Livro de Resumos do IX ENAMA

Comissão Organizadora:

Raquel Lehrer - Unioeste
André Vicente - Unioeste
Clezio Aparecido Braga - Unioeste
Pedro Pablo Durand Lazo - Unioeste
Cícero Lopes Frota - UEM
Sandra Malta - LNCC

Home web: `http://www.enama.org/`

Apoio:

O ENAMA é um encontro científico anual com propósito de criar um fórum de debates entre alunos, professores e pesquisadores de instituições de ensino e pesquisa, tendo como áreas de interesse: Análise Funcional, Análise Numérica, Equações Diferenciais Parciais, Ordinárias e Funcionais.

Home web: `http://www.enama.org/`

O IX ENAMA é uma realização da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, em Cascavel, Paraná, organizado pelo Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas em parceria com Sociedade Paranaense de Matemática e o programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá.

Os organizadores do IX ENAMA desejam expressar sua gratidão aos órgãos e instituições que apoiaram e tornaram possível a realização do evento: UNIOESTE, Fundação Araucária, Caixa Econômica Federal, CAPES e CNPq. Agradecem também a todos os participantes e colaboradores pelo entusiasmo e esforço, que tanto contribuíram para o sucesso do IX ENAMA.

A Comissão Organizadora

Raquel Lehrer - Unioeste
André Vicente - Unioeste
Clezio Aparecido Braga - Unioeste
Pedro Pablo Durand Lazo - Unioeste
Cícero Lopes Frota - UEM
Sandra Malta - LNCC

A Comissão Científica

Alexandre Madureira - LNCC
Daniel Pelegrino - UFPB
Giovany Malcher Figueiredo - UFPA
Juan A. Soriano - UEM
Márcia Federson - USP - SC
Marco Aurélio Souto - UFCG
Pablo Braz e Silva - UFPE
Valdir Menegatto - USP - SC

ENAMA 2015

CADERNO DE RESUMOS

04 a 06 de Novembro 2015

Conteúdo

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *9–10*

ON A NONLINEAR THERMOELASTIC SYSTEM WITH NONLOCAL COEFFICIENTS

HAROLDO R. CLARK[1,†] & RONALD R. GUARDIA[1,‡]

[1]Universidade Federal Fluminense, IME, RJ, Brasil.

[†]hclark@vm.uff.br, [‡]ronaldramosmat@gamil.com

Abstract

This paper deals with the global existence and uniqueness of solutions, and uniform stabilization of the energy of an initial-boundary value problem for a thermoelastic system with nonlinear terms of nonlocal kind. The asymptotic stabilization of the energy of system (1) is obtained without any dissipation mechanism acting in the displacement variable u of the membrane equation.

1 Introduction

Suppose that Ω is a bounded and open set in $\mathbb{R}^n$ having a smooth boundary Γ and lying at one side of Γ. Let $Q = \Omega \times (0, \infty)$ and $\Sigma = \Gamma \times (0, \infty)$ its lateral boundary.

The motivations significants to our article are contained in Chipot-Lovar [1] and Límaco et al [2], and we investigate the following nonlinear coupled initial-boundary value system

$$\begin{array}{ll} u'' - M\left(\cdot, \cdot, |\nabla u|^2\right) \Delta u + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\theta = 0 & \text{in} \quad Q, \\ \theta' + \mathcal{B}\theta + (\mathbf{a} \cdot \nabla)u' = 0 & \text{in} \quad Q, \\ u = \theta = 0 & \text{on} \quad \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x), \;\; u'(x,0) = u_1(x), \;\; \theta(x,0) = \theta_0(x) & \text{in} \quad \Omega, \end{array} \tag{1}$$

where $M = M(x,t,\lambda) = M_1(x,t) + M_2(x,t,\lambda)$ is a real function defined on $\Omega \times [0,\infty) \times [0,\infty)$, $|\cdot|$ denotes the norm of the Lebesgue space $L^2(\Omega)$, the operator $\mathbf{a} \cdot \nabla$ is given by $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \partial_{x_i}$, being $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ a constant vector of $\mathbb{R}^n$, and the operator $\mathcal{B}$ is defined by

$$\mathcal{B}(t)\theta(\cdot,t) = -\sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}\left(\theta(\cdot,t),t\right) \partial^2_{x_i\,x_j}\theta(\cdot,t) \quad \text{with} \quad B_{ij} : L^1(\Omega) \times [0,\infty[\to \mathbb{R}.$$

The existence of global solutions for the mixed problem (1) is established imposing some restrictions on the norm of the initial data u_0, u_1 and θ_0. Actually, we suppose $u_0 \in H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, u_1, $\theta_0 \in H^1_0(\Omega)$, and define the following positive real constant

$$K_0 = \frac{1}{2}\left[|\nabla u_1|^2 + |\nabla \theta_0|^2 + C_0 f\left(|\nabla u_0|^2\right)\right] |\Delta u_0|^2,$$

which will have some restrictive conditions to be imposed later. Moreover, we also assume some hypotheses on the function M, and on the functionals B_{ij}. Namely, there are positive real constants m_0, L, B_0 and C_k for $k = 0, 1, 2$, and a negative real constant ρ, such that

$$\left| \begin{array}{l} M \in C^1\left(\overline{\Omega} \times [0,\infty) \times [0,\infty)\right), \quad 0 < m_0 \leq M(x,t,\lambda) \leq C_0\, f(\lambda), \quad M(x,t,\lambda) := M_1(x,t) + M_2(x,t,\lambda), \\ \partial_t M_1 \leq \rho < 0, \quad |\partial_t M_2|_{\mathbb{R}} \leq C_1\, g(\lambda), \quad |\partial_\lambda M|_{\mathbb{R}} \leq C_2\, h(\lambda), \\ f,\, g,\, h \in C^1\big([0,\infty);[0,\infty)\big) \text{ are strictly increasing,} \end{array} \right. \tag{2}$$

$$\left|\begin{array}{l} \mathrm{B}_{ij}: L^1(\Omega)\times[0,\infty[\to\mathbb{R},\ \ |B_{ij}(w,t)-B_{ij}(z,s)|_{\mathbb{R}}\le L(|w-z|_{L^2(\Omega)}+|t-s|_{\mathbb{R}}),\\ \forall\,(w,t),(z,s)\in L^2(\Omega)\times[0,T],\quad \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}B_{ij}(z,t)\xi_i\xi_j\ge B_0|\xi|^2_{\mathbb{R}^n},\ \forall(z,t)\in L^1(\Omega)\times(0,T),\ \forall\xi\in\mathbb{R}^n. \end{array}\right. \tag{3}$$

2 Main Results

Definition 2.1. *A global strong solution to the initial-boundary value problem* (1) *is a pair of functions* $\{u,\theta\}$ *defined on* $\Omega\times[0,\infty)$ *with real values, such that*

$$\begin{aligned} &u\in L^\infty_{loc}\big(0,\infty;\ H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega)\big),\ \ u'\in L^\infty_{loc}\big(0,\infty;H^1_0(\Omega)\big),\ \ u''\in L^\infty_{loc}\big(0,\infty;L^2(\Omega)\big),\\ &\theta\in L^\infty_{loc}\big(0,\infty;\ H^1_0(\Omega)\big)\cap L^2_{loc}\big(0,\infty;\ H^2(\Omega)\big),\ \ \theta'\in L^2_{loc}\big(0,\infty;L^2(\Omega)\big), \end{aligned}$$

and the functions $\{u,\,\theta\}$ *satisfy the system* (1) *almost everywhere.*

In these conditions we can state the main results of this paper.

Theorem 2.1. *Suppose* $u_0\in H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, $u_1,\,\theta_0\in H^1_0(\Omega)$ *and* $C_3\Big[g\Big(\dfrac{2C_\Omega K_0}{m_0}\Big)+h\Big(\dfrac{2C_\Omega K_0}{m_0}\Big)K_0\Big]<-\dfrac{\rho}{2}$, *where* C_3 *and* C_Ω *are positive real constants. Then there exists at least a global strong solution of system* (1), *provided the hypotheses* (4) *and* (5) *hold. Moreover, if* ℓ *is a real-valued continuous and increasing function defined on* $[0,\infty[$, *and there exists a positive real constant* C_4 *such that* $|\nabla M(x,t,\lambda)|_{\mathbb{R}}\le C_4\ell(\lambda)$, *then the solution of problem* (1) *is unique.*

The energy defined by the strong solution of system (1) is given by

$$E(t)=\frac{1}{2}\Big\{|u'(t)|^2+|\theta(t)|^2+\int_\Omega M\big(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2\big)|\nabla u(t)|^2_{\mathbb{R}}dx\Big\}.$$

On the uniform stabilization of the energy we have the following result.

Theorem 2.2. *Let* $\{u,\theta\}$ *be a global strong solution pair of system* (1). *Then the energy of system* (1) *satisfies*

$$E(t)\le 3C_\Omega K(0)\,\exp\Big\{-\frac{4\tau}{3}t\Big\}\quad \textit{for all}\quad t\ge 0,$$

where the constant $K(0)$ *is the value at* $t=0$ *of the function*

$$K(t)=\frac{1}{2}\Big\{|\nabla u'(t)|^2+|\nabla\theta(t)|^2+\int_\Omega M\big(\cdot,t,|\nabla u(t)|^2\big)|\Delta u(t)|^2_{\mathbb{R}}dx\Big\},$$

$$\tau=\min\Big\{\delta,\ \frac{B_0}{2},\ \frac{\gamma_0}{4C_0C_5}\Big\},\quad 0<\delta<\min\Big\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2C_6},\ \frac{\gamma_0/4}{C_0f(2C_\Omega K_0/m_0)+(\|a\|^2n^2)/(4B_0)}\Big\},$$

γ_0 *is a positive constant,* $C_5=\sup\Big\{f(\varphi);\ |\varphi|_{L^\infty_{loc}(0,\infty,H^1_0(\Omega))}\le C\Big\}$ *and* $C_6=C_\Omega+1/m_0$.

References

[1] M. Chipot & B. Lovat, *On the asymptotic behaviour of some nonlocal problems*, Positivity Vol. 3, No. 1 (1999), 65-81.

[2] J. Límaco, H. R. Clark & L. A. Medeiros, *Vibrations of elastic string with nonhomogeneous material*, J. Math. Anal. Appl., 344 (2008), 806-820.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *11–12*

STANDING WAVES FOR A SYSTEM OF NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATIONS IN $\mathbb{R}^N$

JOÃO MARCOS DO Ó[1,†], OLíMPIO MIYAGAKI[2,‡] & CLÁUDIA SANTANA[3,§].

[1]Dept. of Mathematics, Federal University of Paraíba, PB, Brazil, [2]Dept. of Mathematics, Federal University of Juiz de Fora, MG, Brazil, [3]Dept. of Exact Sciences and Technology, State University of Santa Cruz, BA.

[†]jmbo@pq.cnpq.br, [‡]ohmiyagaki@gmail.com, [§]santana@uesc.br

Abstract

In this paper we study the existence of bound state solutions for stationary Schrödinger systems of the form

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = K(x)F_u(u,v) & \text{in} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + V(x)v = K(x)F_v(u,v) & \text{in} \quad \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{S}$$

where $N \geq 3$, V and K are bounded continuous nonnegative functions, and $F(u,v)$ is a C^1 and p-homogeneous function with $2 < p < 2N/(N-2)$. We give a special attention to the case when V may eventually vanishes. Our arguments are based on penalization techniques, variational methods and Moser iteration scheme.

Mathematics Subject Classification: 35J60, 35J20, 35Q55.
Key words. Elliptic systems, variational methods, vanishing potential, nonlinear Schrödinger equations, bounded states.

1 Introduction

Our work was motivated by some papers that have appeared in the recent years concerning the study of nonlinear Schrödinger equations by using purely variational approach since the seminal work [6]. We refer the reader to [1, 2, 4, 5, 7] and their bibliography for further studies. In order to apply variational arguments and to overcome the lack of compactness of the associated energy functional some authors have assumed that the potential is coercive and bounded away from zero. Here, in this paper our main purpose is to extend and complement the results in [3] to System (S) with possible vanishing potential.

In the rest of this paper we will assume that $V, K : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ are bounded, nonnegative and continuous functions satisfying:

(V_0)

$$\lambda_1 := \inf_{\{(u,v)\in H, ||(u,v)||_L = 1\}} ||(u,v)||_H^2 > 0,$$

where

$$H := \left\{ (u,v) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\left(u^2+v^2\right) \mathrm{d}x < +\infty \right\}$$

is a Hilbert space when endowed with the inner product

$$\big\langle (u,v),(\phi,\varphi)\big\rangle_H := \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \phi + V(x)u\phi + \nabla v \nabla \varphi + V(x)v\varphi)\,\mathrm{d}x, \quad \forall\ (u,v),(\phi,\varphi) \in H$$

and its correspondent usual norm and $L := L^2(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$ equipped with the usual norm.

For the potential V and the function K, firstly, we assume that

(V_1) There exist $\lambda > 0$ and $R > 0$, such that

$$\begin{cases} \exists\, x_o \in B_R(0) \text{ such that } K(x_o) > 0 \text{ and} \\ 0 < \mu \leq\ K(x) \leq V(x) \leq \lambda < k_p := \dfrac{2p}{p-2}, \quad \forall\, |x| \geq R. \end{cases}$$

We also impose for K, a similar hyphotesis used in [3], namely,

(V_2) There exist $\gamma > \mu$ and $R > 0$, such that $\sup\limits_{|x|\geq R} K(x)\dfrac{R^{2(N-2)}}{|x|^{2(N-2)}} \leq \gamma$.

In order to state our main result let us introduce the assumptions on the nonlinearity F that we assume throughout this article:

(F_0) $F : ([0,\infty) \times [0,\infty)) \to \mathbb{R}$ is a $p-$homogeneous function of class C^1 with $2 < p < 2^*$, and there exists $0 < c_0 \leq \mu^{p/2}$ such that

$$|\ F_u(u,v)\ | + |\ F_v(u,v)\ | \leq c_0\,(u^{p-1} + v^{p-1}), \quad \forall\, u,\, v \geq 0.$$

(F_1) $F_u(0,1) = F_v(1,0) = 0.$

(F_2) $F_u(1,0) = F_v(0,1) = 0.$

(F_3) $F_{uv}(u,v) > 0, \quad \forall\, u, v > 0.$

2 Main Result

Theorem 2.1. *Suppose that (V_0) and $(F_0) - (F_3)$ are satisfied. Then, there exists $\gamma^* > 0$ such that (S) has a positive weak solution for any potentials that satisfy $(V_1) - (V_2)$ with $\gamma \leq \gamma^*$.*

References

[1] ALVES, C. O. - Local Mountain Pass for a class of elliptic system. *J. Math. Anal. Appl.*,**335**, 135-150, 2007.

[2] ALVES, C. O.; DO Ó, J. M.; SOUTO, M. A. S. Local mountain pass for a class of elliptic problems involving critical growth. *Nonlinear Anal.* **46**, 495-510, 2001.

[3] ALVES, C. O. AND SOUTO, M. A. S. Existence of solutions f or a class of elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ with vanishing potentials. *J. Differential Equations.* **252**, 5555-5568, 2012.

[4] AMBROSETTI, A.; FELLI, V. AND MALCHIODI, A. Ground states of nonlinear Schrödinger equations with potentials vanishing at infinity. *J. Eur. Math. Soc.* **7**, 117-144, 2005.

[5] AMBROSETTI, A. AND WANG, Z. -Q. Nonlinear Schrödinger equations with vanishing and decaying potentials. *Differential Integral Equations.* **18**, 1321-1332, 2005.

[6] RABINOWITZ, P. H. On a class of nonlinear Schrödinger equations. *Z. Angew. Math. Phys.* **43**, 270-291, 1992.

[7] SU, J.; WANG, Z. -Q. AND WILLEM, M. Nonlinear Schrödinger equations with unbounded and decaying radial potentials. *Commun. Contemp. Math.* **9** No.4 571-583, 2007.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *13–14*

SHARP GLOBAL WELL-POSEDNESS FOR SUPERCRITICAL DISPERSIVE EVOLUTION EQUATIONS

ADEMIR PASTOR[1,†].

[1]IMECC, UNICAMP, SP, Brasil.

[†]apastor@ime.unicamp.br

Abstract

We discuss the sharp global well-posedness in the energy space for some dispersive models in the supercritical regime. The main results are established in view of the best constant appearing in the standard Gagliardo-Nirenberg inequality. The ideas can also be applied to non-local models and systems.

1 Introduction and Main Results

We study global well-posedness for some nonlinear dispersive models of the form

$$u_t + Au + f(u) = 0, \tag{1}$$

where A is a linear operator and f is a nonlinearity. Equations as (1) include the well-known

$$iu_t + \Delta u + |u|^p u = 0 \qquad \text{(Schrödinger)},$$

$$u_t + u_{xxx} + u^k u_x = 0 \qquad \text{(Korteweg-de Vries)},$$

$$u_t + D^\alpha u + u^k u_x = 0 \qquad \text{(Benjamin-Ono)},$$

$$u_t + \mathcal{H}u_{xx} + u_{xyy} + u^k u_x = 0 \qquad \text{(BO-ZK)},$$

and many others arising in mathematical physics. Our plan is to present some recent developments for the above equations providing the global well-posedness in the energy space. The kind of results we are interested in are of the form.

Theorem 1.1. *Let E and M be the energy and mass associated with the Korteweg-de Vries equation and Q a ground state solution. Let $k > 4$ and $0 < s_k = (k-4)/2k < 1$. Suppose that*

$$E[u_0]^{s_k} M[u_0]^{1-s_k} < E[Q]^{s_k} M[Q]^{1-s_k}, \;\; E[u_0] \geq 0. \tag{2}$$

If (2) holds and

$$\|\partial_x u_0\|_{L^2}^{s_k} \|u_0\|_{L^2}^{1-s_k} < \|\partial_x Q\|_{L^2}^{s_k} \|Q\|_{L^2}^{1-s_k}, \tag{3}$$

then for any t as long as the solution exists,

$$\|\partial_x u(t)\|_{L^2}^{s_k} \|u(t)\|_{L^2}^{1-s_k} < \|\partial_x Q\|_{L^2}^{s_k} \|Q\|_{L^2}^{1-s_k}, \tag{4}$$

and thus the solution exists globally in time.

The main idea to establish the above theorem is to use the Gagliardo-Nirenberg inequality

$$\|u\|^{k+2}_{L^{k+2}(\mathbb{R})} \leq K^{k+2}_{\text{opt}} \|\nabla u\|^{\frac{k}{2}}_{L^2(\mathbb{R})} \|u\|^{2+\frac{k}{2}}_{L^2(\mathbb{R})},$$

with the optimal constant $K_{\text{opt}} > 0$ given by

$$K^{k+2}_{\text{opt}} = \frac{k+2}{2\|\psi\|^{k}_{L^2}}$$

where ψ is the unique non-negative, radially-symmetric, decreasing solution of the equation

$$\frac{k}{4}\Delta\psi - \left(1 - \frac{k}{4}\right)\psi + \psi^{k+1} = 0.$$

We can also obtain similar results for systems. For instance, if we consider the following 3D Schrödinger system

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u + (|u|^2 + \beta|v|^2)u = 0, \\ iv_t + \Delta v + (|v|^2 + \beta|u|^2)v = 0, \end{cases} \tag{5}$$

then we can establish the following.

Theorem 1.2. *Let $(u, v) \in C((-T_*, T^*); H^1 \times H^1)$ be the solution of (5) with initial data $(u_0, v_0) \in H^1 \times H^1$, where $I := (-T_*, T^*)$ is the maximal time interval of existence. Assume that*

$$M(u_0, v_0)E(u_0, v_0) < M(P, Q)E(P, Q). \tag{6}$$

The following statements hold.

(i) If

$$M(u_0, v_0)(\|\nabla u_0\|^2_2 + \|\nabla v_0\|^2_2) < M(P, Q)(\|\nabla P\|^2_2 + \|\nabla Q\|^2_2) \tag{7}$$

then

$$M(u_0, v_0)(\|\nabla u(t)\|^2_2 + \|\nabla v(t)\|^2_2) < M(P, Q)(\|\nabla P\|^2_2 + \|\nabla Q\|^2_2) \tag{8}$$

and the solution exists globally in time, that is, $I = (-\infty, \infty)$.

(ii) If

$$M(u_0, v_0)(\|\nabla u_0\|^2_2 + \|\nabla v_0\|^2_2) > M(P, Q)(\|\nabla P\|^2_2 + \|\nabla Q\|^2_2) \tag{9}$$

then

$$M(u_0, v_0)(\|\nabla u(t)\|^2_2 + \|\nabla v(t)\|^2_2) > M(P, Q)(\|\nabla P\|^2_2 + \|\nabla Q\|^2_2). \tag{10}$$

Moreover, if u_0 and v_0 are radial then I is finite and the solution blows up in finte time.

References

[1] HOLMER, J. AND HOUDENKO, S. - A sharp condition for scattering of the radial 3D cubic nonlinear Schrödinger equation. *Commun. Math. Phys.* **282**, 435-467, 2008.

[2] FARAH, L.G., LINARES, F. AND PASTOR, A. - The supercritical generalized KdV equation: global well-posedness in the energy space and below. *Math. Res. Lett.*, **18**, 357-377, 2011.

[3] PASTOR A. - Weak Concentration and wave operator for a 3D coupled nonlinear Schrödinger system. *J. Math. Phys.*, **56**, 021507, 2015.

MÉTODO DE DIFERENÇAS COM USO DE *SPLINE* INCONDICIONALMENTE ESTÁVEL DE $O(K^2 + H^4)$ PARA RESOLVER A EQUAÇÃO HIPERBÓLICA LINEAR DE SEGUNDA ORDEM COM UMA VARIÁVEL ESPACIAL

ADILANDRI M. LOBEIRO[1,†], JUAN A. SORIANO[2,‡], CLICIA G. PEREIRA[1,§] & ANALICE C. BRANDI[3,§§].

[1]Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, PR, Brasil, [2]Departamento de Matemática, UEM, PR, Brasil,
[3]Departamento de Matemática e Computação, UNESP, SP, Brasil.

[†]alobeiro@utfpr, [‡]jaspalomino@uem.br, [§]cliciapereira@utfpr.edu.br, [§§]analice@fct.unesp.br

Resumo

Neste trabalho, a equação hiperbólica linear de segunda ordem é resolvida usando um novo método de diferenças de três níveis baseado na interpolação *spline* quártica na direção espacial e discretização de diferenças finitas na direção temporal. A análise de estabilidade do regime é realizada. O método proposto é de precisão de segunda ordem na variável temporal e de precisão de quarta ordem na variável espacial.

1 Introdução

Considere uma equação hiperbólica linear de segunda ordem em uma variável espacial dada por

$$u_{tt}(x,t) + 2\alpha u_t(x,t) + \beta^2 u(x,t) \quad = \quad u_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad \text{tal que} \quad \alpha > \beta > 0. \tag{1}$$

sobre uma região $\Omega = [a < x < b] \times [t > 0]$, com condições iniciais

$$u(x,0) \quad = \quad \phi(x), \qquad u_t(x,0) \quad = \quad \psi(x), \tag{2}$$

e condições de fronteira

$$u(a,t) \quad = \quad g_0(t), \qquad u(b,t) \quad = \quad g_1(t), \tag{3}$$

onde α e β são constantes.

Assumimos que $\phi(x)$ e $\psi(x)$ são funções contínuas e deriváveis em x. Para $\alpha > 0$, $\beta = 0$ e $\alpha > \beta > 0$, a equação (1) representa uma equação de onda amortecida e uma equação de telégrafo, respectivamente, veja [1].

Nos últimos anos, uma enorme quantidade de pesquisas tem sido feitas no desenvolvimento e implementação de métodos modernos de alta resolução para a solução numérica da equação hiperbólica linear de segunda ordem (1), veja [1]-[3], por exemplo.

2 Resultados Principais

Considere (x_i, t_i) os pontos da malha onde $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \cdots, N$ e $t_j = jk$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Para cada x_i, $i = 1, \ldots, N-1$ usando a expansão de Taylor na variável temporal, obtém-se os seguintes métodos de diferenças

$$u(x_i, t_j) \quad = \quad \frac{u(x_i, t_{j+1}) + 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1})}{4} + O(k^2), \tag{4}$$

$$u_{xx}(x_i, t_j) \quad = \quad \frac{u_{xx}(x_i, t_{j+1}) + u_{xx}(x_i, t_{j-1})}{2} + O(k^2), \tag{5}$$

$$u_t(x_i,t_j) \;=\; \frac{u(x_i,t_{j+1})-u(x_i,t_{j-1})}{2k}+O(k^2), \tag{6}$$

$$u_{tt}(x_i,t_j) \;=\; \frac{u(x_i,t_{j+1})-2u(x_i,t_j)+u(x_i,t_{j-1})}{k^2}+O(k^2)\ . \tag{7}$$

Substituindo as equações (4), (5), (6) e (7) em (1) e observando que

$$\left(1+\frac{1}{12}\delta_x^2\right)[u_{xx}(x_i,t_{j+1})+u_{xx}(x_i,t_{j-1})]=\frac{1}{h^2}\delta_x^2\,[u(x_i,t_{j+1})+u(x_i,t_{j-1})]+O(h^4),$$

tem-se

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k^2}\left(1+\frac{1}{12}\delta_x^2\right)\delta_t^2u(x_i,t_j)+\frac{\alpha}{k}\left(1+\frac{1}{12}\delta_x^2\right)\overline{\delta}_tu(x_i,t_j)+\\
&+\frac{\beta^2}{4}\left(1+\frac{1}{12}\delta_x^2\right)[u(x_i,t_{j+1})+2u(x_i,t_j)+u(x_i,t_{j-1})]-\frac{1}{2h^2}\delta_x^2\,[u(x_i,t_{j+1})+u(x_i,t_{j-1})]\\
=\;&\left(1+\frac{1}{12}\delta_x^2\right)f(x_i,t_j),
\end{aligned} \tag{8}$$

com ordem de precisão $O(k^2+h^4)$, onde $i=1,\ldots,N-1$ e $j=1,2,\ldots$, sendo

$$\begin{aligned}
\overline{\delta_t}u(x_i,t_j) &= u(x_i,t_{j+1})-u(x_i,t_{j-1})\\
\delta_tu(x_i,t_j) &= u(x_i,t_{j+\frac12})-u(x_i,t_{j-\frac12})\\
\delta_t^2u(x_i,t_j) &= \delta_t(\delta_tu(x_i,t_j))=u(x_i,t_{j+1})-2u(x_i,t_j)+u(x_i,t_{j-1})\\
\delta_xs(x_i,t_j) &= s(x_{i+\frac12},t_j)-s(x_{i-\frac12},t_j)\\
\delta_x^2s(x_i,t_j) &= \delta_x(\delta_x(x_i,t_j))=s(x_{i+1},t_j)+s(x_{i-1},tj)
\end{aligned}$$

Note-se que o método (8) é um método implícito de três níveis. Para iniciar qualquer cálculo, é necessário saber o valor de $u(x_i,t_j)$ nos pontos nodais do primeiro nível de tempo, isto é, no instante $t=t_1=k$. Expandindo em série de Taylor em $t=k$, têm-se

$$u(x,k) \;=\; u(x,0)+ku_t(x,0)+\frac{k^2}{2}u_{tt}(x,0)+\frac{k^3}{6}u_{ttt}(x,0)+O(k^4). \tag{9}$$

Utilizando os valores iniciais, a partir de (1), pode-se calcular

$$u_{tt}(x,0) \;=\; \phi_{xx}(x,0)+f(x,0)-2\alpha u_t(x,0)-\beta^2u(x,0) \tag{10}$$

e

$$u_{ttt}(x,0) \;=\; -2\alpha u_{tt}(x,0)+\psi_{xx}(x,0)+f_t(x,0)-\beta^2u_t(x,0) \tag{11}$$

Assim, usando os valores iniciais, (9), (10) e (11), pode-se obter a solução numérica de u em $t=k$.

Referências

[1] TWIZELL, E. H. - *An explicit difference method for the wave equation with extended stability range*, BIT Numerical Mathematics 19 (3) (1979) 378-383.

[2] MOHANTY, R. K. AND JAIN, M. K. AND GEORGE, K. - *On the use of high order difference methods for the system of one space second order non-linear hyperbolic equations with variable coefficients*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 72(2)(1996)421-431.

[3] CIMENT, M. AND LEVENTHAL, S.H - *Anote on the operator compact implicit method for the wave equation*, Mathematics of Computation 32(1)(1978) 143-147.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *17–18*

ON THE DEFINITION OF ALMOST SUMMING OPERATORS

GERALDO BOTELHO[1,†] & JAMILSON R. CAMPOS[2,‡]

[1]Faculdade de Matemática , UFU, MG, Brasil, [2]Dep. de Ciências Exatas, UFPB, PB, Brasil.

[†]botelho@ufu.br, [‡]jamilson@dcx.ufpb.br

Abstract

We give a final solution to the problem concerning the equivalence, in the definition of almost summing operators, between the inequality and the transformation of vector-valued sequences.

1 Introduction

For $1 \leq p < +\infty$, it is well known that the following conditions are equivalent for a bounded linear operator $u\colon E \longrightarrow F$ between Banach spaces:

• u sends weakly p-summable sequences in E to absolutely p-summable sequences in F;

• There is a constant $C > 0$ such that, for all $n \in \mathbb{N}$ and $x_1, \ldots, x_n \in E$, the following holds:

$$\left(\sum_{j=1}^{k} \|u(x_j)\|^p\right)^{1/p} \leq C \cdot \sup_{\varphi \in E', \|\varphi\| \leq 1} \left(\sum_{j=1}^{k} |\varphi(x_j)|^p\right)^{1/p}.$$

In this case the operator is said to be *absolutely p-summing*. The class of all absolutely p-summing operators is one of the most successful classes of linear operators ever studied. Let us explain how a close relative of this class was introduced in [2]: an E-valued sequence $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ is said to be *almost unconditionally summable* if the series $\sum_{j=1}^{\infty} r_j x_j$ converges in $L_2([0,1], X)$, where $(r_j)_{j=1}^{\infty}$ are the usual Rademacher functions. In [2, p. 234] it is stated that the following are equivalent for an operator $u\colon E \longrightarrow F$:

• u sends weakly 2-summable sequences in E to almost unconditionally summable sequences in F;

• There is a constant $C > 0$ such that, for all $n \in \mathbb{N}$ and $x_1, \ldots, x_n \in E$, the following holds:

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{k} r_j(t) u(x_j)\right\|^2 dt\right)^{1/2} \leq C \cdot \sup_{\varphi \in E', \|\varphi\| \leq 1} \left(\sum_{j=1}^{k} |\varphi(x_j)|^2\right)^{1/2}.$$

In this case the operator is said to be *almost summing*. It just so happens that the two conditions above are *not* equivalent in general. This was first noted in [1]. Considering that [2] is the bible of the area, this mistake has caused a lot of trouble; a situation that remains to this day because a second corrected edition of [2] has never appeared. As a rule, almost summing linear and nonlinear operators have been studied with the definition based on the inequality. The problem of the equivalence of the inequality with the transformation of vector-valued sequences was partially solved in [1]: the inequality holds if and only if u sends weakly 2-summable in E to unconditionally 2-summable sequences in F (see the definition below). But the transformation of weakly 2-summable sequences remains unsolved. The purpose of this work is to settle this question.

2 Main Result

Given a Banach space E and $p \geq 1$, let $(\ell_p^w(E), \|\cdot\|_{w,p})$ and $(\mathrm{Rad}(E), \|\cdot\|_{L_2})$ denote, respectively, the Banach spaces of weakly p-summable and almost unconditionally summable E-valued sequences. In order to accomplish our task we have to consider two other sequence spaces that are related to the former spaces: a sequence $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ in E is said to belong to:

• $\ell_p^u(E)$ if $\lim\limits_{k\to\infty} \|(x_j)_{j=k}^{\infty}\|_{w,p} = 0$,

• $\mathrm{RAD}(E)$ if $\sup\limits_{k} \left\| \sum\limits_{j=1}^{k} r_j x_j \right\|_{L^2([0,1],E)} < +\infty$.

A sequence belongs to $\ell_1^u(E)$ if and only if it is unconditionally summable [3, Proposition 8.3]. For this reason, sequences in $\ell_p^u(E)$ are called *unconditionally p-summable*. It is well known that $\ell_p^u(E)$ is a closed subspace of $\ell_p^w(E)$, $\mathrm{Rad}(E) \subseteq \mathrm{RAD(E)}$ and that $\mathrm{Rad}(E) = \mathrm{RAD}(E)$ if and only if E does not contain a copy of c_0 (see [4, Section V.5]).

Our main result, which makes clear how almost summing linear operators transform vector-valued sequences, is the following:

Theorem 2.1. *The following conditions are equivalent for a bounded linear operator $u\colon E \longrightarrow F$ between Banach spaces:*

(a) $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \mathrm{Rad}(F)$ *whenever* $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2^u(E)$.

(b) $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \mathrm{RAD}(F)$ *whenever* $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2^w(E)$.

(c) *There is a constant $C > 0$ such that, for all $n \in \mathbb{N}$ and $x_1, \ldots, x_n \in E$, the following holds:*

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{k} r_j(t) u(x_j) \right\|^2 dt \right)^{1/2} \leq C \cdot \sup_{\varphi \in E', \|\varphi\| \leq 1} \left(\sum_{j=1}^{k} |\varphi(x_j)|^2 \right)^{1/2}. \tag{1}$$

In this case, the linear operators

$$\widetilde{u}\colon \ell_2^u(E) \longrightarrow \mathrm{Rad}(F)\ ,\ \widetilde{u}\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right) = (u(x_j))_{j=1}^{\infty}\ ,\ \text{and}$$

$$\overline{u}\colon \ell_2^w(E) \longrightarrow \mathrm{RAD}(F)\ ,\ \overline{u}\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right) = (u(x_j))_{j=1}^{\infty}\ ,$$

are continuous and

$$\|\widetilde{u}\| = \|\overline{u}\| = \inf\{C > 0 : (1) \text{ holds}\}.$$

Remark 2.1. (a) The theorem above holds, *mutatis mutandis*, for continuous multilinear operators. We stated the linear case for simplicity.
(b) The whole problem was caused by the fact that the space $\mathrm{Rad}(E)$ fails the condition of being finitely determined, and the space $\mathrm{RAD}(E)$ solves the problem because it is finitely determined.

References

[1] BOTELHO, G. - *Almost summing polynomials*, Math. Nachr. **211** (2000), 25–36.

[2] DIESTEL, J.; JARCHOW, H. AND TONGE, A. - *Absolutely Summing Operators*, Cambridge University Press, 1995.

[3] DEFANT, A. AND FLORET, K. - *Tensor Norms and Operator Ideals*, North-Holland, 1993.

[4] VAKHANIA, N. N.; TARIELADZE, V. I. AND CHOBANYAN, S. A. - *Probability Distributions on Banach Spaces*, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *19–20*

ON A SINGULAR MINIMIZING PROBLEM

GREY ERCOLE[1,†] & GILBERTO A. PEREIRA[1,‡]

[1]ICEx, UFMG, MG, Brasil.
The authors thank the support of Fapemig and CNPq.
[†]grey@mat.ufmg.br, [‡]gilbertoapereira@yahoo.com.br

Abstract

We present recent results on a minimizing problem associated with the singular problem

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = \lambda u^{-1} & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $p > 1$, $\lambda > 0$ and Ω is a bounded and smooth domain of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$.

1 Introduction

Let $p > 1$ be fixed and let $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, be a bounded and smooth domain. For each $0 < q < 1$ let us define

$$\lambda_q(\Omega) := \inf\left\{ \|\nabla u\|_p^p : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{and} \quad \int_\Omega |u|^q \, \mathrm{d}x = 1 \right\},$$

where $\|\cdot\|_r$ denotes the standard norm of the $L^r(\Omega)$, $1 \leq r \leq \infty$.

As proved in [1], $\lambda_q(\Omega)$ is achieved by a positive function $u_q \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ satisfying

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = \lambda_q(\Omega)\,|u|^{q-2}\,u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

in the weak sense. It follows from [5, Theorem 1.1 (i)] that $u_q \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ for some $\alpha \in (0,1)$.

2 Main Results

We report recent results, that we have obtained in [4], on a minimizing problem associated with the limit problem of (1), as $q \to 0^+$. In that paper we first showed that

$$0 < \mu(\Omega) := \lim_{q \to 0^+} \lambda_q(\Omega)\,|\Omega|^{\frac{p}{q}} < \infty. \tag{1}$$

Then, by combining (1) with the results of [1], we proved that

$$\mu(\Omega) = \min\left\{ \|\nabla u\|_p^p : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ and } \lim_{q \to 0^+} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |u|^q \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}} = 1 \right\} \tag{2}$$

and that the minimum is reached by a function $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, for some $\alpha \in (0,1)$, which is positive in Ω and satisfies: (i) $u = \lim_{q \to 0^+} |\Omega|^{\frac{1}{q}}\, u_q$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$; (ii) $-\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = \mu(\Omega)\,|\Omega|^{-1}\,u^{-1}$ in Ω and (iii) $\int_\Omega \log u \mathrm{d}x = 0$.

Exploring (2) we proved that $\mu(\Omega)^{-1}$ is the best constant C in the following log-Sobolev type inequality

$$\exp\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \log|v|^p \,\mathrm{d}x\right) \le C\,\|\nabla v\|_p^p, \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

and that $\mu(\Omega)^{-1}$ is reached if, and only if, v is a scalar multiple of u, which is the unique case where the inequality becomes an equality.

It is easy to check that for each fixed $\lambda > 0$ the function $u_\lambda := \left(\frac{\lambda|\Omega|}{\mu(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} u$ is a positive weak solution of

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(|\nabla v|^{p-2}\nabla v\right) = \lambda v^{-1} & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

The function u_λ is, in fact, the unique positive solution of (3). This uniqueness result follows from a simple and well-known inequality involving vectors of $\mathbb{R}^N$. Existence and regularity of weak solutions for (3) were first studied in the particular case $p = 2$ (see [3, 6, 8]), whereas the case $p > 1$ has received more attention in the last decade (see [2, 5, 7] and references therein). Since the differentiability of the functional $v \mapsto \lambda\int_\Omega \log|v|\,\mathrm{d}x$ is a delicate question, existence of u_λ has been obtained by nonvariational methods, as fixed point theorems or the sub-super solution method. As for regularity, it is proved in [5, Theorem 2.2 (ii)] that $u_\lambda \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, for some $\alpha \in (0,1)$.

Another consequence of (2), obtained in [4], is that the formal energy functional $J_\lambda : W_0^{1,p}(\Omega) \to (-\infty,\infty]$, defined by

$$J_\lambda(v) := \begin{cases} \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^p\,\mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega \log|v|\,\mathrm{d}x, & \text{if } \displaystyle\int_\Omega \log|v|\,\mathrm{d}x \in (-\infty,\infty) \\ \infty, & \text{if } \displaystyle\int_\Omega \log|v|\,\mathrm{d}x = -\infty, \end{cases}$$

attains its minimum value $\dfrac{\lambda\,|\Omega|}{p}\left(1 - \log\left(\frac{\lambda|\Omega|}{\mu(\Omega)}\right)\right)$ only at the functions u_λ and $-u_\lambda$.

The last result in [4] is the determination of when $\lambda_q(\Omega)$ and $\|u_q\|_\infty$ either go to 0 or go to ∞ or remain bounded from above and from below, as $q \to 0^+$.

References

[1] ANELLO, G., FARACI, F. AND IANNIZZOTTO, A. - On a problem of Huang concerning best constants in Sobolev embeddings. *Ann. Mat. Pura Appl.* **194**, 767-779, 2015.

[2] CHU, Y. AND GAO, W. - Existence of solutions to a class of quasilinear elliptic problems with nonlinear singular terms. *Boundary Value Problems*, **2013:229**, 2013.

[3] CRANDALL, M.G., RABINOWITZ, P.H. AND TARTAR, L. - On a Dirichlet problem with singular nonlinearity. *Comm. Partial Differential Equations*, **2**, 193-222, 1977.

[4] ERCOLE, G. AND PEREIRA, G. A. - On a singular minimizing problem. Submitted.

[5] GIACOMONI, J., SCHINDLER, I. AND TAKÁČ, P. - Singular quasilinear elliptic equations and Hölder regularity. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* , **350**, 383–388, 2012.

[6] LAZER, A. C. AND MCKENNA, P. J. - On a singular nonlinear elliptic boundary value problem. *Proc. Am. Math. Soc.*, **111**, 721-730, 1991.

[7] MOHAMMED, A. - Positive solutions of the p-Laplace equation with singular nonlinearity. *J. Math. Anal. Appl.*, **352**, 234-245, 2009.

[8] STUART, C. A. - Existence and approximation of solutions of nonlinear elliptic equations. *Math. Z.*, **147**, 53-63, 1976.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *21–22*

ON NONLINEAR WAVE EQUATIONS OF CARRIER TYPE

M. MILLA MIRANDA[1,†], A. T. LOUREDO[1,‡] & L. A. MEDEIROS[2,§]

[1]DM, UEPB, PB, Brasil, [2]IM, UFRJ, RJ, Brasil.

[†]milla@im.ufrj.br, [‡]aldotl@cct.uepb.edu.br, [§]luizadauto@gmail.com

Abstract

In this work we study the existence, uniqueness and decay for solutions of the Problem (*). In our approach, we employ Faedo-Galerkin method associated with Tartar methods [8] argument of compactness cf. [1] and [7].

1 Introduction

In the present work we investigate the following nonlinear mixed problem of Carrier type:

$$(*)\qquad \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M\left(\displaystyle\int_\Omega u^2\,dx\right)\Delta u + \delta\left|\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|^\rho \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \ \text{ in } \ Q;\\ u = 0 \ \text{ on } \ \Sigma;\\ u(0) = u^0,\ u'(0) = u^1 \ \text{ in } \ \Omega, \quad \text{when } 0 \le \rho < 1,\ \delta > 0. \end{array}\right.$$

with $0 \le \rho < 1$ and $\delta > 0$ a parameter. The above mixed problem (*) was investigated from mathematical point of view in [4], [3] among others.

