equiv M_\lambda^2.$$

## References


[1] A. Ambrosetti, H. Brézis, G. Cerami - Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems, *J. Func. Anal. 122*, **10**, (1994) 519-543.

[2] Carriao, P. C. and Goncalves, J. V. and Miyagaki, O. H. - *Existence and $\lambda$ - behavior of positive solutions of the equation $-\Delta u + a(x)u = \lambda u^q + u^p$ in $\mathbf{R}^N$*, Comm. Appl. Nonlinear Anal., 1999.

[3] Carrião, P. C. and Goncalves, J. V. and Miyagaki, O. H. - *Existence and nonexistence in a class of equations with supercritical growth*, Appl. Anal.,2000.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *145–146*

# UMA CLASSE DE EQUAÇÕES DE SCHRÖDINGER FRACIONÁRIA ASSINTOTICAMENTE PERIÓDICA COM CRESCIMENTO CRÍTICO DE SOBOLEV

ARÁUJO, Y. L.[1,†] & SOUZA M. DE[2,‡]

[1]Universidade Federal Rural de Pernambuco, UFRPE, PE, Brasil, [2]Universidade Federal da Paraíba, UFPB, PB, Brasil

[†]yanelaraujo@gmail.com, [‡]manassesxavier@hotmail.com

**Abstract**

Em [1], estudamos uma classe de equação de Schrödinger fracionária da forma

$$(-\Delta)^{\alpha}u + V(x)u = |u|^{2^*_\alpha-2}u + g(x,u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

onde $0 < \alpha < 1$, $2\alpha < N$, $2^*_\alpha = 2N/(N-2\alpha)$ é o expoente crítico de Sobolev, $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é um potencial positivo, e a não-linearidade $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se comporta como $|u|^{q-1}$ no infinito para algum $2 < q < 2^*_\alpha$, e não satisfaz a usual condição de Ambrosetti-Rabinowitz $(AR)$. Assumimos também que o potencial $V(x)$ e a não-linearidade $g(x,u)$ são assintoticamente periódicas no infinito. Sob essas hipóteses provamos a existência de pelo menos uma solução fraca não negativa $u \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^N)$ combinando uma versão do Teorema do Passo da Montanha e uma versão do Princípio de Concentração-Compacidade devido a Lions.

## 1 Introdução

Nosso principal objetivo é estabelecer, sob uma condição de periodicidade assintótica no infinito, a existência de uma solução fraca para o problema crítico

$$(-\Delta)^{\alpha}u + V(x)u = |u|^{2^*_\alpha-2}u + g(x,u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

onde $0 < \alpha < 1$, $2\alpha < N$, $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas. Inspirados em H. F. Lins e E. A. B. Silva [5], consideramos $\mathcal{F}$ a classe de funções $h \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$, $|\{x \in \mathbb{R}^N : |h(x)| \geq \varepsilon\}| < \infty$ e assumimos que $V$ satisfaz

$(V)$ existe uma constante $a_0 > 0$ e uma função $V_0 \in C(\mathbb{R}^N)$, $1-$periódica em $x_i$, $1 \leq i \leq N$, tal que $V_0 - V \in \mathcal{F}$ e $V_0(x) \geq V(x) \geq a_0 > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Também assumimos as seguintes hipóteses:

$(g_1)$ $g(x,s) = o(|s|)$, quando $s \to 0^+$, uniformemente em $\mathbb{R}^N$;

$(g_2)$ existem constantes $a_1, a_2 > 0$ e $2 < q_1 < 2^*_\alpha$ tal que $|g(x,s)| \leq a_1 + a_2|s|^{q_1-1}$, para todo $(x,s) \in \mathbb{R}^N \times [0,+\infty)$;

$(g_3)$ existe uma constante $2 \leq q_2 < 2^*_\alpha$ e funções $h_1 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $h_2 \in \mathcal{F}$ tal que $\frac{1}{2}g(x,s)s - G(x,s) \geq -h_1(x) - h_2(x)s^{q_2}$, para todo $(x,s) \in \mathbb{R}^N \times [0,+\infty)$.