2 Notation, Hypothesis and Main Results

We represent by $L^2(\Omega)$ the Lebesgue space of real functions u which has square integrable in Ω, with scalar product and norm defined by:

$$(u,v) = \int_\Omega uv\,dx \quad \text{and} \quad |u|^2 = \int_\Omega |u|^2\,dx.$$

By $H^m(\Omega)$ we denote the Sobolev space of order $m \in \mathbb{N}$. By $H_0^1(\Omega)$ we represent the distributions of $H^1(\Omega)$ which has trace zero on Γ. The scalar product and norm in $H_0^1(\Omega)$, are given by:

$$((u,v)) = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx \quad \text{and} \quad ||u||^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx.$$

We also consider the Banach space $L^p(\Omega)$, $p \in \mathbb{R}$, $p \ge 1$; in particular we consider $p = \rho + 2$, $0 \le \rho < 1$. We also consider the Banach space $L^p(\Omega)$, $p \in \mathbb{R}$, $p \ge 1$; in particular we consider $p = \rho + 2$, $0 \le \rho < 1$. We have the know results:

$$|v| \le a_0||v||_{L^{\rho+2}(\Omega)}\,,\ \forall\, v \in L^{\rho+2}(\Omega)$$

and

$$|v| \le a_1||v||,\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

To proceed we will consider the following hypotheses:

(H1) $\quad 0 \le \rho < 1$, $\delta > 0$;

(H2) $\quad M \in C^1([0,\infty))$, $M(\lambda) \ge m_0 > 0$, for all $\lambda \ge 0$.

- $\dfrac{|M'(\lambda)|\sqrt{\lambda}}{\sqrt{M(\lambda)}} \le k_0$, for all $\lambda \ge 0$ (k_0 constant).

- $M(\lambda) \leq L_0\, M^{\frac{\rho+2}{2}}(\lambda)$, for all $\lambda \geq 0$ (L_0 constant).

(H3) Restriction on Initial Data: $u^0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u^1 \in H_0^1(\Omega) \cap L^{2(\rho+1)}(\Omega)$ satisfying:

$$\frac{|u^1|^2}{M(|u^0|^2)} + ||u^0||^2 < (\lambda^*)^2, \text{ where } \lambda^* = \left[\frac{(\rho+2)\delta}{6a_0^{\rho+2} L_0 k_0}\right]^{\frac{1}{1-\rho}}.$$

Theorem 2.1. *Assume that $\Gamma \in C^{2m}$, m an integer with $2m \geq \frac{n}{2}$ and that hypotheses $(H1)$-$(H3)$ are satisfied. Then, there exists a unique function u in the class*

$$u \in L^\infty_{loc}(0,\infty; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega)); \tag{2.2}$$

$$u' \in L^\infty_{loc}(0,\infty; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega)); \tag{2.3}$$

$$u'' \in L^\infty_{loc}(0,\infty; L^2(\Omega)) \tag{2.4}$$

such that u satisfies

$$u'' - M(|u|^2)\triangle u + \delta|u'|^\rho u' = 0 \textit{ in } L^\infty_{loc}(0,\infty; L^2(\Omega)) \tag{2.5}$$

$$u(0) = u^0,\ \ u'(0) = u^1 \tag{2.6}$$

3 Proof of Theorem 2.1

In our approach, we employ Faedo-Galerkin method associated with Tartar methods [8] argument of compactness cf. [1] and [7]. We employ Galerkin's method with a special basis for $[H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)] \cap L^{2(\rho+1)}(\Omega)$, that is a spectral basis [7].

References

[1] Aubin, J.P. *Un théorème de compacité,* C.R. Ac. Sc. Paris, t. 256 (1963) p.2044-2046.

[2] Carrier, G. *On the Nonlinear Vibration Problem of Elastic String,* Q. Appl. Math. 3 (1945) p. 157-165.

[3] Lopes Frota, C.; Goldstein, J.A. *Some Nonlinear Equation with Accustic Boundary Conditions,* J. of Diff. Equation, V. 164, (2000), p. 92-109.

[4] Lopes Frota, C.; Tadeu Cousin, A.; Larkin, N. *Existence of Global Solutions and Energy Decay for the Carrier Equation with Dissipative Term,* Differential and Integral Equations, V. 12, no. 4 (July 1999) p. 453-469.

[5] Medeiros, L. A., Limaco, J. and Frota, C. L.,*On wave equations without global a priori estimates*, Bol. Soc. Paran. Mat. 30, (2012), 19-32.

[6] Medeiros, L.A.; Limaco, L.; Frota, C. *On Wave Equations Without Global a Priori Estimates,* Bul. Soc. Paran. MatemÃ¡tica, Vol. 30, (2012), p. 19-32.

[7] Milla Miranda, M. *Análise Espectral em Espaços de Hilbert,* Ed. Eduepb-Editora da Livraria da Física, Campina Grande, PB, Brasil, 2013.

[8] Tartar, L.,*Topics in Nonlinear Analysis*, Univ. Paris Sud, Dep. Math., Orsay, France, 1978.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *23–24*

A DIFFUSIVE LOGISTIC EQUATION WITH MEMORY IN BESSEL POTENTIAL SPACES

ALEJANDRO CAICEDO[1,†] & ARLÚCIO VIANA[1,‡]

[1]Departamento de Matemática ,UFS, Itabaiana, SE, Brasil.

[†]alejocro@gmail.com, [‡]arlucioviana@ufs.br

Abstract

We are concerned with the study of the local existence, uniqueness, regularity, positivity and continuous dependence of solutions to a logistic equation with memory whenever initial datum is taken in Bessel potential spaces.

1 Introduction

The logistic equation subjected to memory effects is an interesting model in populational dynamics. Gopalsamy [2] investigated the asymptotic behavior of nonconstant solutions of:

$$\frac{dx}{dt} = x(t)\left[a - b\int_{-\infty}^{t} H(t-s)x(s)ds.\right] \tag{1}$$

There, a and b are positive numbers, and H is a delay kernel representing the manner in which the past history of the species influences the current growth rate.

Taking into account dispersal effects, the logistic equation with the memory starting from the starting point is given by

$$u_t(t,x) = \Delta u(t,x) + u(t,x)\left[a - b\int_0^t \lambda(t-s)u(s,x)ds\right], \tag{2}$$

where Δ denotes the spatial Laplace operator and u_t is the temporal derivative. Nevertheless, we consider a more general Cauchy-Dirichlet problem:

$$u_t(t,x) = \Delta u(t,x) + u(t,x)\left[a - b\int_0^t \lambda(t-s)(-\Delta)^{\beta}u(s,x)ds\right], \text{ in } (0,\infty)\times\Omega; \tag{3}$$

$$u = 0, \text{ on } (0,\infty)\times\partial\Omega; \tag{4}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \text{ in } \Omega; \tag{5}$$

in a sufficiently regular domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Here, $(-\Delta)^{\beta}$ denotes the fractional power of the sectorial operator $-\Delta$ (see [4]). Notice that (3) reduces to (2) whenever $\beta = 0$. Moreover, $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ performs as a delay kernel representing the manner in which the history of the species influences the current growth rate.

Under certain conditions, the existence of solutions to the problem

$$u_t(t,x) = \Delta u(t,x) + u(t,x)\left[a - bu - \int_0^t \lambda(t-s)u(s,x)ds\right], \tag{6}$$

$$\partial u/\partial n = 0 \tag{7}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{8}$$

for $(t,x) \in (0,\infty)\times\Omega$ was proved by Schiaffino [5] and Yamada [7]. In [5] the initial datum was taken in $\{\varphi \in C^1(\overline{\Omega}) : \partial u/\partial n = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$ whereas initial datum in $\{\varphi \in W^{2,p}(\Omega) : \partial u/\partial n = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$ was considered in [7].

We rather take the initial datum in the Bessel potential space $H_0^{\sigma,p} = \{\varphi \in H^{\sigma,p}(\Omega) : \varphi|_{\partial\Omega} = 0\}$, with $1 < p < \infty$ and some $0 < \sigma < 2$. Since it can be regarded as the complex interpolation space $[W^{2,p} \cap W_0^{1,p}, L^p(\Omega)]_{\frac{\sigma}{2}}$ for $0 < \sigma < 2$, $\sigma \neq \frac{1}{p}$ (see [6, Section 4.3.3]), we allow more irregular initial data than those considered in the works by Schiaffino [5] and Yamada [7].

For technical reasons we assume that

$$1 < p < \infty, \ \sigma \in (0,2) \setminus \{\frac{1}{p}\} \text{ e } \sigma \geq 2\beta + \frac{N}{2p}. \tag{H}$$

Under this condition we use the results contained in [6, Section 4.6] to obtain the following imbeddings:

$$H_0^{\sigma,p} \hookrightarrow H^{\sigma,p}(\Omega) \hookrightarrow H^{2\beta,2p}(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega). \tag{9}$$

By a mild solution for (3)- (5) we mean a continuous function $u : [0,\tau] \longrightarrow H_0^{\sigma,p}$ that is a solution of the following integral equation:

$$u(t) = e^{\Delta t}u_0 + \int_0^t e^{\Delta(t-s)}u(s)\left[a - b\int_0^s \lambda(s-r)(-\Delta)^\beta u(r)dr\right]ds, \tag{10}$$

where $(e^{\Delta t})_{t\geq 0}$ stands for the heat semigroup.

Our main result is stated as follows:

Theorem 1.1 ([2])**.** *Let $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a locally integrable function. Assume that (H) holds. Given $v_0 \in H_0^{\sigma,p}$, there exist $\tau > 0$ and $r > 0$ such that for every $u_0 \in B_{H_0^{\sigma,p}}(v_0, r)$ the Cauchy-Dirichlet problem (3)-(5) possesses a unique mild solution $u : [0,\tau] \to H_0^{\sigma,p}$. Furthermore, $u \in C((0,\tau]; H_0^{\sigma',p})$, for every $\sigma' \in [\sigma, 2) \setminus \{\frac{1}{p}\}$, and the solutions depend continuously on the initial data.*

Roughly speaking, the proof of Theorem 1.1 is performed by using semigroup estimates, nonlinear estimates and the contraction principle. Therefore, in the case of $\beta = 0$, we rely upon the fact of $e^{\Delta t}\varphi \geq 0$, whenever $\varphi \geq 0$, and use a contradiction argument to conclude that: if u_0 is positive then the solution u obtained in Theorem 1.1 is also positive as long as it exists.

References

[1] A. Caicedo and A. Viana, *A diffusive logistic equation with memory in Bessel potential spaces*, Bulletin of the Australian Mathematical Society.

[2] A. Caicedo and A. Viana, *Positive solutions for a logistic equation with memory*, (preprint).

[3] K. Gopalsamy, *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics, in: Mathematics and its Applications*, vol. 74, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1992.

[4] D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lectures Notes in Mathematics **840**, Springer-Verlag, Berlin, (1980).

[5] A. Schiaffino, *On a diffusion Volterra equation*, Nonlinear Anal. **3** (5), (1979), 595-600.

[6] H. Triebel, *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[7] Y. Yamada, *On a certain class of semilinear Volterra diffusion equations*, J. Math. Anal. Appl. **88**, (1982), 433-451.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *25–26*

RESULTADOS DE MULTIPLICIDADE PARA UMA EQUAÇÃO ANISOTRÓPICA COM CRESCIMENTO SUBCRÍTICO OU CRÍTICO

ANTONIO SUÁREZ[1,†], GIOVANY FIGUEIREDO[2,‡] & JOÃO R. SANTOS JÚNIOR[2,§]

[1]Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Fac. de Matemáticas, Univ. de Sevilla, Sevilla, España,
[2]ICEN, Faculdade de Matemática, UFPA, Pa, Brasil.

[†]suarez@us.es, [‡]giovany_ufpa@yahoo.com.br, [§]joaojunior@ufpa.br

Resumo

Neste trabalho apresentamos resultados de multiplicidade para uma equação anisotrópica estacionária com termo de reação do tipo côncavo-convexo e crescimento subcrítico ou crítico em um domínio limitado. Nossa abordagem está baseada na teoria de Gênero e em uma versão do Princípio de Concentração de Compacidade de Lions para espaços de Sobolev Anisotrópicos.

1 Introdução

Neste trabalho estamos interessados em resultados de multiplicidade de soluções não-triviais para as seguintes classes de problemas anisotrópicos

$$(P1_\lambda) \qquad \begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \lambda |u|^{q-2}u \text{ em } \Omega, \\ \\ u \in D_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega), \quad q \in (1, p_N) \end{cases}$$

e

$$(P2_\lambda) \qquad \begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \lambda |u|^{q-2}u + |u|^{p^*-2}u \text{ em } \Omega, \\ \\ u \in D_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega), \quad q \in (1, p_1), \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado e suave em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, λ é um parâmetro positivo,

$$1 < p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_N, \qquad \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} > 1,$$

$$D_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) := \{u \in L^{p^*}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{p_i}(\Omega); i = 1, ..., N\}, \quad \overrightarrow{p} = (p_1, ..., p_N)$$

e

$$p^* := \frac{N}{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i}\right) - 1} = \frac{N\overline{p}}{N - \overline{p}},$$

onde $\overline{p}$ denota a média harmônica $\overline{p} = N/\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i}\right)$. Ao longo de todo o trabalho, assumimos que $p_N < p^*$.

Observe que o operador anisotrópico é uma generalização do operator laplaciano. De fato, quando $p_i = 2$ para todo $i = 1, ..., N$, então

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \Delta u.$$

Nos últimos anos um esforço considerável tem sido devotado ao estudo de problemas anisotrópicos. Sem qualquer esperança de ser completos, mencionamos as referências [1], [2], [3], [4], [5], [6] and [7].

2 Resultados Principais

Nossos principais resultados associados ao problema $(P1_\lambda)$ são os seguintes:

Teorema 2.1. *Assumimos que* $q \in (1, p_1)$. *Então, o problema* $(P1_\lambda)$ *tem infinitas soluções, para todo* $\lambda \in (0, +\infty)$.

Teorema 2.2. *Assumimos que* $q \in [p_1, p_N)$. *Então, para cada* $k \in \mathbb{N}$, *existe* $\lambda_k > 0$ *tal que o problema* $(P1_\lambda)$ *admite ao menos* k *pares de soluções, para todo* $\lambda \in (\lambda_k, +\infty)$.

Com relação ao problema $(P2_\lambda)$ temos o seguinte resultado:

Teorema 2.3. *Assumimos que* $q \in (1, p_1)$. *Então, existe* $\lambda^* > 0$ *tal que o problema* $(P2_\lambda)$ *admite infinitas soluções, para todo* $\lambda \in (0, \lambda^*)$.

Referências

[1] Alves, C.O. and El Hamidi, A. - *Existence of solution for a anisotropic equation with critical exponent.*, Differential Integral Equations, **21** (2008), 25-40.

[2] Di Castro, A. and Montefusco, E. - *Nonlinear eigenvalues for anisotropic quasilinear degenerate elliptic equations*, Nonlinear Anal., **70** (2009), 4093-4105.

[3] El Hamidi, A. and Rakotoson, J.M. - *Extremal functions for the anisotropic Sobolev inequalities*, Ann. Inst. H. Poincaré Annal. Non Linéaire, **24** (2007), 741-756.

[4] Fragalà, I., Gazzola, F. and Kawohl, B. - *Existence and nonexistence results for anisotropic quasilinear elliptic equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **21** (2004), 715-734.

[5] Rákosnik, J. - *Some remarks to anisotropic Sobolev spaces I*, Beiträge zur Analysis, **13** (1979), 55-68.

[6] Rákosnik, J. - *Some remarks to anisotropic Sobolev spaces II*, Beiträge zur Analysis, **13** (1981), 127-140.

[7] Troisi, M. - *Teoremi di inclusione per spazi di Sobolev non isotropi*, Ricerche Mat., **18** (1969), 3-24.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *27–28*

RESULTADO DE CONVERGÊNCIA PARA UMA FORMULAÇÃO RESIDUAL FREE BUBBLE MULTIESCALA APLICADA A UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍPTICOS NÃO LINEARES COM COEFICIENTES OSCILATÓRIOS

MANUEL J. C. BARREDA[1,†] & ALEXANDRE L. MADUREIRA[2,3,‡,§]

[1]Universidade Federal do Paraná, UFPR, PR, Brasil, [2] Laboratório Nacional de Computação Científica , LNCC, RJ, Brasil, [3]Fundação Getúlio Vargas, FGV, RJ, Brasil.

[†]barreda@ufpr.br, [‡]alm@lncc.br, [§]alexandre.madureira@fgv.br

Resumo

Propomos neste trabalho uma extensão da metodologia residual free bubble para o estudo do problema de homogeneização numérica associado a uma classe de problemas elípticos não lineares com coeficientes oscilatórios. Para validar nossa proposta numérica, apresentaremos um resultado de convergência.

1 Introdução

Em muitos problemas em ciências e engenharia, por exemplo, o processo de condução de calor em um material compósito, é necessário resolver o problema não linear a seguir.

$$-\text{div}[\alpha_\epsilon(x)b(u^\epsilon)\nabla u^\epsilon] = f \quad \text{em} \quad \Omega, \qquad u^\epsilon = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \tag{1}$$

onde $\alpha_\epsilon(x)$ pode ser oscilatório, e $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é uma região poligonal.
Note que o modelo (1) representa uma extensão natural do problema elíptico linear com coeficientes oscilatórios, quando o fluxo em (1) é dado por $\alpha_\epsilon(x)\nabla u_\epsilon$.
Mostra-se [1] que o problema homogeneizado associado a (1) tem a forma:

$$-\text{div}[b(u)A\nabla u] = f \quad \text{em} \quad \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \qquad (A \quad \text{é matriz constante}) \tag{2}$$

Como o método tradicional de Galerkin não é indicado para o estudo numérico das equações lineares ou não lineares com coeficientes oscilatórios [2] e [3], resulta natural a procura de procedimentos numéricos eficientes para tratar este tipo de equações. Dentre os métodos que se mostraram eficientes, destacamos o Multiscale Finite Element Method (MsFEM) [3], por ter mais afinidade com a nossa proposta numérica.
O *método residual-free bubbles* (RFB) é um técnica de elementos finitos de dois níveis introduzido por Brezzi, Franca e Russo através dos artigos [2] e [4], inicialmente proposto para a procura de soluções numéricas estáveis e acuradas em problemas de difusão-convecção com a parte convectiva dominante. Mais tarde, o método RFB foi utilizado para o tratamento de outros tipos de equações, tais como a equação de difusão linear com coeficientes oscilatórios, desenvolvido por [1]. Uma vez que o RFB funcionou com êxito para o caso linear multiescala (ver [1]), resulta natural pensar em sua extensão para o tratamento do caso multiescala não linear (1).
O problema variacional associado a (1) consiste em achar $u^\epsilon \in H_0^1(\Omega)$ de maneira que

$$\int_\Omega \alpha_\epsilon(x)b(u_\epsilon)\nabla u_\epsilon.\nabla v\,dx = \int_\Omega fv\,dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3}$$

Assumiremos que $\alpha_\epsilon(.) : \Omega \to \mathbb{R}$ é mensurável, e que existem constantes positivas α_0 e α_1 tai que: $0 < \alpha_0 \leq \alpha_\epsilon(x) \leq \alpha_1$ quase sempre em Ω. Assumiremos também que $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e pertencente a $W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ e que é limitada

inferiormente por uma constante positiva b_0.
Sejam $T_h = \{K\}$ uma partição de Ω em elementos finitos K, e, associado a T_h, o subespaço $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ das funções contínuas seccionalmente lineares. O método de elementos finitos clássico de Galerkin consiste em procurar uma solução numérica para (2) no espaço V_h. Já o método RFB procura a solução no espaço aumentado, ou enriquecido, $V_r = V_h \oplus V_b$, onde o espaço bolha é dado por: $V_b = \{v \in H_0^1(\Omega); v|_K \in H_0^1(K), \forall K \in T_h\}$. Isto significa encontrar $u_r = u_h + u_b \in V_r$, onde $u_h \in V_h$ e $u_b \in V_b$ resolve

$$\int_\Omega \alpha_\epsilon(x) b(u_h + u_b)\nabla(u_h + u_b).\nabla v_h \, dx = \int_\Omega f v_h \quad \forall v_h \in V_h \tag{4}$$

$$-\text{div}[\alpha_\epsilon(x) b(u_h + u_b)\nabla(u_h + u_b)] = f \quad \text{em} \quad K, \forall K \in T_h. \tag{5}$$

2 Resultados Principais

A partir de (3) e (5), na linha do RFB, propomos a seguir uma formulação numérica que irá resolver o problema de homogeização numérica associado ao problema (1). Seja $u_h \in V_h$ tal que

$$\sum_{K \in T_h} \int_K \alpha_\epsilon(x) b(u_h)\nabla u_h.\nabla v + \sum_{K \in T_h} \int_K \alpha_\epsilon(x) b(u_h)\nabla u_b.\nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \ \forall \, v \in V_h, \tag{1}$$

onde $u_b \in H_0^1(K)$ é solução do problema local sobre o elemento K:

$$-\text{div}[\alpha_\epsilon(x) b(u_h)\nabla u_b] = f + \text{div}[\alpha_\epsilon(x) b(u_h)\nabla u_h] \quad \text{em} \quad K, \quad u_b = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial K.$$

Teorema 2.1. *Seja $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,\infty}(\Omega)$ a solução fraca do problema homogeneizado (2), seja u_h a solução de (1), e sejam $\alpha_\epsilon(.)$ e $b(.)$ como acima. Então, para $h > 0$ suficientemente pequeno, existe uma constante C, que independe de h, tal que*

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C(M)[(\sqrt{(\frac{\epsilon}{h})^3} + \frac{\epsilon}{h} + \sqrt{\frac{\epsilon}{h}}\,) + h]. \tag{2}$$

Referências

[1] PANKOV, A. - *G-convergence and homogenization of nonlinear partial differential operators.*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2010.

[2] BREZZI, F. - *Multiscale finite element methods.*, Chapman and Hall/CRC Res. Notes Math., 69-82, 2000.

[3] EFENDIEV, Y. AND HOU, T. Y. - *Multiscale finite element methods*, Applied Mathematical Sciences, vol. 4, Springer, New York, 2009.

[4] FRANCA, L. AND RUSO, A. - Deriving upwinding, mass lumping and seridual-free bubbles.. *Appl. Math. Lett.*, **9**, 83-88, 1996.

[5] SANGALLI, L. - Capturing small scales in elliptic problems using a residual free bubble ¯nite element method and simulation. *A SIAM Interdisciplinar Journal*, **1**, 485-503, 2003.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *29–30*

DIFFERENTIABLE POSITIVE DEFINITE KERNELS ON TWO-POINT HOMOGENEOUS SPACES

VICTOR S. BARBOSA[1,†] & VALDIR A. MENEGATTO[2,‡]

[1]ICMC-USP, São Carlos - SP, Brasil. Author partially supported by CNPq, under grant 141908/2015-7,
[2]ICMC-USP, São Carlos - SP, Brasil. Author partially supported by FAPESP, under grant 2014/00277-5

†victorrsb@gmail.com, ‡menegatt@icmc.usp.br

Abstract

In this work we study continuous kernels on compact two-point homogeneous spaces which are positive definite and zonal (isotropic). Such kernels were characterized by R. Gangolli some forty years ago and are very useful for solving scattered data interpolation problems on the spaces. In the case the space is the d-dimensional unit sphere, J. Ziegel showed in 2013 that the radial part of a continuous positive definite and zonal kernel is continuously differentiable up to order $\lfloor (d-1)/2 \rfloor$ in the interior of its domain. The main issue here is to obtain a similar result for all the other compact two-point homogeneous spaces.

1 Introduction

Let $\mathbb{M}^d$ denote a d dimensional compact two-point homogeneous space. It is well known that spaces of this type belong to one of the following categories ([5]): the unit spheres S^d, $d = 1, 2, \ldots$, the real projective spaces $\mathbb{P}^d(\mathbb{R})$, $d = 2, 3, \ldots$, the complex projective spaces $\mathbb{P}^d(\mathbb{C})$, $d = 4, 6, \ldots$, the quaternionic projective spaces $\mathbb{P}^d(\mathbb{H})$, $d = 8, 12, \ldots$, and the Cayley projective plane $\mathbb{P}^d(Cay)$, $d = 16$. Standard references containing all the basics about two-point homogeneous spaces that will be needed here are [4] and others mentioned there.

In this work, we will deal with real, continuous, positive definite and zonal (isotropic) kernels on $\mathbb{M}^d$. The positive definiteness of a kernel K on $\mathbb{M}^d$ will be the standard one: it requires that

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} c_\mu c_\nu K(x_\mu, x_\nu) \geq 0,$$

whenever n is a positive integer, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ are distinct points on $\mathbb{M}^d$ and $c_1, c_2, \ldots, c_n$ are real scalars. The continuity of K can be defined through the usual (geodesic) distance on $\mathbb{M}^d$, here denoted by $|xy|$, $x, y \in \mathbb{M}^d$. We will assume such distance is normalized so that all geodesics on $\mathbb{M}^d$ have the same length 2π. Since $\mathbb{M}^d$ possesses a group of motions G_d which takes any pair of points (x, y) to (z, w) when $|xy|=|zw|$, zonality of a kernel K on $\mathbb{M}^d$ will refer to the property

$$K(x, y) = K(Ax, Ay), \quad x, y \in \mathbb{M}^d, \quad A \in G_d.$$

A zonal kernel K on $\mathbb{M}^d$ can be written in the form

$$K(x, y) = K_r^d(\cos |xy|/2), \quad x, y \in \mathbb{M}^d,$$

for some function $K_r^d : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, the *radial* or *isotropic part* of K. A result due to Gangolli ([2]) established that a continuous zonal kernel K on $\mathbb{M}^d$ is positive definite if and only if

$$K_r^d(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(d-2)/2,\beta} P_k^{(d-2)/2,\beta}(t), \quad t \in [-1, 1],$$

in which $a_k^{(d-2)/2,\beta} \in [0, \infty)$, $k \in \mathbb{Z}_+$ and $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(d-2)/2,\beta} P_k^{(d-2)/2,\beta}(1) < \infty$. Here, $\beta = (d-2)/2, -1/2, 0, 1, 3$, depending on the respective category $\mathbb{M}^d$ belongs to, among the five we have mentioned in the beginning of this section. The symbol $P_k^{(d-2)/2,\beta}$ stands for the Jacobi polynomial of degree k associated with the pair $((d-2)/2, \beta)$.

2 Main Result

Gneiting ([3]) conjectured that the radial part of a continuous, positive definite and zonal kernel on S^d is continuously differentiable in $(-1,1)$ up to order $\lfloor (d-1)/2 \rfloor$ (largest integer not greater than $(d-1)/2$). The conjecture was ratified by Ziegel ([6]).

The main result to be proved in this work is described below. It is the first step extension of Ziegel's results to compact two-point homogeneous spaces.

Theorem 2.1 ([1]). *If K is a continuous, positive definite and zonal kernel on $\mathbb{M}^d$, then the radial part K_r^d of K is continuously differentiable on $(-1,1)$. The derivative $(K_r^d)'$ of K_r^d in $(-1,1)$ satisfies a relation of the form*

$$(1-t^2)(K_r^d)'(t) = f_1(t) - f_2(t), \quad t \in (-1,1),$$

in which f_1 and f_2 are the radial parts of two continuous, positive definite and zonal kernels on some compact two-point homogeneous space $\mathbb{M}$ which is isometrically embedded in $\mathbb{M}^d$. The specifics on d and $\mathbb{M}$ in each case are these ones: $\mathbb{M}^d = S^d$: $d \geq 3$ and $\mathbb{M} = S^{d-2}$; $\mathbb{M}^d = \mathbb{P}^d(\mathbb{R})$: $d \geq 3$ and $\mathbb{M} = \mathbb{P}^{d-2}(\mathbb{R})$; $\mathbb{M}^d = \mathbb{P}^d(\mathbb{C})$: $d \geq 4$ and $\mathbb{M} = \mathbb{P}^{d-2}(\mathbb{C})$; $\mathbb{M}^d = \mathbb{P}^d(\mathbb{H})$: $d \geq 8$, $\mathbb{M} = \mathbb{P}^{d/2-2}(\mathbb{C})$, when $d \in 8\mathbb{Z}_+ + 8$ and $\mathbb{M} = \mathbb{P}^{d/2}(\mathbb{C})$, when $d \in 8\mathbb{Z}_+ + 12$; $\mathbb{M}^d = \mathbb{P}^{16}(Cay)$: $\mathbb{M} = S^2$.

After we apply the previous theorem to a certain kernel, the resulting functions f_1 and f_2 in the decomposition of the derivative of the radial part of the kernel end up being the radial parts of positive definite kernels on a compact two-point homogeneous space of dimension lower than the dimension of the original one. In particular, we may apply the theorem to the functions f_1 and f_2 in order to reach higher order derivatives for the radial part of the original kernel and so on. The process ends with the exhaustion of the dimension of the original compact two point homogeneous space. A careful analysis of this procedure leads to the following extension of Theorem 2.1 (the symbol $\lfloor \cdot \rfloor$ stands for the usual ceiling function).

Theorem 2.2 ([1]). *The following properties regarding the differentiability on $(-1,1)$, of the radial part K_r^d of a continuous, positive definite and zonal kernel K on $\mathbb{M}^d$, hold: $\mathbb{M}^d = S^d$: K_r^d is of class $C^{\lfloor (d-1)/2 \rfloor}$; $\mathbb{M}^d = \mathbb{P}^d(\mathbb{R})$: K_r^d is of class $C^{\lfloor (d-1)/2 \rfloor}$; $\mathbb{M}^d = \mathbb{P}^d(\mathbb{C})$: K_r^d is of class $C^{(d-2)/2}$; $\mathbb{M}^d = \mathbb{P}^d(\mathbb{H})$: K_r^d is of class $C^{(d-4)/4}$ if $d \in 8\mathbb{Z}_+ + 8$, and of class $C^{d/4}$ if $d \in 8\mathbb{Z}_+ + 12$; $\mathbb{M}^d = \mathbb{P}^{16}(Cay)$: K_r^{16} is of class C^1.*

References

[1] BARBOSA, V.S. AND MENEGATTO, V.A. - *Differentiable positive definite functions on two-point homogeneous spaces*, arXiv:1505.00029

[2] GANGOLLI, R. - *Positive definite kernels on homogeneous spaces and certain stochastic processes related to Lévy's Brownian motion of several parameters.* Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.) 3 (1967), 121-226.

[3] GNEITING, T. - *Strictly and non-strictly positive definite functions on spheres.* Bernoulli 19 (2013), no. 4, 1327-1349.

[4] KUSHPEL, A. AND TOZONI, S.A. - *Entropy and widths of multiplier operators on two-point homogeneous spaces.* Constr. Approx. 35 (2012), no. 2, 137-180.

[5] WANG, HSIEN-CHUNG - *Two-point homogeneous spaces.* Ann. Math. 55 (1952), no. 2, 177-191.

[6] ZIEGEL, J. - *Convolution roots and differentiability of isotropic positive definite functions on spheres.* Proc. Amer. Math. Soc. 142 (2014), no. 6, 2063-2077.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *31–32*

SURJECTIVE POLYNOMIAL IDEALS

S. BERRIOS[1,†], G. BOTELHO[1,‡] & P. RUEDA[2,§]

[1]Faculdade de Matemática, UFU, MG, Brasil, [2]Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Valencia, Spain.

[†]soniles@famat.ufu.br, [‡]botelho@ufu.br, [§]pilar.rueda@uv.es

Abstract

Surjectivity plays a fundamental role in the theory of ideals of linear operators (see [3, Section 4.7]). The widest theory of ideals of polynomials was born as a generalization to the non linear context of the successful linear theory of operator ideals, and has been developed in the last decade. While the surjectivity of ideals of linear operator is a very well-known matter, the surjectivity of ideals of polynomials has not been studied yet. Our aim is to introduce surjective ideals of homogeneous polynomials between Banach spaces. To do so we define the surjective hull of a polynomial ideal and prove the main properties of this hull procedure. As an application we prove some properties related to surjectivity of multiple p-summing polynomials and p-dominated polynomials.

1 Results

Throughout the work E, F, G and H are Banach spaces. The symbol $\mathcal{P}(^nE;F)$ stands for the space of continuous n-homogeneous polynomials from E to F.

A *polynomial ideal* is a subclass $\mathcal{Q}$ of the class of all continuous homogeneous polynomials between Banach spaces such that, for every $n \in \mathbb{N}$ and Banach spaces E and F, the component $\mathcal{Q}(^nE;F) := \mathcal{P}(^nE;F) \cap \mathcal{Q}$ satisfies

(a) $\mathcal{Q}(^nE;F)$ is a linear subspace of $\mathcal{P}(^nE;F)$ which contains the n-homogeneous polynomials of finite type,
(b) If $u \in \mathcal{L}(G;E)$, $P \in \mathcal{Q}(^nE;F)$ and $v \in \mathcal{L}(F;H)$, then $v \circ P \circ u \in \mathcal{Q}(^nG;H)$.

Given a Banach space E, we shall consider the canonical surjection

$$Q_E \colon \ell_1(B_E) \longrightarrow E \ , \ Q_E\left((\lambda_x)_{x \in B_E}\right) := \sum_{x \in B_E} \lambda_x x.$$

Definition 1.1. Let $\mathcal{Q}$ be a polynomial ideal. A polynomial $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ belongs to the *surjective hull* $\mathcal{Q}^{sur}$ of $\mathcal{Q}$ if $P \circ Q_E \in \mathcal{Q}(^n\ell_1(B_E);F)$. The polynomial ideal $\mathcal{Q}$ is said to be *surjective* if $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{sur}$.

Proposition 1.1. *The following assertions are equivalent for a polynomial ideal $\mathcal{Q}$:*
(a) *$\mathcal{Q}$ is surjective.*
(b) *If E and F are Banach spaces and $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ is such that $P \circ Q_E \in \mathcal{Q}(^n\ell_1(B_E);F)$, then $P \in \mathcal{Q}(^nE;F)$.*
(c) *If E, F and G are Banach spaces, $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ and $u \in \mathcal{L}(G;E)$ is a surjective linear operator such that $P \circ u \in \mathcal{Q}(^nG;F)$, then $P \in \mathcal{Q}(^nE;F)$.*

Proposition 1.2. *The rule $sur \colon \mathcal{Q} \mapsto \mathcal{Q}^{sur}$ is a hull procedure in the sense that:*
(a) *$\mathcal{Q}^{sur}$ is a polynomial ideal whenever $\mathcal{Q}$ is a polynomial ideal.*
(b) *$\mathcal{Q}^{sur} \subset \mathcal{R}^{sur}$ whenever $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$.*
(c) *$(\mathcal{Q}^{sur})^{sur} = \mathcal{Q}^{sur}$ for every polynomial ideal $\mathcal{Q}$.*
(d) *$\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}^{sur}$ for every polynomial ideal $\mathcal{Q}$.*

Corollary 1.1. *Let $\mathcal{Q}$ be a polynomial ideal. Then $\mathcal{Q}^{sur}$ is the (unique) smallest surjective polynomial ideal containing $\mathcal{Q}$.*

Example 1.1. It is easy to check that the following polynomial ideals are surjective: $\mathcal{P}^{\mathcal{F}}$ = finite rank polynomials (the range generates a finite-dimensional subspace of the target space), $\mathcal{P}^{\mathcal{K}}$ = compact polynomials (the range of the closed unit ball is relatively compact) and $\mathcal{P}^{\mathcal{W}}$ = weakly compact polynomials (the range of the closed unit ball is relatively weakly compact).

Of course, different polynomial ideals can have the same surjective hull. The following simple remark will help us giving interesting concrete examples:

Remark 1.1. If $\mathcal{Q}$ and $\mathcal{Q}'$ are polynomial ideals such that $\mathcal{Q}(^nE;F) = \mathcal{Q}'(^nE;F)$ regardless of the positive integer n, the $\mathcal{L}_1$-space E and the Banach space F, then $\mathcal{Q}^{sur} = (\mathcal{Q}')^{sur}$.

The examples we are about to give concern two of the most studied (perhaps *the* two most studied) polynomial generalizations of the ideal of absolutely p-summing linear operators; namely, the ideals $\mathcal{P}_{ms,p}$ of multiple p-summing polynomials and $\mathcal{P}_{d,p}$ of p-dominated polynomials (in both [1] and [2] one can find the two definitions).

In order to study the surjective hull of $\mathcal{P}_{d,p}$, $1 \leq p \leq 2$, we introduce the class $\mathcal{P}^2$ of all homogeneous polynomials $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ that factor through a Hilbert space in the sense that there are a Hilbert space H, an operator $u \in \mathcal{L}(E;H)$ and a polynomial $Q \in \mathcal{P}(^nH;F)$ such that $P = Q \circ u$. It is routine to check that $\mathcal{P}^2$ is a polynomial ideal.

Given a polynomial ideal $\mathcal{Q}$, by $\mathcal{Q}^n$ we mean its n-linear component, that is $\mathcal{Q}^n(E;F) := \mathcal{Q}(^nE;F)$ for all Banach spaces E and F. Sometimes $\mathcal{Q}^n$ is called an *ideal of n-homogeneous polynomials*, and, of course, $\mathcal{Q}^1$ is an operator ideal.

Theorem 1.1. (a) $(\mathcal{P}_{d,p})^n$ *and* $(\mathcal{P}_{ms,p})^n$ *are not surjective for any n and any $p \geq 1$.*
(b) $(\mathcal{P}_{d,p})^{sur} = (\mathcal{P}^2)^{sur}$ *for $1 \leq p \leq 2$. In particular,* $(\mathcal{P}_{d,p})^{sur} = (\mathcal{P}_{d,q})^{sur}$ *for $1 \leq p, q \leq 2$.*
(c) $(\mathcal{P}_{ms,p})^{sur} = (\mathcal{P}_{ms,q})^{sur}$ *for $1 \leq p, q \leq 2$.*

References

[1] CARANDO, D. , DIMANT V. AND MURO S. - *Coherent sequences of polynomial ideals on Banach spaces*, Math. Nachr. **282** (2009), 1111–1133.

[2] PELLEGRINO, D. AND RIBEIRO, J. - *On multi-ideals and polynomial ideals of Banach spaces: a new approach to coherence and compatibility*, Monatsh. Math. **173** (2014), 379–415.

[3] PIETSCH, A.- *Operator Ideals*, North-Holland, 1980.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *33–34*

SIGN CHANGING SOLUTIONS FOR QUASILINEAR SUPERLINEAR ELLIPTIC PROBLEMS

E. D. SILVA[1,†], M. L. CARVALHO[1,‡] & J. V. GONCALVES[1,§]

[1]Instituto de Matemática , UFG, GO, Brazil.

[†]edcarlos@ufg.br, [‡]marcos@ufg.br, [§]jv@ufg.br

Abstract

It is establish existence and multiplicity of solutions for a quasilinear elliptic problem drive by the ϕ-Laplacian operator. These solutions are also ground state solutions. In order to prove our main results we apply the Nehari method.

1 Introduction

In this work we consider the quasilinear elliptic problem

$$\begin{cases} -div\,(\phi(|\nabla u|)\nabla u) = f(x,u) \text{ in } \ \Omega, \\ u = 0 \text{ on } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is bounded and smooth domain, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is function of class C^1 and $\phi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ satisfies the following conditions

(ϕ_1) ϕ is a function of class C^2;

(ϕ_2) $t \mapsto t\phi(t)$ is strictly increasing.

We point our that if $\phi(t) = t^{p-2}$ with $2 \leq p < \infty$, problem (1) reads as

$$-\Delta_p u = f(x,u) \text{ in } \Omega, \ u = 0 \text{ on } \partial\Omega. \tag{2}$$

In this case the function $\phi(t) = t^{p-2}$ verifies hypotheses $(\phi_1) - (\phi_2)$. In the same way, for $\phi(t) = t^p + t^q$ with $1 < q < p < \infty$ the function ϕ satisfies hypotheses $(\phi_1) - (\phi_2)$ and problem (1) becomes

$$-\Delta_p u - \Delta_q u = f(x,u) \text{ in } \Omega, \ u = 0 \text{ on } \partial\Omega. \tag{3}$$

In the model case $f(s) = |s|^{p-2}s$ it is well-know that Ambrosetti-Rabinowitz [1] conditon play a crucial tool in order to prove the compactness required in variational methods. Namely, the Ambrosetti-Rabinowitz conditon, in short (AR) condition, says that: There exist $\theta > 2, R > 0$ such that

$$\theta F(x,t) \leq t f(x,t), x \in \Omega, |t| \geq R \tag{AR}$$

However, there a lot of functions such that (AR) is not verified. For example $f(t) = tln(1 + |t|), t \in \mathbb{R}$ does not satisfy the Ambrosetti-Rabinowitz condition.

It is important to emphasize that the main role of (AR) was to assure compactness ((PS) condition) required by minimax arguments. The main feature in the previous works since the pioneer paper of Ambrosetti-Rabinowitz [1] were the prove of existence and uniqueness under several conditions on the nonlinear therm at infinity and at the origin.

We shall assume also the following assumptions

(ϕ_3) $\quad l-2 := \inf\limits_{t>0} \dfrac{(t\phi(t))''t}{(t\phi(t))'} \leq \sup\limits_{t>0} \dfrac{(t\phi(t))''t}{(t\phi(t))'} := m-2 < N-2.$

(f_0) There exist a N-function $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ and a constant $C > 0$ such that

$$|f(x,t)| \leq C\,(1+\psi(t)) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, x \in \Omega,$$

where $\Psi(t) = \int_0^t \psi(s)ds$ and

(ψ_1) $\quad 1 < \ell \leq m < \ell_\Psi := \inf\limits_{t>0} \dfrac{t\psi(t)}{\Psi(t)} \leq \sup\limits_{t>0} \dfrac{t\psi(t)}{\Psi(t)} =: m_\Psi < \ell^* := \dfrac{\ell N}{N-\ell}.$

(f_1) The function

$$t \mapsto \frac{f(x,t)}{|t|^{m-2}t} \text{ is increasing on } \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

(f_2) The following limit holds uniformly in $x \in \Omega$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x,t)}{t\phi(t)} < \lambda_1$$

(f_3) The following limit holds uniformly in $x \in \Omega$

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{f(x,t)}{|t|^{m-2}t} = +\infty.$$

Under hypotheses $(f_1) - (f_3)$ the problem (1) is a quasilinear superlinear elliptic problem. This kind of problem have been studied during the last years, see [2], [3].