A periodicidade assintótica de $g$ no infinito é dada pela seguinte condição:

$(g_4)$ existe uma constante $2 \leq q_3 \leq 2^*_\alpha - 1$ e funções $h_3 \in \mathcal{F}$, $g_0 \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, [0,+\infty))$, 1-periódica em $x_i$, $1 \leq i \leq N$, tal que:

  $(i)$ $G(x,s) \geq G_0(x,s) = \int_0^s g_0(x,t)\,\mathrm{d}t$, para todo $(x,s) \in \mathbb{R}^N \times [0,+\infty)$;
  $(ii)$ $|g(x,s) - g_0(x,s)| \leq h_3(x)|s|^{q_3-1}$, para todo $(x,s) \in \mathbb{R}^N \times [0,+\infty)$;
  $(iii)$ a função $g_0(x,s)/s$ é não-decrescente na variável $s > 0$, para cada $x \in \mathbb{R}^N$.

Finalmente, supomos que $g$ satisfaz:

$(g_5)$ existe um conjunto aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $2 < p < 2^*_\alpha$ e $C_0 > 0$ tal que

$(i)$ $\dfrac{G(x,s)}{s^p} \to +\infty$, as $s \to +\infty$, uniformemente em $\Omega$, se $N \geq 4\alpha$;

$(ii)$ $\dfrac{G(x,s)}{s^p} \to +\infty$, as $s \to +\infty$, uniformemente em $\Omega$, se $2\alpha < N < 4\alpha$ e $\frac{4\alpha}{N-2\alpha} < p < 2^*_\alpha$;

$(iii)$ $G(x,s) \geq C_0 s^p$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$, se $2\alpha < N < 4\alpha$ e $2 < p < \frac{4\alpha}{N-2\alpha}$.

As condições $(g_1)$ e $(g_2)$ nos permite usar métodos variacionais para estudar (1). Sob estas hipóteses, o funcional associado não satisfaz uma condição de compacidade do tipo Palais-Smale uma vez que o termo $|u|^{2^*_\alpha - 2}u$ é crítico e o domínio é todo o $\mathbb{R}^N$. Para superar as dificuldades encontradas devido a perda de compacidade, uma vez que o problema é crítico, seguimos as ideias de Brezis-Nirenberg [2].

## 2 Resultados Principais

Nosso principal resultado é o seguinte:

**Teorema 2.1.** *Assuma que $(V)$, $(g_1) - (g_5)$ e uma das seguintes condições acontecem:*

*(i)* $N \geq 4\alpha$

*(ii)* $2\alpha < N < 4\alpha$ *and* $\frac{4\alpha}{N-2\alpha} < p < 2^*_\alpha$

*(iii)* $2\alpha < N < 4\alpha$ *and* $2 < p < \frac{4\alpha}{N-2\alpha}$, *com $C_0$ suficientemente grande.*

*Então, o problema (1) tem uma solução fraca não negativa e não trivial.*

Analisando o problema periódico, isto é, no caso em que $V = V_0$, $g = g_0$, garantimos também a existência de uma solução fraca não negativa e não trivial. Nossos resultados complementam alguns trabalhos da literatura no sentido que consideramos potenciais diferentes dos já tratados e complementam os estudos feitos em [3, 4, 6] no sentido que a não-linearidade se comporta como $|u|^{2^*_\alpha - 1} + g(x,u)$, onde a pertubação subcrítica não satisfaz a condição $(AR)$.

## References


[1] Araújo Y. L., Souza M. de - A class of asymptotically periodic fractional Schrödinger equations with critical growth. *Communications in Contemporary Mathematics*, 2017.

[2] Brézis, N., Nirenberg L.- Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. *Comm. Pure Appl. Math.* **36**, 437-477, 1983.

[3] Chang X., Wang Z. Q.- Ground state of scalar field equations involving a fractional Laplacian with general nonlinearity. *Nonlinearity*, 2013.

[4] do Ó J. M., Miyagaki O. H., Squassina M.- Critical and subcritical fractional problems with vanishing potentials. *Communications in Contemporary Mathematics*, 2015.

[5] Lins H. F., Silva E. A. B. - Quasilinear asymptotically periodic elliptic equations with critical growth. *Nonlinear Anal.*, **71**, 2890-2905, 2009.

[6] Shang X., Zhang J., Yang Y.- On fractional Schrödinger equation in $\mathbb{R}^N$ with critical growth. *J. Math. Phys.*, 2013.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *147–148*

# HIPERCICLICIDADE E O TEOREMA DE TRANSITIVIDADE DE BIRKHOFF

JOSÉ HENRIQUE S. BRAZ[1,†] & VINíCIUS VIEIRA FÁVARO[1,‡]

[1]Faculdade de Matemática, UFU, MG, Brasil

[†]jhjosehenrique@hotmail.com, [‡]vvfavaro@gmail.com

**Abstract**

Neste trabalho estudaremos duas importantes noções da dinâmica linear. Mais precisamente, estudaremos as noções de hiperciclicidade e de sistemas dinâmicos topologicamente transitivos. Mostraremos que quando $X$ é um espaço normado de dimensão finita, então não existem operadores lineares hipercíclicos definidos em $X$. Logo tal noção é exclusiva da dimensão infinita. Mostraremos também o Teorema de transitividade de Birkhoff que garante quando estas duas noções são equivalentes.

## 1 Introdução

A dinâmica linear é uma área recente da Matemática e, como o próprio nome indica, ela consiste em estudar o comportamento das iteradas de transformações lineares. Em espaços de dimensão finita, o comportamento das iteradas já são bem conhecidos já que as tranformações lineares são bem descritas pela sua forma canônica de Jordan. Entretanto, um novo fenômeno aparece quando estamos em espaços de dimensão infinita: operadores lineares podem ter órbitas densas. Mais precisamente, seja $X$ um espaço vetorial topológico e $T \in \mathcal{L}(X)$, onde $\mathcal{L}(X)$ denota o conjunto de todos operadores lineares contínuos de $X$ em $X$. A *$T$-órbita* de um vetor $x \in X$ é o conjunto

$$O(T, x) = \{x, T(x), T^2(x), \ldots\}$$

e dizemos que $T$ tem órbita densa quando existe algum vetor $x \in X$ tal que o conjunto $O(T, x)$ é denso em $X$. Quando isso acontece, dizemos que o operador é *hipercíclico*. Note que para falarmos em hiperciclicidade de um operador definido em um espaço vetorial topológico $X$, é condição necessária $X$ ser um espaço separável, pois caso contrário, não existiria nenhum subconjunto denso e enumerável em $X$ e então nenhuma órbita poderia ser densa.

A seguir, serão apresentados alguns resultados que nos fornecem condições necessárias e suficientes para um operador linear ser hipercíclico.

## 2 Definições e resultados principais

**Definição 2.1.** Um *sistema dinâmico* é um par $(X, T)$ onde $X$ é um espaço métrico e $T\colon X \longrightarrow X$ é uma função contínua.

**Definição 2.2.** Um sistema dinâmico $T\colon X \longrightarrow X$ é *topologicamente transitivo* se para quaisquer $U, V \subset X$ abertos e não vazios, existe um $n \geq 0$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

**Proposição 2.1.** Seja $T\colon X \longrightarrow X$ uma função contínua no espaço métrico $X$ sem pontos isolados.

(a) Se $x \in X$ tem órbita densa sobre $T$, então $T^n(x), n \geq 1$ também tem órbita periódica densa sobre $T$.

(b) Se $T$ tem órbita densa então $T$ é topologicamente transitivo.

**Teorema 2.1** (Teorema da Transitividade de Birkhoff)**.** Seja $T\colon X \longrightarrow X$ uma função contínua no espaço métrico, separável e completo $X$ sem pontos isolados. Então as seguintes proposições são equivalentes:

(i) $T$ é topologicamente transitivo.

(ii) Existe $x \in X$ tal que $Orb(T, x)$ é denso em $X$.

Note que a implicação $(ii) \Rightarrow (i)$ sempre é verdadeira pelo item (b) da Proposição 2.1 já que, sob as hipóteses do Teorema 2.1, podemos aplicá-la. Entretanto, se retirarmos a hipótese de $X$ ser completo, a implicação $(i) \Rightarrow (ii)$ não é sempre verdadeira. No exemplo a seguir, tem-se uma função que é topologicamente transitiva mas não tem órbita densa, para algum ponto.