2 Main Results

Now we state our first result which can be read as

Theorem 2.1. *Suppose $(\phi_1), (\phi_2), (\phi_3)$ and $(f_0) - (f_3)$. Then the problem (1) admits at least one ground state solution $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.*

The second result in this work can be read as

Theorem 2.2. *Suppose $(\phi_1), (\phi_2), (\phi_3)$ and $(f_0) - (f_3)$. Then the problem (1) admits at least two ground state solutions $u_1, u_2 \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ satisfying $u_1 < 0$ and $u_2 > 0$ in Ω. Furthermore, the problem (1) admits one more solution u_3 which is a sign changing solution.*

Existence of positive and negative solutions have been studied during the last years, see [1], [2], [3]. In these works the authors have used many techniques in order to get multiplicity results on the problem (1). However, there are not results for sign changing solutions for elliptic problems involving the Φ-Laplacian operator.

References

[1] Ambrosetti, A. & Rabinowitz, P., *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Analysis 14, (1973), 349-381.

[2] K. J. Brow, Y. Zhang, The Nehari manifold for semilinear elliptic equation with a sign-changing weight function, Jornal Differential Equation, Vol 193, 2003 , 481-499.

[3] A. Szulkin and T. Weth. Ground state solutions for some indefnite variational problems. J. Funct. Anal., 257 (2009) 3802–3822.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *35–36*

AN ELLIPTIC EQUATION INVOLVING EXPONENTIAL CRITICAL GROWTH IN $\mathbb{R}^2$

FRANCISCO S. B. ALBUQUERQUE[1,†] & EVERALDO S. MEDEIROS[2,‡]

[1]Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, UEPB, Patos-PB, Brasil,
[2]Departamento de Matemática, UFPB, João Pessoa-PB, Brasil

[†]siberio_ba@uepb.edu.br, [‡]everaldo@mat.ufpb.br

Abstract

In this work, minimax procedures and a Trudinger-Moser type inequality in weighted Sobolev spaces obtained in [1] are employed to establish sufficient conditions for the existence of solutions for a class of nonhomogeneous Schrödinger equations with critical exponential growth and involving potentials which are singular and/or vanishing. The solutions are obtained by suitable control of the size of the perturbation.

1 Introduction

This work is concerned with the existence and multiplicity of solutions for nonlinear elliptic equations of the form

$$-\Delta u + V(|x|)u = Q(|x|)f(u) + h(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

when the nonlinear term $f(s)$ is allowed to enjoy the exponential critical growth by means of the Trudinger-Moser inequality (see [4, 5]), the potential V and weight Q are radial functions whose may be unbounded, singular at the origin or decaying to zero at infinity and h belongs to the dual of a functional space. Explicitly, we make the following assumptions on the potential $V(|x|)$ and the weight function $Q(|x|)$:

$(V0)$ $V \in C(0,\infty)$, $V(r) > 0$ and there exists $a > -2$ such that $\liminf_{r\to+\infty} \dfrac{V(r)}{r^a} > 0$.

$(Q0)$ $Q \in C(0,\infty)$, $Q(r) > 0$ and there exist $b < (a-2)/2$ and $-2 < b_0 \le 0$ such that

$$0 < \liminf_{r\to 0^+} \frac{Q(r)}{r^{b_0}} \le \limsup_{r\to 0^+} \frac{Q(r)}{r^{b_0}} < \infty \quad \text{and} \quad \limsup_{r\to+\infty} \frac{Q(r)}{r^b} < \infty.$$

In order to state our main results, we need to introduce some notation. We write $\int u$ instead of $\int_{\mathbb{R}^2} u(x)\,\mathrm{d}x$. Let $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ be the set of smooth functions with compact support and $C_{0,\mathrm{rad}}^\infty(\mathbb{R}^2) = \{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) : u \text{ is radial}\}$. If $1 \le p < \infty$ we define $L^p_{Q,\mathrm{rad}} := \left\{ u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \;\middle|\; u \text{ is measurable, radial and } \int Q(|x|)|u|^p < \infty \right\}$. Similarly we define $L^p_{V,\mathrm{rad}}$. Then we set $H^1_{V,\mathrm{rad}} := \overline{C^\infty_{0,\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^2)}$ under the norm $\|u\| := \left[\int \left(|\nabla u|^2 + V(|x|)|u|^2\right)\right]^{1/2}$. Equivalently, $H^1_{V,\mathrm{rad}}$ can be consider as the Sobolev space modeled in the Lebesgue space $L^2_{V,\mathrm{rad}}$ defined by $H^1_{V,\mathrm{rad}} := \left\{ u \in L^2_{V,\mathrm{rad}} : |\nabla u| \in L^2_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^2) \right\}$, where the derivative above is understand in the sense of distributions. We use the notation $E = H^1_{V,\mathrm{rad}}$. Finally, by E^* we denote the dual of space E with the usual norm $\|\cdot\|_*$.

2 Main Results

Here, we are interested in the case where the nonlinear term $f(s)$ has maximal growth on s which allows us to treat problem (1) variationally. Explicitly, in view of the classical Trudinger-Moser inequality and following [3], we say that $f(s)$ has *exponential critical growth* if there exists $\alpha_0 > 0$ such that

(f_0) $\displaystyle\lim_{|s|\to+\infty}\frac{|f(s)|}{e^{\alpha s^2}}=\begin{cases}0, & \forall\alpha>\alpha_0,\\ +\infty, & \forall\alpha<\alpha_0.\end{cases}$

We will assume that the nonlinearity $f(s)$ is continuous and satisfies:

(f_1) $f(s)=o(s)$ as $s\to 0$;

(f_2) there exists $\theta>2$ such that $0<\theta F(s):=\theta\int_0^s f(t)\,\mathrm{d}t\le sf(s)$ for all $s\neq 0$.

Now, we are ready to state our existence result.

Theorem 2.1. *Suppose that $(V0)-(Q0)$ hold. If f satisfies $(f_0)-(f_2)$, then there exists $\delta_1>0$ such that if $0<\|h\|_*<\delta_1$, problem (1) has a weak solution u_h in E.*

In order to establish our multiplicity result, we need the following additional hypotheses on $V(|x|)$ and $f(s)$:

$(V1)$ there exists $a_0>-2$ such that $\displaystyle\limsup_{r\to 0^+}\frac{V(r)}{r^{a_0}}<\infty$.

Remark 2.1. *Notice that $(V1)$ implies that there exist $r_0>0$ and $C_0>0$ such that $V(|x|)\le C_0|x|^{a_0}$ for all $0<|x|\le r_0$.*

(f_3) there exist constants $R_0, M_0>0$ such that $0<F(s)\le M_0|f(s)|$ for all $|s|\ge R_0$;

(f_4) there exists $\beta_0>0$ such that $\displaystyle\liminf_{|s|\to\infty}\frac{sf(s)}{e^{\alpha_0 s^2}}\ge\beta_0>\begin{cases}\dfrac{4}{C_0\alpha_0}\dfrac{e^{2m(r_0)}}{r_0^2}, & \text{if } b_0=0\\[2mm] \dfrac{b_0+2}{C_0\alpha_0}\dfrac{1}{r_0^{b_0+2}}, & \text{if } -2<b_0<0,\end{cases}$

where $m(r):=2C_0r^{a_0+2}/(a_0+2)^3$, with $0<r\le r_0$ and r_0 given in Remark 2.1.

Our multiplicity result can be stated as follows.

Theorem 2.2. *Suppose that $(V0)-(Q0)$ and $(V1)$ hold. If f satisfies $(f_0)-(f_4)$, then there exists $\delta_2>0$ such that if $0<\|h\|_*<\delta_2$, problem (1) has at least two weak solutions in E.*

Remark 2.2. *This work is part of the first named author's Ph.D. thesis at the UFPB Department of Mathematics under the second named author's advisor and is contained in the paper [2].*

References

[1] ALBUQUERQUE, F. S. B., ALVES, C. O. AND MEDEIROS, E. S. - Nonlinear Schrödinger equation with unbounded or decaying radial potentials involving exponential critical growth in $\mathbb{R}^2$. *J. Math. Anal. Appl.*, **409**, 1021-1031, 2014.

[2] ALBUQUERQUE, F. S. B. AND MEDEIROS, E. S. - An Elliptic Equation Involving Exponential Critical Growth in $\mathbb{R}^2$, *Advanced Nonlinear Studies*, **15**, 23-37, 2015.

[3] DE FIGUEIREDO, D. G., MIYAGAKI, O. H. AND RUF, B. - Elliptic equations in $\mathbb{R}^2$ with nonlinearities in the critical growth range, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **3**, 139-153, 1995.

[4] MOSER, J. - A sharp form of an inequality by N. Trudinger, *Indiana Univ. Math. J.* **20**, 1077-1092, 1971.

[5] TRUDINGER, N. S. - On the embedding into Orlicz spaces and some applications, *J. Math. Mech.*, **17**, 473-484, 1967.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *37–38*

A MULTIPLICITY RESULT FOR A FRACTIONAL SCHRÖDINGER EQUATION

G. M. FIGUEIREDO[1,†] & G. SICILIANO[2,‡]

[1]Instituto de Matemática , UFRJ, RJ, Brasil, [2]IME, USP, SP, Brasil.

[†]costa@ufrj.br, [‡]sicilian@ime.usp.br

Abstract

In this talk we present a recent result on a Nonlinear Fractional Schrödinger equation in $\mathbb{R}^N$ in presence of an external potential V under suitable assumptions (see below). In particular we show that, in the so-called semiclassical limit, the number of solutions is affected by the topological properties of the set of (positive) minima of the potential V.

1 Introduction and main results

In recent years problems involving fractional operators are receiving a special attention. In particular after the Fractional Schrödinger Equation formulated by Laskin [5] there has been a great mathematical literature involving fractional spaces and nonlocal equations. Indeed they appear in many sciences (other then in Fractional Quantum Mechanics) and have important applications optimization and finance [2, 3], phase transition [1, 8], anomalous diffusion [4, 6, 7]. The list may continue with applications in material sciences, crystal dislocation, soft thin films, multiple scattering, quasi-geostrophic flows, water waves, conformal geometry and minimal surfaces, obstacle problems and so on. The interested reader may consult also the references in the cited papers.

In this work we consider the following equation in $\mathbb{R}^N, N > 2s$

$$\varepsilon^{2s}(-\Delta)^s u + V(z)u = f(u), \;\; u(z) > 0 \tag{1}$$

where $0 < s < 1$, $(-\Delta)^s$ is the fractional Laplacian, ε is a positive parameter, and the potential $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ and the nonlinearity $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfy the following:

V1. $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ is a continuous function and satisfies

$$0 < \min_{\mathbb{R}^N} V(x) =: V_0 < \liminf_{|x|\to\infty} V(x) =: V_\infty \in (0, +\infty]\,;$$

f1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a function of class C^1 and $f(u) = 0$ for $u \leq 0$;

f2. $\lim_{u\to 0} f'(u) = 0$;

f3. $\exists\, q \in (2, 2_s^* - 1)$ such that $\lim_{u\to\infty} f'(u)/u^{q-1} = 0$, where $2_s^* := 2N/(N-2s)$;

f4. $\exists\, \theta > 2$ such that $0 < \theta F(u) := \theta \int_0^u f(t)dt \leq uf(u)$, for all $u > 0$;

f5. the function $u \to f(u)/u$ is strictly increasing in $(0, +\infty)$.

The above assumptions allow us to use variational methods and in particular the "photography method" of Benci and Cerami to prove the following

Theorem 1.1. *Under the previous assumptions, there exists $\varepsilon^* > 0$ such that for every $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ problem* (1) *has at least*

1. *cat(M) solutions;*
2. *cat$(M) + 1$ solutions, if M is bounded and cat$(M) > 1$.*

Here $\text{cat}(M)$ is the Ljusternick-Schnirelmann category of M in itself.
On the other hand, with the use of Morse theory we are able to deduce the next result.

Theorem 1.2. *Under the previous assumptions, there exists $\varepsilon^* > 0$ such that for every $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ problem* (1) *has at least $2\mathcal{P}_1(M) - 1$ solutions, if non-degenerate, possibly counted with their multiplicity.*

The author is supported by Fapesp and CNPq.

References

[1] ALBERTI, G., BOUCHITTÉ, G. AND SEPPECHER, P. - Phase transition with the line-tension effect, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **144** , 1-46, 1998.

[2] CONT, R. AND TANKOV, P. - *Financial modeling with jump processes*, Chapman&Hall/CRC Financial Mathematics Series, Boca Raton, FL, 2004.

[3] DUVAUT, G. AND LIONS, J.L. *Inequalities in mechanics and physics*, Springer-Verlag, Berlin 1976.

[4] GONZÁLEZ, M. DEL MAR AND MONNEAU, R. - Slow motion of particle system as a limit of a reaction-diffusion equation with half-Laplacian in dimension one, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **32**,1255-1286, 2012.

[5] LASKIN, N. - Fractional Schrödinger equation, *Phys. Rev. E*, **66**, 056108, 2002.

[6] METZLER, R. AND KLAFTER, J. - The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamic approach, *Phys. Rep.* **339**, 77, 2000.

[7] METZLER, R. AND KLAFTER, J. - The restaurant at the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics, *J. Phys. A*, **37**, 161-208, 2004.

[8] SIRE, Y. AND VALDINOCI, E. - Fractional Laplacian phase transitions and boundary reactions: a geometric inequality and a symmetric result, *J. Funct. Anal.*, **60**, 67-112, 2007.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *39–40*

UM MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS MISTO DUAL HíBRIDO ESTABILIZADO PARA PROBLEMAS ELíPTICOS

CRISTIANE O. FARIA[1,†], SANDRA M. C. MALTA[2,‡] & ABIMAEL F. D. LOULA[2,§]COORDENAÇÃO DE MATEMÁTICA APLICADA, LNCC, RJ, BRASIL

[1]Departamento de Análise Matemática, UERJ, RJ, Brasil, [1]

[†]cofaria@ime.uerj.br, [‡]smcm@lncc.br, [§]aloc@lncc.br

Resumo

Este trabalho trata da aplicação de um método de elementos finitos descontínuo hibridizado visando a solução de problemas elípticos, em particular aqueles associados ao escoamento miscível em meios porosos heterogêneos. A proposta foi desenhada considerando-se uma aproximação descontínua entre os elementos, com a continuidade ao longo das interfaces imposta fracamente através do uso de um multiplicador de Lagrange. A metodologia é então empregada em um sistema elíptico dado pela lei de Darcy e a equação de conservação de massa. Simulações numéricas demonstram a eficiência e robustez do método, quando comparado com outros usualmente encontrados na literatura.

1 Introdução

Aproximações de elementos finitos para problemas elípticos lineares e/ou com soluções suaves apresentam, em geral, taxas de convergência ótimas sendo a mais conhecida dada pelo método de Galerkin [6], onde são empregados espaços *conformes* de funções contínuas, i.e, se a solução exata do problema, p, é tal que $p \in V$, V um espaço de dimensão finita, então tem-se a solução aproximada $p_h \in V_h^k$, onde $V_h^k \subset V$ é um espaço de funções polinomiais de ordem menor ou igual a $k > 0$ (espaço de elementos finitos de dimensão finita). No entanto, quando tratamos de solucionar problemas multiescala o método de Galerkin falha e novas metodologias, tais como os métodos multiescalas [2] e/ou métodos de Galerkin descontínuos [1] devem ser consideradas. No estudo de problemas que modelam, por exemplo, o deslocamento miscível em meios porosos visando a simulação de processos terciários na recuperação de reservatórios de petróleo, como aqueles definidos pelo sistema elíptico

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = f \quad \text{em} \quad \Omega\,, \tag{1}$$

$$\mathbf{u} = -\mathbb{K}\nabla p \quad \text{em} \quad \Omega\,, \tag{2}$$

onde $\Omega \in \mathbb{R}^2$, com condições de fronteira $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0$ sobre $\partial\Omega$. $\mathbb{K} = K(\mathbf{x})\mathbb{I}$ é o tensor de permeabilidade, com $K(\mathbf{x})$ a permeabilidade do meio, e $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ é o campo de velocidades de Darcy. Tem-se que a variável primal é a pressão $p = p(\mathbf{x})$, porém a de maior interesse físico é o campo de velocidades. Nesse caso, a solução pelo método de Galerkin pode levar à taxas de convergência sub-ótimas e a não conservação da massa. Desse modo, métodos mistos (onde pressão e velocidade são resolvidas simultâneamente) [3] ou técnicas de pós-processamento [4] conseguem recuperar soluções estáveis e com boas taxas de convergência. Porém, para meios porosos altamente heterogêneos essas opções tornam-se ineficientes [4, 5]. Desse modo, é apresentado aqui uma método de elementos finitos misto híbrido dual estabilizado o qual é *descontínuo e não-conforme* pois utiliza funções de aproximação localmente definidas (em cada elemento finito) [5]. Portanto, o método é resolvido em nível de elemento e as variáveis locais são eliminadas em favor do multiplicador de Lagrange, definido nas interfaces dos elementos. Consequentemente, o sistema global resultante é montado a partir dos graus de liberdade associados ao multiplicador de Lagrange, reduzindo assim o seu custo computacional e tornando-se semelhante aos métodos de elementos finitos contínuos (e conformes!). O multiplicador de Lagrange é identificado com o traço da pressão nas interfaces dos elementos.

2 Resultados Principais

Sejam $\mathcal{U}_h^m = \{\mathbf{v} \in \mathcal{U}_\delta : \mathbf{v}|_\mathcal{K} \in \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^m \quad \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h\}$, $\mathcal{Q}_h^l = \{q \in \mathcal{Q}_\delta : q|_\mathcal{K} \in \mathcal{R}^l \quad \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h\}$ e $\mathcal{M}_h^s = \{\mu \in \mathcal{M} : \mu|_e \in \mathcal{P}^s \quad \forall e \in \mathcal{E}_h^0\}$ espaços de elementos finitos lagrangeanos onde $\mathcal{R}^r$ é o conjunto de polinômios com grau menor ou igual a r se $\mathcal{K}$ é um triângulo, ou menor ou igual a r em cada variável cartesiana se $\mathcal{K}$ é um quadrilátero ($r = l$ ou m), e $\mathcal{P}^s$ é o conjunto de polinômios de grau menor ou igual a s sobre cada lado/aresta e. Considerando que $\{\mathbf{v}_h, p_h\}$, pertencentes aos espaços de funções, são definidos independentemente sobre cada elemento $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$, o problema (1)- (2) pode ser escrito como um conjunto de problemas locais definidos sobre cada elemento $\mathcal{K}$ acoplado ao um outro problema sobre o conjunto das arestas/lados $\mathcal{E}_h$, como segue:
Problemas Locais - Pressão e Velocidade: Encontrar $\mathbf{u}_h \in \mathcal{U}_h^m$, $p_h \in \mathcal{Q}_h^l$, para cada $K \in \mathcal{T}_h$, tal que

$$(\mathbb{K}^{-1}\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_\mathcal{K} - (p_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h)_\mathcal{K} + \int_{\partial\mathcal{K}} \lambda_h(\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_\mathcal{K}) ds + \frac{1}{2}(\mathbb{K}^{-1}(\operatorname{div} \mathbf{u}_h - f), \operatorname{div} \mathbf{v}_h)_\mathcal{K}$$
$$-\frac{1}{2}(\mathbb{K}^{-1}\mathbf{u}_h + \nabla p_h, \mathbf{v}_h)_\mathcal{K} + \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{u}_h, \nabla \times \mathbb{K}^{-1}\mathbf{v}_h)_\mathcal{K} = 0, \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{U}_h^m \tag{3}$$

$$-(\operatorname{div} \mathbf{u}_h, q_h)_\mathcal{K} + (f, q_h)_\mathcal{K} - \frac{1}{2}(\mathbb{K}^{-1}\mathbf{u}_h + \nabla p_h, \mathbb{K}\nabla q_h)_\mathcal{K} + \int_{\partial\mathcal{K}} \mathbb{K}\beta(p_h - \lambda_h) q_h ds = 0, \ \forall q_h \in \mathcal{Q}_h^l \tag{4}$$

Problema Global - Multiplicador: Encontrar $\lambda_h \in \mathcal{M}_h^s$, satisfazendo

$$\sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \left[\int_{\partial\mathcal{K}} \mu_h(\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{K}\mathcal{K}}) ds + \int_{\partial\mathcal{K}} \mathbb{K}\beta(\lambda_h - p_h)\mu_h ds \right] = 0, \ \mu_h \in \mathcal{M}_h^s \tag{5}$$

Para soluções regulares e supondo interpolações de igual ordem para os campos de pressão e velocidades, diferentemente das formulações mistas duais usuais, como ilustrado em [3], o método (3)-(5) é estável, conservativo e apresenta taxas de convergência ótimas. Essas boas propriedades podem ser verificadas nos resultados numéricos que serão apresentados nesse estudo.

Referências

[1] ARNOLD, D.N., BREZZI, F., COCKBURN, B. AND MARINI, L.D. - Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, **39**, 1749-1779, 2002.

[2] FRANCA, J.L, MADUREIRA, A. AND VALENTIN, F.- Towards multiscale functions : enriching finite element spaces with local but not bubble-like functions, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **194**, 3006-3021, 2005.

[3] CORREA, M. R. AND LOULA, A. F. D. - Unconditionally stable mixed finite element methods for Darcy flow, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **197**, 1525-1540, 2008.

[4] MALTA, S.M.C., LOULA, A.F.D AND GARCIA, E.L.M. - Numerical analysis of a stabilized finite element method for tracer injection simulations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **187**, 119-136, 2000.

[5] NUNEZ, Y.R., FARIA, C.O., LOULA, A.F.D. AND MALTA, S.C.M. - A mixed-hybrid finite element method applied to tracer injection processes, *International Journal of Modeling and Simulation for the Petroleum Industry*, **6**, 51-59, 2012.

[6] ODEN, J.T., CAREY, G.F. AND BECKER, E.B - *Finite Elements - An Introduction*, vol. 1, Prentice Hall Inc., New Jersey, USA, 1981

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *41–42*

SPECTRAL CHEBYSHEV APPROXIMATION OF THE GENERALIZED STOKES PROBLEM WITH PRESSURE AND FILTRATION BOUNDARY CONDITIONS

ABDOU GARBA[1,†]

[1]Departamento de Matemática, UFC, Fortaleza, CE, Brasil.

[†]abdgar@yahoo.fr

Abstract

The paper is concerned with a Spectral Colocation Chebyshev approximation of the Generalized Stokes problem with pressure and filtration boundary conditions. The method uses the influence matrix method to overcome the coupling between velocity and pressure on the permeable boundary.

1 Introduction

Let Ω be the plane square $]-1,1[\times]-1,1[$ with boundary $\Gamma = \partial\Omega$ divided in two parts: $\Gamma^1 = \{x = \pm 1,\ -1 < y < 1\}$ and $\Gamma^2 = \{-1 < x < 1,\ y = \pm 1\}$. We consider on Ω the system of partial differential equations

$$\sigma \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{F} \text{ in } \Omega \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ in } \Omega \tag{2}$$

where $\mathbf{u} = (u, v)$ stand for the velocity of the flow and p for it's pressure. The term $\mathbf{F}$ is known an $\sigma > 0$ is a constant. This problem is known as the Generalized Stokes problem and is an important step in the numerical resolution of the Navier–Stokes equations. The following boundary conditions are considered: At the boundary Γ^1 pressure boundary condition is considered

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = v = v_\Gamma,\ p = \varphi \text{ on } \Gamma^1 \tag{3}$$

At the boundary Γ^2 filtration condition is imposed

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = u = u_\Gamma,\ \ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \gamma p \text{ on } \Gamma^2 \text{ with } \gamma > 0 \tag{4}$$

where $\mathbf{n}$ and $\mathbf{t}$ are the unit vectors normal and tangent to wall, respectively. The filtration condition (4) coupling the velocity and pressure corresponds to the Darcy law for flow where part of the boundary corresponds to a thin porous wall(or membrane).

We consider the simplest Chebyshev collocation approximation of the generalized Stokes problem (1)–(4)(cf.[1]). The scheme uses a single grid for both the momentum (1) and the continuity equation (2), the grid being given by the cartesian product of the Gauss–Lobatto points defined by

$$\mathbf{x}_{ij} = (\xi_i, \xi_j),\ \text{where } \xi_i = \cos(i\pi/N) \tag{5}$$

The Gauss-Lobatto points ξ_i are the extrema of the Chebyshev polynomial of order N, $T_N(\xi) = \cos(N \arccos \xi)$.

The resolution of the discrete problem is based on the influence matrix technique([2]).

2 Numerical results

To validity of the numerical approach is tested against the following exact solution

$$u = \frac{1}{y-2} e^{(2-x)(y-2)}, \quad v = \frac{-1}{x-2} e^{(2-x)(y-2)}, \tag{6}$$

$$p = \frac{\gamma^{-1}}{2(x-2)} \cos(2\pi y)\{(1+y)e^{x-2} - (1-y)e^{3(x-2)}\} \tag{7}$$

In table 1 and table 2 we show the popintwise error E_p on the pressure p, the pointwise errors E_u and E_v on the velocity components u and v respectively and the magnitude of the discrete divergence $\nabla \cdot \mathbf{u}$.

N	8	16	32	64
E_p	4.865×10^{-5}	7.496×10^{-11}	1.249×10^{-14}	2.415×10^{-14}
E_u	1.125×10^{-6}	7.551×10^{-11}	5.162×10^{-15}	1.787×10^{-14}
E_v	1.227×10^{-6}	7.541×10^{-11}	6.106×10^{-15}	1.508×10^{-14}
$\nabla \cdot \mathbf{u}$	9.508×10^{-6}	1.907×10^{-12}	3.499×10^{-13}	1.045×10^{-12}

Table 1: Numerical results with $\sigma = 1000,\ \gamma = 1$

N	8	16	32	64
E_p	3.649×10^{-4}	1.269×10^{-8}	7.434×10^{-11}	1.787×10^{-10}
E_u	1.349×10^{-6}	9.248×10^{-11}	3.843×10^{-13}	2.353×10^{-12}
E_v	9.029×10^{-7}	7.688×10^{-11}	2.563×10^{-13}	2.809×10^{-12}
$\nabla \cdot \mathbf{u}$	1.110×10^{-5}	2.603×10^{-11}	2.3250×10^{-11}	8.857×10^{-11}

Table 2: Numerical results with $\sigma = 1000,\ \gamma = 10^{-4}$

The results show the high precision of the numerical approximation.

References

[1] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quateroni and T. A. Zang, Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer–Verlag, New York, 1988.

[2] L. Tukerman, (1989), " Divergence–free velocity in nonperiodic geometries", Journ. Comp. Phys. 80(1989), pp.403–441.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *43–44*

PROPRIEDADES DE IDEAL DO OPERADOR DE INTEGRAÇÃO DE DUNFORD

FÁBIO J. BERTOLOTO[1,†], GERALDO M. A. BOTELHO[1,‡] & ARIOSVALDO M. JATOBÁ[1,‡,§]

[1]Faculdade de Matemática, UFU, MG, Brasil.

[†]bertoloto@famat.ufu.br, [‡]botelho@ufu.br, [§]marques@famat.ufu.br

Resumo

Seja F um espaço de Banach. São estabelecidas condições necessárias e suficientes para o operador de integração de Dunford, do espaço das funções com valores em F Dunford integráveis ao bidual F'' de F, pertencer a um dado ideal de operadores. É mostrado também como tal fato por ser utilizado para caracterizar importantes espaços de Banach, como os espaços de Banach com a propriedade de Banach-Saks, espaços de Banach separáveis não contendo c_0, espaços de Banach não contendo c_0 ou ℓ_1 e espaços de Asplund não contendo c_0.

1 Introdução

Neste trabalho, F sempre denota um espaço de Banach real ou complexo, F' o seu dual topológico, (Ω, Σ, μ) um espaço de medida finita, $Id_F \colon F \longrightarrow F$ o operador identidade em F e $J_F \colon F \longrightarrow F''$ o mergulho canônico.

Definition 1.1. Consideramos os seguintes espaços:

$$L^1(\mu, F)_w = \{f \colon \Omega \longrightarrow F;\ \ \varphi \circ f \in L_1(\mu),\ \forall\, \varphi \in F'\} \quad \text{e} \quad M^1(\mu, F) = \{f \in L^1(\mu, F)_w : f \text{ é } \mu\text{-mensurável}\}$$

$M^1(\mu, F)$ é um espaço normado, não completo, com a *norma de Pettis* definida por

$$|f|_1 = \sup_{\varphi \in B_{F'}} \int_\Omega |\varphi \circ f| d\mu.$$

Lemma 1.1. (Diestel e Uhl [1, Lema II.3.1], Ryan [3, p. 52]) Sejam $f \in L^1(\mu, F)_w$ e $X \in \Omega$ um conjunto mensurável. Então exite um elemento de F'', denotado por $\int_X f d\mu$, satisfazendo $\left\langle \varphi, \int_X f d\mu \right\rangle = \int_X \varphi \circ f d\mu$, para todo $\varphi \in F'$.

Definition 1.2. O vetor $\int_X f d\mu$ do Lema 1.1 é denominado *Integral de Dunford* de f sobre X. Quando $\int_X f d\mu \in F$ para todo conjunto mensurável $X \in \Omega$, dizemos que f é integrável segundo Pettis e, neste caso, $\int_X f d\mu$ é chamado de *integral de Pettis* de f sobre X.

Denotamos por $D(\mu, F)$ o completamento do espaço normado $(M^1(\mu, F), |\cdot|_1)$ e, por $P(\mu, F)$ o completamento de $M^1(\mu, F)$ formado por todas as funções μ-mensuráveis, integráveis segundo Pettis, com respeito a norma $|\cdot|_1$. Com base em tudo que foi escrito acima, faz sentido a

Definition 1.3. (i) O *operador Dunford* é definido por

$$\begin{array}{rccc} I_D \colon & D(\mu, F) & \longrightarrow & F'' \\ & f & \longmapsto & \int_\Omega f d\mu. \end{array}$$

(ii) O *operador Pettis* é definido por

$$\begin{array}{rccc} I_P \colon & P(\mu, F) & \longrightarrow & F'' \\ & f & \longmapsto & \int_\Omega f d\mu. \end{array}$$

I_D e I_P são lineares e contínuos de norma unitária.

2 Resultados Principais

No que segue, $\mathfrak{A}$ denota um ideal de operadores. Sendo E um espaço de Banach real ou complexo, $\mathcal{L}(E;F)$ representa o espaço das transformações lineares contínuas de E em F, e

$$\mathfrak{A}^{\text{dual}} = \{u \in \mathcal{L}(E,F) : u' \in \mathfrak{A}(F',E')\}.$$

Para a definição de ideal de operadores regulares ver [2, 4.5.5]

Teorema 2.1. Considere as seguintes afirmações:

(a) $D^F \in \mathfrak{A}(D(\mu,F),F'')$.

(b) $P^F \in \mathfrak{A}(P(\mu,F),F)$.

(c) $Id_F \in \mathfrak{A}(F,F)$.

(d) $J_F \in \mathfrak{A}(F,F'')$.

(e) $Id_{F''} \in \mathfrak{A}(F'',F'')$.

Então:
(i) As seguintes implicações são verdadeiras: (b)$\Longleftrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (d) $\Longleftarrow$ (e)$\Longrightarrow$ (a) $\Longrightarrow$ (d).
(ii) Nenhuma das implicações restantes são válidas em geral.
(iii) Se F não contém cópia de c_0 e $\mathfrak{A}$ é regular, então as condições (a)-(d) são equivalentes para todo (Ω,Σ,μ).
(iv) As hipóteses de (iii) não implicam que as condições (a)-(e) sejam equivalentes para todo (Ω,Σ,μ).
(v) Se $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}^{\text{dual}})^{\text{dual}}$, então as condições (a)-(e) são equivalentes para todo (Ω,Σ,μ).

Vamos fazer agora uma conexão com lineabilidade/espaçabilidade. Um subconjunto A de um espaço vetorial topológico V é *espaçável* se $A \cup \{0\}$ contém um subespaço de dimensão infinita de V. Prosseguindo,

Um ideal de operadores $\mathfrak{A}$ é próprio e tem contradomínio hereditário se, e somente se, operadores em $\mathfrak{A}$ nunca tem contradomínio espaçável.

Proposição 2.1. Seja $\mathfrak{A}$ um ideal de operadores regulares que tem contradomínio hereditário. Se $Id_{\ell_\infty} \notin \mathfrak{A}(\ell_\infty,\ell_\infty)$, então as seguintes afirmações são equivalentes para um espaço de Banach F:
(a) F não contém um cópia de c_0 e $Id_F \in \mathfrak{A}(F,F)$.
(b) $D^F \in \mathfrak{A}(D(\mu,F),F'')$, para todo espaço de medida finita (Ω,Σ,μ).
(c) $D^F \in \mathfrak{A}(D(\mu,F),F'')$, para algum espaço de medida finita (Ω,Σ,μ) contendo uma sequência $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos mensuráveis de medida positiva, tais que $\{n \in \mathbb{N} : w \in A_n\}$ é finito para todo $w \in \Omega$.

A partir do Teorema 2.1 e da Proposição 2.1, interessantes caracterizações de espaços de Banach com a propriedade de Banach-Saks (ver Beauzamy e Lapresté [4]), espaços de Banach separáveis não contendo c_0, espaços de Banach não contendo c_0 ou ℓ_1 e espaços de Asplund (ver Pietsch [2, 24.4.2]) não contendo c_0 são obtidas, todas relacionadas ao respectivo operador de Dunford D^F.

Referências

[1] BEAUZAMY, B. AND LAPRESTÉ, J. -T. - *Modèles étalés des espaces de banach*, Hermann, Paris, 1984.

[2] DIESTEL, J. AND UHL, J. J. - *Vector Measures*, Amer. Math. Soc., 1977.

[3] PIETSCH, A. - *Operator Ideals*, North-Holland, Amsterdam, 1980.

[4] RYAN, R. A. - *Introduction to Tensor Products of Banach spaces*, Springer, London, 2010.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *45–46*

ON THE TRANSFORMATION OF VECTOR-VALUED SEQUENCES BY MULTILINEAR OPERATORS

GERALDO BOTELHO[1,†] & JAMILSON R. CAMPOS[2,‡]

[1]Faculdade de Matemática , UFU, MG, Brasil, [2]Dep. de Ciências Exatas, UFPB, PB, Brasil

[†]botelho@ufu.br, [‡]jamilson@dcx.ufpb.br

Abstract

We provide a unifying approach to the study of Banach ideals of multilinear operators defined, or characterized, by the transformation of vector-valued sequences.

1 Introduction

Important classes of linear and nonlinear operators between Banach spaces are defined, or characterized, by the transformation of vector-valued sequences. One of the most popular example is the ideal of absolutely p-summing operators: a linear operator $u\colon E \longrightarrow F$ is absolutely p-summing if u sends weakly p-summable sequences in E to absolutely p-summable sequences in F.

The notion of multi-ideals was introduced by Pietsch [4] and has been developed by several authors (for recent contributions, see, e.g., [1, 2, 4, 5]). Our purpose is to synthesize the study of Banach multi-ideals by introducing a general method of generating these multi-ideals by means of transformation of vector-valued sequences that accommodates the already studied ideals as particular instances.

The letters $E, E_1, \ldots, E_n, F$ shall denote Banach spaces over $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. By BAN we denote the class of all Banach spaces over $\mathbb{K}$ and by $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ the Banach space of n-linear operators $A\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ endowed with the usual sup norm.

2 Main Results

Definition 2.1. A *class of vector-valued sequences* X, or simply a *sequence class* X, is a rule that assigns to each $E \in BAN$ a Banach space $X(E)$ of E-valued sequences, that is $X(E)$ is a vector subspace of $E^{\mathbb{N}}$ with the coordinatewise operations, such that:

$$c_{00}(E) \subseteq X(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(E) \text{ and } \|e_j\|_{X(\mathbb{K})} = 1 \text{ for every } j.$$

A sequence class X is *finitely determined* if for every sequence $(x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}}$, $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$ if and only if $\sup\limits_k \left\|(x_j)_{j=1}^k\right\|_{X(E)} < +\infty$ and, in this case, $\left\|(x_j)_{j=1}^\infty\right\|_{X(E)} = \sup_k \left\|(x_j)_{j=1}^k\right\|_{X(E)}$.

The following result describes how the transformation of vector-valued sequences by multilinear operators works:

Proposition 2.1. *Let $X_1, \ldots, X_n$ and Y be sequence classes. The following conditions are equivalent for a given multilinear operator $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$:*
(a) $(A(x_j^1, \ldots, x_j^n))_{j=1}^\infty \in Y(F)$ *whenever* $(x_j^m)_{j=1}^\infty \in X_m(E_m)$, $m = 1, \ldots, n$.
(b) *The induced map* $\widehat{A}\colon X_1(E_1) \times \cdots \times X_n(E_n) \longrightarrow Y(F)$, $\widehat{A}\left((x_j^1)_{j=1}^\infty, \ldots, (x_j^n)_{j=1}^\infty\right) = (A(x_j^1, \ldots, x_j^n))_{j=1}^\infty$, *is a well-defined continuous n-linear operator.*

The conditions above imply condition (c) *below, and they are all equivalent if the sequence classes* $X_1, \ldots, X_n$ *and* Y *are finitely determined.*
(c) *There is a constant* $C > 0$ *such that*

$$\left\|(A(x_j^1, \ldots, x_j^n))_{j=1}^k\right\|_{Y(F)} \leq C \cdot \prod_{m=1}^{n} \left\|(x_j^m)_{j=1}^k\right\|_{X_m(E_m)}, \tag{1}$$

for every $k \in \mathbb{N}$ *and all finite sequences* $x_j^m \in E_m, j = 1, \ldots, k, m = 1, \ldots, n.$
In this case, $\|\widehat{A}\| = \inf\{C : (1) \text{ holds}\}$.

A multilinear operator $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ is $(X_1, \ldots, X_n; Y)$-*summing* if the equivalent conditions of Proposition 2.1 hold for A. If this occurs, we write $A \in \mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_n;Y}(E_1, \ldots, E_n; F)$ and define

$$\|A\|_{X_1,\ldots,X_n;Y} = \|\widehat{A}\|_{\mathcal{L}(X_1(E_1),\ldots,X_n(E_n);Y(F))}.$$

A sequence class X is said to be *linearly stable* if $\mathcal{L}_X(E; F) = \mathcal{L}(E; F)$ and $\|\widehat{u}\colon X(E) \longrightarrow X(F)\| = \|u\|$ for all Banach spaces E and F and operators $u \in \mathcal{L}(E; F)$.

Given sequence classes $X_1, \ldots, X_n, Y$, we say that $X_1(\mathbb{K}) \cdots X_n(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} Y(\mathbb{K})$ if $(\lambda_j^1 \cdots \lambda_j^n)_{j=1}^\infty \in Y(\mathbb{K})$ and

$$\left\|(\lambda_j^1 \cdots \lambda_j^n)_{j=1}^\infty\right\|_{Y(\mathbb{K})} \leq \prod_{m=1}^{n} \left\|(\lambda_j^m)_{j=1}^\infty\right\|_{X_m(\mathbb{K})},$$

whenever $(\lambda_j^m)_{j=1}^\infty \in X_m(\mathbb{K}), m = 1, \ldots, n$.

Now we are able to state our main result:

Theorem 2.1. *Let* $X_1, \ldots, X_n$ *and* Y *be linearly stable sequence classes such that* $X_1(\mathbb{K}) \cdots X_n(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} Y(\mathbb{K})$*. Then* $(\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_n;Y}, \|\cdot\|_{X_1,\ldots,X_n;Y})$ *is a Banach ideal of* n*-linear operators.*

Important ideals of multilinear operators that have been studied individually in the literature are particular cases of the ideals generated by Theorem 2.1 as, for instance, the multi-ideals defined in [1] and [2].

References

[1] Campos, J. R. - *Cohen and multiple Cohen strongly summing multilinear operators*, Linear Multilinear Algebra **62**, 322–346, 2014.

[2] Pellegrino, D. and Ribeiro, J. - *On almost summing polynomials and multilinear mappings*, Linear Multilinear Algebra **60**, 397–413, 2012.

[3] Pietsch, A. - *Ideals of multilinear functionals (designs of a theory)*, Proceedings of the second international conference on operator algebras, ideals, and their applications in theoretical physics **67**, 185–199, Teubner-Texte Math., Teubner, Leipzig, 1984.

[4] Popa, D. - *Composition results for strongly summing and dominated multilinear operators*, Cent. Eur. J. Math. **12**, 1433–1446, 2014.

[5] Serrano-Rodríguez, D. M. - *Absolutely* γ*-summing multilinear operators*, Linear Algebra Appl. **439**, 4110-4118, 2013.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *47–48*

EXISTENCE OF SOLUTIONS FOR NONLOCAL PROBLEM INVOLVING P-LAPLACIAN AND NONLOCAL SOURCE TERM

GABRIEL RODRÍGUEZ VARILLAS[1,†], EUGENIO CABANILLAS LAPA[1,‡],
WILLY BARAHONA MARTÍNEZ[1,§] & LUIS MACHA COLLOTUPA[1,§§]

[1]Instituto de Investigación FCM, UNMSM, Lima, Perú.

†grv712003@yahoo.es, ‡cleugenio@yahoo.com, §wilbara_73@yahoo.es, §§lmachac@hotmail.com

Abstract

In our research we will study the existence of weak solutions for a class of quasilinear elliptic problems involving p-Laplacian and nonlocal source term. Our result is obtained by the variational method and the theory of Sobolev spaces with variable exponent .

1 Introduction

In this work we study the problem described by the equation

$$\begin{aligned} -\Delta_p u - (a - b\int_\Omega |\nabla u|^2)\Delta u = B\left(\int_\Omega F(x,u)\,dx\right) f(x,u) \quad \text{in } \Omega, \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$, with smooth boundary $\partial\Omega$.
$-\Delta_p u$ is the p-Laplacian: $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $1 < p < \infty$, $a, b \geq 0$ are constants.
$f(x,t) : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ is a Carathéodory function , $F(x,u) = \int_0^u f(x,t)\,dt$ and B is a continuous function.

Liu et al [4], Yang and Chang [5], Correa and Figueiredo [2] and recently Molica Bisci and Radulescu [3] studied questions on the existence of weak solutions of (1) ,with $a = b = 0$. Bartolo [1] investigated the case $b = 0$. Differently from usual works, where the nonlocal term is $(a + b\int_\Omega |\nabla u|^2)\Delta u$, we put forward a new nonlocal term $(a - b\int_\Omega |\nabla u|^2)\Delta u$ which presents interesting difficulties (See [6]) .