**Exemplo 2.1.** Seja $B_{\mathbb{C}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ com a topologia induzida de $\mathbb{C}$ e $T : B_{\mathbb{C}} \longrightarrow B_{\mathbb{C}}$ dado por $T(z) = z^2$. Agora considere $X = \{z \in \mathbb{C} : z^{2^n} = 1$, para algum $n \in \mathbb{N}\}$ e $T_X : X \longrightarrow X$ dado por $T_X(z) = T(z)$, isto é, $T_X$ é a restrição de $T$ ao conjunto $X$. O conjunto $X$ não é completo (por não ser fechado) e o operador $T_X$ é topologicamente transitivo mas nenhum vetor de $X$ tem órbita densa em relação a $T_X$.

A partir de agora, todos os operadores serão definidos em espaços de Fréchet separáveis.

**Definição 2.3.** Um operador $T : X \longrightarrow X$ é *hipercíclico* se existe $x \in X$ tal que $Orb(T, x) = \{x, T(x), \ldots, T^n(x), \ldots\}$ é denso em $X$. Nesse caso, $x$ é um vetor hipercíclico de $T$. O conjunto de todos os vetores hipercíclicos de $T$ será denotado por $HC(T)$.

Um dos exemplos clássicos de operador hipercíclico é dado pelo operador de Rolewicz.

**Exemplo 2.2.** Seja $\ell_p(1 \leq p < \infty)$ o espaço de Banach das sequências $p$-somáveis e para cada $a \in \mathbb{R}$, considere o operador $T_a : \ell_p \longrightarrow \ell_p$ definido por

$$T_a(\xi_1, \xi_2, \ldots) = a(\xi_2, \xi_3, \ldots), a > 1$$

Como já dito, a hiperciclicidade é um fenômeno exclusivo da dimensão infinita e tal resultado encontra-se no teorema a seguir:

**Teorema 2.2.** Seja $X$ um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(X)$. Então $T$ não é hipercíclico.

Exibir um vetor hipercíclico pode se tornar uma tarefa muito complicada o que nos faz buscar por outras alternativas para se mostrar que um operador é hipercíclico ou não. Seja $X$ um espaço de Fréchet separável e $T \in \mathcal{L}(X)$. Daí segue que $X$ não tem pontos isolados, é separável e é completo. Assim, pelo Teorema 2.1, podemos afirmar que

$$T \text{ é topologicamente transitivo } \Leftrightarrow \text{ existe } x \in X \text{ tal que } Orb(T, x) \text{ é denso } X \Leftrightarrow T \text{ é hipercíclico.}$$

Dessa forma, o teorema da transitividade de Birkhoff aplicado em espaços de Fréchet nos fornece uma caracterização para os operadores hipercíclicos.

**Teorema 2.3** (Teorema da Transitividade de Birkhoff)**.** Um operador $T$ é hipercíclico se, e somente se, $T$ é topologicamente transitivo.

## References

[1] BAYART, F. E MATHERON, É. - *Dynamics of linear operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[2] ERDMANN, K. G. E MANGUILLOT, A. P. - *Linear Chaos (Universitext)*, Springer, 2011.

**ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**
**UFG - Universidade Federal de Goiás**
**XI ENAMA - Novembro 2017** *149–150*

# CONSIDERAÇÕES SOBRE A LOCALIZAÇÃO DAS RAíZES DE EQUAÇÕES TRINOMIAIS

JÉSSICA V. SILVA[1,†] & VANESSA A. BOTTA[2,‡]

[1]FCT, UNESP, SP, Brasil, [2]DMC, UNESP, SP, Brasil

[†]ventura_jessica24@hotmail.com, [‡]botta@fct.unesp.br

**Abstract**

O principal objetivo deste trabalho é determinar o comportamento das raízes de alguns tipos de equações trinomiais que aparecem em alguns problemas da Matemática Financeira. Em adição, daremos condições necessárias e suficientes para garantir que todos os zeros do trinômio $\varphi(z) = z^n - \epsilon z^{n-1} + \epsilon - 1$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 1$ encontram-se no círculo unitário quando $\epsilon < \frac{n}{n-1}$ e quando $\epsilon \neq \frac{n}{n-1}$, mostrando que os zeros de $\varphi(z)$ são distintos.