2 Main Results

Our main result is given by the following theorem

Theorem 2.1. *If*
(F1) *$f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a Carathéodory function and there exist positive constants c_1 and c_2 such that*

$$|f(x,s)| \leq c_1 + c_2|s|^{\alpha(x)-1}, \quad \forall x \in \Omega, s \in \mathbb{R},$$

for some $\alpha \in C_+(\Omega)$ such that $1 < \alpha(x) < p^*(x)$ for $x \in \overline{\Omega}$.
(F2) *There exist $\theta > 0$ and $M > 0$ such that*

$$0 < \theta\hat{F}(x,t) \leq f(x,t)t \quad \textit{for all } |t| \geq M \textit{ and } x \in \Omega$$

(B) *There exist* $\theta > 0$ *and* $M > 0$ *such that*

$$0 < \theta\hat{B}(t) \leq B(t)t \quad \textit{for all } |t| \geq M.$$

Then (1) has a weak solution in $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Proof: We get our conclusion by applying the Mountain pass theorem. ■

References

[1] R. Bartolo, Multiplicity Results for a Class of Quasilinear Elliptic Problems, Mediterr. J. Math. 11 (2014), 1099 : 1113.

[2] F. J. S. A. Corrêa, G. M. Figueiredo,On a Elliptic equation of p-Kirchhoff type via variational methods, Bull. Austral. Math. Soc. 74,(2006), 263–277.

[3] G. Molica Bisci,V. Radulescu, Mountain pass solutions for nonlocal equations, Ann. Acad. Sci. Fennicae, in press.

[4] C. Liu , J. Wang and Q. Gao , Existence of nontrivial solutions for p-Kirchhoff type equations, Bound.Val.Prob. (2013) , 2013:279.

[5] Y.Yang and J. Zhang, Existence results for a class of nonlocal problems involving p-Laplacian, Bound Val. Prob.(2011) , 2011:32.

[6] G. Yin and J. Liu, Existence and multiplicity of nontrivial solutions for a nonlocal problem, Boundary Value Problems (2015) 2015:26

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *49–50*

FIRST AND SECOND ORDER RETARDED FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS ON MANIFOLDS: EXISTENCE AND BIFURCATIONS RESULTS

PIERLUIGI BENEVIERI[1,†], A. CALAMAI[2,‡], M. FURI[3,§] & M. P. PERA[3,§§]

[1]Instituto de Matemática e Estatística, USP, SP, Brasil,
[2]Dipartimento di Ingegneria Industriale e Scienze Matematiche, Università Politecnica delle Marche, Italy,
[3]Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Firenze, Italy.

[†]pluigi@ime.usp.br, [‡]calamai@dipmat.univpm.it, [§]massimo.furi@unifi.it, [§§]mpatrizia.pera@unifi.it

Abstract

We investigate T-periodic parametrized first and second order retarded functional equations on (possibly) noncompact manifolds. We prove existence and global continuation results for T-periodic solutions. The approach is topological and is based on the degree theory for tangent vector fields as well as on the fixed point index theory.

1 Introduction

Let $M \subseteq \mathbb{R}^k$ be a boundaryless smooth manifold and denote by $BU((-\infty, 0], M)$ the metric space of bounded and uniformly continuous maps from $(-\infty, 0]$ into M with the topology of the uniform convergence. Consider the following parametrized *retarded functional motion equation* on M:

$$x''_\pi(t) = \lambda f(t, x_t), \quad \lambda \geq 0, \tag{1}$$

where:

i) $x''_\pi(t)$ stands for the tangential part of the acceleration $x''(t) \in \mathbb{R}^k$ at the point $x(t) \in M$,

ii) $f \colon \mathbb{R} \times BU((-\infty, 0], M) \to \mathbb{R}^k$ is such that $f(t, \varphi) \in T_{\varphi(0)}M$ for all (t, φ), where $T_pM \subseteq \mathbb{R}^k$ is the tangent space of M at a point p of M; we call such a map *functional field*;

iii) x_t denotes the function $\theta \mapsto x(t + \theta)$.

We obtain *global continuation results* for (1). More in detail, we assume that f is T-periodic in the first variable and locally Lipschitz in the second one. We denote by $C^1_T(M)$ the space of the T-periodic C^1 maps $x \colon \mathbb{R} \to M$ with the standard C^1 metric, and we call $(\lambda, x) \in [0, +\infty) \times C^1_T(M)$ a *T-forced pair* of the equation (1) if $x \colon \mathbb{R} \to M$ is a T-periodic solution of (1) corresponding to λ. Among these pairs we distinguish the *trivial* ones; that is, the elements of the form $(0, p^-)$, where, given $p \in M$, p^- denotes the constant p-valued function defined on $\mathbb{R}$. A point $p \in M$ is called a *bifurcation point* of (1) if any neighborhood of $(0, p^-)$ in $[0, +\infty) \times C^1_T(M)$ contains nontrivial T-forced pairs. Theorem 2.1 below is a global continuation result for T-forced pairs of problem (1).

The prelude of our approach can be found in some papers of the last two authors (see e.g. [3, 4]). In [4] Furi and Pera proved a global continuation result for the second order parametrized motion equation

$$x''_\pi(t) = \lambda \mathfrak{f}(t, x(t), x'(t)), \quad \lambda \geq 0,$$

where $\mathfrak{f}\colon \mathbb{R}\times TM \to \mathbb{R}^k$ is a continuous, T-periodic tangent vector field on M. Our results improve those of [4] in a natural sense, since differential equations with delay include ODEs as particular cases. The proof of Theorem 2.1 is topological. It is based on a relation, proved in [2, Lemma 3.8], between the degree of the tangent vector field

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t,p^-)\,dt, \quad p \in M$$

and the fixed point index of a sort of Poincaré T-translation operator acting inside the Banach space $C([-T,0],\mathbb{R}^{2k})$. Notice that (1) is equivalent to a first order retarded functional differential equation on the tangent bundle TM. We prove Theorem 2.1 by transforming (1) into the first order system, where $r\colon TM \to \mathbb{R}^k$ is the inertial reaction:

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = r(x(t),y(t)) + \lambda f(t,x_t), \quad \lambda \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

2 Main Results

Theorem 2.1. *Let $M \subseteq \mathbb{R}^k$ be a boundaryless smooth manifold, $f\colon \mathbb{R}\times\widetilde{M} \to \mathbb{R}^k$ a functional field on M, T-periodic in the first variable and locally Lipschitz in the second one, and $\bar{f}\colon M \to \mathbb{R}^k$ the autonomous tangent vector field*

$$\bar{f}(q) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t,q^-)\,dt\,.$$

Let Ω be an open subset of $[0,+\infty)\times C^1_T(M)$ and let $j\colon M \to [0,+\infty)\times C^1_T(M)$ be the embedding $q \mapsto (0,q^-)$. Assume that $\deg(\bar{f}, j^{-1}(\Omega))$ is defined and nonzero. Then, Ω contains a connected subset of nontrivial T-forced pairs of the equation

$$x''_\pi(t) = \lambda f(t,x_t), \quad \lambda \geq 0\,, \tag{1}$$

whose closure in Ω is noncompact and meets the set $\{(0,q^-)\in\Omega : \bar{f}(q) = 0\}$.

As a byproduct of Theorem 2.1, we obtain a Rabinowitz-type bifurcation result, assuming that the degree of $\bar{f}$ is nonzero on an open subset of M. Another corollary is a Mawhin-type continuation principle. A principal motivation in [4] was to investigate the problem about the existence of forced oscillation for constrained systems with compact, topologically nontrivial constraint, such as the spherical pendulum, whose constraint M is S^2. Concerning the *retarded spherical pendulum*, an existence result for forced oscillations has been proved by the authors in [1], assuming the continuity of the functional field f on the space $\mathbb{R}\times C((-\infty,0],S^2)$, with $C((-\infty,0],S^2)$ having the too weak topology of the uniform convergence on compact intervals, making the continuity assumption of f a heavy hypothesis. Our main result allows us to extend this existence theorem to the case in which the functional field is continuous on $\mathbb{R}\times BU((-\infty,0],S^2)$

References

[1] BENEVIERI, P., CALAMAI, A., FURI, M. AND PERA, M.P. - On the Existence of Forced Oscillations for the Spherical Pendulum Acted on by a Retarded Periodic Force, *J. Dyn. Diff. Equat.*, **23** (2011), 541–549.

[2] BENEVIERI, P., CALAMAI, A., FURI, M. AND PERA, M.P. - Global continuation of periodic solutions for retarded functional differential equations on manifolds, Special Issue on “Jean Mawhin’s Achievements in Nonlinear Analysis”, *Boundary Value Problems*, 2013, **2013:21**, pp. 19.

[3] FURI, M. AND PERA, M.P. - A continuation principle for forced oscillations on differentiable manifolds, *Pacific J. Math.*, **121** (1986), 321–338.

[4] FURI, M. AND PERA, M.P. - A continuation principle for periodic solutions of forced motion equations on manifolds and applications to bifurcation theory, *Pacific J. Math.*, **160** (1993), 219–244.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *51–52*

SOME RESULTS OF ALMOST PERIODICITY OF NONAUTONOMOUS DIFFERENCE EQUATIONS

FILIPE DANTAS[1,†], CLAUDIO CUEVAS[2,‡] & HERME SOTO[3,§]

[1]Departamento de Matemática , UFS, SE, Brasil, [2]Departamento de Matemática , UFPE, PE, Brasil, [3]Departamento de Matemática y Estadística, Universidad de La Frontera, Temuco, Chile

[†]filipeddsmat@gmail.com, [‡]cch@dmat.ufpe.br, [§]hsoto@ufro.cl

Abstract

We obtain a characterization result for the problem of almost periodicity of the hyperbolic nonautonomous difference equations in Banach spaces using the theory of separation of solutions.

1 Introduction

Let $\mathbb{X}$ be a Banach space and consider the equation

$$u(n+1) = T(n)u(n) + f(n),\ n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

where $(T(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ is a family of bounded linear operators on $\mathbb{X}$ and $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$ is a sequence. The problem of almost periodicity of (1) is the following: suppose that $n \mapsto T(n)$ and $n \mapsto f(n)$ are almost periodic. If $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$ is a solution of (1), is u a almost periodic sequence? Our results allow us to answer this question if the discrete evolution family $U : \{(n,m) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}; n \geq m\} \to \mathcal{B}(\mathbb{X})$ generated by $(T(n))_{n\in\mathbb{Z}}$

$$U(n,m) = \left\{ \begin{array}{ccl} \mathcal{I} & , & \text{if } n = m \\ T(m-1)\circ\cdots\circ T(n) & , & \text{if } n > m. \end{array} \right. \tag{2}$$

has exponential dichotomy:

Definition 1.1. *A discrete evolution family $U(n,s)$ is called hyperbolic (or has a exponential dichotomy) with constant $M \geq 1$ and exponent $\omega > 0$ if there are projections $Q(s) \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$, $s \in \mathbb{Z}$, such that*

(i) for all $n \in \mathbb{Z}$, $U(n+1,n)Q(n) = Q(n+1)U(n+1,n)$;

(ii) For all $m > n \in \mathbb{Z}$, $U(m,n) : Im(Q(n)) \to Im(Q(m))$ is a isomorphism with inverse $U(n,m) := U(m,n)^{-1} : Im(Q(m)) \to Im(Q(n))$;

(iii) $||U(n,m)(\mathcal{I} - Q(m))||_{\mathcal{L}(\mathbb{X})} \leq Me^{-\omega(n-m)}$, if $n \geq m$;

(iv) $||U(n,m)Q(m)||_{\mathcal{L}(\mathbb{X})} \leq Me^{\omega(n-m)}$, if $n < m$.

To study almost periodicity of the equation (1), we will study the general equation

$$u(n+1) = h(n,u(n)),\ n \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

following the Amerio's theory of separation of solutions (see [1] for more details). More precisely, we need the concept of hull of a sequence (or a function). Given $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$ and $h : \mathbb{Z}\times\mathbb{X} \to \mathbb{X}$, we define

$$H(u) := \{v : \mathbb{Z} \to \mathbb{X}\ ;\ \text{exists a sequence } (s_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z} \text{ such that } \lim_{k\to+\infty} u(n+s_k) = v(n) \text{ uniformly in } n \in \mathbb{Z}\}.$$

$$H(h) := \{p : \mathbb{Z} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X} \ ; \text{ exists a sequence } (s_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z} \text{ such that } \lim_{k\to+\infty} h(n+s_k, x) = p(n,x) \text{ uniformly in } (n,x) \in \mathbb{Z} \times K, \text{ for each } K \subset \mathbb{X} \text{ compact}\}.$$

For each $p : \mathbb{Z} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ in the $H(h)$, we consider the equation

$$v(n+1) = p(n, v(n)), n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Fix a compact subset $K \subset \mathbb{X}$ and let $D = \mathbb{Z} \times K$.

Definition 1.2. *A family $\mathcal{F}$ of sequences in $\mathbb{X}$ is separated in D if the graph of each $u \in \mathcal{F}$ belongs to D and if there exists $r > 0$ such that*

$$||u(n) - v(n)|| \geq r, \forall n \in \mathbb{Z}$$

for all $u, v \in \mathcal{F}$.

Then, we prove the following result:

Theorem 1.1. *If $\mathcal{F} \neq \emptyset$ is separated in D, then $\mathcal{F}$ is finite.*

2 Main Results

Lemma 2.1. *Let $h \in AP(\mathbb{Z} \times \mathbb{X}; \mathbb{X})$. If any system (4) has separated solutions on D, then we can find $\sigma > 0$ such that, for each $p \in H(h)$ and for each couple of solutions v_1, v_2 of (4), we have $\inf_{n\in\mathbb{Z}} ||v_1(n) - v_2(n)|| \geq \sigma$. In particular, the equations (3) and (4), for all $p \in H(h)$, have the same number of separated solutions in D.*

Theorem 2.1. *Suppose that $h \in AP(\mathbb{Z} \times \mathbb{X}; \mathbb{X})$. If, for each $p \in H(h)$, the equation (4) possess separated solution in D, then all the solutions of (3) are almost periodic.*

As a consequence of the Theorem 2.1, we give the following characterization of almost periodicity of (1):

Corollary 2.1. *Suppose that $\{T(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ is almost periodic and generates a hyperbolic evolution family $(U(n,m))_{n\geq m}$. If $f \in AP(\mathbb{Z}; \mathbb{X})$, then the solution of $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$ of (1) is almost periodic if, and only if, $Im(u) \subset \mathbb{X}$ is relatively compact.*

References

[1] CORDUNEANU, C. - *Almost Periodic Functions.* Interscience Publishers [John Wiley & Sons], New York-London-Sydney, 1968. With the collaboration of N. Gheorghiu and V. Barbu, Translated from the Romanian by Gitta Bernstein and Eugene Tomer, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 22.

[2] DANTAS, F., CUEVAS, C. AND SOTO, H. - *Almost periodicity for a nonautonomous discrete dispersive population model*, submitted.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *53–54*

ALMOST AUTOMORPHIC SOLUTIONS OF DYNAMIC EQUATIONS ON TIME SCALES

C. LIZAMA[1,†] & J. G. MESQUITA[2,3,‡]

[1]Universidad de Santiago de Chile, Santiago, Chile, [2]Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto-SP, Brasil,
[3]Supported by CAPES grant 5811/12-0 and FAPESP grant 2013/17104-3.

[†]carlos.lizama@usach.cl, [‡]jgmesquita@ffclrp.usp.br

Abstract

In the present work, we introduce the concept of almost automorphic functions on time scales and present the first results about their basic properties. Then, we study the nonautonomous dynamic equations on time scales given by $x^{\Delta}(t) = A(t)x(t) + f(t)$ and $x^{\Delta}(t) = A(t)x(t) + g(t, x(t))$, $t \in \mathbb{T}$ where $\mathbb{T}$ is a special case of time scales that we define in this article. We prove a result ensuring the existence of an almost automorphic solution for both equations, assuming that the associated homogeneous equation of this system admits an exponential dichotomy. Also, assuming the function g satisfies the global Lipschitz type condition, we prove the existence and uniqueness of an almost automorphic solution of the nonlinear dynamic equation on time scales. Further, we present some applications of our results for some new almost automorphic time scales. Finally, we present some interesting models which our main results can be applied.

1 Introduction

The theory of time scales is a recent theory which started to be developed by Stefan Hilger, on his doctoral thesis (see [6]). This theory represents a powerful tool for applications to economics, populations models, quantum physics among others. See, for instance, [1, 5, 7].

Since time scale is any closed nonempty subset of $\mathbb{R}$, the theory of dynamic equations on time scales allows to unify several developments in evolution equations, depending on the chosen time scale. For instance, if $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, we have a result for difference equations. On the other hand, taking $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, we obtain a result for differential equations. We point out that this theory can also describe continuous-discrete hybrid processes, which have several important applications. For instance, the continuous-discrete hybrid processes can be used to investigate option-pricing and stock dynamics in finance, the frequency of markets and duration of market trading in economics, large-scale models of DNA dynamics, gene mutation fixation, electric circuits, populations models, among others. See, for instance, [4, 5, 8, 13, 7] and the references therein. Moreover, this theory can be used to study quantum physics. Choosing the time scale equal to $q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$, $q > 1$, we obtain a result for quantum calculus, which is a fundamental tool to study quantum physics. See [2] and [3] for more details.

In this work, we introduce the concept of almost automorphic functions on time scales and to start the investigation of existence and uniqueness of almost automorphic solutions of dynamic equations. More precisely, we study the non-autonomous dynamic equations on time scales given by

$$x^{\Delta}(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{T}, \tag{1}$$

where $A \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ and $f \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n)$.

We prove the existence of an almost automorphic solution of (1), assuming the associated homogeneous equation of (1) admits an exponential dichotomy and $\mathbb{T}$ is an invariant under translations time scale, concept that we introduce here for the first time. Also, we suppose $A \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ is almost automorphic and nonsingular matrix function, the sets $\{A^{-1}(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ and $\{(I + \mu(t)A(t))^{-1}\}_{t\in\mathbb{T}}$ are bounded and $f \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n)$ is almost automorphic function.

After that, we consider the semilinear dynamic equation on time scales given by

$$x^{\Delta}(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{T}, \tag{2}$$

where $A \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$, $f \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ and $\mathbb{T}$ is an invariant under translations time scale.

We also obtain the existence and uniqueness of an almost automorphic solution of (2), we assume the associated homogeneous equation of (2) admits an exponential dichotomy and $A \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ is almost automorphic and nonsingular matrix function, the sets $\{A^{-1}(t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ and $\{(I + \mu(t)A(t))^{-1}\}_{t\in\mathbb{T}}$ are bounded and $f \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ is almost automorphic function with respect to first variable and satisfies the global Lipschitz condition with respect to the second variable.

References

[1] ATICI, F. M., BILES, D. C., LEBEDISNKY, A., *An application of time scales to economics*, Mathematical and Computer Modelling, 43, (2006) 718-726.

[2] BOHNER, M., PETERSON, A., *Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications*, Birkhäuser, Boston, 2001.

[3] BOHNER, M., PETERSON, A., *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*, Birkhäuser, Boston, 2003.

[4] BRIGO, D., MERCURIO, F., *Discrete time vs continuous time stock-price dynamics and implications for option pricing*, Finance and Stochastics 4 (2000), 147–159.

[5] CHRISTIANSEN, F.B., FENCHEL, T.M., *Theories of populations in biological communities*, vol. 20 of Lectures Notes in Ecological Studies, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[6] HILGER, S., *Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmanningfaltigkeiten*, PhD thesis, Universität Würzburg, 1988.

[7] KELLER, S., *Asymptotisches Verhalten invarianter Faserbündel bei Diskretisierung und Mittelwertbildung in Rahmen der Analysis auf Zeitskalin*, PhD thesis, Universität Augsburg, 1999.

[8] KLAPPER, I., QIAN H., *Remarks on discrete and continuous large-scale models of DNA dynamics*, Biophysical Journal, 74 (1998), 2504–2514.

[9] LI, Y., WANG, C., *Pseudo almost periodic functions and pseudo almost periodic solutions to dynamic equations on time scales*, Adv. Difference Equ., 2012, 2012:77, 24 pp.

[10] LIZAMA, C., MESQUITA, J. G., *Almost automorphic solutions of dynamic equations on time scales*, J. Funct. Anal. 265 (2013), no. 10, 2267–2311.

[11] LIZAMA, C., MESQUITA, J. G., *Addendum to "Almost automorphic solutions ofdynamic equations on time scales" [J.Funct. Anal. 265 (10) (2013) 2267–2311]*, J. Funct. Anal., to appear.

[12] LIZAMA, C., MESQUITA, J. G., PONCE, R., *A connection between almost periodic functions defined on time scales and* $\mathbb{R}$, Appl. Anal. 93 (2014), no. 12, 2547–2558.

[13] TISDELL, C.C., ZAIDI, A., *Basic qualitative and quantitative results for solutions to nonlinear, dynamic equations on time scales with an application to economic modelling*, Nonlinear Anal., 68 (2008), no 11, p. 3504–3524.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *55–56*

ESTABILIDADE LINEAR DE ONDAS VIAJANTES PERIÓDICAS PARA A EQUAÇÃO INTERMEDIÁRIA DE ONDAS LONGAS

ELEOMAR CARDOSO JR.[1,†] & FÁBIO NATALI[2,‡]

[1]UFSC, Blumenau-PR, Brasil, [2]DMA, UEM, Maringá-PR, Brasil.

[†]eleomarjunior@utfpr.edu.br, [‡]fmanatali@uem.br

Resumo

A equação Intermediária de Ondas Longas é uma equação integro-diferencial que descreve a propagação de ondas gravitacionais internas longas em um fluído estratificado de profundidade finita. Além disto, esta equação também modela o movimento de ondas longas no contexto atmosférico e oceânico e o "fenômeno de águas mortas" introduzido por Ekman [3]. Neste trabalho, investigamos a estabilidade linear de ondas periódicas, em um espaço de Sobolev de média zero, para a equação Intermediária de Ondas Longas. Nesta abordagem, são usadas técnicas associadas ao estudo do índice Hamiltoniano de Krein vinculado ao operador linearizado.

1 Introdução

Consideremos que as constantes $L > 0$ e $\delta > 0$ sejam fixadas. A equação

$$u_t + 2uu_x - (\mathcal{M}_\delta u)_x = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \tag{1}$$

onde

$$\widehat{(\mathcal{M}_\delta g)}(\kappa) = \left[\frac{2\kappa\pi}{L} \coth\left(\frac{2\kappa\pi\delta}{L}\right) - \frac{1}{\delta}\right] \widehat{g}(\kappa), \ \forall\, \kappa \in \mathbb{Z},$$

é denominada a equação Intermediária de Ondas Longas.

A função $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é dita uma solução do tipo onda viajante periódica de período L para a equação (1) se existirem $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função suave e L-periódica, tais que

$$u(x,t) := \varphi(x - ct), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

soluciona (1) no sentido pontual.

Seja o espaço de Hilbert

$$H_0 = \left\{ f \in L^2_{per}([0,L]); \ \int_0^L f(x)\ dx = 0 \right\}$$

e o operador linearizado

$$\mathcal{L} := (\mathcal{M}_\delta + c) - 2\varphi. \tag{2}$$

Consideremos o problema de obter um par $(\lambda, \psi) \in \mathbb{C} \times H_0$, de tal forma que

$$J\mathcal{L}|_{H_0}\, \psi = \lambda\psi, \tag{3}$$

onde $J = \partial_x$. A onda viajante periódica associada à função φ é dita ser linearmente instável em H_0 se existir um par $(\lambda, \psi) \in \mathbb{C} \times H_0$, com $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ e $\psi \neq 0$, para o qual a identidade (3) é válida. Caso contrário, a onda viajante é dita ser linearmente estável em H_0. Parker (ver [4]) deduziu uma classe de ondas viajantes periódicas para a equação (1). Neste trabalho, investigamos a estabilidade linear das ondas viajantes periódicas deduzidas por Parker.

2 Resultados Principais

Definamos k_r como o número de autovalores reais positivos (contando as devidas multiplicidades) do operador $\partial_x \mathcal{L}|_{H_0}$. Entendemos k_c como o número de autovalores complexos (não-reais) de $\partial_x \mathcal{L}|_{H_0}$ cuja parte real é estritamente positiva (contando as devidas multiplicidades). Se $\mathcal{A}$ for um operador auto-adjunto, então, $n(\langle w, \mathcal{A}w \rangle)$ denota a dimensão maximal do subespaço que satisfaz $\langle w, \mathcal{A}w \rangle < 0$. Suponhamos que λ seja um autovalor imaginário puro do operador $\partial_x \mathcal{L}$ e que E_λ seja o autoespaço associado a λ. Definamos a assinatura de Krein negativa de λ por

$$k_i^-(\lambda) = n(\langle w, (\mathcal{L}|_{H_0})|_{E_\lambda} w \rangle).$$

Finalmente, definamos

$$k_i^- := \sum_{\lambda \in i\mathbb{R} - \{0\}} k_i^-(\lambda)$$

como a assinatura de Krein total e o número inteiro não-negativo

$$K_{Ham} := k_r + k_c + k_i^-$$

define o índice Hamiltoniano de Krein associado ao operador $\partial_x \mathcal{L}$.

Baseados no índice Hamiltoniano de Krein, em vista da teoria detalhada por Deconinck e Kapitula (ver [2]) e por Kapitula e Promislow (ver [3]), enunciamos o seguinte resultado:

Teorema 2.1. *As ondas viajantes periódicas, obtidas em [4], são soluções linearmente estáveis para a equação Intermediária de Ondas Longas (1).*

A prova do teorema acima enunciado requer o conhecimento de características do espectro do operador $\mathcal{L}$, dado em (2). Para tal estudo, entretanto, são usados resultados relativos à positividade do operador abordados por Angulo e Natali (ver [1]).

Referências

[1] ANGULO, J.; NATALI, F. *Positivity Properties of the Fourier Transform and the Stability of Periodic Travelling-Wave Solutions*. SIAM Journal on Mathematical Analysis, **40** (2008), pg. 1123-1151.

[2] DECONINCK, B.; KAPITULA, T. *On the Orbital (In)Stability of Spatially Periodic Stationary Solutions of Generalized Korteweg-de Vries Equations.* Preprint, 2011.

[3] EKMAN, V. W. *The Norwegian North Polar Expedition 1893-96.* Vol. 5, Chapter 15. Christiania, Oslo, 1906.

[4] KAPITULA, T.; PROMISLOW, K. *Spectral and Dynamical Stability of Nonlinear Waves.* Springer, New York, 2013.

[5] PARKER, A. *Periodic Solutions of the Intermediate Long-Wave Equation: a Nonlinear Superposition Principle.* J. Physica A: Math. Gen., **25** (1992), pg. 2005-2032.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *57–58*

UM ESTUDO DA PROPRIEDADE MIXING PARA OPERADORES DE CONVOLUÇÃO

VINÍCIUS VIEIRA FÁVARO[1,2,†] & JORGE MUJICA[3,‡]

[1]FAMAT, UFU, MG, Brasil, [2]Agradeço ao apoio financeiro da FAPESP Processo 2014/50536-7; FAPEMIG PPM-00086-14; e CNPq Processos 482515/2013-9, 307517/2014-4. , [3]IMECC, UNICAMP, SP, Brasil.

[†]vvfavaro@gmail.com, [‡]mujica@ime.unicamp.br

Resumo

Neste trabalho provaremos que, no caso particular que um espaço localmente convexo E é um espaço DFN, todo operador de convolução não trivial sobre $\mathcal{H}(E)$ é mixing, em particular hipercíclico. Mostraremos também que não se pode esperar resultados deste tipo para um espaço localmente convexo arbitrário, pois provaremos que os operadores translação sobre o espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ nunca são hipercíclicos.

1 Introdução

Se X é um espaço vetorial topológico, dizemos que um operador linear contínuo $T\colon X \to X$ é *hipercíclico* se sua *órbita* $\{x, T(x), T^2(x), \ldots\}$ é densa em X, para algum $x \in X$. Dizemos que X é *mixing* se dados abertos não-vazios $U, V \subset X$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$, para todo $n \geq n_0$. É fácil ver que todo operador mixing é hipercíclico.

Neste trabalho estamos particularmente interessados em estudar a propriedade mixing para operadores de convolução em espaços de funções inteiras. Godefroy e Shapiro [4] provaram que todo operador de convolução não trivial sobre o espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ das funções inteiras definidas em $\mathbb{C}^n$ é hipercíclico. Por um *operador de convolução não trivial* estamos referindo a um operador de convolução que não é múltiplo escalar da identidade. Este resultado generaliza resultados clássicos de Birkhoff [2] e MacLane [5] sobre hiperciclicidade dos operadores translação e diferenciação sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Em [1], os autores provaram um resultado geral de hiperciclicidade para operadores de convolução sobre o espaço $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ das funções inteiras de Θ-tipo limitado definidas sobre o espaço de Banach complexo E. Os resultados de [1] e [4] são baseados no critério de Kitai (também conhecido como critério de hiperciclicidade). Atualmente, sabe-se que o critério de Kitai prova mais do que hiperciclicidade, prova mixing. Logo as demonstrações dos resultados de [1] e [4] garantem que os referidos operadores de convolução são mixing.

Neste trabalho provaremos que se E é um espaço DFN arbitrário, então todo operador de convolução não trivial sobre o espaço de Fréchet $\mathcal{H}(E)$ é mixing. Relembre que um *espaço DFN* é um espaço que é o dual forte de um espaço de Fréchet nuclear. Nossa prova combina os resultados de hiperciclicidade para $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ (com E normado) explorados em [1] com um método de fatoração introduzido por Colombeau e Matos [3] para o espaço $\mathcal{H}_{uNb}(E)$ (com E localmente convexo).

Provaremos também que não podemos obter hiperciclicidade de operadores de convolução quando E é um espaço localmente convexo arbitrário. Em contraste com o fato que todo operador de convolução não trivial sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ é hipercíclico, provaremos que todo operador translação sobre $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ não é hipercíclico, considerando em $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ qualquer uma das três topologias usuais: a topologia compacto aberta τ_0, a topologia portada de Nachbin τ_ω, ou a topologia bornológica τ_δ.

2 Resultados

Definição 2.1. Seja E um espaço localmente convexo. Um *operador de convolução* sobre $\mathcal{H}(E)$ é um operador linear contínuo

$$L\colon \mathcal{H}(E) \to \mathcal{H}(E)$$

tal que $L(\tau_a f) = \tau_a(Lf)$ para toda $f \in \mathcal{H}(E)$ e $a \in E$, onde $(\tau_a f)(x) = f(x-a)$ para todo $x \in E$.

Abaixo enunciamos o principal resultado do trabalho.

Teorema 2.1. *Seja E um espaço DFN e L um operador de convolução não trivial sobre $\mathcal{H}(E)$. Então L é mixing, em particular hipercíclico.*

O próximo resultado dá o contraexemplo que mencionamos anteriormente.

Teorema 2.2. *(a)* $(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau_0) = (\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau_\omega) \neq (\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau_\delta)$.

(b) Para cada $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, o operador translação τ_a é um operador de convolução sobre $(\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}), \tau)$ que não é hipercíclico, para $\tau = \tau_0$, τ_ω ou τ_δ.

Referências

[1] BERTOLOTO, F.; BOTELHO, G.; FÁVARO, V. V. AND JATOBÁ, A. M. - *Hypercyclicity of convolution operators on spaces of entire functions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **63** (2013), 1263-1283.

[2] BIRKHOFF, G. D. - *Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières*, C. R. Acad. Sci. Paris **189** (1929), 473-475.

[3] COLOMBEAU, J. F. AND MATOS, M. C. - *Convolution equations in spaces of infinite dimensional entire functions*, Indag. Math. (Proceedings A) **83** (1980), 375-389.

[4] GODEFROY, G. AND SHAPIRO, J. H. - *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds*, J. Funct. Anal. **98** (1991), 229-269.

[5] MACLANE, G. M. - *Sequences of derivatives and normal families*, J. Anal. Math. **2** (1952), 72–87.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *59–60*

NONTRIVIAL TWISTED SUMS OF C_0 AND $C(K)$

CLAUDIA CORREA DE ANDRADE OLIVEIRA[1,2,3,†]

[1]Instituto de Matemática e Estatística, USP, SP, Brasil, [2]The author is sponsored by FAPESP (Process no. 2014/00848-2)
[3]This is a joint work with Professor Daniel Victor Tausk.

[†]claudiac.mat@gmail.com

Abstract

We obtain a new class of compact Hausdorff spaces K for which c_0 can be nontrivially twisted with $C(K)$, making significant progress on a problem studied in many articles.

1 Introduction

In this work, we present a broad new class of compact Hausdorff spaces K such that $Ext\big(C(K), c_0\big) \neq 0$, where $C(K)$ denotes the Banach space of continuous real-valued functions on K endowed with the supremum norm. For Banach spaces X and Y, one can define the spaces $Ext_n(X, Y)$ following the standard procedure used in the category of modules over a ring. The space $Ext_1(X, Y)$, which we denote simply by $Ext(X, Y)$, can be identified with the set of equivalence classes of short exact sequences $0 \to Y \to Z \to X \to 0$ of Banach spaces and bounded linear operators. More precisely, given Banach spaces X and Y, the space $Ext(X, Y)$ is identified with the set of all short exact sequences of the form $0 \to Y \to Z \to X \to 0$, where Z is another Banach space and the morphisms are bounded linear operators, modulo the following equivalence relation: two exact sequences $0 \to Y \xrightarrow{T_1} Z_1 \xrightarrow{S_1} X \to 0$ and $0 \to Y \xrightarrow{T_2} Z_2 \xrightarrow{S_2} X \to 0$ are related if and only if there exists an isomorphism $R : Z_1 \to Z_2$ such that $R \circ T_1 = T_2$ and $S_2 \circ R = S_1$. A short exact sequence $0 \to Y \to Z \to X \to 0$ of Banach spaces is also called a *twisted sum* of Y and X. This twisted sum is called *trivial* if the exact sequence splits, i.e., if the map $Y \to Z$ admits a bounded linear left inverse (equivalently, if the map $Z \to X$ admits a bounded linear right inverse). In other words, the twisted sum is trivial if the range of the map $Y \to Z$ is complemented in Z; in this case, $Z \cong X \oplus Y$. Many problems in Banach space theory are related to the quest for conditions under which $Ext(X, Y) = 0$, i.e., under which every twisted sum of Y and X is trivial. For instance, an equivalent statement for the classical Theorem of Sobczyk is that if X is a separable Banach space, then $Ext(X, c_0) = 0$. The converse of the latter statement clearly does not hold in general: for example, $Ext\big(\ell_1(I), c_0\big) = 0$, since $\ell_1(I)$ is a projective Banach space. However, the following question remains open: *is it true that $Ext\big(C(K), c_0\big) \neq 0$ for any nonseparable $C(K)$ space?* This problem was stated in [1, 2] and further studied in the recent article [3]. In this work, we develop a technique involving biorthogonal systems that allows one to conclude the existence of nontrivial twisted sums of c_0 and certain Banach spaces. The application of this technique to $C(K)$ spaces yields a large class of compact Hausdorff spaces K such that $Ext\big(C(K), c_0\big) \neq 0$. Thanks to the existence of nice biorthogonal systems in the space of continuous real-valued functions defined on a Valdivia compactum, our results are a huge advance towards the solution of the open problem of determining whether c_0 can be nontrivially twisted with $C(K)$ for any nonmetrizable Valdivia compact space K ([3]).

2 Main Results

The technique involving biorthogonal systems is presented in Theorem 2.1 and the key to its proof is Lemma 2.1 below. Recall that a family of sets $(A_i)_{i \in I}$ is said to be *almost disjoint* if each A_i is infinite and $A_i \cap A_j$ is finite, for all $i, j \in I$ with $i \neq j$. Here, we denote by ω the set of natural numbers and by $\mathfrak{c}$ the cardinality of the *continuum.*

Lemma 2.1. *There exists an almost disjoint family* $(A_{n,\alpha})_{n\in\omega,\alpha\in\mathfrak{c}}$ *of subsets of* ω *satisfying the following property: for every family* $(A'_{n,\alpha})_{n\in\omega,\alpha\in\mathfrak{c}}$ *with each* $A'_{n,\alpha}\subset A_{n,\alpha}$ *cofinite in* $A_{n,\alpha}$*, it holds that* $\sup_{p\in\omega}|M_p|=+\infty$*, where* $M_p=\big\{n\in\omega : p\in\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{c}}A'_{n,\alpha}\big\}$ *and* $|M_p|$ *denotes the cardinality of the set* M_p*.*

Let X is a Banach space. A *biorthogonal system* in X is a family $(x_i,\gamma_i)_{i\in I}$ with $x_i\in X$, $\gamma_i\in X^*$, $\gamma_i(x_i)=1$ and $\gamma_i(x_j)=0$ for $i\neq j$. We call this biorthogonal system *bounded* if $\sup_{i\in I}\|x_i\|<+\infty$ and $\sup_{i\in I}\|\gamma_i\|<+\infty$; *weak*-null* if $(\gamma_i)_{i\in I}$ is a weak*-null family, i.e., if $\big(\gamma_i(x)\big)_{i\in I}$ is in $c_0(I)$, for all $x\in X$.

Theorem 2.1. *Let* X *be a Banach space. Assume that there exist a weak*-null biorthogonal system* $(x_{n,\alpha},\gamma_{n,\alpha})_{n\in\omega,\alpha\in\mathfrak{c}}$ *in* X *and a constant* $C\geq 0$ *such that* $\Big\|\sum_{i=1}^k x_{n_i,\alpha_i}\Big\|\leq C$ *for all* $n_1,\dots,n_k\in\omega$ *pairwise distinct, all* $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathfrak{c}$*, and all* $k\geq 1$*. Then* $Ext(X,c_0)\neq 0$*.*

If X is a $C(K)$ space, then Theorem 2.1 has an interesting consequence, stated in Corollary 2.1.

Corollary 2.1. *Let* K *be a compact Hausdorff space. Assume that there exists a bounded weak*-null biorthogonal system* $(f_{n,\alpha},\gamma_{n,\alpha})_{n\in\omega,\alpha\in\mathfrak{c}}$ *in* $C(K)$ *such that* $f_{n,\alpha}f_{m,\beta}=0$*, for all* $n,m\in\omega$ *with* $n\neq m$ *and all* $\alpha,\beta\in\mathfrak{c}$*. Then* $Ext\big(C(K),c_0\big)\neq 0$*.*

Using Corollary 2.1 and some technical results, we conclude that $Ext\big(C(K),c_0\big)\neq 0$ for many classes of compact spaces K. In the next theorem, we state a few of them.

Theorem 2.2. *If* K *is the space* $[0,\omega]\times[0,\mathfrak{c}]$ *or* K *is a product of at least* $\mathfrak{c}$ *compact Hausdorff spaces with more than one point, then* $Ext\big(C(K),c_0\big)\neq 0$*.*

Now, we turn our attention to Valdivia compacta and its subclass of Corson compacta. Given an index set I, we write $\Sigma(I)=\big\{x\in\mathbb{R}^I : \text{support of } x \text{ is countable}\big\}$, where the support of $x\in\mathbb{R}^I$ is the set of points of I such that $x_i\neq 0$. Given a compact Hausdorff space K, we call A a Σ*-subset* of K if there exists an index set I and a continuous injection $\varphi: K\to\mathbb{R}^I$ such that $A=\varphi^{-1}[\Sigma(I)]$. The space K is called a *Valdivia compactum* if it admits a dense Σ-subset and it is called a *Corson compactum* if K is a Σ-subset of itself. The general problem of determining whether c_0 can be nontrivially twisted with $C(K)$ for any nonmetrizable Valdivia compact space remains open, but we solved it in several particular cases. The main results obtained are stated in Theorems 2.3 and 2.4 and Corollary 2.2.

Theorem 2.3. *Assume the Continuum hypothesis (CH). Let* K *be a Valdivia compact space. If* K *has a dense* Σ*-subset* A *such that some point of* $K\setminus A$ *is the limit of a nontrivial sequence in* K*, then* $Ext\big(C(K),c_0\big)\neq 0$*.*

Theorem 2.4. *If* K *is a Valdivia compact space admitting a* G_δ *point with no second countable neighborhoods, then* $Ext\big(C(K),c_0\big)\neq 0$*.*

Using Theorem 2.4, we were able to establish the following result.

Corollary 2.2. *Assume CH. Then* $Ext\big(C(K),c_0\big)\neq 0$ *for any nonmetrizable Corson compact space* K*.*

References

[1] F. Cabello, J. M. F. Castillo, N. J. Kalton, D. T. Yost, Twisted sums with $C(K)$ spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **355** (11), 4523-4541, 2013.

[2] F. Cabello, J. M. F. Castillo, D. T. Yost, Sobczyk's Theorem from A to B, *Extracta Math.*, **15** (2), 391-420, 2000.

[3] J. M. F. Castillo, Nonseparable $C(K)$-spaces can be twisted when K is a finite height compact, *to appear in Topology Appl.*

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *61–62*

HIPERCICLICIDADE DE OPERADORES DE CONVOLUÇÃO EM CERTOS ESPAÇOS DE FUNÇÕES INTEIRAS

V. V. FÁVARO[1,†] & A. M. JATOBÁ[1,2,‡]

[1]Universidade Federal de Uberlândia , UFU, MG, Brasil, [2]Agradece à Fapemig pelo apoio financeiro.

[†]vvfavaro@gmail.com, [‡]marques@famat.ufu.br

Resumo

Neste trabalho provamos resultados de hiperciclicidade para operadores de convolução definidos sobre os espaços de funções inteiras de tipo zero e ordem $k \geq 1$ definidos num espaço de Banach complexo E. Tais resultados estão baseados nos conceitos de π_1 e $\pi_{2,k}$-tipos de holomorfia e generalizam resultados da mesma natureza para espaços de funções inteiras de tipo limitado.

1 Definições e Resultados

Sejam E um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e E' o seu dual topológico. As definições deste trabalho fazem uso do conceito de tipo de holomorfia. Para detalhes da teoria e terminologia usada, veja [5].

Definição 1.1. *[3, Definition 2.2] Seja $(\mathcal{P}_\Theta(^jE))_{j=0}^\infty$ um tipo de holomorfia de E em $\mathbb{C}$. Se $\rho > 0$ e $k \geq 1$, denotamos por $\mathcal{B}^k_{\Theta,\rho}(E)$ o espaço vetorial complexo de todas $f \in \mathcal{H}(E)$ tais que $\widehat{d^j} f(0) \in \mathcal{P}_\Theta\left(^jE\right)$, para todo $j \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ e*

$$\|f\|_{\Theta,k,\rho} = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} \left(\frac{j}{ke}\right)^{\frac{j}{k}} \left\|\frac{1}{j!}\widehat{d^j} f(0)\right\|_\Theta < +\infty,$$

que é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_{\Theta,k,\rho}$.

Definição 1.2. *[3, Definition 2.4] Sejam $(\mathcal{P}_\Theta(^jE))_{j=0}^\infty$ um tipo de holomorfia de E em $\mathbb{C}$ e $k \geq 1$. Denotaremos por $Exp^k_{\Theta,0}(E)$ o espaço vetorial complexo $\bigcap_{\rho>0} \mathcal{B}^k_{\Theta,\rho}(E)$ com a topologia limite projetivo localmente convexa. Aqui estamos considerando a topologia limite projetivo com respeito as inclusões naturais.*

Definição 1.3. Seja $k \geq 1$. Um *operador de convolução* em $Exp^k_{\Theta,0}(E)$ é uma aplicação linear contínua

$$\mathcal{O}\colon Exp^k_{\Theta,0}(E) \longrightarrow Exp^k_{\Theta,0}(E)$$

tal que $\tau_{-a}(\mathcal{O}(f)) = \mathcal{O}(\tau_{-a} f)$, para todo $a \in E$ e $f \in Exp^k_{\Theta,0}(E)$, onde $\tau_{-a} f(x) = f(x + a)$, para todo $x \in E$. Denotamos por $\mathcal{A}^k_{\Theta,0}$ o conjunto dos operadores de convolução em $Exp^k_{\Theta,0}(E)$.

Agora estamos aptos a enunciar os dois resultados principais deste trabalho. O primeiro resultado faz uso do conceito de π_1-tipo de holomorfia que foi introduzido em [2] e refinado em [1]. Já o segundo resultado utiliza o conceito de $\pi_{2,k}$-tipo de holomorfia. Tal conceito é uma variação do conceito de π_2-tipo de holomorfia (veja [1,2]) e foi introduzido em [4].

Teorema 1.1. *Sejam $k \geq 1$, E' separável e $(\mathcal{P}_\Theta(^jE))_{j=0}^\infty$ um π_1-tipo de holomorfia de E em $\mathbb{C}$. Então todo operador de convolução em $\mathcal{A}^k_{\Theta,0}$ que não é múltiplo da identidade é hipercíclico.*

Teorema 1.2. *Seja* $k \geq 1$, E' *separável,* $(\mathcal{P}_{\Theta}(^{j}E))_{j=0}^{\infty}$ *um* π_1*-*$\pi_{2,k}$*-tipo de holomorfia de* E *em* $\mathbb{C}$ *e* $T \in [Exp_{\Theta,0}^{k}(E)]'$ *um funcional linear que não é múltiplo escalar de* δ_0*, onde* δ_0 *é definido por* $\delta_0(f) = f(0)$*. Então o operador de convolução*

$$T*\colon Exp_{\Theta,0}^{k}(E) \longrightarrow Exp_{\Theta,0}^{k}(E)$$

é hipercíclico, onde $T * f(x) = T(\tau_{-x}f)$*.*

Como aplicação do Teorema 1.1, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.1. *Sejam* $k \geq 1$, E' *separável e* $(\mathcal{P}_{\Theta}(^{j}E))_{j=0}^{\infty}$ *um* π_1*-tipo de holomorfia de* E *em* $\mathbb{C}$*. Então todo operador de convolução não nulo em* $\mathcal{A}_{\Theta,0}^{k}$ *tem imagem densa.*

Referências

[1] F. J. Bertoloto, G. Botelho, V. V. Fávaro, A.M. Jatobá, *Hypercyclicity of convolution operators on spaces of entire functions*, Ann. Inst. Fourier 63(4), 1263-1283 (2013).

[2] V.V. Fávaro, A. M. Jatobá, *Holomorphy types and spaces of entire functions of bounded type on Banach spaces.* Czechoslovak Mathematical Journal, v. 59, p. 909 – 927, 2009.

[3] V.V. Fávaro, A. M. Jatobá, *Holomorphy types and the Fourier-Borel transform between spaces of entire functions of a given type and order defined on Banach spaces.* Mathematica Scandinavica , v. 110, p. 111 – 139, 2012.

[4] V.V. Fávaro, A. M. Jatobá, *Holomorphy types and convolution equations on spaces of entire functions of a given type and order.* Preprint.

[5] L. Nachbin, *Topology on Spaces of Holomorphic Mappings.* Springer, New York, 1969.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *63–64*

ON P-BIHARMONIC EQUATIONS WITH CRITICAL GROWTH

HAMILTON BUENO[1,†], LEANDRO PAES-LEME[2,‡] & H. C. RODRIGUES[1,§]

[1]Departamento de Matemática, UFMG, MG, Brasil, [2]Departamento de Matemática, UFOP, MG, Brasil.

[†]hamilton@mat.ufmg.br, [‡]leandro.paesleme@gmail.com, [§]xhelder@mat.ufmg.br

Abstract

We study p-biharmonic problems dealing with concave-convex nonlinearities in the critical case with both Navier and Dirichlet boundary conditions in a bounded, smooth domain and some $f \in C(\overline{\Omega})$, which is either a positive or a change-sign function. By applying Nehari's minimization method, we prove the existence of two nontrivial solutions for the problems. If f is positive, both solutions of the problem with Navier boundary condition are positive.

In this work we study the following fourth-order problems

$$\begin{cases} \Delta_p^2 u := \Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u) = \lambda f(x)|u|^{q-2}u + |u|^{p^*-2}u & \text{in} \quad \Omega, \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

and

$$\begin{cases} \Delta_p^2 u := \Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u) = \lambda f(x)|u|^{q-2}u + |u|^{p^*-2}u & \text{in} \quad \Omega, \\ u = \Delta u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded, smooth domain. We suppose that the exponents p and q are such that $1 < p < \infty$, $N > 2p$, $1 < q < p$, and that $p^* = \frac{Np}{N-2p}$ denotes the Sobolev critical exponent for fourth-order problems. The parameter λ is positive and $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ is either a positive or a changing-sign function.

We consider the "energy" functional

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\Delta u|^p \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x. \tag{3}$$

In the case of problem (1), J_λ is defined in $W_0^{2,p}(\Omega)$; in (2), J_λ is defined in $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$. So, let $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega)$ stand for the space $W_0^{2,p}(\Omega)$ *or* the space $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, according to the problem we deal with, both considered with the norm $\|u\| = \|\Delta u\|_p$, where $\|\cdot\|_p$ denotes the usual norm of $L^p(\Omega)$.

We consider, for each $\lambda > 0$, Nehari's minimization problem:

$$m_\lambda(\Omega) = \inf\{J_\lambda(u) \,:\, u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)\},$$

where $\mathcal{N}_\lambda(\Omega) = \{u \in \mathbf{E} \setminus \{0\} \,:\, \langle J'_\lambda(u), u\rangle = 0\}$.

We define

$$\psi_\lambda(u) = \langle J'_\lambda(u), u\rangle = \|u\|^p - \lambda\int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x - \int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x$$

and split $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ into three components:

$$\mathcal{N}_\lambda^+(\Omega) = \{u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega) : \langle \psi'_\lambda(u), u\rangle > 0\}, \qquad \mathcal{N}_\lambda(\Omega) = \{u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega) : \langle \psi'_\lambda(u), u\rangle < 0\}$$

and prove that, if $\lambda \in (0, \lambda_1)$, is *empty* the third component

$$\mathcal{N}_\lambda^0(\Omega) = \{u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega) \,:\, \langle \psi'_\lambda(u), u\rangle = 0\}.$$

By applying Lagrange multipliers, we conclude that, if u_0 is a local minimum for J_λ in $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$, then we have $J'_\lambda(u_0) = 0$ em $\mathbf{E}^*$. In order to obtain two solutions, we define

$$m_\lambda(\Omega) = \inf\{J_\lambda(u) \,:\, u \in \mathcal{N}_\lambda\},\quad m^+_\lambda(\Omega) = \inf\{J_\lambda(u) \,:\, u \in \mathcal{N}^+_\lambda(\Omega)\} \text{ and } \ m^-_\lambda(\Omega) = \inf\{J_\lambda(u) \,:\, u \in \mathcal{N}^-_\lambda(\Omega)\}.$$

However, we noted that $u \in \mathcal{N}^+_\lambda(\Omega)$ implies $\int_\Omega f(x)|u|^q \mathrm{d}x > 0$. Since f can change sign, this relation might be false. Therefore, we suppose
[$(f+)$] $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ is continuous and $f^+ = \max\{f, 0\} \not\equiv 0$.

In order to find a solution in $\mathcal{N}^+_\lambda(\Omega)$, we then restrict our problem to an open subset $\Omega' \subset \Omega$ where f is positive and consider the functional $J_0\colon W^{2,p}_0(\Omega') \to \mathbb{R}$ given by

$$J_0(u) = \frac{1}{p}\int_{\Omega'} |\Delta u|^p dx - \frac{1}{p^*}\int_{\Omega'} |u|^{p^*} dx,$$

which is equal to the functional J_λ in the level $\lambda = 0$, restricted to Ω'.

The mountain pass geometry satisfied by J_0 implies that $m_0(\Omega') = \inf\{J_0(u) \,:\, u \in \mathcal{N}(\Omega')\}$ is positive, but the infimum is not attained.

For $u \in W^{2,p}_0(\Omega')$, by defining $u = 0$ over $\Omega \setminus \Omega'$, we have $u \in \mathbf{E} \setminus \{0\}$, since $W^{2,p}_0(\Omega) \subset W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega)$. In particular $\int_\Omega f(x)|u|^q dx = \int_{\Omega'} f(x)|u|^q dx$ and estimating we obtain that

$$m_\lambda(\Omega) \le m^+_\lambda(\Omega) \le c m_0(\Omega') < 0,$$

where the constant $c < 0$ is explicitely obtained. Another estimates yields

$$m^-_\lambda(\Omega) \ge C > 0.$$

Since the immersion of $\mathbf{E}$ into $L^{p^*}(\Omega)$ is not compact, we apply concentration-compacteness techniques, which implies that J_λ satisfies a local Palais-Smale (PS) condition below the level $\frac{2}{N} S^{\frac{N}{2p}} - D\lambda^\beta$. (We denote by β the value $\frac{p^*}{p^*-q}$; the constant D is obtained in the paper.) In order to do that, we obtain estimates for $m^+_\lambda(\Omega)$ and $m^-_\lambda(\Omega)$.

Theorem 0.1. *If f satisfies $(f+)$, then there exists $\lambda_0 > 0$ such that, for all $\lambda \in (0, \lambda_0)$, problems* (1) *and* (2) *have two distinct nontrivial solutions. If f is positive, the two solutions of problem* (2) *are positive.*

References

[1] BERNIS, F. AND AZORERO, J. & PERAL, I. - *Existence and multiplicity of nontrivial solutions in semilinear critical problems of fourth order*, Adv. Differential Equations **1** no. 2 (1996), 219-240.

[2] BUENO, H. AND PAES-LEME, L. & RODRIGUES, H.C. - *On p-biharmonic equations with critical growth*, submitted.

[3] GAZZOLA, F. AND GRUNAU, H.-CH & SWEERS, G. - *Optimal Sobolev and Hardy-Rellich constants under Navier boundary conditions*, Ann. Mat. Pura Appl. **189** (2010), 475-486.

[4] JI, C. AND WANG, W - *On the p-biharmonic equation involving concave-convex nonlinearities and sign-changing weight function*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **2** (2012), 17 pp.

[5] LIONS, P.L. - *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part 1*, Rev. Mat. Iberoamericana **1** no. 1 (1985), 145-201 *and* **1** no. 2 (1985), 45-121.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *65–66*

FRACTIONAL HEAT EQUATIONS WITH SINGULAR INITIAL CONDITIONS

BRUNO DE ANDRADE[1,†]

[1]Departamento de Matemática, UFS - SE - Brasil.

[†]bruno00luis@gmail.com

Abstract

In this work we study some questions concerning to fractional heat equations with singular initial conditions. Concretely, we analyze the existence of regular local mild solutions for the problem and its possible continuation to a maximal interval of existence.

1 Introduction

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded domain with smooth boundary. We will treat the fractional equation

$$\begin{cases} \partial_t^\gamma u = \Delta u + u|u|^{\rho-1} & [0,\infty)\times\Omega, \\ u = 0 & [0,\infty)\times\partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) & \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

where ∂_t^γ is Caputo's fractional derivative of order $\gamma \in (0,1]$. We will consider the above problem in the L^q setting. More precisely, we assume that $u_0 \in L^q(\Omega)$, with $1 < q < \infty$ and

$$q = \frac{n(\rho-1)}{2}. \tag{2}$$

If $\gamma = 1$, this type of problem was considered by several authors. We just mention a few of these works. By balancing the smoothing properties of the semigroup generate by the Dirichlet-Laplace operator against the singularity of the nonlinear term, Weissler [4, 5] has proved interesting results on local existence and continuations of solutions to the problem

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + |u|^{\rho-1}u, \ [0,\infty)\times\Omega, \\ u = 0, \ [0,\infty)\times\partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), \ x \in \Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Among other things, Brezis and Cazenave [3] have proved that the value (2) plays a critical role in the study of (2), namely, if $p \geq q$ they obtain the existence and uniqueness of a local solution for any $u_0 \in L^p(\Omega)$. However, in case $p < q$ it seems that there exists no local solution in any reasonable sense for some initial conditions $u_0 \in L^p(\Omega)$. Arrieta and Carvalho [2] developed a general theory of abstract parabolic problems with critical nonlinearities and, particularly, they recovered several known results on existence and uniqueness of solutions for these equations, including those from the paper by Weissler [4, 5] and by Brezis and Cazenave [3]. Stimulated by these papers we will investigate further the corresponding problem (1) in the critical case. This work is based on joint work with A. N. Carvalho, P. M. Carvalho-Neto and P. Marín-Rubio [1].

2 Main Results

Let $L = \Delta$ with Dirichlet boundary conditions in Ω. Then, L can be seen as an unbounded operator in $Y_q^0 = L^q(\Omega)$ with domain

$$D(A) := W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega).$$

It is well-known that if $\{Y_q^\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ is the scale of fractional power spaces associated to L and L_α is the realization of L in Y_q^α, then we have that L_α is an isometry from $Y_q^{\alpha+1}$ into Y_q^α and

$$L_\alpha : D(L_\alpha) = Y_q^{\alpha+1} \subset Y_q^\alpha \to Y_q^\alpha$$

is a sectorial operator. Denote $X_q^\alpha := Y_q^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$; particularly $X_q^1 = L^q(\Omega)$.

Definition 2.1. *A continuous function $u : [0,\tau] \to X_q^1$ is called an ϵ-regular mild solution to (1) if $u \in C((0,\tau]; X_q^{1+\epsilon})$ and verifies*

$$u(t) = E_\gamma(t^\gamma A)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\gamma-1} E_{\gamma,\gamma}((t-s)^\gamma A)|u(s)|^{\rho-1}u(s)ds,\ t \in [0,\tau].$$

Our main result is the following

Theorem 2.1. *If $\rho > \frac{n}{n-2}$ and $v_0 \in X_q^1$ there exist positive values r and τ_0 such that for any $u_0 \in B_{X_q^1}(v_0, r)$ there exists a continuous function $u(\cdot, u_0) : [0,\tau_0] \to X_q^1$ with $u(0) = u_0$, which is an ϵ-regular mild solution to the problem (1), for all $\epsilon \in \left[0, \frac{n}{n+2q}\right)$. This solution satisfies*

$$u \in C((0,\tau_0]; X_q^{1+\theta}), \quad 0 \le \theta < \rho\epsilon,$$

and

$$\lim_{t\to 0^+} t^{\gamma\theta} \|u(t,u_0)\|_{X_q^{1+\theta}} = 0, \quad 0 < \theta < \rho\epsilon.$$

Moreover, for each $\theta_0 < \epsilon$ there exists a constant $C > 0$ such that if $u_0,\ w_0 \in B_{X_q^1}(v_0, r)$, then

$$t^{\gamma\theta}\|u(t,u_0) - u(t,w_0)\|_{X_q^{1+\theta}} \le C\|u_0 - w_0\|_{X_q^1} \quad \forall\, t \in [0,\tau_0],\ 0 \le \theta \le \theta_0.$$

References

[1] de Andrade, B., Carvalho, A. N.,Carvalho-Neto, P. M. and Marín-Rubio, P. - *Semilinear fractional differential equations: global solutions, critical nonlinearities and comparison results*, Topol. Methods Nonlinear Anal., 45, 439-468, 2015.

[2] Arrieta, J. M. and A. N. Carvalho, A. N. - *Abstract parabolic problems with critical nonlinearities and applications to Navier-Stokes and Heat equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 352, 285-310, 2000.

[3] Brezis, B. and Cazenave, T. - *A nonlinear heat equation with singular initial data*, J. Anal. Math. 68, 277–304, 1996.

[4] Weissler, F. B. - *Semilinear evolution equations in Banach spaces*, J. Funct. Anal. 32 , 277-296, 1979.

[5] Weissler, F. B. - *Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in L^p,* Indiana Univ. Math. J. 29 , 79-102, 1980.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *67–68*

ESTABILIZAÇÃO ASSINTÓTICA PARA A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER EM UMA VARIEDADE RIEMANNIANA NÃO COMPACTA

CÉSAR A. BORTOT[1,†], MARCELO M. CAVALCANTI[2,‡] & VALÉRIA N. D. CAVALCANTI[2,§]

[1]Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC - Campus Joinville, SC, Brasil,

[2]Departamento de Matemática, UEM, PR, Brasil.

[†]c.bortot@ufsc.br, [‡]mmcavalcanti@uem.br, [§]vndcavalcanti@uem.br

Resumo

O presente trabalho aborda o decaimento exponecial uniforme da energia associada a Equação de Schrödinger sujeita a uma dissipação não linear localmente distribuída, considerada sobre uma variedade Riemanniana n-dimensional $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ não compacta, completa e sem bordo. Vamos supor que $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ é "non-trapping" e, além disso, os efeitos dissipativos são considerados efetivos em $(\mathcal{M}\backslash\Omega)\cup\mathcal{M}_*$, onde $\Omega \subset\subset \mathcal{M}$ é um subconjunto aberto, conexo e limitado com fronteira $\partial\Omega$ regular, de modo que $\overline{\Omega}$ é um conjunto compacto, e $\mathcal{M}_*$ é um subconjunto aberto de $\mathcal{M}$. Taxas de decaimento exponenciais da energia no nível de L^2 são estabelecidas.

1 Introdução

Estudaremos a equação descrita por:

$$iu_t + \Delta u + ia(x)g(u) = 0, \text{ em } \mathcal{M} \times (0, +\infty) \tag{1}$$

com condições iniciais

$$u(x, 0) = u_0(x), \; x \in \mathcal{M} \tag{2}$$

onde Δ denota o operador Laplace-Beltrami. O estudo se divide em dois casos:

(i) Quando $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ é um domínio exterior em $\mathbb{R}^n$ munido com a métrica Euclidiana. Mais precisamente, consideramos $\Theta \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, onde Θ é um subconjunto compacto e conexo do $\mathbb{R}^n$ com fronteira regular. Além disso, assumimos que a fronteira de Θ é "non-trapping", ou seja, qualquer raio da ótica geométrica (ou qualquer geodésica) refletindo sobre a fronteira de Θ, de acordo com as leis da ótica geométrica, deixa todo conjunto compacto em tempo finito. Denotamos por $\mathcal{M}$ o complementar de Θ, ou seja, $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n\backslash\Theta$. Neste caso consideramos condições de bordo do tipo Dirichlet sobre a fronteira $\partial\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}$, saber, $u = 0$ em $\partial\mathcal{M} \times (0, \infty)$.

(ii) Quando $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ é uma variedade Riemanniana n-dimensional, não compacta, simplesmente conexa, orientável sem bordo e "non-trapping", munida com uma métrica Riemanniana $\mathbf{g}(\cdot, \cdot) = \langle\cdot, \cdot\rangle$. Neste caso $\mathcal{M}$ ser uma variedade "non-trapping" significa que nenhuma geodésica está completamente contida em qualquer subconjunto compacto de $\mathcal{M}$. Além disso, vamos supor que a métrica $\mathbf{g}$ é completa e de classe C^∞.

O presente trabalho tem como objetivo estabelecer o decaimento exponencial da energia total, isto é, $E(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} |u(x, t)|^2\, dx$. Para este propósito, o termo dissipativo $ia(x)g(u)$ é fundamental, uma vez que se $a = 0$, a energia total é conservada, isto é, $E(t) = E(0)$, para todo $t \geq 0$, e nenhuma taxa de decaimento é esperada.

No caso de um domínio exterior assumimos que $a(x) \geq a_0 > 0$ em ω, onde $\omega \subset \mathcal{M}$ é definido da seguinte forma: Considere $\mathcal{M} := \mathbb{R}^n\backslash\Theta$ e seja $R > 0$ tal que $\partial\mathcal{M} \subset B_R = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < R\}$, então definimos $\omega := \mathcal{M}\backslash B_R$.

No caso de uma variedade não compacta assumios que $a(x) \geq a_0 > 0$ em $(\mathcal{M}\backslash\Omega) \cup \mathcal{M}_*$, onde $\Omega \subset\subset \mathcal{M}$ é um subconjunto aberto, conexo e limitado com fronteira $\partial\Omega$ regular, de modo que $\overline{\Omega}$ é um conjunto compacto, e $\mathcal{M}_*$ é um subconjunto aberto de $\mathcal{M}$ de medida arbitrariamente pequena. Se a curvatura seccional de $\mathcal{M}$ é não positiva então basta considerar efeitos dissipativos efetivos em $\mathcal{M}\backslash\Omega$, ou seja, $a(x) \geq a_0 > 0$ apenas em $\mathcal{M}\backslash\Omega$.

2 Resultados Principais

Hipótese 2.1. *$g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ satisfaz:*
i) $g(z)$ é contínua, $g(0) = 0$;
ii) $Re\{[g(z) - g(w)][\overline{z} - \overline{w}]\} \geq 0$, $\forall\ z, w \in \mathbb{C}$;
iii) $Im\{g(z)\overline{z}\} = 0$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$;
iv) Existem constantes positivas c_1 e c_2, tais que $c_1|z|^2 \leq |g(s)\overline{z}| \leq c_2|z|^2$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$.

Teorema 2.1. *Sob a Hipótese 2.1, temos:*

Se $\mathcal{M}$ é uma variedade Riemanniana não compacta como descrito anteriormente então:

1. Para cada dado inicial $u_0 \in \{w \in H^1(\mathcal{M}), \Delta w \in L^2(\mathcal{M})\}$, existe uma única solução regular de (1).

2. Para cada dado inicial $u_0 \in L^2(\mathcal{M})$, existe uma única solução fraca de (1).

Se $\mathcal{M}$ é um domínio exterior em $\mathbb{R}^n$ como descrito anteriormente então:

1. Para cada dado inicial $u_0 \in H_0^1(\mathcal{M}) \cap H^2(\mathcal{M})$, existe uma única solução regular de (1).

2. Para cada dado inicial $u_0 \in L^2(\mathcal{M})$, existe uma única solução fraca de (1).

Teorema 2.2. *Seja u uma solução fraca do problema (1). Então, existem constantes positivas T_0, C_0 and λ_0 tal que*

$$E(t) \leq C_0 e^{-\lambda_0 t} E(0); \quad \forall t \geq T_0,$$

provada para dados iniciais tomados em conjuntos limitados de $L^2(\mathcal{M})$.

Observação 1. *De modo a obter o decaimento exponencial no caso em que $\mathcal{M}$ é uma variedade Riemanniana não compacta necessitamos assumir um* efeito regularizante local *para a equação de Schrödinger linear não homogênea.*

Prova: Os principais ingredientes para a prova da estabilidade exponencial são: (A) um princípio de continuação única para o problema linear (como provado por Triggiani and Xu [1]); e (B) um efeito regularizante local para o problema linear não homogêneo associado (como provado por Burq [2] e Burq, Gerard e Tzvetkov [3]).

Referências

[1] BURQ, N. - *Smoothing effect for Schrödinger boundary value problems*, *Duke Math. J.*, **123**, 403-427, 2004.

[2] BURQ, N.; GÉRARD, P.; TZVETKOV, N. - *On nonlinear Schrödinger equations in exterior domains. Équations de Schrödinger non linéaires dans des domaines extérieurs. Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse Non Linéaire*, **21**, 295-318, 2004.

[3] TRIGGIANI, R.; XU, X. - *Pointwise Carleman estimates, Global Uniqueness, Observability, and stabilization for de Schrödinger equations on riemannian manifolds at the $H^1(\Omega)-$Level.*, *Contemporary Mathematics*, **426**, 339-404, 2007.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *69–70*

UMA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO COM REAÇÕES QUÍMICAS LOCALIZADAS

CÉSAR A. HERNÁNDEZ M.[1,†]

[1]Universidade Estadual de Maringá, UEM, PR, Brasil.

[†]cahmelo@uem.br

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência e estabilidade de soluções de equilíbrio de uma equação de difusão acoplada com uma distribuição de tipo delta de Dirac. As soluções de equilíbrio são obtidas explícitamente das soluções de equilíbrio da equação de calor após remover a distribuição. A estabilidade dessas soluções é obtida da forma clássica: analisando o espectro do opearador linear associado ao problema de estabilidade. Nesta parte, a analise espectral desses operadores é obtida da teoria de perturbação analítica para operadores lineares.

1 Introdução

Consideremos a equação,

$$u_t = u_{xx} + Z\delta(x)u + wu + u^3 + u^5, \tag{1}$$

onde $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\delta : H^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é a distribuição delta de Dirac centrada na origem $x = 0$, isto é $\delta(g) = g(0)$ e $w, Z \in \mathbb{R}$ são parametros.

A equação (1) é um caso particular de uma família de modelos que descrevem processos químicos de reação-difusão, no qual, devido aos efeitos de um catalizador a reação aumenta em lugares localizados. O catalizador não afeta a continuidade da concentração quimica, mas, o gradiente da concentração sofre saltos nestes lugares localizados, ver [3] e as suas referências.

2 Resultados Principais

Uma solução de equilíbrio da equação (1) é uma solução da equação que não depende do tempo. Assim, substituindo $u(x,t) = \phi(x)$ em (1) temos que ϕ deve satisfazer no sentido distribucional a equação elíptica semilinear,

$$\phi'' + w\phi + Z\delta(x)\phi + \phi^3 + \phi^5 = 0. \tag{1}$$

Desta forma, temos o seguinte resultado

Lema 2.1. *Para $Z \in \mathbb{R}$ e $-w > \frac{Z^2}{4}$, uma família de soluções de equilíbrio positivas associadas à equação (1) é dado pela formula:*

$$\phi_{w,Z}(x) = \left[-\frac{1}{4w} - \frac{\sqrt{9-48w}}{12w} \cosh\left(2\sqrt{-w} \left(|x| + R^{-1}\left(\frac{Z}{2\sqrt{-w}} \right) \right) \right) \right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

Aqui $R^{-1} : (-1,1) \to (-\infty, \infty)$, denota um certo difeomorfismo.

Agora introduzimos a noção de estabilidade,

Definição 2.1. *Dizemos que uma solução de equilíbrio ϕ é dita estável em $H^1(\mathbb{R})$ pelo fluxo da equação (1), se para todo número positivo ϵ existe um número positivo δ, tal que,*

$$\text{se} \quad ||u_0 - \phi||_1 < \delta, \quad \text{então}, \quad ||u(t) - \phi||_1 < \epsilon, \quad \text{para todo} \quad t \geq 0.$$

Aqui, $u(t)$ denota a solução em $H^1(\mathbb{R})$ da equação (1) que satisfaz a condição inicial $u(0) = u_0$.

Como é sabido, ver [1]-[2], para obter uma teoria de estabilidade para as soluções de equilíbrio do lema anterior é necessário fazer um estudo detalhado do espectro do operador linear auto-adjunto:

$$\mathcal{L}_Z g = -\frac{d^2}{dx^2}g - wg - 3\phi_{w,Z}^2 g - 5\phi_{w,Z}^4 g, \tag{3}$$

onde $-w > 0$, $\phi_{w,Z}$ dado em (2) e o operador linear $\mathcal{L}_Z$ é considerado definido sobre o domínio:

$$\mathcal{D} \equiv D\left(\mathcal{L}_{i,Z}\right) = \left\{g \in H^1(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R} - \{0\}) | g'(0+) - g'(0-) = -Zg(0)\right\}. \tag{4}$$

Sobre as propriedades espectrais do operador $\mathcal{L}_Z$, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1. *Consideremos $\mathcal{L}_{\mathcal{Z}}$ definido por (3) e (4), então temos*

1. *Para $Z < 0$, $\mathcal{L}_{\mathcal{Z}}$ tem exatamente dois autovalores positivos, o resto do espectro é negativo e afastado de zero.*

2. *Para $Z \geq 0$, $\mathcal{L}_{\mathcal{Z}}$ tem um único autovalor positivo, o resto do espectro é negativo e afastado de zero.*

Finalmente da teoria clássica exposta por exemplo em [1], podemos concluir que:

Teorema 2.2. *Suponhamos, $-w > \frac{Z^2}{4}$, então temos que as soluções de equilíbrio $\phi_{w,Z}$ dadas em (2) são instáveis. Além disso,*

1. *Para $Z < 0$, a variedade instável associada ao fluxo da equação 1 e à solução de equilíbrio $\phi_{w,Z}$ tem dimensão dois.*

2. *Para $Z \geq 0$, a variedade instável associada ao fluxo da equação 1 e à solução de equilíbrio $\phi_{w,Z}$ tem dimensão um.*

Referências

[1] CHADAM, J.M. AND YIN H,M. - *A diffusion equation with localized chemical ractions.*, Proceedings of the edinburgh mathematical society, 101-118, 1994.

[2] HENRY, D. - *Geometric theory of semilinear parabolic equation.*, Springer-Verlag, 1981.

[3] HERNÁNDEZ C. - *Existence and stability of equilibrium solutions of a nonlinear heat equation.*, Applied mathematics and computation, 1025-1036, 2014.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *71–72*

ASYMPTOTICALLY ALMOST AUTOMORPHIC AND S-ASYMPTOTICALLY ω-PERIODIC SOLUTIONS TO PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH NONLOCAL INITIAL CONDITIONS

MARCOS L. HENRIQUE[1,†], MARCOS N. RABELO[2,‡], AIRTON DE CASTRO[3,§] & JOSÉ DOS SANTOS[4,§§]

[1]Núcleo de Formacão Docente, Universidade Federal de Pernambuco, SE, Brazil, [2]Departamento de Matemática, Universidade Federal de Goiás, Campus Catalão, [3]Departamento de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, [4]Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Alfenas.

[†]mlh@dmat.ufpe.br, [‡]rabelo@dmat.ufpe.br, [§]airton@dmat.ufpe.br, [§§]zepaulo@unifal-mg.edu.br

Abstract

In this paper we shall study the existence of asymptotically almost automorphic and S-asymptotically ω-periodic solutions for a class of abstract differential equations modeled in the form

$$u'(t) \quad = \quad Au(t) + f(t, Bu(t)), \quad u(0) + g(u) = u_0,$$

where $A : D(A) \subset X \to X$ and $B : D(B) \subset X \to X$, $t \geq 0$, are closed linear operators; $(X, \|\cdot\|)$ is a Banach space and $f : I \times X \to X$, $g : C_b([0,\infty); X_\beta) \to X_\beta$ are appropriated functions.

Important note: You must submit a manuscript with only two (2) pages. Please, you must use the two (2) pages available for this, and it is important give the main ideas of your work, including principal results and references. Please, remove this information text from your work! Thank you very much.

1 Introduction

In this paper we shall study the existence of mild and classical asymptotically almost automorphic and S-asymptotically ω-periodic solutions for a class of abstract differential equations with nonlocal conditions modeled in the form

$$u'(t) = Au(t) + f(t, Bu(t)), \quad t > 0 \tag{1}$$

$$u(0) + g(u) = u_0, \tag{2}$$

where $A : D(A) \subset X \to X$ and $B : D(B) \subset X \to X$, are closed linear operators; $(X, \|\cdot\|)$ is a Banach space and X_β represents the domain of the fractional powers of $-A$ and $f : [0,\infty) \times X \to X$, $g : C_b([0,\infty); X_\beta) \to X_\beta$ are appropriated functions.

2 Main Results

Theorem 2.1. Suppose that $\mathcal{R}(t) : Z \to W$ a family of bounded linear operator such that $\| \mathcal{R}(t) \|_{\mathcal{L}(Z,W)} \leq Me^{-\beta t}, \beta > 0$ and $f \in C([0,\infty), Z)$. Let

$$\Gamma(t) := \int_0^t \mathcal{R}(t-s) f(s) ds, \quad t \geq 0,$$

1. If $f \in SAP_\omega(Z)$, then $\Gamma \in SAP_\omega(W)$.
2. If $f \in AAA(Z)$, then $\Gamma \in AAA(W)$.

Theorem 2.2. *Under assumptions* $(\mathbf{H1})-(\mathbf{H3})$, $u_0 \in X_\alpha$ *and assuming that the semigroup* $(S(t))_{t\geq 0}$ *satisfies the conditions of Lemma 2.1, then if*

$$\big(L_g M + KC_\alpha \parallel B(-A)^{-\alpha} \parallel_{\mathcal{L}(X)} \delta^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\big) < 1$$

the nonlocal Cauchy problem (1) has a unique mild solution $AAA(X_\alpha)$ *(* $SAP_\omega(X_\alpha)$*) .*

References

[1] BYSZEWSKI, L. - Theorems about the existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem, *J. Math. Anal. Appl.*, **162** (2), 494-505, 1991.

[2] JACKSON, D. Existence and uniqueness of solutions to semilinear nonlocal parabolic equations, *J. Mat. Anal. Appl.*, **172**, 256-265, 1993.

[3] BYSZEWSKI, L. AND AKCA, H. - Existence of solutions of a semilinear functional differential evolution nonlocal problem. Nonlinear Anal. **34**(1), 65-72, 1998.

[4] FU, X. AND EZZINBI, K. - Existence of solutions for neutral functional differential evolution equations with nonlocal conditions, *Nonlinear Anal.*, **54**, 215-227, 2003.

[5] EZZINBI, K. AND FU, X. - Existence and regularity of solutions for some neutral partial differential equations with nonlocal conditions, Nonlinear Anal. 57 (2004) 1029-1041.

[6] EZZINBI, K.; FU, X. AND HILIAL, K. - Existence and regularity in the α-norm for some neutral partial differential equations with nonlocal conditions, *Nonlinear Anal.* **67**, 1613-1622, 2007.

[7] DING, H.S.; XIAO, T.J. AND LIANG, J. - Asymptotically almost automorphic solutions for some integrodifferential equations with nonlocal initial conditions, *J. Mat. Anal. Appl.*, **338**, 141-151, 2008.

[8] CHANG, J.C. AND LIU, H. - Existence of solutions for a class of neutral partial differential equations with nonlocal conditions in the α-norm, *Nonlinear Anal.* **71**, 3759-3768, 2009.

[9] HERNÁNDEZ, E.; DOS SANTOS, J.S. AND AZEVEDO, K.A.G. - Existence of solutions for a class of abstract differential equations with nonlocal conditions, *Nonlinear Anal.* **74**, 2624-2634, 2011.

[10] CAIEDO, A. AND CUEVAS, C. - S-asymptotically ω-periodic solutions of abstract partial neutral integro-differential equations, *Funct. Differ. Equ.*, **17**, 1-12, 2010.

[11] CUEVAS, C. AND SOUZA, J.C. - Existence of S-asymptotically ω-periodic solutions for fractional order functional Integro-Differential Equations with infinite delay, *Nonlinear Anal.*, **72**, 1683-1689, 2010.

[12] CUEVAS, C. AND DOS SANTOS, J.P.. - Asymptotically almost automorphic solutions of abstract fractional integro-differential neutral equations, *Appl. Math. Lett.*, **23**, 960-965, 2010.

[13] CUEVAS, C.; PIERRE, M. AND SEPULVEDA, A. - Weighted $S-$asymptotically $\omega-$ periodic solutions of a class of fractional differential equations, *Advances in Difference Equations*, 13 p., 2011.

[14] DIAGANA, T. - *Pseudo Almost Periodic Functions in Banach Spaces.* Nova Science Publishers, New York, 2007.

[15] DIAGANA, T.; HENRÍQUEZ, H. AND HERNÁNDEZ, E. - Almost automorphic mild solutions to some partial neutral functional-differential equations and applications, Nonlinear. Anal. 69 (1) (2008) 1485-1493.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *73–74*

EXISTENCE RESULT FOR AN EQUATION WITH (P-Q)-LAPLACIAN AND VANISHING POTENTIALS

MARIA J. ALVES[1,†], RONALDO B. ASSUNÇÃO[2,‡] & OLíMPIO H. MIYAGAKI[3,4,§]

[1]Colégio Técnico, UFMG, Belo Horizonte, MG, Brasil, [2]Departamento de Matemática, UFMG, Belo Horizonte, MG, Brasil, [3]Departamento de Matemática, UFJF, Juiz de Fora, MG, Brasil, [4]Partially supported by CNPq/Brasil and INCTMAT/Brasil.

[†]mariajose@ufmg.br, [‡]ronaldo@mat.ufmg.br, [§]ohmiyagaki@gmail.com

Dedicated to Prof. Paulo Carrião on the occasion of his 60th birthday.

Abstract

The main purpose of this wokd is to establish the existence of positive solution to a class of quasilinear elliptic equations involving the (p-q)-Laplacian operator. We consider a nonlinearity that can be subcritical at infinity and supercritical at the origin; we also consider potential functions that can vanish at infinity. The approach is based on variational arguments dealing with the mountain-pass lemma and an adaptation of the penalization method. In order to overcome the lack of compactness we modify the original problem and the associated energy functional. Finally, to show that the solution of the modified problem is also a solution of the original problem we use an estimate obtained by the Moser iteration scheme.

1 Introduction

In this work we consider a class of quasilinear elliptic equations involving the (p-q)-Laplacian operator of the form

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u + a(x)\,|u|^{p-2}\,u + b(x)\,|u|^{q-2}\,u = f(u), & x \in \mathbb{R}^N; \\ u(x) > 0, \quad u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap D^{1,q}(\mathbb{R}^N), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{1}$$

The m-laplacian operator is defined by $\Delta_m u(x) \equiv \operatorname{div}(|\nabla u(x)|^{m-2}\nabla u(x))$, for $m \in \{p,q\}$, where $2 \leqslant q \leqslant p < N$; the Sobolev space is defined by $D^{1,m}(\mathbb{R}^N) \equiv \big\{u \in L^{m^*}(\mathbb{R}^N)\colon (\partial u/\partial x_i)(x) \in L^m(\mathbb{R}^N), \quad 1 \leqslant i \leqslant N\big\}$, and the critical Sobolev exponent is given by $m^* \equiv Nm/(N-m)$, also for $m \in \{p,q\}$.

The nonlinearity $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous, nonnegative function that is not a pure power and can be subcritical at infinity and supercritical at the origin. More precisely, the following set of hypotheses on the nonlinearity f is used.

1. $\limsup_{s\to 0^+} sf(s)/s^{p^*} < +\infty$.
2. There exists $\tau \in (p,p^*)$ such that $\limsup_{s\to+\infty} sf(s)/s^{\tau} = 0$.
3. There exists $\theta > p$ such that $0 \leqslant \theta F(s) \leqslant sf(s)$ for every $s \in \mathbb{R}^+$, where we use the notation $F(s) \equiv \displaystyle\int_0^s f(t)\,\mathrm{d}t$.
4. $f(t) = 0$ for every $t \leqslant 0$.

Is is worth noticing that hypothesis (3) extends a well known condition which was first formulated by Ambrosetti and Rabinowitz. It states a sufficient condition to ensure that the energy funcional, associated in a natural way to this type of problem, verifies the Palais-Smale condition. Recall that a functional $J\colon D^{1,m}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ is said to verify the Palais-Smale condition at the level c if any sequence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D^{1,m}(\mathbb{R}^N)$ such that $J(u_n) \to c$ and

$J'(u_n) \to 0$, as $n \to +\infty$, possess a convergent subsequence. Hypothesis (3) also allows us to study the asymptotic behavior of the solution to the problem.

We also assume that the functions $a, b\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ are continuous and nonnegative. Moreover, the following set of hypotheses on the potential functions a and b is used.

1. $a \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N)$ and $b \in L^{N/q}(\mathbb{R}^N)$.
2. $a(x) \leqslant a_\infty$ and $b(x) \leqslant b_\infty$ for every $x \in B_1(0)$, where $a_\infty, b_\infty \in \mathbb{R}^+$ are positive constants and $B_1(0)$ denotes the unitary ball centered at the origin.
3. There exist constants $\Lambda \in \mathbb{R}^+$ and $R_0 > 1$ such that $\dfrac{1}{R_0^{p^2/(p-1)}} \inf_{|x| \geqslant R_0} |x|^{p^2/(p-1)} a(x) \geqslant \Lambda$.

The interest in the study of this type of problem is twofold. On the one hand we have the physical motivations, since the quasilinear operator (p-q)- Laplacian has been used to model steady-state solutions of reaction-diffusion problems arising in biophysics, in plasma physics and in the study of chemical reactions. On the other hand we have the purely mathematical interest in these type of problems, mainly regarding the existence of positive solutions as well as multiplicity results. The assumptions $\liminf_{|x| \to +\infty} a(x) > 0$ and $\liminf_{|x| \to +\infty} b(x) > 0$ are used in many papers. In problem (1) we consider the exponents $2 \leqslant q \leqslant p < N$ and we allow the particular conditions $\liminf_{|x| \to +\infty} a(x) = 0$ and $\liminf_{|x| \to +\infty} b(x) = 0$, called the zero mass cases. These constitute the main features of our work.