## 1 Introdução

A determinação dos zeros de um polinômio de grau $n \in \mathbb{N}$, $n > 4$, é um dos grandes desafios da chamada Álgebra Clássica. No caso das equações trinomiais de grau $n$, representadas por

$$z^n + \alpha z^m + \beta = 0, \tag{1}$$

com naturais $m < n$ e $\alpha$ e $\beta$ constantes reais, grandes matemáticos, tais como Nekrassov em 1887, Herglotz em 1922, e Egerváry em 1930, já dedicaram-se ao estudo de suas soluções. Sendo que seus principais resultados estabelecem limitantes para o módulo dos zeros ou setores no plano complexo que contém os zeros.

Para alguns valores de $n, m, \alpha$ e $\beta$, a equação (1) é usada em alguns problemas da Matemática Financeira que envolvem a determinação da taxa de juros em séries uniformes de pagamentos.

Note que, uma solução para $n > 4$ pode ser obtida apenas por aproximação. Atualmente, computadores podem solucionar facilmente tal problema através de algoritmos numéricos. Porém, este fato não diminui a beleza algébrica de tal problema.

Neste sentido, o presente trabalho apresentará o estudo do comportamento das raízes da equação trinomial

$$\varphi(z) = z^n - \epsilon z^{n-1} + \epsilon - 1, \quad \epsilon \in \mathbb{R}, \quad \epsilon > 1. \tag{2}$$

Os resultados a seguir serão utilizados na prova dos principais resultados deste trabalho, mais detalhes encontram-se em Dilcher [1] e Milovanović [2].

**Teorema 1.1.** *Sejam $a > b > 0$ números reais e $n > m > 0$ inteiros. Então o número de zeros de $P(z) = bz^n - az^m + a - b$ em $|z| < 1$ é $m - mdc(m,n)$ se $\frac{a}{b} \geq \frac{n}{m}$ e $m$ se $\frac{a}{b} < \frac{n}{m}$.*

**Teorema 1.2 (Regra de Sinais de Descartes).** *Sejam $Z^+$ o número de zeros positivos do polinômio $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ e $S^-$ o número de mudanças de sinal da sequência dos coeficientes. Então, $S^- - Z^+$ é um número par não negativo.*

**Teorema 1.3 (Cauchy).** *Seja $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$ um polinômio com coeficientes complexos e $a_0 \neq 0$, e seja $r$ a única raiz positiva da equação $t^n - |a_{n-1}| t^{n-1} - \ldots - |a_1| t - |a_0| = 0$. Então, todos os zeros da equação $P(z) = 0$ encontram-se no disco $|z| \leq r$.*

## 2 Resultados Principais

Primeiramente, observe que $z = 1$ é raiz da equação (2).

**Lema 2.1.** *Sobre os zeros de* $\varphi(z) = z^n - \epsilon z^{n-1} + \epsilon - 1$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 1$, *temos:*

1. *Para* $n$ *par,* $\varphi(z)$ *tem dois zeros positivos e* $n-2$ *zeros não reais.*

2. *Para* $n$ *ímpar,* $\varphi(z)$ *tem dois zeros positivos, um zero negativo e* $n-3$ *zeros não reais.*

*Proof.* Pela regra de sinal de Descartes $\varphi(z)$ tem dois zeros positivos ou não tem zeros positivos. Como $\varphi(1) = 0$, concluímos que $\varphi(z)$ tem dois zeros positivos, $z = 1$ e $z = c$. Além disso, aplicando a regra de sinal de Descartes em $\varphi(-z)$, segue que para $n$ par, $\varphi(z)$ não tem zeros negativos e, para $n$ ímpar, $\varphi(z)$ tem um zero negativo. Portanto, para $n$ par, $\varphi(z)$ tem dois zeros positivos e $n-2$ zeros não reais e, para $n$ ímpar, $\varphi(z)$ tem dois zeros positivos, um zero negativo e $n-3$ zeros não reais. □