2 Main result

Inspired mainly by Wu and Yang [4] regarding the (p-q)-Laplacian type operator, and by Alves and Souto [1] with respect to the set of hypotheses, our result reads as follows.

Theorem 2.1. *Consider $2 \leqslant q \leqslant p < N$ and suppose that the potential functions a and b verify the hypotheses* (1), (2) *and* (3) *and that the nonlinearity f verifies the hypotheses* (1), (2), (3), *and* (4). *Then there exists a constant $\Lambda^* = \Lambda^*(a_\infty, b_\infty, \theta, \tau, c_0)$ such that problem* (1) *has a positive solution for every $\Lambda \geqslant \Lambda^*$.*

We adapt the penalization method developed by del Pino and Felmer [3] to show our existence result. The basic idea can be described in the following way: first we modify the original problem and study its corresponding energy functional, showing that it verifies the geometry of the mountain-pass lemma and that every Palais-Smale sequence is bounded in an appropriate Sobolev space. Using the standard theory this implies that the modified problem has a solution; then we show, using the Moser iteration scheme, that the solution of the auxiliary problem verifies an estimate involving the $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ norm; finally we use this estimate to show that the solution of the modified problem is also a solution of the original problem (1).

References

[1] C. O. Alves and M. A. S. Souto, Existence of solutions for a class of elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ with vanishing potentials, *J. Differential Equations* 252 (2012), No. 10, 5555–5568.

[2] W. O. Bastos, O. H. Miyagaki, and R. S. Vieira, Existence of solutions for a class of degenerate quasilinear elliptic equation in $\mathbb{R}^N$ with vanishing potentials, *Boundary Value Problems* 92 (2013) 16 pp. `http://www.boundaryvalueproblems.com/content/2013/1/92`

[3] M. del Pino and P. Felmer, Local mountain pass for semilinear elliptic problems in unbounded domains, *Calc. Var.* 4 (1996), No. 2, 121–137.

[4] M. Wu and Z. Yang, A class of p-q-Laplacian type equation with potentials eigenvalue problem in $\mathbb{R}^N$. *Bound. Value Probl.* 2009, Art. ID 185319, 19 pp. `http://dx.doi:10.1155/2009/185319`

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *75–76*

FRACTIONAL NAVIER-STOKES EQUATIONS AND LIMIT PROBLEMS

PAULO M. CARVALHO NETO[1,†]

[1]Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, UFSC, SC, Brasil.

[†]paulo.carvalho@ufsc.br

Abstract

From the standpoint of fractional calculus in Banach spaces, the main discussion here is about the existence and uniqueness of mild solutions to the Navier–Stokes equations with time fractional derivative of order $\alpha \in (0,1)$. Besides the several obtained properties concerning this solution, we also deduce that it belongs to a non expected L^p space. By using the aforementioned results and a limit argument on the fractional derivative exponent ($\alpha \to 1^-$), we deduce a new regularity to the classical semigroup generated by the Stokes operator in $\mathbb{R}^N$.

1 Introduction

This work address the following fractional version of Navier-Stokes equations:

$$\begin{array}{rcll} cD_t^\alpha u - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p &=& f & \text{in } \mathbb{R}^N,\ t>0,\\ \nabla\cdot u &=& 0 & \text{in } \mathbb{R}^N,\ t>0,\\ u(x,0) &=& u_0 & \text{in } \mathbb{R}^N, \end{array} \tag{1}$$

where $\alpha \in (0,1)$ is a fixed number, $N > 2$ is the dimension of space variable and cD_t^α is the Caputo fractional derivative. Rewriting the time fractional Navier–Stokes equations (1) in the abstract form, we obtain

$$\begin{array}{rcl} cD_t^\alpha u &=& -A_r u + F(u) + Pf, \quad t>0,\\ u(0) &=& u_0 \in L^N_\sigma(\mathbb{R}^N), \end{array} \tag{2}$$

where $P : L^r(\mathbb{R}^N) \to L^r_\sigma(\mathbb{R}^N)$ is the Helmholtz–Leray projector, $A_r : D(A_r) \subset L^r_\sigma(\mathbb{R}^N) \to L^r_\sigma(\mathbb{R}^N)$ is the Stokes operator and $F(u) = F(u,u)$ where $F(u,v) = -P(u\cdot\nabla)v$.

We prove existence, uniqueness, decay, and regularity properties of mild solutions to (2). Then by using the obtained decay rates, we show that when $\alpha \to 1^-$ the linear part of the solution of (2) converges, under suitable notions, to the semigroup generated by the Stokes operator in $\mathbb{R}^N$. This manuscript is based in [1, 2, 3] and in an ongoing work.

2 Main Results

Definition 2.1. *A continuous function $u_\alpha : [0,\infty) \to L^N_\sigma(\mathbb{R}^N)$ is called a global mild solution of (2) if it satisfies*

$$u_\alpha(t) = E_\alpha(-t^\alpha A_N)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-(t-s)^\alpha A_N) f(s,u_\alpha(s))\,ds, \quad \forall t \geq 0. \tag{1}$$

Here $\{E_\alpha(-t^\alpha A_N) : t \geq 0\}$ and $\{E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A_N) : t \geq 0\}$ are the Mittag-Leffler families, which are defined by

$$E_\alpha(-t^\alpha A_N) := \int_0^\infty M_\alpha(s) T(st^\alpha)\,ds,$$

and

$$E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A_N) := \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) T(st^\alpha)\,ds,$$

where $\{T(t) : t \geq 0\}$ is the semigroup generated by A_N.

The results of this work are based in [2].

Theorem 2.1. *For $\alpha \in (0,1)$ and $u_0 \in L^N_\sigma(\mathbb{R}^N)$, there exists $\lambda > 0$ such that if $\|u_0\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \leq \lambda$, then problem (2) has a unique global mild solution $u : [0,\infty) \to L^N_\sigma(\mathbb{R}^N)$. Moreover,*

$$t^{\alpha[1-(N/q)]/2} u \in C_b([0,\infty); L^q_\sigma(\mathbb{R}^N)), \qquad \text{for } 2 \leq N \leq q \leq \infty, \tag{2}$$

$$t^{\alpha[1-(N/2q)]} \nabla u \in C_b([0,\infty); L^q_\sigma(\mathbb{R}^N)), \qquad \text{for } 2 \leq N \leq q < \infty, \tag{3}$$

both with values zero at $t = 0$ except for $q = N$ in the first sentence, in which $u(0) = u_0$. It also holds that

i) for $2 \leq N \leq 2/\alpha$, problem (2) has a unique global mild solution which belongs to $L^r(0,\infty; L^q_\sigma(\mathbb{R}^N))$, where

$$\frac{1}{r} = \alpha\Big(1 - \frac{N}{q}\Big)/2 \quad \text{and} \quad N < q < \infty;$$

ii) for $N > 2/\alpha$, problem (2) has a unique global mild solution which belongs to $L^r(0,\infty; L^q_\sigma(\mathbb{R}^N))$, where

$$\frac{1}{r} = \alpha\Big(1 - \frac{N}{q}\Big)/2 \quad \text{and} \quad N < q < \frac{\alpha N^2}{\alpha N - 2}.$$

The last result we claim is based on the above estimates.

Theorem 2.2. *Let $b > 0$ and $\{T(t) : t \geq 0\}$ be the semigroup generated by the Stokes operator A_N. Then, for any $x \in L^N_\sigma(\mathbb{R}^N)$ the function $t \mapsto T(t)x$ belongs to $L^r(b,\infty; L^q_\sigma(\mathbb{R}^N))$, for any $r > \dfrac{2q}{(q-N)}$ and $N < q \leq \dfrac{N^2}{N-2}$.*

Proof: Observe that for any pair of values $r > 2q/(q-N)$ and $N < q \leq N^2/(N-2)$, Theorem 2.1 ensures the existence of $\alpha_0 \in (0,1)$ such that $E_\alpha(-t^\alpha A_N)x \in L^r(b,\infty; L^q_\sigma(\mathbb{R}^N))$ for any $\alpha \in (\alpha_0, 1)$. Then by applying the dominated convergence theorem we conclude the proof of this theorem.

Acknowledgements

This is a joint work with Prof. Gabriela Planas from Universidade Estadual de Campinas.

References

[1] CARVALHO–NETO, P. C. - *Fractional differential equations: a novel study of local and global solutions in Banach spaces.*, Ph.D. Thesis, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

[2] CARVALHO–NETO, P. C. AND PLANAS, G. - Mild Solutions to the time fractional Navier–Stokes equations in $\mathbb{R}^N$. *J. Differ. Equations*, **259**, 2948–2980, 2015.

[3] KATO, T. - Strong L^p-solutions of the Navier–Stokes equation in R^m, with applications to weak solution. *Math. Z.*, **187**, 471-480, 1984.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *77–78*

ESTIMATIVAS PARA A NORMA DO SUP PARA UMA EQUAÇÃO DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO DUPLAMENTE NÃO LINEAR

JOCEMAR DE Q. CHAGAS[1,†] & PAULO R. ZINGANO[2,‡]

[1]Departamento de Matemática e Estatística, UEPG, PR, Brasil, [2]Departamento de Matemática Pura e Aplicada, UFRGS, RS, Brasil.

[†]jocemarchagas@gmail.com, [‡]zingano@gmail.com

Resumo

Vamos mostrar como podemos usar algumas desigualdades de energia padrão para obter, de uma forma relativamente curta, a derivação da seguinte estimativa fundamental na norma do sup

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p)\|u_0\|^{\delta}_{L^p(\mathbb{R}^n)} t^{\gamma}, \quad \forall\, t > 0,$$

onde $\delta = \frac{p(\beta+2)}{n(\alpha+\beta)+p(\beta+2)}$ e $\gamma = \frac{n}{n(\alpha+\beta)+p(\beta+2)}$, para soluções da equação de adveção-difusão duplamente não linear regularizada

$$u_t + div\big(\boldsymbol{f}(x,t,u)\big) = div\big(|u|^{\alpha}|\nabla u|^{\beta}\nabla u\big) + \eta\,\Delta u,$$

quando $\boldsymbol{f}$ atende a determinadas condições, expostas no texto a seguir.

1 Introdução

Consideraremos o problema regularizado

$$\left\{\begin{array}{l} u_t + div\big(\boldsymbol{f}(x,t,u)\big) = div\big(|u|^{\alpha}|\nabla u|^{\beta}\nabla u\big) + \eta\,\Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u(\cdot,0) = u_0 \ \in\ L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n), \end{array}\right. \tag{1}$$

onde $\eta > 0$ está fixo e $1 \leq p_0 < \infty$ é dado; α e β são constantes, com $\alpha, \beta \geq 0$ e $\alpha + \beta > 0$; e a função $\boldsymbol{f}(x,t,u)$ satisfaz $|\boldsymbol{f}(x,t,u)| \leq B(T)|u|^{\kappa+1}$, onde $B(T) < \infty$, para $\kappa \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, $u \in \mathbb{R}$, e a condição de estabilidade

$$\sum_{i=1}^{n} u(x,t)\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}(x,t,u) \geq 0, \tag{2}$$

e apresentaremos as ideias que permitem obter para suas soluções a seguinte estimativa fundamental na norma do sup:

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p)\|u_0\|^{\delta}_{L^p(\mathbb{R}^n)} t^{\gamma}, \quad \forall\, t > 0, \tag{3}$$

bem como estipular os valores de δ e γ para os quais a estimativa é válida. A existência de solução suave para o problema regularizado (1) em um determinado intervalo $[0, T_*)$ é garantida pela teoria geral de equações parabólicas (ver, por ex., [3]). As ideias aqui apresentadas podem ser vistas com mais detalhes, por exemplo, em [1], onde estão aplicadas a uma equação um pouco mais simples.

A seguir, enunciaremos os principais resultados a ser percorridos no caminho de se obter (3).

2 Resultados

O primeiro resultado que deve ser mostrado é o decaimento da norma L^q das soluções suaves, à medida que t cresce.

Teorema 2.1. *Seja* $u(\cdot,t) \in L^\infty\big([0,T], L^\infty(\mathbb{R}^n)\big)$ *solução suave do problema (1), para algum* $0 < T < T_*$, *onde* $\boldsymbol{f}(x,t,u)$ *satisfaz a condição (2). Então, para cada* $p_0 \leq q \leq \infty$, *vale*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall\ 0 < t \leq T.$$

Como consequência direta do Teorema 2.1, a solução é global (ou seja, é definida para todo $t > 0$).

A desigualdade indicada a seguir é útil para derivar estimativas de controle para a solução.

Teorema 2.2. *Seja* $u(\cdot,t) \in L^\infty_{loc}\big([0,\infty), L^\infty(\mathbb{R}^n)\big)$ *solução suave do problema (1). Se* $\boldsymbol{f}(x,t,u)$ *satisfaz a condição (2), então,* $\forall\ 0 < t_0 < t$ *e* $\sigma > 0$, *podemos obter a seguinte desigualdade:*

$$(t-t_0)^\sigma \big\|u(\cdot,t)\big\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + q\,(q-1)\int_{t_0}^t (\tau-t_0)^\sigma \int_{\mathbb{R}^n} \big|u(x,\tau)\big|^{q-2+\alpha}\,|\nabla u(x,\tau)|^{\beta+2}\,dx\,d\tau \leq$$
$$\leq \sigma \int_{t_0}^t (\tau-t_0)^{\sigma-1}\big\|u(\cdot,\tau)\big\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}\,d\tau.$$

O próximo resultado indica que a norma L^q da solução, em um intervalo de tempo, pode ser controlada por uma norma mais baixa, computada na extremidade esquerda do intervalo. Em sua demonstração, é necessário utilizar uma desigualdade de interpolação do tipo Niremberg-Gagliardo-Sobolev (que pode ser encontrada, por ex., em [2]).

Teorema 2.3. *Seja* $u(\cdot,t) \in L^\infty_{loc}\big([0,\infty), L^\infty(\mathbb{R}^n)\big)$ *solução suave do problema (1). Se* $\boldsymbol{f}(x,t,u)$ *satisfaz a condição (2), então podemos obter:*

$$\big\|u(\cdot,t)\big\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq K_q(n,\alpha,\beta)\big\|u(\cdot,t_0)\big\|^\delta_{L^{q/2}(\mathbb{R}^n)}(t-t_0)^{-\gamma},$$

onde $\delta = \frac{q(\beta+2)+n(\alpha+\beta)}{q(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)}$ *e* $\gamma = \frac{n}{q(\beta+2)+2n(\alpha+\beta)}$, *para qualquer* $t_0 < t$ *e* $2p_0 \leq q < \infty$.

Por fim, mostra-se que a norma L^∞ da solução fica por baixo de uma função positiva, que decresce à medida que t aumenta.

Teorema 2.4. *Seja* $u(\cdot,t) \in L^\infty_{loc}\big([0,\infty), L^\infty(\mathbb{R}^n)\big)$ *solução suave do problema (1). Se* $\boldsymbol{f}(x,t,u)$ *satisfaz a condição (2), então podemos obter:*

$$\big\|u(\cdot,t)\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,\alpha,\beta,q)\big\|u(\cdot,t_0)\big\|^\delta_{L^q(\mathbb{R}^n)}(t-t_0)^{-\gamma},$$

para qualquer $t_0 < t$ *e* $2p_0 \leq q < \infty$, *onde* $\delta = \dfrac{q(\beta+2)}{n(\alpha+\beta)+q(\beta+2)}$ *e* $\gamma = \dfrac{n}{n(\alpha+\beta)+q(\beta+2)}$.

Quando $t_0 = 0$, esta é a estimativa desejada (3). Os valores de δ e γ apresentados são compatíveis com análise de escalas. Além disso, se a solução estiver definida para qualquer t, pode-se concluir que a solução vai a zero ao $t \to \infty$.

Referências

[1] BRAZ E SILVA, P.; SCHÜTZ, L.; ZINGANO, P. R. - *On some energy inequalities and supnorm estimates for advection-diffusion equations in* $\mathbb{R}^n$., Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, v. 93, 90-96, 2013.

[2] FRIEDMAN, A. - *Partial Differential Equations*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.

[3] LADYZHENSKAYA, 0. A.; SOLONNIKOV, V. A.; URALCEVA, N. N. - *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, American Mathematical Society, Providence, 1968.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *79–80*

THE FOURTH-ORDER DISPERSIVE NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION: ORBITAL STABILITY OF A STANDING WAVE

FÁBIO NATALI[1,†] & ADEMIR PASTOR[2,‡]

[1]Departamento de Matemática , UEM, PR, Brasil, [2]IMECC, UNICAMP, SP, Brasil.

[†]fmanatali@uem.br, [‡]apastor@ime.unicamp.br

Abstract

Considered in this talk is the one-dimensional fourth-order dispersive cubic nonlinear Schrödinger equation with mixed dispersion. Orbital stability, in the energy space, of a particular standing-wave solution is proved in the context of Hamiltonian systems. The main result is established by constructing a suitable Lyapunov function.

1 Introduction

Let us consider the cubic fourth-order Schrödinger equation with mixed dispersion

$$iu_t + u_{xx} - u_{xxxx} + |u|^2 u = 0, \tag{1}$$

where $x, t \in \mathbb{R}$ and $u = u(x,t)$ is a complex-valued function. Equation (1) appears in the propagation of intense laser beams in a bulk medium with Kerr nonlinearity when small fourth-order dispersion are taking into account. In addition, equation (1) has been considered in connection with the nonlinear fiber optics and the theory of optical solitons in gyrotropic media. From the mathematical point of view, (1) brings some interesting questions because it does not enjoy scaling invariance.

In this work, we are particularly interested in the existence and nonlinear stability of standing wave solutions for (1). Standing waves are finite-energy waveguide solutions of (1) having the form

$$u(x,t) = e^{i\alpha t}\phi(x), \tag{2}$$

where α is a real constant and $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a smooth function satisfying $\phi(x) \to 0$, as $|x| \to +\infty$.

Here, we exhibit an explicit solution for a suitable value of the parameter α. Indeed, by substituting (2) into (1), we obtain the fourth-order nonlinear ODE

$$\phi'''' - \phi'' + \alpha\phi - \phi^3 = 0. \tag{3}$$

The ansatz $\phi(x) = a\text{sech}^2(bx)$ produces, for $\alpha = \frac{4}{25}$, the solution

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{3}{10}}\text{sech}^2\left(\sqrt{\frac{1}{20}}\,x\right). \tag{4}$$

Hence our main interest in the present talk is to show that the standing wave (2) with ϕ given in (4) is orbitally stable in the energy space. Roughly speaking, we say that ϕ as in (4) is orbitally stable if the profile of an initial data u_0 for (1) is close to ϕ, then the associated evolution in time $u(t)$, with $u(0) = u_0$, remains close to ϕ, up to symmetries, for all values of t.

The strategy to prove our stability result is based on the construction of a suitable Lyapunov functional. In fact, we follow the leading arguments in [2], where the author established the orbital stability of standing waves for abstract Hamiltonian systems of the form

$$Ju_t(t) = H'(u(t)) \tag{5}$$

posed on a Hilbert space X, where J is an invertible bounded operator in X.

2 Main Results

Equation (1) conserves the energy

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (|u_{xx}|^2 + |u_x|^2 - \frac{1}{2}|u|^4)\, dx, \tag{1}$$

and the mass

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |u|^2\, dx. \tag{2}$$

In addition, from (3), we see that $\Phi = \phi + i0$ is a critical point of the functional $E + \alpha F$, that is,

$$E'(\Phi) + \alpha F'(\Phi) = 0. \tag{3}$$

Next, let us introduce the linear operator

$$\mathcal{L} := \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

where

$$\mathcal{L}_1 := \partial_x^4 - \partial_x^2 + \alpha - 3\phi^2 \tag{5}$$

and

$$\mathcal{L}_2 := \partial_x^4 - \partial_x^2 + \alpha - \phi^2. \tag{6}$$

This operator appears in the linearization of (1) around the wave Φ. The knowledge of the nonpositive spectrum related to the operator $\mathcal{L}$ is one of the cornerstones in the stability analysis. To do so, we employ the theory of the totally positive operators introduced in [1]. One has the following stability theorem,

Theorem 2.1. *Let $\alpha = 4/25$. Consider ϕ as the solution of (3) given in (4). Then, the standing wave $u(x,t) = e^{i\alpha t}\phi(x)$ is orbitally stable in the energy space $H^2(\mathbb{R})$.*

References

[1] ALBERT, J.P. - Positivity properties and stability of solitary-wave solutions of model equations for long waves, *Commun. Partial Differential Equations*, **17**, 1–22, 1992.

[2] STUART, C.A. - Lectures on the orbital stability of standing waves and applications to the nonlinear Schrödinger equation, *Milan J. Math.*, **76**, 329–399, 2008.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *81–82*

UMA VERSÃO GERAL DO TEOREMA DE EXTRAPOLAÇÃO PARA OPERADORES NÃO-LINEARES ABSOLUTAMENTE SOMANTES

G. BOTELHO[1,†], D. PELLEGRINO[2,‡], J. SANTOS[2,§] & J. B. SEOANE-SEPÚLVEDA[4,§§]

[1]Faculdade de Matemática , UFU, MG, Brasil, [2]Departamento de Matemática, UFPB, PB, Brasil,
[3]Departamento de Análisis Matemático, UCM, Madrid, Spain.

[†]botelho@ufu.br, [‡]dmpellegrino@gmail.com, [§]joedsonmat@gmail.com, [§§]jseoane@mat.ucm.es

Resumo

Neste trabalho mostraremos uma versão geral do teorema de extrapolação para operadores não-lineares absolutamente somantes. Esta versão melhora e recupera vários teoremas de extrapolação para classes de aplicações que generalizam a classe dos operadores absolutamente somantes.

1 Introdução

Sejam X, Y espaços de Banach, $0 < r < \infty$ e $\Pi_r(X;Y)$ o espaço de todos os operadores lineares absolutamente r-somantes de X em Y. Na terminologia morderna, resultados do tipo

$$\Pi_p(X;Y) = \Pi_r(X;Y)$$

para certos X, Y, p, r são chamados de resultados de coincidência. Dois importantes resultados nessa linha são os Teoremas de Extrapolação devido a Maurey [1, Corollary 91] e Pisier [5, Theorem 5.13]. Combinando esses dois resultados obtemos:

Teorema 1.1 (Teorema de Extrapolação)**.** *Sejam $1 < r < q < \infty$ e X um espaço de Banach. Se*

$$\Pi_q(X;\ell_q) = \Pi_r(X;\ell_q),$$

então

$$\Pi_q(X;Y) = \Pi_l(X;Y)$$

para todo espaço de Banach Y e todo $0 < l < q$.

2 Resultado Principal

O resultado principal deste trabalho é uma generalização não-linear do Teorema 1.1.

Primeiro vamos relembrar o ambiente abstrato criado em [3]. Sejam $X_1, ..., X_n,\ Y$ e $E_1, ..., E_r$ conjuntos (arbitrários) não vazios, $\mathcal{H}$ uma família de aplicações de $X_1 \times \cdots \times X_n$ em Y. Sejam também $K_1, ..., K_t$ espaços topológicos de Hausdorff compactos, $G_1, ..., G_t$ espaços de Banach e considere as seguintes aplicações arbitrárias.

$$\begin{cases} R_j \colon K_j \times E_1 \times \cdots \times E_r \times G_j \longrightarrow [0,\infty),\ j = 1, ..., t \\ S \colon \mathcal{H} \times E_1 \times \cdots \times E_r \times G_1 \times \cdots \times G_t \longrightarrow [0,\infty). \end{cases}$$

Definição 2.1. *Se $0 < p_1, ..., p_t, p < \infty$, com $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_t}$, uma aplicação $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ em $\mathcal{H}$ é dita $R_1, ..., R_t$-S-abstrata $(p_1, ..., p_t)$-somante se existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{m} S(f, x_j^{(1)}, ..., x_j^{(r)}, b_j^{(1)}, ..., b_j^{(t)})^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{k=1}^{t} \sup_{\varphi \in K_k} \left(\sum_{j=1}^{m} R_k \left(\varphi, x_j^{(1)}, ..., x_j^{(r)}, b_j^{(k)}\right)^{p_k}\right)^{\frac{1}{p_k}} \tag{1}$$

para todos $x_1^{(s)}, \ldots, x_m^{(s)} \in E_s$, $b_1^{(l)}, \ldots, b_m^{(l)} \in G_l$, $m \in \mathbb{N}$ e $(s, l) \in \{1, ..., r\} \times \{1, ..., t\}$.

O conjunto dessas aplicações será denotado por $\mathcal{H}_{R_1,...,R_t-S,(p_1,...,p_t)}(X_1, \ldots, X_n; Y)$.

Quando $p_1 = \cdots = p_n = q$ escrevemos simplesmente $\mathcal{H}_{R_1,...,R_t-S,q}(X_1, \ldots, X_n; Y)$.

Agora, suponha que a seguinte condição:

(C1) Seja $1 < p < q < \infty$. Se

$$\mathcal{H}_{R_1,...,R_t-S,q}(X_1, \ldots, X_n; \ell_q) = \mathcal{H}_{R_1,...,R_t-S,p}(X_1, \ldots, X_n; \ell_q),$$

então para cada $j \in \{1, \ldots, t\}$ existe uma constante $C_j > 0$ tal que para cada medida $\mu^{(j)} \in \mathcal{P}(K_j)$ existe uma medida correspondente $\hat{\mu}^{(j)} \in \mathcal{P}(K_j)$ tal que

$$\left\| R_j \left(\cdot, x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}, b^{(j)}\right) \right\|_{L_q(K_j, \mu^{(j)})} \leq C_j \left\| R_j \left(\cdot, x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}, b^{(j)}\right) \right\|_{L_p(K_j, \hat{\mu}^{(j)})}$$

para todo $\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}, b^{(j)}\right) \in E_1 \times \cdots \times E_r \times G_j$.

O principal resultado deste trabalho é o seguinte teorema:

Teorema 2.1. *Seja $1 < p < q < \infty$. Se (C1) é válida e*

$$\mathcal{H}_{R_1,...,R_t-S,q}(X_1, \ldots, X_n; \ell_q) = \mathcal{H}_{R_1,...,R_t-S,p}(X_1, \ldots, X_n; \ell_q),$$

então

$$\mathcal{H}_{R_1,...,R_t-S,q}(X_1, \ldots, X_n; Y) = \mathcal{H}_{R_1,...,R_t-S,l}(X_1, \ldots, X_n; Y),$$

para todo espaço de Banach Y e todo $0 < l < q$.

Observação 2. *O Teorema 2.1 recupera o Teorema 1.1, estende a validade de um recente teorema de extrapolação não-linear provado em [4, Toerema 3.1] para o intervalo $0 < p < 1$ e melhora os teoremas de extrapolação para os polonômios e as aplicações multilineares dominadas de [2, Teoremas 4.1 e 4.2].*

Referências

[1] MAUREY, B. - *Théoremès de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans les espaces L_p*, Soc. Math. France, Astérisque 11, Paris, 1974.

[2] PELLEGRINO, D. - *Cotype and nonlinear absolutely summing mappings*, Math. Proc. Roy. Irish Acad., **105A** (2005), 75–91.

[3] PELLEGRINO, D.; SANTOS, J. AND SEOANE-SEPÚLVEDA, J. B. - *Some techniques on nonlinear analysis and applications*, Adv. Math. **229** (2012), 1235–1265.

[4] PELLEGRINO, D.; SANTOS, J. AND SEOANE-SEPÚLVEDA, J. B. , *A general extrapolation theorem for absolutely summing operators*, Bull. Lond. Math. Soc. **44**, no. 3, (2012), 480–488.

[5] PISIER, G. - *Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces*, CBMS Reg. Conf. Ser. Math., vol. 60, Amer. Math. Soc., 1986.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *83–84*

GENERAL TYPES OF SPHERICAL MEAN OPERATOR AND K-FUNCTIONALS OF FRACTIONAL ORDERS

THAÍS JORDÃO[1,2,†] & XINGPING SUN[3,‡]

[1]Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, USP, SP, Brasil, [2]Supported by FAPESP #2014/06209-1,
[3]Departamento de Matemática, Missouri State University, MO, USA.

[†]tjordao@icmc.usp.br, [‡]xsun@missuristate.edu

Abstract

We design a general type of spherical mean operators and employ them to approximate L_p class functions. We show that optimal orders of approximation are achieved via appropriately defined K-functionals of fractional orders.

1 Introduction

We work in $\mathbb{R}^{m+1}$, $m \geq 1$, the $(m+1)$-dimensional Euclidian space equipped with the Lebesgue measure. For $x, y \in \mathbb{R}^{m+1}$, we denote $x \cdot y$ the usual inner product of x and y, and L_p the regular Banach spaces consisting of all Lebesgue measurable functions which are p-integrable $\mathbb{R}^{m+1}$, and we denote $\|\cdot\|_p$ its norm.

The Fourier transform $\widehat{f}$ of a function $f \in L_1$ is given by

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{m+1}} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx.$$

We will use the notation $\check{f}$ for the inverse Fourier transform of f. We take the liberty of assuming that the definitions of the (inverse) Fourier transform have been properly extended so that they apply to all the tempered distributions. For $t \in [0, \infty)$, the standard spherical mean operator is defined by

$$V_t(f)(x) = |S_x^t|^{-1} \int_{S_x^t} f(y) d\sigma(y), \qquad f \in L^p, \quad x \in \mathbb{R}^{m+1},$$

where, for every fixed $x \in \mathbb{R}^{m+1}$, $S_x^t := \{y \in \mathbb{R}^{m+1} : |x-y| = t\}$; $|S_x^t|$ denotes the volume of S_x^t; σ is the measure on S_x^t induced by the Lebesgue measure on $\mathbb{R}^{m+1}$.

Let $r, t > 0$ be given. We introduce the following general type of spherical mean operators:

$$V_{r,t}(f)(x) := \frac{-2}{\binom{2r}{r}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{2r}{r-k} V_{kt}(f)(x), \quad f \in L^p, \quad x \in \mathbb{R}^{m+1}. \tag{1}$$

Here for two real numbers r, s with r not being a negative integer, we have

$$\binom{r}{s} = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(s+1)\Gamma(r-s+1)}.$$

We define a K-functional on L_p associated with the "fractional order" Laplacian Δ^r:

$$K_r(f, \Delta, t)_p := \inf_g \{\|f-g\|_p + t^{2r} \|\Delta^r g\|_p : \Delta^r g \in L^p\},$$

where $(\Delta^r g)(x) := (|2\pi\xi|^{2r}\, \widehat{g}(\xi))\check{\ }(x)$.

When r is taken a natural number, let us say ℓ, the general type of spherical mean operator and also the K-funcional turn out the same operator and K-functional in Dai and Ditzian [2] introduced a class of "multi-layered" spherical mean operators $V_{\ell,t}$,

$$V_{\ell,t}(f)(x) = \frac{-2}{\binom{2\ell}{\ell}} \sum_{k=1}^{\ell} (-1)^k \binom{2\ell}{\ell-k} V_{kt}(f)(x), \qquad f \in L^p, \quad x \in \mathbb{R}^{m+1},$$

and they showed

$$\|V_{\ell,t}(f) - f\|_p \asymp K_\ell(f, \Delta, t^{2\ell}), \quad 1 \le p \le \infty, \tag{2}$$

where $\asymp$ means the same asymptotic behavior in terms of variable t. Belinsky, Dai and Ditzian [1], and Dai and Ditzian [2] also studied the counterparts of the operators $V_{\ell,t}$ on S^m, the unit sphere in $\mathbb{R}^{m+1}$, and obtained comparably interesting results.

2 Main Results

As the main result of this paper, we establish the following asymptotic relations:

$$\|V_{r,t}(f) - f\|_p \asymp K_r(f, \Delta, t^{2r}), \quad f \in L_p, \quad r > 1, \quad 1 < p < \infty, \tag{3}$$

$$\|V_{r,t}(f) - f\|_p \asymp K_r(f, \Delta, t^{2r}), \quad f \in L_p, \quad r > m/2, \quad 1 \le p \le \infty. \tag{4}$$

If $r = \ell$ is a natural number, then $V_{r,t}$ and $V_{\ell,t}$ coincide, as do the asymptotic relation (1.2).

The method to obtain such relations makes use, mainly, of multipliers operators technics as Hörmander multiplier theorem and its consequences. That is why is it extremely important to find out the multiplier attached to the new operator (1.1). Since, the Fourier transform of the standard spherical mean operator is well know the Fourier series of $(\sin\theta/2)^{2r}$ leads us to the next fundamental characterization.

Proposition 2.1. *Assume that $r > -1/2$ and that $t > 0$. The multiplier m_r of $V_{r,t}$ is a radial function, and the following representation holds true:*

$$(V_{r,t}(f))\widehat{\ }(\xi) = \mathrm{m}_r(2\pi t|\xi|)\widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^{m+1}, \quad f \in L_p,$$

where

$$\mathrm{m}_r(\xi) = 1 - \frac{2^{2r+1}\Gamma((m+1)/2)}{\binom{2r}{r}\Gamma(m/2)\Gamma(1/2)} \int_0^1 (\sin(|\xi|s/2))^{2r} (1-s^2)^{(m-2)/2} ds, \quad \xi \in \mathbb{R}^{m+1}.$$

After several manipulation and study of multiplier above, Hörmander multiplier theorem takes care of the conclusion and asymptotic relations (2.3) and (2.4) follow. The equivalences give a characterization for the fractional K-functional and generalize considerable related results on the literature. More details about the paper can be found in [3].

References

[1] Belinsky, E.; Dai, F.; Ditzian, Z., *Multivariate approximating averages*, J. Approx. Theory **125** (2003), no. 1, 85-105.

[2] Dai, F.; Ditzian, Z., *Combinations of multivariate averages.* J. Approx. Theory **131** (2004), no. 2, 268–283.

[3] jordão, t.; sun, xingping - *General types of spherical mean operator and K-functionals of fractional orders.* Commun. Pure Appl. Anal. **14** (2015), no. 3, 743–757.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *85–86*

STRICTLY POSITIVE DEFINITE KERNELS ON THE TORUS

J. C. GUELLA[1,†] & V. A. MENEGATTO[1,2,‡]

[1]ICMC-USP,SP, Brasil, [2]Financial support from FAPESP, grant 2014/00277-5.

[†]jeanguella@gmail.com, [‡]menegatt@icmc.usp.br

Abstract

We determine a necessary and sufficient condition for the strict positive definiteness of a continuous and positive definite kernel on the m-dimensional torus, enhancing a characterization of positive definiteness given by S. Bochner in 1933.

1 Introduction

We will consider the problem of characterizing the real, continuous and strictly positive definite kernels on the m-dimensional torus T_m. For a nonempty and infinite set X, a kernel $K : X \times X \to \mathbb{C}$ is *positive definite* if

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} c_\mu \overline{c_\nu} K(x_\mu, x_\nu) \geq 0,$$

whenever n is positive integer, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ are distinct points on X and $c_1, c_2, \ldots, c_n$ are scalars in $\mathbb{C}$. The *strict positive definiteness* of a positive definite kernel K demands that all the inequalities above be strict when at least one of the c_μ is nonzero. In the case the kernel K is a real function, we can use real scalars c_μ in the definitions above, as long as we assume K is symmetric in the following sense: $K(x,y) = K(y,x)$, $x, y \in X$.

If we write $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ to represent the components of a vector x in $\mathbb{R}^m$, we can define the m-dimensional torus T_m as

$$T_m := \{x \in \mathbb{R}^m : -\pi \leq x_j < \pi; j = 1, 2, \ldots, m\}.$$

By a real and continuous function on T_m we will mean a 2π-periodic and continuous real function with domain $\mathbb{R}^m$. For a real and continuous function f on T_m, we can designate the multiple Fourier series

$$f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \hat{f}(n) e^{i(n \cdot x)}, \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

in which $\cdot$ is the usual inner product in $\mathbb{R}^m$. The Fourier coefficients appearing above can be computed through the formula

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T_m} e^{i(n \cdot x)} f(x) dx, \quad n \in \mathbb{Z}^m.$$

For a real and continuous function f on T_m, the kernel $(x, y) \in T_m \to f(x-y)$ is positive definite if and only f is even and possesses a representation in the form

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \hat{f}(n) e^{i(n \cdot x)}, \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

in which all the Fourier coefficients are nonnegative and

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \hat{f}(n) := \lim_{N \to \infty} \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) < \infty.$$

Obviously, we are using standard multi-index notation in the formula above. In particular,

$$|n| = |n_1| + |n_2| + \cdots + |n_m|, \quad n = (n_1, n_2, \ldots, n_m) \in \mathbb{Z}^m.$$

A detailed proof for the result described above can be found in [4, Chapter 4], even though the result itself is due do S. Bochner ([1]). The evenness of f can be seen as a consequence of the symmetry assumption introduced before. The purpose of this work is to provide a similar characterization for the strict positive definiteness of the kernel K.

2 The Main Result

In order to accomplish our goal, the following alternative formulation for the concept of strict positive definiteness on T_m is a key entry. It allows the computations involving the concept to flow.

Proposition 2.1. *Let $(x, y) \in T_m \times T_m \to f(x - y)$ be a real, continuous and positive definite kernel on T_m. The following assertions are equivalent:*
(i) The kernel $(x, y) \in T_m \times T_m \to f(x - y)$ is strictly positive definite;
(ii) If $l \geq 1$ and $x_1, x_2, \ldots, x_l$ are distinct points in T_m, then the only solution of the system

$$\sum_{\mu=1}^{l} c_\mu e^{i(n \cdot x_\mu)} = 0, \quad n \in \{n : \hat{f}(n) > 0\},$$

is $c_\mu = 0$, $\mu = 1, 2, \ldots, l$.

The statement of the main result demands two algebraic concepts. If S is a subgroup of $(\mathbb{Z}^m, +)$, a *translation* of S is a set of the form

$$(j_1, j_2, \ldots, j_m) + S := \{(j_1 + a_1, j_2 + a_2, \ldots, j_m + a_m) : (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in S\},$$

in which $(j_1, j_2, \ldots, j_m)$ is a fixed element of $\mathbb{Z}^m$. Subgroups of $\mathbb{Z}^m$ having the form

$$(a_1\mathbb{Z}, a_2\mathbb{Z}, \ldots, a_m\mathbb{Z}), \quad a_1, a_2, \ldots, a_m > 0,$$

will be referred to as *parallelepipedal lattices* of $\mathbb{Z}^m$.

The main result itself is this one ([2]).

Theorem 2.1. *Let f be a real and continuous function on T_m. Assume the kernel $(x, y) \in T_m \to f(x - y)$ is positive definite. It is strictly positive definite if and only if the set $\{n : \hat{f}(n) > 0\}$ intersects all the translations of each parallelepipedal lattice of $\mathbb{Z}^m$.*

Remark 2.1. The theorem above holds, modulus some adaptations, to complex and continuous kernels on T_m. In this case, the symmetry assumption mentioned before is no longer included. The theorem also adds to a result in [3] where C^∞ positive definite kernels on T_m were considered.

References

[1] BOCHNER - *Monotone Funktionen, Stieltjessche Integrale und harmonische Analyse.* (German) Math. Ann. **108** (1933), no. 1, 378-410.

[2] GUELLA, J. C. AND MENEGATTO, V. A. - *Strictly positive definite kernels on the torus.* Preprint, 2015.

[3] NARCOWICH, F. J. - *Generalized Hermite interpolation and positive definite kernels on a Riemannian manifold.* J. Math. Anal. Appl. **190** (1995), no. 1, 165-193.

[4] SHAPIRO, V. L. - *Fourier series in several variables with applications to partial differential equations.* Chapman & Hall/CRC Applied Mathematics and Nonlinear Science Series. CRC Press, Boca Raton, FL, 2011.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *87–88*

EQUAÇÕES MULTIVALENTES EM DOMÍNIOS LIMITADOS VIA MINIMIZAÇÃO EM ESPAÇOS DE ORLICZ-SOBOLEV: MINIMIZAÇÃO GLOBAL

MARCOS L. M. CARVALHO[1,†] & JOSÉ VALDO A. GONÇALVES [1,‡]

[1]Instituto de Matemática , UFG, GO, Brasil.

[†]marcos_leandro_carvalho@ufg.br, [‡]goncalves.jva@gmail.com

Resumo

Neste trabalho usaremos minimização de funcionais Localmente Lipschitz definidos em Espaços de Orlicz-Sobolev, juntamente com técnicas de convexidade, para investigar a existência de solução da equação multivalente $-\Delta_\Phi u \in \partial j(.,u) + h$ em Ω, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ regular, $\Phi : \mathbb{R} \mapsto [0,\infty)$ é uma N-função apropriada, Δ_Φ é o correspondente $\Phi-$Laplaciano, $h : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável e $\partial j(.,u)$ é o gradiente generalizado de Clarke da função $u \mapsto j(x,u)$, q.t.p. $x \in \Omega$, associada com o crescimento crítico. A regularidade de solução também será investigada.

1 Introdução

Estudaremos a existência e regularidade de solução (cf. Definição 2.1) da equação multivalente

$$-\Delta_\Phi u \in \partial j(.,u) + h \text{ em } \Omega, \tag{1}$$

onde $\Delta_\Phi u := \operatorname{div}(\phi(|\nabla u|)\nabla u)$, $\phi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ é uma função contínua e satisfaz:

(ϕ_1) *(i)* $\lim_{s\to 0} s\phi(s) = 0$, *(ii)* $\lim_{s\to\infty} s\phi(s) = \infty$,

(ϕ_2) $s \mapsto s\phi(s)$ *é não-decrescente em* $(0,\infty)$,

(ϕ_3) *existem* $\ell, m \in (1,N)$ *tais que* $\ell \leq \dfrac{t^2\phi(t)}{\Phi(t)} \leq m$, $t > 0$,

$h : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável e $j : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem crescimento crítico (num sentido que definiremos abaixo). Além disso, suponhamos que existam $A \geq 0$ e uma função não negativa $B \in L^1(\Omega)$ tais que

$$j(x,s) \leq A|s|^\ell + B(x), \qquad s \in \mathbb{R}, \qquad q.t.p. \qquad x \in \Omega. \tag{2}$$

Sob a condição (2), podemos definir a função $A_\infty(x) := \limsup_{|s|\to\infty} \dfrac{j(x,s)}{|s|^\ell}$.

Extenderemos $s \mapsto s\phi(s)$ a $\mathbb{R}$ como uma função ímpar e definiremos $\Phi(t) := \int_0^t s\phi(s)ds$. A função complementar $\widetilde{\Phi}$ associada a Φ é definida por

$$\widetilde{\Phi}(t) := \max_{s\geq 0}\{st - \Phi(s)\}.$$

Já a função crescimento crítico Φ_* associada a Φ é a inversa da função

$$t \in (0,\infty) \mapsto \int_0^t \frac{\Phi^{-1}(s)}{t^{\frac{N+1}{N}}} ds, \ t > 0,$$

a qual extenderemos a $\mathbb{R}$ por $\Phi_*(t) = \Phi_*(-t)$ para $t \leq 0$. Além disso, $L_\Phi(\Omega)$ denota o espaço de Orlicz associado a N-função Φ e é munido da norma (de Luxemburg)

$$\|u\|_\Phi = \inf\left\{\lambda > 0 \mid \int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{\lambda}\right) dx \leq 1\right\}$$

e a norma do espaço de Orlicz-Sobolev $W^{1,\Phi}(\Omega)$ é

$$\|u\|_{1,\Phi} = \|u\|_{\Phi} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{\Phi},$$

enquanto $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é o fecho de $C_0^{\infty}(\Omega)$ com respeito a norma de $W^{1,\Phi}(\Omega)$. Sob as condições $(\phi_1)-(\phi_3)$, Φ, $\widetilde{\Phi}$ e Φ_* são N-funções e os espaços $L_\Phi(\Omega)$, $W^{1,\Phi}(\Omega)$ e $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ são espaços de Banach, reflexivos e separáveis.

2 Resultados Principais

Definição 2.1. *Dizemos que* $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ *é solução fraca de* (1) *se existe* $\rho = \rho_u \in L_{\Phi_*}(\Omega)' = L_{\widetilde{\Phi}_*}(\Omega)$ *tal que*

$$\rho(x) \in \partial j(x, u(x)) \text{ q.t.p. } x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla v dx = \int_\Omega \rho v dx + \int_\Omega h v dx, \; v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega). \tag{2}$$

Teorema 2.1. *Seja* Φ *satisfazendo* $(\phi_1)-(\phi_3)$. *Suponha que existam* $c_1, c_2 \geq 0$ *e uma função não negativa* $b \in L_{\Phi_*}(\Omega)'$ *tal que*

$$|\eta| \leq c_1 \widetilde{\Phi}_*^{-1} \circ \Phi_*(c_2 s) + b(x), \; s \in \mathbb{R} \text{ q.t.p. } x \in \Omega, \; \eta \in \partial j(x,s). \tag{3}$$

Suponha também que j *satisfaça* (2) *e*

$$\inf_{v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega), \; \|v\|_\Phi = 1} \left\{ \int_\Omega \Phi(|\nabla v|)dx - \int_{\{v \neq 0\}} A_\infty(x)|v(x)|^\ell dx \right\} > 0. \tag{4}$$

Então para todo $h \in L_\Phi(\Omega)'$, *o problema* (1) *possui pelo menos uma solução fraca em* $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Para estudarmos a regularidade consideraremos $j(x,s) := \int_0^s f(x,t)dt$, onde $f : \Omega \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ é uma função tal que $f(x,.) \in \mathbf{C}(\mathbb{R} - \{a\})$, $a > 0$, e satisfaça

$$f(x, a-0) := \lim_{\delta \to t^-} f(x,\delta) < f(x, a+0) := \lim_{\delta \to t^+} f(x,\delta), \; x \in \Omega. \tag{5}$$

Teorema 2.2. *Sejam* Φ *satisfazendo* $(\phi_1)-(\phi_3)$ *e* $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função não decrescente na segunda variável satisfazendo* (2), (4), (5) *e*

$$|f(x,s)| \leq c_1 \widetilde{\Phi}_*^{-1} \circ \Phi_*(c_2 s) + b(x), \tag{6}$$

onde $c_1, c_2 > 0$ *e* $b \in L_{\Phi_*}(\Omega)'$. *Então* (1) *possui pelo menos uma solução* $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ *satisfazendo*

$$|\{x \in \Omega \mid u(x) = a\}| = 0 \qquad e \qquad -\Delta_\Phi u(x) = f(x,u) + h(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega. \tag{7}$$

Referências

[1] Adams, R. A., Fournier, J. F., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, (2003).

[2] Carvalho, M. L., Goncalves, J. V., *Multivalued equations on a bounded domain via minimization on Orlicz-Sobolev spaces*, J. Convex Anal. 21 (2014), no. 1, 201–218.

[3] Goncalves, J. V. A., *On nonresonant sublinear elliptic problems*, Nonlinear Anal., **15** (1990) 915-920.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *89–90*

RECONSTRUCTION OF COEFFICIENTS AND SOURCES PARAMETERS WITH LIPSCHITZ DISSECTION OF CAUCHY DATA AT BOUNDARY

NILSON C. ROBERTY[1,†]

[1]PEN, COPPE, UFRJ, RJ, Brasil.

[†]nilson@con.ufrj.br

Abstract

The inverse boundary value problem for coefficient and sources reconstruction in the elliptic equation is considered. The Dirichlet and the Neumann data are over prescribed on respective part of the Lipschitz dissected Cauchy data. A methodology for engineering applications is presented.

1 Introduction

In this work we study the problem of reconstruction of of coefficients and source in second order strongly elliptic systems [1]. Let Ω a Lipschitz domain. Let $F_\alpha = [f_\alpha, ..., f_\alpha] \in (L^2(\Omega))^{m\times NP}$, $(H, H_\nu) \in (H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times (H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)))^{m\times NP}$ be the source and the Cauchy data for NP problems. The inverse boundary value problem for parameter determination investigated is to find :$(U, \alpha) \in H^1(\Omega)^{m\times NP} \times \mathbf{R}^{NA}$ such that: $P^{\alpha}_{F_\alpha,H,H_\nu} = \{\mathcal{L}_\alpha U = F_\alpha \text{ if } x \in \Omega; \gamma[U] = H \text{ if } x \in \partial\Omega; \mathcal{B}_\nu[U] = H_\nu \text{if} x \in \partial\Omega\}$. Here γ is the boundary trace and $\mathcal{B}_\nu$ is the conormal trace. The coefficients of the strongly elliptic operator $\mathcal{L}_\alpha$ and the source depend on the parameters α.

Auxiliary mixed problem and Lipschitz Dissection Complementary Direct Problems

Let $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \Pi \cup \partial\Omega_N$ a Lipschitz dissection of the boundary. The auxiliary mixed boundary value problem for problem $P^{\alpha}_{F_\alpha,H,H_\nu}$ is given by the well posed problem $P^{\alpha}_{f_\alpha,g^D,g_N}$: For Dirichlet and Neumann data $(g^D, g^N_\nu) \in (H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^m$, to find $u \in H^1(\Omega)^m$ such that

$$P^{\alpha}_{f_\alpha,g_D,g_N} \begin{cases} \mathcal{L}_\alpha u = f_\alpha & \text{if } x \in \Omega; \\ \gamma[u] = g^D & \text{if } x \in \partial\Omega_D; \\ \mathcal{B}_\nu u = g^N_\nu & \text{if } x \in \partial\Omega_N; \end{cases} \tag{1}$$

Consider the splitting the superscribe Cauchy boundary data following the Lipschitz boundary dissection

$$H^I = \gamma[U]|_{\Gamma_I} \; ; \; H^{II} = \gamma[U]|_{\Gamma_{II}} \; ; \; H^I_\nu = \mathcal{B}_\nu[U]|_{\Gamma_I} \text{ and } H^I_\nu I = \mathcal{B}_\nu[U]|_{\Gamma_{II}}$$

and, under some guess of paramaters values $\alpha^{(0)}$, formulates and solve $2NP$mixed boundary values problems : $P^{\alpha^{(0)}}_{F_{\alpha^{(0)}},H^I,H^{II}_\nu}$ and $P^{\alpha^{(0)}}_{F_{\alpha^{(0)}},H^{II},H^I_\nu}$.

Let U^I_0 and U^{II}_0 be the its respective solutions.

Definition 1.1 (Complementary Problems on Lipschitz Domains)**.** *Let us consider two mixed boundary value problems P_{f_I,g^I,g^I_ν} and $P_{f_{II},g^{II},g^{II}_\nu}$ defined on the same Lipschitz domain Ω. We say that these problems are complementary if $f_I = f_{II}$, $\Gamma^I_D = \Gamma^{II}_N$, $\Gamma^{II}_D = \Gamma^I_N$ and there exist a Cauchy data (g, g_ν) such that $g^I = g\chi_{\Gamma^I_D}$ and $g^{II} = g\chi_{\Gamma^{II}_D}$ and $g^I_\nu = g_\nu\chi_{\Gamma^I_D}$ and $g^{II}_\nu = g_\nu\chi_{\Gamma^{II}_D}$.*

Theorem 1.1. *[1]. Suppose that two mixed boundary value problems P_{f_I,g^I,g^I_ν} and $P_{f_{II},g^{II},g^{II}_\nu}$ has solutions u_I and u_{II}, respectively. If they are complementary, then $u_I = u_{II}$.*

2 Main Results

The system of Boundary Integral Equations

$$U(x) = [u_1, ..., u_{NP}](x) = \int_\Omega G_x^0(\xi)\{F(\xi) + (\mathcal{L}_\alpha - \mathcal{L}_{\alpha_0})[U](\xi)\}d\xi - \int_\Gamma \mathcal{B}_{\nu_\xi}[G_x^0](\xi))H(\xi)d\sigma_\xi + \int_\Gamma G_x^0(\xi)H_\nu(\xi)d\sigma_\xi.$$

is deduced with the fundamental solution with coefficients frozen at the boundary, $G_x^0(\xi)$, (Levi function of order 0). Note that for simplicity we suppose that coefficients are uniform at the boundary and in this case, $(\mathcal{L}_\alpha - \mathcal{L}_{\alpha_0})$ is the perturbationof of operator principal part with respect to coefficients values at the boundary and its non-principal part. Analogously, the System of Reciprocity Gap Integral Variational Equations

$$\int_\Omega v(\xi)\{F(\xi) + (\mathcal{L}_\alpha - \mathcal{L}_{\alpha_0})[U](\xi)\}d\xi - \int_\Gamma \mathcal{B}_{\nu_\xi}[v](\xi))H(\xi)d\sigma_\xi + \int_\Gamma v(\xi)H_\nu(\xi)d\sigma_\xi = 0.$$

where the test function $v(\xi)$ is the regular solution of the adjoint problem $\mathcal{L}_{\alpha_0}^*[v] = 0$ with coefficients frozen at the boundary (a meta harmonic function). To deduce a Boundary-Reciprocity Perturbed System we note that.

Let $\epsilon \in \mathbf{R}$ a perturbation parameter. The (ϵ, v) system is

$U_{(\epsilon,v)}(x) + K_{G^0}[U_{(\epsilon,v)}](x) + \epsilon K_v[U_{(\epsilon,v)}](x) = H_{(\epsilon,v)}(x)$, where:

(i) $H_{(\epsilon,v)}(x) = \int_\Omega (G_x^0 + \epsilon v)(\xi)F(\xi)d\xi - \int_\Gamma \mathcal{B}_{\nu_\xi}[G_x^0 + \epsilon v](\xi))H(\xi)d\sigma_\xi + \int_\Gamma (G_x^0 + \epsilon v)(\xi)H_\nu(\xi)d\sigma_\xi$. $K_{G^0}[W](x) = \int_\Omega G_x^0(\xi)(\mathcal{L}_\alpha - \mathcal{L}_{\alpha_0})[W](\xi)d\sigma_\xi$,

(ii) $K_v[W](x) = \int_\Omega v(\xi)(\mathcal{L}_\alpha - \mathcal{L}_{\alpha_0})[W](\xi)d\sigma_\xi$

Lemma 2.1. *For set of source and Cauchy data (F, H, H_ν) the perturbed solutions $U_{(\epsilon,v)}$ are independent of $(\epsilon, v) \in (\mathbb{R} \times H_{\mathcal{L}_{\alpha_0}^*}(\Omega)$.*

Let $\mathcal{L}_\alpha - \mathcal{L}_{\alpha_0} = \sum_{|l|\leq 2}(A_l - A_l^0)(x)D^l$, where $A_l, A_l^0 \in C^\infty(\Omega)$ and $D = i^{-1}\frac{\partial}{\partial x}$. Since by Fourier transform $D^l u(x) = \int\int(\xi)^l e^{i(x-y)\cdot\xi}u(y)dyd\xi$, [2]. Hence, $(\mathcal{L}_\alpha - \mathcal{L}_{\alpha_0})[W](\xi) = \int\int e^{i(\xi-y)\cdot z}\sigma_{A-A^0}(\xi, z)W(y)dydz$, where $\sigma(\xi, z) = \sum_{l\leq 2}(A_l - A_l^0)(\xi)z^l$ is the symbol of the perturbed operator. We also have

(i) $K_{G^0}[W](x) = \int_\Omega G_x^0(\xi)\int\int e^{i(\xi-y)\cdot z}\sigma_{A-A^0}(\xi, z)W(y)dydzd\sigma_\xi$,

(ii) $K_v[W](x) = \int_\Omega v(\xi)\int\int e^{i(\xi-y)\cdot z}\sigma_{A-A^0}(\xi, z)W(y)dydzd\sigma_\xi$.

We do the elimination of the solution $U_{(\epsilon,v)}$ to form the internal discrepancy equation for the coefficient and source inverse problem. Let $W_{(\epsilon,v)} = (I + K_{G^0})U_{(\epsilon,v)}$. The ϵ system for $W_{(\epsilon,v)}$ is

$$W_{(\epsilon,v)}(x) + \epsilon K_v(I + K_{G^0})^{-1}W_{(\epsilon,v)}(x)(x) = H_{(\epsilon,v)}(x)$$

by using the first order Neumann series $(I+K)^{-1} = I - K + (I+K)^{-1}K^2$ $W_{(\epsilon,v)} = H_{(\epsilon,v)} - \epsilon K_v(I + K_{G^0})^{-1}H_{(\epsilon,v)} + O(\epsilon^2)$. Noting that $H_{(\epsilon,v)} - H_{(0,v)} = \epsilon(\int_{\Omega_\xi} v(\xi)f(\xi)d\xi - \int_{\Gamma_\xi}\mathcal{B}_{\nu_\xi}[v](\xi)H(\xi)d\sigma_\xi + \int_{\Gamma_\xi} v(\xi)H_\nu(\xi)d\sigma_\xi)$ we obtain $\frac{W_{(\epsilon,v)} - W_{(0,v)}}{\epsilon} = \int_{\Omega_\xi} v(\xi)F(\xi)d\xi - \int_{\Gamma_\xi}\mathcal{B}_{\nu_\xi}[v](\xi)H(\xi)d\sigma_\xi + \int_{\Gamma_\xi} v(\xi)H_\nu(\xi)d\sigma_\xi - K_v(I + K_{G^0})^{-1}H_{(\epsilon,v)} + O(\epsilon)$ Since $W_{(\epsilon,v)}$ is independent of ϵ, $\lim_{\epsilon\to 0} = \frac{W_{(\epsilon,v)} - W_{(0,v)}}{\epsilon} = 0$.

Lemma 2.2 (Internal Discrepancy Coefficient Equation)**.** *For set of source and Cauchy data (F, H, H_ν), let $G_x^0(\xi)$ be the fundamental solution with coefficients frozen at the boundary (Levi function of order 0) and $\sigma_{A-A^0}(\xi, z)$ be the symbol of the perturbed operator. Let $H_{(0,v)}(x) = \int_{\Omega_\xi} G_x^0(\xi)F(\xi)d\xi - \int_{\Gamma_\xi}\mathcal{B}_{\nu_\xi}[G_x^0](\xi)H(\xi)d\sigma_\xi + \int_{\Gamma_\xi}(G_x^0)(\xi)H_\nu(\xi)d\sigma_\xi$. Then, for all $v \in H_{\mathcal{L}_{\alpha_0}^*}(\Omega)$, $\int_{\Omega_\xi} v(\xi)F(\xi)d\xi - \int_{\Gamma_\xi}\mathcal{B}_{\nu_\xi}[v](\xi)H(\xi)d\sigma_\xi + \int_{\Gamma_\xi} v(\xi)H_\nu(\xi)d\sigma_\xi - \int_{\Omega_\xi} v(\xi)\int\int e^{i(\xi-y)\cdot z}\sigma_{A-A^0}(\xi, z)(I + K_{G^0})^{-1}[H_{(0,v)}](y)dydzd\sigma_\xi = 0$*

We develop a methodology for the inverse parameter reconstruction problem and present numerical experiments.

References

[1] ROBERTY, N. C. - *Simultaneous Reconstruction of Coefficients and Source Parameters in Elliptic Systems Modelled with Many Boundary Value Problems,* Mathematical Problems in Engineering Volume 2013 (2013).

[2] TREVES, J. F., *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators*, Springer, US, (1980).

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *91–92*

NONLOCAL SCALAR FIELD EQUATIONS WITH TRUDINGER-MOSER CRITICAL NONLINEARITY

J. M. DO O[1,†], O. H. MIYAGAK[2,‡] & M. SQUASSINA[3,§]

[1]D. M. , UFPB, PB, Brasil, [2]D. M. UFJF, MG, Brasil, [3]D. I., U. Verona, Italy.

[†]jmbo@mat.ufpb.br, [‡]olimpio@ufv.br, [§]marco.squassina@univr.it

Abstract

We investigate the existence of ground state solutions for a class of nonlinear scalar field equations defined on whole real line, involving a fractional Laplacian and nonlinearities with Trudinger-Moser critical growth. We handle the lack of compactness of the associated energy functional due to the unboundedness of the domain and the presence of a limiting case embedding.

1 Introduction

The goal of this paper is to investigate the existence of ground state solutions $u \in H^{1/2}(\mathbb{R})$ for the following class of nonlinear scalar field equations

$$(-\Delta)^{1/2}u + u = f(u) \quad \text{in } \mathbb{R}, \tag{1}$$

where $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a smooth nonlinearity in the critical growth range. Precisely, we focus here on the case when f has the *maximal growth* which allows to study problem (1) variationally in the Sobolev space $u \in H^{1/2}(\mathbb{R})$. We are motivated by the following Trudinger-Moser type inequality due to Ozawa [2].

Theorem 1.1. *There exists $0 < \omega \leq \pi$ such that, for all $\alpha \in (0, \omega)$, there exists $H_\alpha > 0$ with*

$$\int_{\mathbb{R}} (e^{\alpha u^2} - 1)\ dx \leq H_\alpha \|u\|_{L^2}^2, \tag{2}$$

for all $u \in H^{1/2}(\mathbb{R})$ with $\|(-\Delta)^{1/4}u\|_{L^2}^2 \leq 1$.

From inequality (2) we have naturally associated notions of *subcriticality* and *criticality* for this class of problems. Precisely, we say that $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ has subcritical growth at $\pm\infty$ if

$$\limsup_{s \to \pm\infty} \frac{f(s)}{e^{\alpha s^2} - 1} = 0, \quad \text{for all } \alpha > 0,$$

and has α_0-critical growth at $\pm\infty$ if there exists $\omega \in (0, \pi]$ and $\alpha_0 \in (0, \omega)$ such that

$$\limsup_{s \to \pm\infty} \frac{f(s)}{e^{\alpha s^2} - 1} = 0, \quad \text{for all } \alpha > \alpha_0,$$
$$\limsup_{s \to \pm\infty} \frac{f(s)}{e^{\alpha s^2} - 1} = \pm\infty, \quad \text{for all } \alpha < \alpha_0.$$

By a *ground state* solution to problem (1) we mean a nontrivial weak solution of (1) with the least possible energy.

The following assumptions on f will be needed throughout the paper:

(f1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is C^1, odd, convex function on $\mathbb{R}^+$, and

$$\lim_{s \to 0} \frac{f(s)}{s} = 0.$$

(f2) $s \mapsto s^{-1} f(s)$ is an increasing function for $s > 0$.

(f3) there are $q > 2$ and $C_q > 0$ with

$$F(s) \geq C_q |s|^q, \quad \text{for all } s \in \mathbb{R}.$$

(AR) there exists $\theta > 2$ such that

$$\theta F(s) \leq s f(s), \quad \text{for all } s \in \mathbb{R}, \qquad F(s) = \int_0^s f(\sigma) dx\sigma.$$

2 Main Results

The main result of the paper is the following

Theorem 2.1. *Let $f(s)$ and $f'(s)s$ have α_0-critical growth and satisfy* (**f1**)-(**f3**) *and* (**AR**). *Then problem* (1) *admits a ground state solution $u \in H^{1/2}(\mathbb{R})$ provided C_q in* (**f3**) *is large enough.*

The proof is basead on the paper [1].

References

[1] J. M. do O, O. H. Miyagaki, M. Squassina -Ground states of nonlocal scalar field equations with Trudinger-Moser critical nonlinearity, preprint.

[2] T. Ozawa, *On critical cases of Sobolev's inequalities,* J. Funct. Anal. **127** (1995), 259–269.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *93–94*

POLYNOMIAL DAUGAVET PROPERTY FOR REPRESENTABLE SPACES

GERALDO BOTELHO[1,†] & ELISA R. SANTOS[1,2,‡]

[1]Faculdade de Matemática, UFU, MG, Brasil, [2]Partially supported by FAPEMIG.

[†]botelho@ufu.br, [‡]elisa@famat.ufu.br

Abstract

In this work we prove that every representable Banach space has the polynomial Daugavet property. As consequence, we obtain new examples of Banach spaces with the polynomial Daugavet property.

1 Introduction

A Banach space X is said to have the *Daugavet property* if every rank-one operator $T : X \to X$ satisfies

$$\|\mathrm{Id} + T\| = 1 + \|T\|,$$

which is known as the *Daugavet equation*. This equation was first studied by I. K. Daugavet [3] in the space $C[0,1]$. Since then several authors have shown that different Banach spaces has the Daugavet property. Classical examples of Banach spaces fulfilling this property are $C(K)$ and $L_1(\mu)$, for every perfect compact Hausdorff space K and every atomless σ-finite measure μ.

In 2007 the study of the Daugavet equation was extended to bounded functions from the unit ball of a Banach space into the space [1] and, in particular, to polynomials. Let X denote a Banach space. A function $\Phi \in \ell_\infty(B_X, X)$ satisfies the *Daugavet equation* if

$$\|\mathrm{Id} + \Phi\| = 1 + \|\Phi\|. \tag{DE}$$

We say that a Banach space X has the *polynomial Daugavet property* (PDP) if every weakly compact polynomial on X satisfies (DE).

Now let K be a compact Hausdorff space. A Banach space X is said *K-representable* if there exists a family $(X_k)_{k\in K}$ of Banach spaces such that X is (linearly isometric to) a closed $C(K)$-submodule of the $C(K)$-module $\prod_{k\in K}^{\infty} X_k$ in such a way that, for every $x \in S_X$ and every $\varepsilon > 0$, the set $\{k \in K : \|x(k)\| > 1 - \varepsilon\}$ is infinite. When the compact set K is not relevant, we simply say that X is representable. J. B. Guerrero and A. Rodrígues-Palacios [4] showed that every representable space has the Daugavet property. Actually it is possible to prove that every representable space has the polynomial Daugavet property.

2 Main Results

Using the ideas of ([4], Lemma 2.4) and the characterization of the polynomial Daugavet property given by ([2], Proposition 6.3), we can prove the following result.

Proposition 2.1. *Let X be a representable Banach space. Then X has the polynomial Daugavet property.*

By this proposition and some results of [4], we obtain several examples of Banach spaces with the polynomial Daugavet property. We list these examples in the subsequent corollaries.

Given a Banach space X, a representable Banach space Y and a closed subspace M of $\mathcal{L}(X,Y)$ such that $\mathcal{L}(Y) \circ M \subset M$, ([4], Lemma 2.5 and Corollary 2.6) prove that M and $X \widehat{\otimes}_\epsilon Y$ are representable spaces. Thus the two following corollaries are consequences of Proposition 2.1.

Corollary 2.1. *Let X be a Banach space, let Y be a representable Banach space, and let M be a closed subspace of $\mathcal{L}(X,Y)$ such that $\mathcal{L}(Y)\circ M \subset M$. Then M has the polynomial Daugavet property.*

Corollary 2.2. *Let X be a Banach space, and let Y be a representable Banach space. Then $X\widehat{\otimes}_\epsilon Y$ has the polynomial Daugavet property.*

Now let Y be a non-zero Banach space. A subspace Z of Y^* is said to be *norming* for Y, if it is norm-closed in Y^* and, for every $y \in Y$, we have $\|y\| = \sup\{|\varphi(y)| : \varphi \in B_Z\}$. Consider Z a norming subspace of Y^* for Y, and τ a vector space topology on Y with $\sigma(Y,Z) \leq \tau \leq n$, where n denotes the norm topology on Y and $\sigma(Y,Z)$ denotes the weak topology on Y relative to its duality with Z. If K is a perfect compact Hausdorff topological space, then $C(K,(Y,\tau))$ is K-representable by ([4], Theorem 3.1), and we obtain the corollary below.

Corollary 2.3. *Let K be a perfect compact Hausdorff topological space, let Y be a non-zero Banach space, let Z be a norming subspace of Y^* for Y, and let τ be a vector space topology on Y with $\sigma(Y,Z) \leq \tau \leq n$. Then $C(K,(Y,\tau))$ satisfies the polynomial Daugavet property.*

By ([4], Theorem 4.3) we know that every dual Banach space Y without minimal M-summands is a representable space. Thus, if X is a Banach space and M is a closed subspace of $\mathcal{L}(X,Y)$ such that $\mathcal{L}(Y)\circ M \subset M$, then M has the polynomial Daugavet property by Corollary 2.1, what proves the next corollary.

Corollary 2.4. *Let X be a Banach space, let Y be a dual Banach space without minimal M-summands, and let M be a closed subspace of $\mathcal{L}(X,Y)$ such that $\mathcal{L}(Y)\circ M \subset M$. Then M has the polynomial Daugavet property.*

Let X be a Banach space without minimal L-summands, and let Y be a dual Banach space. Since X is a Banach space without minimal L-summands, X^* has no minimal M-summands. If Y_* is a predual of Y, then $\mathcal{L}(X,Y)$ is linearly isometric to $\mathcal{L}(Y_*,X^*)$. Therefore, the result below follows from Corollary 2.4, with (Y_*,X^*) instead of (X,Y).

Corollary 2.5. *Let X be a Banach space without minimal L-summands, and let Y be a dual Banach space. Then $\mathcal{L}(X,Y)$ has the polynomial Daugavet property.*

None of the previous examples are known in the literature.

References

[1] CHOI, Y. S., GARCÍA, D., MAESTRE, M., MARTÍN, M. - The Daugavet equation for polynomials. *Studia Math.*, **178**, 63-82, 2007.

[2] CHOI, Y. S., GARCÍA, D., MAESTRE, M., MARTÍN, M. - The polynomial numerical index for some complex vector-valued function spaces. *Quart. J. Math.*, **59**, 455-474, 2008.

[3] DAUGAVET, I. K. - On a property of completely continuous operators in the space C. *Uspekhi Mat. Nauk*, **18**, 157-158, 1963 (in Russian).

[4] GUERRERO, J. B. AND RODRÍGUEZ-PALACIOS, A. - Banach spaces with the Daugavet property, and the centralizer. *J. Funct. Anal.*, **254**, 2294-2302, 2008.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *95–96*

QUASILINEAR ELLIPTIC PROBLEMS WITH CYLINDRICAL SINGULARITIES AND MULTIPLE CRITICAL NONLINEARITIES

RONALDO B. ASSUNÇÃO[1,†], WELER W. DOS SANTOS[2,3,‡] & OLíMPIO H. MIYAGAKI[4,5,§]

[1]Departamento de Matemática, UFMG, Belo Horizonte, MG, Brasil, [2]Departamento de Ciências Exatas e Biológicas, UFSJ/CSL, Sete Lagoas, MG, Brasil, [3]Partially supported by CAPES/Reuni, [4]Departamento de Matemática, UFJF, Juiz de Fora, MG, Brasil, [5]Partially supported by CNPq/Brasil and INCTMAT/Brasil.

[†]ronaldo@mat.ufmg.br.com, [‡]weler@ufsj.edu.br, [§]ohmiyagaki@gmail.com

Abstract

This work deals with existence of solutions for a class of quasilinear elliptic problems with cylindrical singularities and multiple critical nonlinearities. The existence of a positive, weak solution is proved with the help of the mountain pass theorem. We also prove a regularity result using Moser's iteration scheme. Finally, using a Pohozaev-type identity we show that if the dimensional balance between the power of one nonlinearity and its corresponding singularity, as determined by Maz'ya's inequality, is not valid, then the problem only has the trivial solution.

1 Introduction

The main goal of this work is to prove existence, regularity, and nonexistence results for a class of quasilinear elliptic problems with cylindrical singularities and multiple critical nonlinearities that can be written in the form

$$-\operatorname{div}\left[\frac{|\nabla u|^{p-2}}{|y|^{ap}}\nabla u\right]-\mu\,\frac{u^{p-1}}{|y|^{p(a+1)}}=\frac{u^{p^*(a,b)-1}}{|y|^{bp^*(a,b)}}+\frac{u^{p^*(a,c)-1}}{|y|^{cp^*(a,c)}},\qquad (x,y)\in\mathbb{R}^{N-k}\times\mathbb{R}^k. \tag{1}$$

We consider $N\geqslant 3$, $1\leqslant k\leqslant N$, $1<p<N$, $0\leqslant\mu<\bar{\mu}\equiv\{[k-p(a+1)]/p\}^p$, $0\leqslant a<(k-p)/p$, $a\leqslant b<c<a+1$, $p^*(a,b)=Np/[N-p(a+1-b)]$, and $p^*(a,c)\equiv Np/[N-p(a+1-c)]$; in particular, if $\mu=0$ we can include the cases $(k-p)/p\leqslant a<k(N-p)/Np$ and $a<b<c<k(N-p(a+1))/p(N-k)<a+1$.

The choice for the intervals for the several parameters already specified is motivated by the following Maz'ya's inequality, which plays a crucial role in our work since it allows the variational formulation of problem (1). Let $N\geqslant 3$, $1\leqslant k\leqslant N$, $z=(x,y)\in\mathbb{R}^{N-k}\times\mathbb{R}^k$, $1<p<N$, and either $a<(k-p)/p$ and $a\leqslant b\leqslant a+1$, or $(k-p)/p\leqslant a<k(N-p)/Np$ and $a\leqslant b<k(N-p(a+1))/p(N-k)<a+1$. Then there exists a positive constant $C>0$ such that

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(z)|^{p^*(a,b)}}{|y|^{bp^*(a,b)}}\,dz\right)^{p/p^*(a,b)}\leqslant C\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\nabla u(z)|^p}{|y|^{ap}}\,dz$$

for every function $u\in C^\infty(\mathbb{R}^N\backslash\{|y|=0\})$, where $p^*(a,b)=Np/[N-p(a+1-b)]$ is the critical Maz'ya's exponent.

2 Main results

Inspired by Bhakta [1] regarding the nature of the cylindrical singularities, and by Filippucci, Pucci and Robert [2], with respect to the presence of multiple critical nonlinearities, our first result deals with existence of a positive, weak solution to problem (1) and reads as follows.

Theorem 2.1. *Let $2\leqslant k\leqslant N$, $1<p<N$ and $a<(k-p)/p$; let $\bar{\mu}\equiv[(k-p(a+1))/p]^p$. Suppose that the parameters b and c verify one of the following cases.*

1. $0 = a = b < c < 1$ *and* $\mu < \bar{\mu}$*;*

2. $a < b < c < a + 1$, $\mu < \bar{\mu}$*; in particular, if* $\mu = 0$ *we can include the cases* $(k - p)/p \leqslant a < k(N - p)/Np$ *and* $a < b < c < k(N - p(a + 1))/p(N - k) < a + 1$.

3. $0 < a = b < c < a + 1$, $\mu^* < \mu < \bar{\mu}$, *where* $\mu^* < \bar{\mu}[-ap^2/(N - ap)][(N - 1)/(N - p)] < 0$*; in particular, if* $\mu = 0$ *we can include the same special cases of item 2.*

Then there exists a function $u \in \mathcal{D}^{1,p}_a(\mathbb{R}^N\backslash\{|y| = 0\})$ *such that* $u > 0$ *in* $\mathbb{R}^N\backslash\{|y| = 0\}$ *and* u *is a weak solution to problem* (1) *in* $\mathbb{R}^N\backslash\{|y| = 0\}$.

To complement our existence theorem we also study a regularity result of weak, positive solution to a problem related to problem (1). As is usual in the theory of nonlinear elliptic equations, to show the class of differentiability of the solution we use the iteration scheme introduced by Moser. More precisely, inspired by Pucci and Servadei [3], we consider the class of quasilinear elliptic equations with cylindrical singularities and multiple nonlinearities

$$-\operatorname{div}\left[\frac{|\nabla u|^{p-2}}{|y|^{ap}}\nabla u\right] - \mu\,\frac{|u|^{p-2}u}{|y|^{p(a+1)}} = \frac{(u_+)^{p^*(a,b)-1}}{|y|^{bp^*(a,b)}} + \frac{(u_+)^{p^*(a,c)-1}}{|y|^{cp^*(a,c)}} \qquad (x,y) \in \Omega, \tag{2}$$

where the domain $\Omega \subset \mathbb{R}^{N-k} \times \mathbb{R}^k\backslash\{|y| = 0\}$ is not necessarily bounded. Our regularity result can be stated in the following way.

Theorem 2.2. *Suppose that* $1 \leqslant k \leqslant N$, $1 < p < N$, $a < (k - p)/p$, *and* $a \leqslant b < c < a + 1$ *and consider the domain* $\Omega \subset \mathbb{R}^{N-k} \times \mathbb{R}^k\backslash\{|y| = 0\}$, *not necessarily bounded. If* $u \in \mathcal{D}^{1,p}_a(\Omega)$ *is a weak solution to problem* (2), *then* $u \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$.

We note that in Theorem 2.1 both critical exponents are the ones that make problem (1) invariant under the group of transformations defined by $\tilde{u}_n(x, y) \equiv t_n^{(N-p(a+1))/p}\, u_n(t_n x + \eta_n, t_n y)$. A natural question is what happens when one of the nonlinearities has a different exponent. In other words, we consider the class of problems where the exponent in one of the nonlinearities is not critical as determined by Maz'ya's inequality. In this case, we also observe the 'asymptotic competition' phenomenon, and there exists only the trivial solution to the problem. More precisely, consider the problem

$$-\operatorname{div}\left[\frac{|\nabla u|^{p-2}}{|y|^{ap}}\nabla u\right] - \mu\,\frac{|u|^{p-2}u}{|y|^{p(a+1)}} = \frac{|u|^{q-2}u}{|y|^{bp^*(a,b)}} + \frac{|u|^{p^*(a,c)-2}u}{|y|^{cp^*(a,c)}}. \tag{3}$$

Our nonexistence result of nontrivial solution reads as follows.

Theorem 2.3. *Let* $1 \leqslant k \leqslant N$, $1 < p < N$, $a < (k - p)/p$, $a \leqslant b < c < a + 1$, $0 \leqslant \mu < \bar{\mu}$. *If* $u \in \mathcal{D}^{1,p}_a(\mathbb{R}^N\backslash\{|y| = 0\})$ *is a weak solution to problem* (3), *then* $u \equiv 0$ *when either* $1 < q < p^*(a, b)$, *or* $q > p^*(a, b)$ *and* $u \in L^q_{bp^*(a,b)/q,\text{loc}}(\mathbb{R}^N\backslash\{|y| = 0\}) \cap L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N\backslash\{|y| = 0\})$.

References

[1] M. Bhakta. On the existence and breaking symmetry of the ground state solution of Hardy Sobolev type equations with weighted p-Laplacian. *Adv. Nonlinear Stud.*, 12(3):555–568, 2012.

[2] R. Filippucci, P. Pucci, and F. Robert. On a p-Laplace equation with multiple critical nonlinearities. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 91(2):156–177, 2009.

[3] P. Pucci and R. Servadei. Regularity of weak solutions of homogeneous or inhomogeneous quasilinear elliptic equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 57(7):3329–3363, 2008.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *97–98*

RENORMALIZATION PROPERTY FOR STOCHASTIC TRANSPORT EQUATION

DAVID A. C. MOLLINEDO[1,†] & CHRISTIAN OLIVERA[1,‡]

[1]IMECC, UNICAMP, SP, Brasil.

[†]ra089775@ime.unicamp.br, [‡]colivera@ime.unicamp.br

Abstract

The renormalized theory of DiPerna and Lions for linear transport equations with unsmooth coefficient uses the tools of approximation of an arbitrary weak solution by smooth functions, and the renormalization property, that is to say to write down an equation on a nonlinear function of the solution. Under some $W^{1,1}$ regularity assumption on the coefficient, well-posedness holds. In this paper, we prove that the uniqueness implies renormalization property for the stochastic transport equation with unbounded Holder drift.

1 Introduction

We consider the deterministic linear transport equation in $\mathbb{R}^d$

$$\partial_t u(t,x) + b(t,x) \cdot \nabla u(t,x) = 0\,, \tag{1}$$

Di Perna and Lions [3] have introduced the notion of renormalized solution to this equation: it is a solution such that

$$\partial_t \beta(u(t,x)) + b(t,x) \cdot \beta(\nabla u(t,x)) = 0, \tag{2}$$

for any suitable nonlinearity β. Notice that (2) holds for smooth solutions, by an immediate application of the chain-rule. The renormalization property asserts that nonlinear compositions of the solution are again solutions, or alternatively that the chain-rule holds in this weak context. The overall result which motivates this definition is that, if the renormalization property holds, then solutions of (1) are unique and stable. Many of the previous results can be extended easily to a stochastic transport equation framework of the form

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \nabla u(t,x) \left(b(t,x) + \dfrac{dB_t}{dt} \right) = 0, \\ \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases} \tag{3}$$

The Cauchy problem for the stochastic transport equation has taken great attention recently. F. Flandoli, M. Gubinelli and E. Priola in [5], where they obtained well-posedness of the stochastic problem for a bounded Hölder continuous drift term, with some integrability conditions on the divergence. Their approach is based on the characteristics method. Using a similar approach, E.Fedrizzi and F. Flandoli in [4] a well-posedness result is obtained, in the class of Sobolev solutions, under only some integrability conditions on the drift. There, it is only assumed that

$$\begin{gathered} b \in L^q\big([0,T]; L^p(\mathbb{R}^d)\big)\,, \\ \text{for} \qquad p,q \in [2,\infty)\,, \qquad \frac{d}{p} + \frac{2}{q} < 1\,. \end{gathered} \tag{4}$$

The well-posedness of the Cauchy problem (3) under condition (4) for measurable was considered in [8] and in [1]. In this paper, we do not want to give new well-posedness theorems, but rather equivalent conditions for the well-posedness to hold, without regularity assumptions on b. More precisely, we assume that

$$b \in C^{\theta}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \quad div\, b(t,x) \in L^2_2\big(\mathbb{R}^d\big)\,. \tag{5}$$

2 Main Results

The complete proof of this theorem is given in [7].

Theorem 2.1. *We assume hypothesis (5). We assume uniqueness of L^∞- weak solutions then b has the renormalization property for any distribution solution in* $C([0,T], L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) - w)$

Proof Let $\{\rho_\varepsilon\}_\varepsilon$ be a family of standard symmetric mollifiers. We define the family of regularised coefficients as $b^\epsilon(x) = (b * \rho_\varepsilon)(x)$. For any fixed $\varepsilon > 0$, provides the existence of a unique solution u^ε to the regularised equation

$$\begin{cases} du^\varepsilon(t,x,\omega) + \nabla u^\varepsilon(t,x,\omega) \cdot \big(b^\varepsilon(x)dt + \circ dB_t\big) = 0\,, \\ u^\varepsilon\big|_{t=0} = u_0 \end{cases} \tag{1}$$

together with the representation formula

$$u^\varepsilon(t,x) = u_0\big((\phi_t^\varepsilon)^{-1}(x)\big) \tag{2}$$

in terms of the (regularised) initial condition and the inverse flow $(\phi_t^\varepsilon)^{-1}$ associated to the equation of characteristics of (1), which reads

$$dX_t = b^\varepsilon(X_t)\,dt + dB_t\,, \qquad X_0 = x\,.$$

The proof is based in the careful study of the approximate problem (1).

References

[1] L. Beck, F. Flandoli, M. Gubinelli and M. Maurelli, *Stochastic ODEs and stochastic linear PDEs with critical drift: regularity, duality and uniqueness* . Preprint available on Arxiv: 1401-1530, 2014.

[2] F Bounchut, G. Crippa *Uniqueness, renormalization and smooth approximations for transport equations* , SIAM J. Math. Anal., 38, 1316-1328, 2006.

[3] R. DiPerna and P.L. Lions, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces.* Invent. Math., 98, 511-547, 1989.

[4] E. Fedrizzi and F. Flandoli, *Noise prevents singularities in linear transport equations.* Journal of Functional Analysis, 264, 1329-1354, 2013.

[5] F. Flandoli, M. Gubinelli and E. Priola, *Well-posedness of the transport equation by stochastic perturbation.* Invent. Math., 180, 1-53, 2010.

[6] F. Flandoli, M. Gubinelli, E. Priola, *Flow of diffeomorphisms for SDEs with unbounded Hölder continuous drift* , Bulletin des Sciences Mathematiques, 134, 405-422, 2010.

[7] David A.C. Mollinedo , C. Olivera *Renormalization Property for Stochastic Transport Equation* , arXiv:1507.04559, 2015.

[8] W. Neves and C. Olivera, *Wellposedness for stochastic continuity equations with Ladyzhenskaya-Prodi-Serrin condition*, to appears in Nonlinear Differential Equations and Applications, 2015 .

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *99–100*

STRONG SOLUTIONS FOR VARIABLE DENSITY MICROPOLAR INCOMPRESSIBLE FLUIDS IN ARBITRARY DOMAINS

FELIPE WERGETE CRUZ[1,†], PABLO BRAZ E SILVA[2,‡] & M. A. ROJAS-MEDAR[3,4,§]

[1]Colegiado de Engenharia de Produção, UNIVASF, BA, Brazil, [2]Departamento de Matemática, UFPE, PE, Brazil, [3]Instituto de Alta Investigación, Universidad de Tarapacá, Casilla 7D, Arica, Chile, [4]This work was partially supported by project MTM2012-32325, Spain, Grant 1120260, Fondecyt-Chile.