**Lema 2.2.** *O trinômio* $\varphi(z) = z^n - \epsilon z^{n-1} + \epsilon - 1$, $\epsilon, \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 1$, *pode ser representado por* $\varphi(z) = (z-1)Q(z)$, *onde* $Q(z) = z^{n-1} + (1-\epsilon)z^{n-2} + \ldots + (1-\epsilon)z + (1-\epsilon) = (z-c)R(z)$, *com* $R(z) = r_{n-2}z^{n-2} + r_{n-3}z^{n-3} + \ldots + r_1 z + r_0$, *com* $r_{n-2} = 1$ *e* $r_j = 1 - \epsilon + cr_{j+1}$ *para* $j = 0, 1, \ldots, n-3$.

**Teorema 2.1.** *Os zeros do trinômio* $\varphi(z) = z^n - \epsilon z^{n-1} + \epsilon - 1$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 1$, *são distintos, exceto no caso* $\epsilon = \frac{n}{n-1}$.

*Proof.* Observe que $\varphi'(z) = nz^{n-1} - (n-1)\epsilon z^{n-2}$ e $\varphi''(z) = (n-1)nz^{n-2} - (n-2)(n-1)\epsilon z^{n-3}$.

Suponha que $z_0 \in \mathbb{C}$ é zero de $\varphi(z)$ de multiplicidade $\nu$, $\nu > 1$. Assim, $\varphi'(z_0) = 0$ se e somente se $z_0 = 0$ ou $z_0 = \frac{(n-1)\epsilon}{n}$. Como $\varphi(0) = \epsilon - 1 \neq 0$, segue que $z_0 \neq 0$. Então, $z_0 = \frac{(n-1)\epsilon}{n}$. Ainda, $z_0 \in \mathbb{R}$ é um número positivo e $\varphi''(z) \neq 0$, é claro que os zeros não reais de $\varphi(z)$ são distintos. Além disso, sabemos que $\varphi(z)$ tem dois zeros positivos $z = 1$ e $z = c$, logo a multiplicidade ocorre quando $c = 1$ e, consequentemente, $z_0 = 1$, ou seja, $\epsilon = \frac{n}{n-1}, n \in \mathbb{N}$. □

**Teorema 2.2.** *Valem as seguintes afirmações:*

1. *Se* $\epsilon < \frac{n}{n-1}$, *todos os zeros do trinômio* $\varphi(z) = z^n - \epsilon z^{n-1} + \epsilon - 1$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 1$, *estão localizados em* $|z| \leq 1$. *Se* $\epsilon = \frac{n}{n-1}, n \in \mathbb{N}$, $z = 1$ *é um zero duplo de* $\varphi(z)$.

2. *Se* $\epsilon \geq \frac{n}{n-1}$, $\varphi(z) = z^n - \epsilon z^{n-1} + \epsilon - 1$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 1$, *tem* $n-1$ *zeros em* $|z| \leq 1$ *e um zero no intervalo* $(1, 2)$.

*Proof.* Segue do Teorema 1.1. □

**Teorema 2.3.** *Os zeros do trinômio* $\varphi(z) = z^n - \epsilon z^{n-1} + \epsilon - 1$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 1$, *encontram-se em* $|z| \geq \delta$, *onde* $\delta$ *é o único zero positivo de* $f(z) = z^n + \epsilon z^n - |\epsilon - 1|$. *Além disso, para* $n$ *ímpar,* $-\delta$ *é o único zero negativo de* $\varphi(z)$.

*Proof.* Basta aplicar o Teorema 1.3. □

Neste trabalho apresentamos resultados sobre o comportamento da raízes de uma classe especial de equações trinomiais, a qual é muito importante em alguns problemas da Matemática Financeira.

## References


[1] DILCHER, K.; NULTON, J. D. AND STOLARSKY, K. B. - The zeros of a certain family of trinomials. *Glasgow Mathematical Journal*, v. 34, n.1, p. 55-74.

[2] MILOVANOVIĆ, G. V.; MITRINOVIĆ, D. S. AND RASSIAS, TH. M. - *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros*, Singapore: World Scientific, 1994.