[†]felipe.wergete@univasf.edu.br, [‡]pablo@dmat.ufpe.br, [§]marko.medar@gmail.com

Abstract

We establish the existence of strong solutions (local and global in time) for the equations of micropolar (asymmetric) incompressible fluids with variable density in arbitrary domains of $\mathbb{R}^3$ with boundary uniformly of class C^3. Under certain conditions, uniqueness is also valid for local and global strong solution.

1 Introduction

We are interested in the flow of an micropolar (asymmetric) incompressible fluid with variable density in $\Omega \times (0,T)$, where $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ is a domain (not necessarily bounded), with boundary $\partial\Omega$ uniformly of class C^3 and $(0,T)$ is a time interval, with $0 < T \leq \infty$. The governing equations are the following:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho\mathbf{u}_t + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - (\mu+\mu_r)\Delta\mathbf{u} + \nabla p & = & 2\mu_r \operatorname{curl}\mathbf{w} + \rho\mathbf{f}, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} & = & 0, \\ \rho\mathbf{w}_t + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{w} - (c_0+c_d-c_a)\nabla(\operatorname{div}\mathbf{w}) + 4\mu_r\mathbf{w} & = & (c_a+c_d)\Delta\mathbf{w} + 2\mu_r\operatorname{curl}\mathbf{u} + \rho\mathbf{g}, \\ \rho_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho & = & 0. \end{array} \right. \tag{1}$$

In system (1), the unknowns are $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{w}(\mathbf{x},t) \in \mathbb{R}^3$, $\rho(\mathbf{x},t) \in \mathbb{R}$ and $p(\mathbf{x},t) \in \mathbb{R}$. They represent, respectively, the linear velocity, the angular velocity of rotation of the fluid particles, the mass density and the pressure distribution of the fluid as functions of position $\mathbf{x}$ and time t. The functions $\mathbf{f}$ and $\mathbf{g}$ are given external forces. The positive constants μ, μ_r, c_0, c_a and c_d characterize physical properties of the fluid. Thus, μ is the usual Newtonian viscosity; μ_r, c_0, c_a and c_d are additional viscosities related to the lack of symmetry of the stress tensor and, consequently, to the fact that the internal rotation field $\mathbf{w}$ does not vanish. These constants must satisfy the inequality $c_0 + c_d > c_a$. The symbols ∇, Δ, div and curl denote the *gradient, Laplacian, divergence* and *rotational* operators, respectively, and $\mathbf{u}_t, \mathbf{w}_t$ and ρ_t stand for the time derivatives of $\mathbf{u}, \mathbf{w}$ and ρ. When $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ and $\mu_r = 0$, system (1) is reduced to the classical Navier-Stokes equations with variable density.

For the derivation of equations (1) and a discussion on their physical meaning, see [1, 2]. Physically, the first equation in system (1) corresponds to the conservation of linear momentum; the second one to the incompressibility of the fluid; the third corresponds to the conservation of angular momentum, and the fourth one corresponds to the conservation of mass. We complement system (1) with homogeneous boundary conditions

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{w}(\mathbf{x},t) = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,T), \tag{2}$$

and given initial conditions

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{w}(\mathbf{x},0) = \mathbf{w}_0(\mathbf{x}) \quad \text{and} \quad \rho(\mathbf{x},0) = \rho_0(\mathbf{x}) \quad \text{in} \quad \Omega. \tag{3}$$

If Ω is unbounded, also impose the following condition on the velocities at infinity:

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} \mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{0}, \quad \lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} \mathbf{w}(\mathbf{x},t) = \mathbf{0}, \quad t \in (0,T). \tag{4}$$

2 Main Results

In what follows, $\mathbf{V}(\Omega)$ represent the closure of $\mathcal{V}(\Omega)$ in $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, where $\mathcal{V}(\Omega) := \{\mathbf{u} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega) \,/\, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ in } \Omega\}$, i.e., $\mathbf{V}(\Omega) := \overline{\mathcal{V}(\Omega)}^{\,\mathbf{H}_0^1(\Omega)} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega);\ \operatorname{div}\,\mathbf{v} = 0\}$. Our main result is the following

Theorem 2.1. *Let Ω be a domain of $\mathbb{R}^3$, with boundary uniformly of class C^3. Assume that $\rho_0 \in C^1(\overline{\Omega})$, with $0 < \alpha \leq \rho_0(\mathbf{x}) \leq \beta < \infty$ in Ω, $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ and $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$. Moreover, suppose $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^\infty(0,\infty;\mathbf{H}^1(\Omega))$ and $\mathbf{f}_t, \mathbf{g}_t \in L^\infty(0,\infty;\mathbf{L}^2(\Omega))$. If $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{H}^1}$, $\|\mathbf{w}_0\|_{\mathbf{H}^1}$, $\|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0,\infty;\mathbf{L}^2(\Omega))}$ and $\|\mathbf{g}\|_{L^\infty(0,\infty;\mathbf{L}^2(\Omega))}$ are sufficiently small, then there exists a strong solution $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w})$ for problem (1)-(4), globally in time. Moreover, there exist positive constants C_∂ and $C_{\partial,\gamma}$, $\gamma > 0$, such that*

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\geq 0}\left(\|\nabla \mathbf{u}(\cdot,t)\|^2 + \|\nabla \mathbf{w}(\cdot,t)\|^2\right) \leq C_\partial, \qquad && \sup_{t\geq 0}\left(\|\mathbf{u}_t(\cdot,t)\|^2 + \|\mathbf{w}_t(\cdot,t)\|^2\right) \leq C_\partial,\\
&\sup_{t\geq 0}\left(\|A\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2 + \|B\mathbf{w}(\cdot,t)\|^2\right) \leq C_\partial, && \sup_{t\geq 0}\left(\|D^2\mathbf{u}(\cdot,t)\|^2 + \|D^2\mathbf{w}(\cdot,t)\|^2\right) \leq C_\partial,\\
&\sup_{t\geq 0} e^{-\gamma t}\int_0^t e^{\gamma s}\left(\|\mathbf{u}_t(\cdot,s)\|^2 + \|\mathbf{w}_t(\cdot,s)\|^2\right) ds \leq C_{\partial,\gamma}, && \sup_{t\geq 0} e^{-\gamma t}\int_0^t e^{\gamma s}\left(\|A\mathbf{u}(\cdot,s)\|^2 + \|B\mathbf{w}(\cdot,s)\|^2\right) ds \leq C_{\partial,\gamma},\\
&\sup_{t\geq 0} e^{-\gamma t}\int_0^t e^{\gamma s}\left(\|\nabla\mathbf{u}_t(\cdot,s)\|^2 + \|\nabla\mathbf{w}_t(\cdot,s)\|^2\right) ds \leq C_{\partial,\gamma}, && \rho \in C^1(\widetilde{\Omega}\times[0,T]),\ \widetilde{\Omega} \subset\subset \Omega,\ \forall T \in (0,\infty),
\end{aligned}
$$

where A is the Stokes operator and $B = -\Delta$ is the Laplace operator. Here, the constants C_∂ and $C_{\partial,\gamma}$ depends only on the C^3-regularity of $\partial\Omega$ (but not on the "size" of $\partial\Omega$ or Ω).

Remark 2.1. *Under the assumptions in Theorem 2.1 for the initial data $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{w}_0$ and ρ_0, the problem (1)-(3) possesses unique local strong solution in $\Omega \times (0, T^*)$, for some $T^* \in (0, T]$, assuming that Ω is a bounded and regular domain, $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega))$ and $\mathbf{f}_t, \mathbf{g}_t \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ (see the Theorem 1 of J. L. Boldrini et al. in [5]). Actually it is possible to prove that this unique strong solution is global in time for small enough initial data.*

References

[1] A. C. Eringen - Theory of micropolar fluids. *J. Math. Mech.*, **16** (1), 1-18, 1966.

[2] D. W. Condiff and J. S. Dahler - Fluid mechanical aspects of antisymmetric stress. *Phys. Fluids*, **7** (6), 842-854, 1964.

[3] J. G. Heywood and R. Rannacher - Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem. I. Regularity of solutions and second-order error estimates for spatial discretization. *SIAM J. Numer. Anal.*, **19** (2), 275-311, 1982.

[4] J. L. Boldrini and M. A. Rojas-Medar - Global strong solutions of the equations for the motion of nonhomogeneous incompressible fluids. In *Numerical methods in mechanics*, ed. by C. Conca and G. N. Gatica. Pitman Research Notes in Mathematics Series 371. Longman, Harlow, 35-45, 1997.

[5] J. L. Boldrini, M. A. Rojas-Medar and E. Fernández-Cara - Semi-Galerkin approximation and strong solutions to the equations of the nonhomogeneous asymmetric fluids. *J. Math. Pures Appl.*, **82**, 1499-1525, 2003.

[6] P. Braz e Silva, F. W. Cruz and M. Rojas-Medar - Vanishing viscosity for non-homogeneous asymmetric fluids in $\mathbb{R}^3$: The L^2 case. *J. Math. Anal. Appl.*, **420**, 207-221, 2014.

[7] P. Braz e Silva, M. A. Rojas-Medar and E. J. Villamizar-Roa - Strong solutions for the nonhomogeneous Navier-Stokes equations in unbounded domains. *Math. Meth. Appl. Sci.*, **33**, 358-372, 2010.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *101–102*

ILL-POSED DELAY EQUATION

FÉLIX PEDRO QUISPE GÓMEZ[1,†]

[1]Departamento Acadêmico de Matemática-DAMAT, UTFPR, PR, Brasil.

[†]felixgomez@utfpr.edu.br

Abstract

Single-phase-lag and dual-phase-lag heat conduction models can be interpreted as formal expansions of delay equations. The delay equations are shown to be ill-posed, as are the formal expansions of higher order - in contrast to lower-order expansions leading to Fourier's or Cattaneo's law. The ill-posedness is proved, showing the lack of continuous dependence on the data, and thus showing that these models (delay or higher-order expansion ones) are highly explosive. In this work we shall present conditions for when this happens.

1 Introduction

In this work we presents a mathematical analysis of several thermomechanical models which incorporate delay or relaxation parameters.

Heat conduction is usually described by means of the energy equation

$$\theta_t + \gamma \operatorname{div} q = 0 \tag{1}$$

for the temperature θ and the heat flux vector q. With the constitutive law

$$q(t+\tau,\ \cdot) = -\kappa \nabla \theta(t,\ \cdot) \tag{2}$$

this being a special form of a more general law proposed by Tzou [1, 2], where $\gamma,\ \kappa > 0$, and $\tau > 0$ is a small relaxation parameter, we obtain the delay equation

$$\partial_t \theta = \kappa \gamma \Delta \theta(t-\tau,\ \cdot) \tag{3}$$

We shall demonstrate that this problem is ill-posed, namely, the continuous dependence on the initial data is not given. More generally, we look at the problem from an abstract point of view in discussing

$$\frac{d^n}{dt^n} u(t) = Au(t-\tau) \tag{4}$$

where $n = 1$, and A essentially is the Laplace operator with appropriate boundary conditions in some bounded domain. Then the abstract result on ill-posedness can be given for any $n \in \mathbb{N}$, and a large class of operators A, including non-homogeneous, anisotropic positive symmetric elliptic operators.

2 Main Results

Theorem 2.1. *Let A be a linear operator in a Banach space having a sequence of real eigenvalues $\{\lambda_k\}_k$ such that $0 > \lambda_k \to -\infty$ as $k \to \infty$. Let $n \in \mathbb{N}$ and $\tau > 0$ be fixed.*

Then there exists a sequence $\{u_l\}_{l \geq 1}$ of solutions to

$$\frac{d^n}{dt^n} u_l(t) = Au_l(t-\tau), \tag{1}$$

with norm $\|u_l(t)\|$ tending to infinity (as $l \to \infty$) for any fixed $t > 0$ while for the initial data the norms $\|u_l(0)\|$ remain bounded.

We remark that the eigenvalues may even be embedded into the essential spectrum. The same applies to the situation in Theorem 2.2. Recently Roy [1] extended the constitutive equation to

$$q(t+\tau_1,\ \cdot) = -(\kappa\nabla\theta(t+\tau_2,\ \cdot) + \kappa^*\nabla\nu(t+\tau_3,\ \cdot)) \tag{2}$$

where κ and κ^* are positive, ∇ is the thermal displacement that satisfies $\nu' = \theta$, and $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$. This leads to the following heat equation of second order in time with two delay times,

$$\theta_{tt}(t) = \kappa\Delta\partial_t\theta(t-\tau,\ \cdot) + \kappa^*\Delta\theta(t-\tau^*,\ \cdot) \tag{3}$$

where $\tau = \tau_1 - \tau_2 > 0$, and $\tau^* = \tau_1 - \tau_3 > 0$. Again, this equation can be extended to the more general problem

$$\frac{d^n}{dt^n}u(t) = A\frac{d}{dt}u(t-\tau) + \beta Au(t-\tau^*) \tag{4}$$

where $n \geq 2$. The constant β is positive and will be assumed to be equal to 1 without loss of generality. Then we also get the ill-posedness of this delay problem, i.e.,

Theorem 2.2. *Let A be a linear operator in a Banach space having a sequence of real eigenvalues $\{\lambda_k\}_k$ such that $0 > \lambda_k \to -\infty$ as $k \to \infty$. Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, and $\tau^*,\ \tau > 0$ be fixed.*

Then there exists a sequence $\{u_l\}_{l\geq 1}$ of solutions to

$$\frac{d^n}{dt^n}u_l(t) = A\frac{d}{dt}u_l(t-\tau) + Au(t-\tau^*), \tag{5}$$

with norm $\|u_l(t)\|$ tending to infinity (as $l \to \infty$) for any fixed $t > 0$ while for the initial data the norms $\|u_l(0)\|$ remain bounded.

In view of Theorems 2.1 and 2.2, a natural way to define a stable theory with delay is by means of a two-temperature theory as proposed in [6].

References

[1] TZOU, D. Y., A unified approach for heat conduction from macro to micro-scales, ASME J. Heat Transf. 117 (1995) 8-16.

[2] ZOU, D. Y., The generalized lagging response in small-scale and high-rate heating, Int. J. Heat Mass Transf. 38 (1995) 3231-3240.

[3] JORDAN, P.M. AND DAI, W. AND MICKENS, R.E., A note on the delayed heat equation: Instability with respect to initial data, Mech. Res. Comm. 35 (2008) 414-420.

[4] PRUS, J., Evolutionary Integral Equations and Applications, in: Monographs Math., vol. 87, Birkhãuser, Basel, 1993.

[5] ROY CHOUDHURI, S. K., On a thermoelastic three-phase-lag model, J. Thermal Stresses 30 (2007) 231-238.

[6] QUINTANILLA, R., A well posed problem for the dual-phase-lag heat conduction, J. Thermal Stresses 31 (2008) 260-269.

[7] QUINTANILLA, R. AND RACKE, R., A note on stability in dual-phase-lag heat conduction, Int. J. Heat Mass Transf. 49 (2006) 1209-1213.

[8] QUINTANILLA, R. AND RACKE, R., A note on stability in three-phase-lag heat conduction, Int. J. Heat Mass Transf. 51 (2008) 24-29.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *103–104*

DESLOCAMENTOS VERTICAIS DE UMA PLACA ELÁSTICA PARA UM OPERADOR DO TIPO KLEIN-GORDON

JOSÉ A. DÁVALOS[1,†]

[1]Instituto de Matemática, UFSJ, MG, Brasil.

[†]jadc13@ufsj.edu.br

Resumo

Neste artigo é considerado o problema unilateral relacionado com o operador do tipo Klein-Gordon

$$u \longmapsto u'' - M(|\Delta u|^2)\Delta^2 u + M_1(|u|^2)u - f$$

decorrente da teoria de placas finas [3] [8]. O modelo é definido por uma desigualdade variacional hiperbólica não linear para o operador do tipo Klein-Gordon envolvendo o operador bi-harmônico com restrições unilaterais sobre a velocidade u' do deslocamento. Em ordem a obter la existência de soluções é utilizado o método de penalização para a obtenção de um sistema aproximado; empleando o método de Faedo-Galerkin é provado a existência e unicidade da solução do problema penalizado. As estimativas a priori permitem a passagem ao limite no problema penalizado ao problema original.

1 Introdução

Neste trabalho estamos preocupados com a existência e unicidade de soluções globais para um problema de valor de contorno e inicial associado para o operador do tipo Klein-Gordon envolvendo o bilaplaciano. Considerando $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto limitado com fronteira regular Γ ocupado por uma placa fina, $T \in \mathbb{R}, T > 0$ e $Q = \Omega \times (0, T)$ o cilindro com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. O problema de valor de fronteira e condição inicial consiste em encontrar a função deslocamento $u : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo a desigualdade variacional hiperbólica

$$u'(t) \in K, \text{quase sempre em } (0, T),$$

$$\int_Q (u'' - M(|\Delta u|^2)\Delta^2 u + M_1(|u|^2)u - f)(v - u')dx\, dt \;\geq\; 0, \quad \forall\, v \in K, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x) \quad \text{em} \quad \Omega,$$

$$u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma,$$

onde $K = \{v \in L^2(\Omega); v \geq 0 \text{ q. s. em } \Omega\}$ é um subconjunto fechado convexo de $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$, Δ^2 denota o operador bi-laplaciano, a derivada temporal é representada por $'$. Motivado por [8], as hipóteses a ser consideradas sobre M e M_1 são as seguintes:

- $[H_1]$ $M, M_1 \in C^1([0, \infty); \mathbb{R})$.
- $[H_2]$ $M(s) \geq m_0 > 0$paratodos $\in [0, \infty)$.
- $[H_3]$ $M_1(s) \geq m_1 > 0$paratodos $\in [0, \infty)$.

2 Resultados Principais

Teorema 2.1. *Sejam $f \in L^2(0,T;H_0^2(\Omega)), f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $u_0 \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ e $u_1 \in H_0^2(\Omega) \cap K$ então existe $T_0 < T$ e uma única solução u de (1) tal que*

$$u \in L^\infty\left(0,T_0;H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)\right), \tag{1}$$

$$u' \in L^\infty\left(0,T_0;H_0^2(\Omega)\right),\ u'(t) \in K\ \forall\, t \in [0,T] \tag{2}$$

$$u'' \in L^\infty\left(0,T_0;L^2(\Omega)\right). \tag{3}$$

Prova: *Existência* - Para mostrar a existência da solução global da desigualdade variacional (1), utilizamos o método de penalização. Definimos o operador de penalização $\beta : L^2(0,T;H_0^2(\Omega)) \longrightarrow L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$,

$$\beta(u) = -u^-, \quad v^- = \max\{v,0\}.$$

e o problema penalizado

$$u_\varepsilon'' - M(|\Delta u_\varepsilon|^2)\Delta^2 u_\varepsilon + M_1(|u_\varepsilon|^2)u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon') \;=\; f \qquad \text{em } Q \tag{4}$$

$$u_\varepsilon \;=\; \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} \;=\; 0 \qquad \text{sobre } \Sigma \tag{5}$$

$$u_\varepsilon' \;=\; \frac{\partial u_\varepsilon'}{\partial \nu} \;=\; 0 \qquad \text{sobre } \Sigma \tag{6}$$

$$u_\varepsilon(x,0) \;=\; u_{\varepsilon 0}(x), \quad u_\varepsilon'(x,0) \;=\; u_{\varepsilon 1}(x) \quad \text{em } \Omega, \tag{7}$$

Do método de Faedo-Galerkin provamos que existe uma única solução do sistema (2.4)-(2.7). As estimativas a priori da função u_ε permitem fazer a passagem ao limite em (2.4)-(2.7), a convergência da sequência define a única solução da desigualdade variacional (1.1). ■

Agradecimentos. O autor agradece à FAPEMIG pelo apoio na difussão do trabalho.

Referências

[1] CHUQUIPOMA, J. A. RAPOSO, C. A. BASTOS, W. D. - Optimal control problem for deflection plate with crack. *Journal of Dynamical and Control Systems*, **18**, 397-417, 2012.

[2] BOCK, I. JARUŠEK, J. - On hyperbolic contac problems. *Tatra Mt. Math. Publ.*, **43**, 25-40, 2009.

[3] KHLUDNEV, A. M. - A unilateral problem for a weakly nonlinear hyperbolic operator. *Siberian Math. J.*, **19**, 412-417, 1978 (in Russian).

[4] KHLUDNEV, A. M. AND SOKOLOWSKI J. - *Modelling and control in solid mechanics*, Birkhäuser Verlag, International Series of Numerical Mathematics, Vol. 122, Berlin, 1997.

[5] KIKUCHI, N. AND ODEN J. T. - *Contact Problems in Elasticity*, SIAM, Philadelphia, 1987.

[6] LIONS, J. L. - *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéares.*, Dunod-Gauthier Villars, Paris, First edition, 1969.

[7] MEDEIROS, L. A. - On some nonlinear perturbations of Kirchhoff-Carrier's operator. *Camp. Appl. Math.* , **13(3)**, 225-233, 1994.

[8] RAPOSO, C.A. DUCIVAL, P. BAENA, A. - Unilateral problems for the Klein-Gordon operator with nonlinearity of Kirchhhoff-Carrier type. *Electronic Journal of Differential Equations*, **137**, 1-14, 2015.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *105–106*

MATHEMATICAL MODEL FOR VIBRATIONS OF A BAR

M. MILLA MIRANDA[1,†], A. T. LOUREDO[1,‡] & L. A. MEDEIROS[2,§]

[1]Universidade Estadual da Paraíba, DM, PB, Brasil, [2]Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM, RJ, Brasil.

[†]milla@im.ufrj.br, [‡]aldolouredo@gmail.com, [§]luizadauto@gmail.com

Abstract

This paper is concerned with the small longitudinal vibrations of the cross sections of a bar produced by the slam of a mass at one end of the bar.

The mathematical model of the above phenomenon is deduced and the solution of this model is obtained.

1 Introduction

Consider an elastic and homogeneous cylindrical bar of lenght L that in the equilibrium position its geometric axis coincides with the axis ox of an orthogonal system of cartesian coordinates. The cross sections of the bar are small when comparing with its lenght so we identify the ones with the variable x. Assume that the end $x = 0$ is clamped and the other end $x = L$ is free. The equilibrium position of the bar is perturbed by the slam at the end $x = L$ of a mass M that acts in the negative x-direction. The mass M remains glued at the end $x = L$ after the slam. Assume that the velocity of the displacement of the mass M is very small.

On the action of the slam of the mass M, the bar has a small contraction and then its cross section have small longitudinal vibrations in the x-direction.

Our objective in this paper is to deduce a mathematical model that describes the above small longitudinal vibrations of the cross sections of the bar and then to find a solution of this mathematical model.

2 Main Results

Denote by ρ, A and E, respectively, the constant density, area of the uniform cross section and Young coefficient of the bar. Represent by $u(x, t)$ the displacement of the the cross section x $(0 < x < L)$ of the bar at the time t.

We show that a mathematical model which describes the small longitudinal vibrations of the cross sections of the bar in the conditions of Introduction is given by:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0,\ 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = -b^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L,t),\ t > 0, \\ u(x,0) = u^0(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u^1(x),\ 0 < x < L, \end{array} \right. \tag{1}$$

where $u^0(x)$ and $u^1(x)$ denote, respectively, the initial positions an initial velocity of the cross sections of the bar. Also

$$a^2 = \frac{E}{\rho} \text{ and } b^2 = \frac{M}{EA}.$$

A similar condition to $(2.1)_2$ for the case of a vertical bar clamped at $x = 0$ and with a load at $x = L$ can be found in Timoshenko et al. [6], p.387-388.

Problems related to (2.1) can be seen in Araujo et al [1] and Medeiros and Andrade [3]

Let V be the Hilbert space

$$V = \{v \in H^1(0,L);\ u(0) = 0\},$$

equipped with the scalar product

$$((u,v)) = \int_0^L \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx$$

and norm $\|u\|^2 = ((u,u))$. We use the notation u' instead of $\frac{\partial u}{\partial t}$.

We have the following result:

Theorem 2.1. *Let $u^0 \in V \cap H^2(0,L)$ and $u^1 \in V$. Then there exist a unique function u in the class*

$$\left| \begin{array}{l} u \in L^\infty(0,\infty; V \cap H^2(0,L)), \\ u' \in L^\infty(0,\infty; V), \\ u''(L,.) \in L^\infty(0,\infty) \end{array} \right. \tag{2}$$

such that

$$\left| \begin{array}{l} u'' - a^2 u_{xx} = 0 \ \textit{in}\ L^\infty(0,\infty; L^2(0,L)), \\ u_x(L,.) = -b^2 u''(L,.) \ \textit{in}\ L^\infty(0,\infty), \\ u(0) = u^0\ ,\ u'(0) = u^1. \end{array} \right. \tag{3}$$

Remark 2.1. *Condition* $(2.2)_3$ *is a hidden regularity of the solution u.*

Proof of the Results The mathematical model (2.1) is obtained by using the Newton's Second Law, Hooke Law and D'Alembert's Principle. See D'Alembert Principle in Timoshenko et al [6] and Sommerfeld [5]. The theorem follows by applying the Faedo-Galerkin Method and results on the trace of non-smooth functions.

References

[1] J.L.G. Araújo, M. Milla Miranda and L.A. Medeiros, *Vibrations of beams by torsion or impact,* Mat. Contemporânea 36 (2009), 29-50.

[2] J, L, Lions, *Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites Non-Linéaires.* Dunod, Paris. 1969.

[3] L.A. Medeiros and N.G. Andrade, *Alguns Problemas de Contorno sobre Equações Diferenciais Parciais*, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1979.

[4] M, Milla Miranda, *Traço para o dual dos espaços de Sobolev*, Bol. Soc. Paran.Matemática (2^a série) 11(2) (1990), p.131-157.

[5] A.Sommerfeld, *Mechanics-Lectures on Theoretical Physics,* Vol. I, Academic Press, New York, 1952.

[6] S,Timoshenko, D.Young and W.Weaver, *Vibrations Problems in Engineering,* John Wiley Sons, New York, 1974.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *107–108*

A TAKEUCHI-YAMADA TYPE EQUATION WITH VARIABLE EXPONENTS: CONTINUITY OF THE FLOWS AND UPPER SEMICONTINUITY OF GLOBAL ATTRACTORS

JACSON SIMSEN[1], MARIZA S. SIMSEN[1] & MARCOS R. T. PRIMO[2,†]

[1]Instituto de Matemática e Computação, Universidade Federal de Itajubá, Minas Gerais, Brazil,
[2]Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Paraná, Brazil.

[†]mrtprimo@uem.br

Abstract

We prove continuity of the flows and upper semicontinuity of global attractors for a Takeuchi-Yamada type equation with variable exponents.

1 Introduction and Main Results

In [4] we considered the following nonlinear PDE problem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_s}{\partial t}(t) - \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(|\dfrac{\partial u_s}{\partial x}|^{p_s(x)-2}\dfrac{\partial u_s}{\partial x}\Big) = B(u_s(t)), \;\; t>0 \\ u_s(0) = u_{0s}, \end{cases}$$

under Dirichlet homogeneous boundary conditions, where $u_{0s} \in H := L^2(I)$, $I := (c,d)$, $B : H \to H$ is a globally Lipschitz map with Lipschitz constant $L \geq 0$, $p_s(x) \in C^1(\bar{I})$, $p_s^- := \text{ess inf } p_s > 2$ for all $s \in \mathbb{N}$, and $p_s(\cdot) \to p$ in $L^\infty(I)$ ($p > 2$ constant) as $s \to \infty$. We proved continuity of the flows and upper semicontinuity of the family of global attractors $\{\mathcal{A}_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ as s goes to infinity.

In this work we consider the nonlinear perturbation $|u|^{p_s(x)-2}u$ of the $p(x)-$Laplacian, i. e., we consider the following nonlinear PDE problem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_s}{\partial t}(t) - \text{div}(|\nabla u_s|^{p_s(x)-2}\nabla u_s) + |u|^{p_s(x)-2}u = B(u_s(t)), \;\; t>0, \\ u_s(0) = u_{0s}, \end{cases} \tag{1}$$

where $u_{0s} \in H := L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) is a smooth bounded domain, $B : H \to H$ is a globally Lipschitz map with Lipschitz constant $L \geq 0$, $p_s(\cdot) \in C^1(\bar{\Omega})$, $p_s^- := \text{ess inf } p_s \geq p$, $p_s^+ := \text{ess sup } p_s \leq a$, for all $s \in \mathbb{N}$, and $p_s(\cdot) \to p$ in $L^\infty(\Omega)$ as $s \to \infty$ ($p > 2$ and a are constants). We prove continuity of the flows and upper semicontinuity of the family of global attractors $\{\mathcal{A}_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ as s goes to infinity for the problem (1).

2 Application: A Takeuchi-Yamada type equation with variable exponents

In [2], Chafee and Infante considered the equation

$$(P1)\; u_t = \lambda u_{xx} + u - u^3,$$

and Takeuchi and Yamada considered in [6] the following more general equation involving the p-Laplacian operator

$$(P2)\; u_t = \lambda(|u_x|^{p-2}u_x)_x + |u|^{q-2}u(1-|u|^r),$$

where $p > 2,\ q \geq 2,\ r > 0$ and $\lambda > 0$ are constants. Note that taking $p = q = r = 2$, problem $(P2)$ becomes problem $(P1)$. The authors in [1] proved the continuity of the flows and upper semicontinuity of a family of global attractors for the problem $(P2)$ when $p = q$ and $p \to 2$.

In this section we consider the following problem

$$u_t = \lambda \mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + |u|^{q-2}u(1 - |u|^{r(x)}),$$

with $q \equiv 2$ and $r(x) := p(x) - 2 > 0$, i.e., we consider the problem

$$(P3)\ u_t = \lambda \mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + u(1 - |u|^{p(x)-2}),$$

where $p(\cdot) \in C^1(\bar{\Omega})$, $p^- := \inf p(x) \geq p > 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded smooth domain $(n \geq 1)$. We prove the continuity of solutions with respect to initial conditions and exponent parameters and we prove upper semicontinuity of a family of global attractors for the problem $(P3)$. The study of continuity properties with respect to initial conditions and exponent parameters for the problem $u_t = \lambda(|u_x|^{p(x)-2}u_x)_x + u$ were already contemplated in the papers [3, 4].

Note that the problem

$$\begin{cases} u_t = \lambda \mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + u(1 - |u|^{p(x)-2}), & t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

can be seen as

$$\begin{cases} u_t - \lambda \mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + |u|^{p(x)-2}u = u, & t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2}$$

and $\tilde{B}(u) := u$ is a globally Lipschitz map. So, all the abstract results developed for an abstract globally Lipschitz external forcing term also apply to the problem (2).

Remark 1. *The results presented here, and their proofs, can be found in [5].*

Remark 2. *The bifurcation studies of solutions to problem (2) with respect to the parameter λ is an open problem.*

Acknowledgements: This work was partially supported by the Brazilian research agency FAPEMIG grant CEX-APQ-04098-10.

References

[1] S.M. Bruschi, C.B. Gentile, M.R.T. Primo, Continuity properties on p for $p-$Laplacian parabolic problems, Nonlinear Anal. 72 (2010) 1580-1588.

[2] N. Chafee, E.F. Infante, A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equation of parabolic type, Appl. Anal. 4 (1974) 17-37.

[3] J. Simsen, M.S. Simsen, PDE and ODE limit problems for $p(x)$-Laplacian parabolic equations, J. Math. Anal. Appl. 383 (2011) 71–81.

[4] J. Simsen, M.S. Simsen, M.R.T. Primo, Continuity of the flows and upper semicontinuity of global attractors for $p_s(x)$-Laplacian parabolic problems, J. Math. Anal. Appl. 398 (2013) 138–150.

[5] J. Simsen, M.S. Simsen, M.R.T. Primo, A Takeuchi-Yamada type equation with variable exponents: Continuity of the flows and upper semicontinuity of global attractors, submitted for publication.

[6] S. Takeuchi, Y. Yamada, Asymptotic properties of a reaction-diffusion equation with degenerate $p-$Laplacian, Nonlinear Anal. 42 (2000) 41-61.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *109–110*

EXISTENCE RESULTS FOR FRACTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIAL INCLUSIONS WITH STATE-DEPENDENT DELAY

GIOVANA SIRACUSA[1,†], HERNÁN R. HENRíQUEZ[2,‡] & CLAUDIO CUEVAS[3,§]

[1]DMA, UFS, SE, Brasil, [2]DMA, USACH,Santiago, Chile, [3]DMAT, UFPE, PE, Brasil.

[†]gisiracusa@gmail.com, [‡]hernan.henriquez@usach.cl, [§]cch@dmat.ufpe.br

Abstract

In this paper we are concerned with a class of abstract fractional integro-differential inclusions with state-dependent and infinite delay. Our approach is based on the existence of a resolvent operator for the homogeneous equation. We establish the existence of mild solutions using both contractive and condensing maps. Finally, an application to the theory of diffusion problems in materials with memory is given.

1 Introduction

Several problems in ordinary differential equations and partial differential equations leads to the concept of differential inclusion. Differential inclusion is a concept that generalizes the concept of differential equation and is more suitable for studying existence and qualitative properties of solutions of differential equations with discontinuous forcing functions, existence of solutions for models of control systems, perturbed systems, stochastic models and generally, multi-valued dynamical systems. The nice monograph of Smirnov [1] contains an excellent overview of the theory. Indeed, differential inclusions also serve to properly describe other models in which arise the same type of difficulties as mentioned above in relation with differential equations. In particular, our aim in this paper is to to establish the existence of mild solutions for the integro-differential inclusion

$$u'(t) \in \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Au(s)ds + f(t, u_{\rho(t,u_t)}),\ t \in [0,T], \tag{1}$$

$$u_0 = \varphi \in \mathcal{B} \tag{2}$$

As a model we consider a diffusion problem with memory. To simplify the exposition, we assume that the system is located in $[0,\pi]$ and is described by

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(t,\xi)}{\partial t} &\in \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{\partial^2 w(s,\xi)}{\partial \xi^2} ds \\ &\quad + m(t) \int_{-\infty}^0 \int_0^\pi a(w_{\rho(t,w_t)}(\theta,\eta))h(\xi-\eta)d\eta d\theta + C,\ t \in [0,T],\ \xi \in [0,\pi], \end{aligned} \tag{3}$$

$$w(t,0) = w(t,\pi) = 0, \tag{4}$$

$$w(\theta,\xi) = \varphi(\theta,\xi),\ \theta \le 0,\ 0 \le \xi \le \pi, \tag{5}$$

where $1 < \alpha < 2$, $m : [0,T] \to \mathbb{R}$, $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, $\varphi : (-\infty,0] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$ are functions, and C is a set of functions from $[0,\pi]$ into $\mathbb{R}$ which will be an appropriately set.

2 Main Results

We establish some results of the existence of mild solutions of problem (1)-(2). Initially we will establish the general framework of conditions under which we will study this problem. Throughout this section, χ denotes the Hausdorff measure of noncompactness in X. We assume that $\varphi \in \mathcal{B}$. We denote $C_\varphi(J,X) = \{x \in C(J,X) : x(0) = \varphi(0)\}$. Furthermore, in what follows we assume that f is a multi-valued map from $J \times \mathcal{B}$ into $\mathcal{K}v(X)$ that satisfies the following properties:

(f1) The function $f(\cdot,\psi) : [0,T] \to \mathcal{K}v(X)$ admits a strongly measurable selection for each $\psi \in \mathcal{B}$.

(f2) For each $t \in [0,T]$, the function $f(t,\cdot) : \mathcal{B} \to \mathcal{K}v(X)$ is u.s.c.

(f3) There exists a function $\mu \in L^1([0,T])$ and a continuous non-decreasing function $\Omega : [0,T] \to [0,\infty]$ such that

$$\|f(t,\psi)\| := \sup\{\|v\| : v \in f(t,\psi)\} \le \mu(t)\Omega(\|\psi\|_{\mathcal{B}}),\ a.e.\ t \in [0,T],$$

for all $\psi \in \mathcal{B}$.

Furthermore, we assume that $\rho : [0,T] \times \mathcal{B} \to [0,\infty)$ is a continuous function such that $\rho(t,\psi) \le t$ for all $t \ge 0$ and $\psi \in \mathcal{B}$.

Definition 2.1. *A function $x : (-\infty,T] \to X$ is said to be a mild solution of (1)-(2) if condition (2) is satisfied, the restriction of x to $[0,b]$ is continuous, and the integral equation*

$$x(t) = S_\alpha(t)\varphi(0) + \int_0^t S_\alpha(t-s)u(s)ds$$

is verified for $u \in \mathcal{F}_{f,\rho,x} = \mathcal{F}_{f,\rho,x} = \{u \in L^1([0,T];X) : u(t) \in f(t, x_{\rho(t,x_t)}),\ t \in J\}$ and all $t \in [0,T]$.

Theorem 2.1. *Assume that conditions (f1)-(f3) are fulfilled. In addition suppose that the following conditions hold:*

(H1) *There is a constant $L_1 > 0$ such that*

$$d_H(f(t,\psi_1), f(t,\psi_2)) \le L_1\|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}},$$

for all $t \in [0,T]$ and all $\psi_1,\psi_2 \in \mathcal{B}$.

(H2) *There exists a positive function $m \in L^1([0,T])$ and for every $r > 0$ there is a constant $L_2(r) > 0$ such that*

$$d_H(f(t,x_{t_2}), f(t,x_{t_1})) \le L_2(r)m(t)|t_2 - t_1|,$$

for all $t_1,t_2 \in [0,T]$ and all function $x : (-\infty,T] \to X$ such that $x_0 \in \mathcal{B}$, $x : [0,T] \to X$ is continuous, and $\max_{0\le t\le T}\|x_t\|_{\mathcal{B}} \le r$.

(H3) *There is a constant $L_\rho > 0$ such that*

$$|\rho(t,\psi_1) - \rho(t,\psi_2)| \le L_\rho\|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}},\ \psi_1,\psi_2 \in \mathcal{B}.$$

If there exists $R > 0$ such that

$$(\widehat{K}\widetilde{M}_1 H + \widehat{M})\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + \widehat{K}\widetilde{M}_1\Omega(R)\int_0^T \mu(s)ds \le R, \tag{1}$$

and

$$\widetilde{M}_1\widehat{K}\int_0^T (L_1 + L_2(R)L_\rho m(s))ds < 1, \tag{2}$$

then there exists a mild solution of problem (1)-(2).

References

[1] SMIRNOV, G.V., *Introduction to the Theory of Differential Inclusions*, Amer. Math. Soc., Providence, 2002.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *111–112*

PERIODIC AVERAGING THEOREM FOR MEASURE NEUTRAL FDE'S

PATRICIA H. TACURI[1,†] & JAQUELINE G. MESQUITA[2,‡]

[1]Faculdade de Ciências e Tecnologia, UNESP-Presidente Prudente, SP, Brasil, [2]Faculdade de Filosofia Ciências e Letras, USP-Ribeirão Preto, SP, Brasil.

[†]ptacuri@fct.unesp.br, [‡]jgmesquita@ffclrp.usp.br

Abstract

In this work we prove a periodic averaging theorem for generalized ordinary differential equations and show that the averaging theorem for measure neutral funsctional differential equations follow easily from this general theorem.

1 Introduction

Classical averaging theorems for ordinary differential equations are concerned with the initial-value problem

$$x'(t) = \varepsilon f(t, x(t)) + \varepsilon^2 g(t, x(t), \varepsilon), \;\; x(t_0) = x_0,$$

where $\varepsilon > 0$ is a small parameter. Assume that f is T-periodic in the first argument. Then, according to the periodic averaging theorem, we can obtain a good approximation of this initial-value problem by neglecting the ε^2-term and taking the average of f with respect to t. In other words, we consider the autonomous differential equation

$$y'(t) = \varepsilon f_0(y(t)), \;\; y(t_0) = x_0,$$

where

$$f_0(y) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t, y)\,\mathrm{d}t.$$

In [2] Mesquita and Slavik show a periodic averaging theorem for a large class of retarded equations since they derive a periodic averaging theorem for generalized ordinary differential equations, which were introduced by Jaroslav Kurzweil in 1957 (see [1]).

In this work, we prove a periodic averaging theorem for the following class of measure neutral functional differential equations given by:

$$\begin{cases} N(t)y_t = N(t)y_{t_0} + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f\,(y_s, s)\,\mathrm{d}h(s) \\ y_{t_0} = \phi, \end{cases}$$

where $N(t)$ is a linear non-autonomous operator, defined by

$$N(t)\phi = \phi(0) - \int_{-r}^{0} \mathrm{d}_\theta[\eta(t, \theta)]\phi(\theta) \tag{1}$$

Let us assume that the kernel $\eta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, satisfies the following conditions:

1. Measurable with respect to both variables

2. Normalized and satisfies

$$\eta(t,\theta)=\begin{cases}0, & \theta\geq 0,\\ \eta(t,-r), & \theta\leq -r.\end{cases}$$

3. Left-continuous with respect to second variable on $(-r,0)$, has bounded variation in θ on $[-r,0]$ uniformly in t, $t\mapsto N(t)\phi$ is continuous for each ϕ. There exists a continuous, nonnegative, nondecreasing function $\gamma(s)$ for s in $[0,r]$ such that $\gamma(0)=0$, $|\int_{-s}^{0} d_\theta[\eta(t,\theta)]\varphi(\theta)|\leq\gamma(s)\|\varphi\|$.

2 Main Results

Theorem 2.1. *Let $\varepsilon_0>0$, $L>0$, $X\subset\mathbb{G}([-r,0],\mathbb{R}^n)$, $\tilde{X}=\{x:[-r,\infty)\to\mathbb{R}^n;\ x_t\in X \text{ for every } t\geq 0\}$. Consider a pair of bounded functions $f:X\times[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$, $g:X\times[0,\infty)\times(0,\varepsilon_0]\to\mathbb{R}^n$ and a nondecreasing function $h:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ such that the following conditions are satisfied:*

1. *For every $x\in\tilde{X}$ and $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, the functions $t\mapsto f(x_t,t)$ and $t\mapsto g(x_t,t,\varepsilon)$ are regulated on $[0,\infty)$.*
2. *f is T-periodic in the second variable.*
3. *There is a constant $\alpha>0$ such that $h(t+T)-h(t-r)=\alpha$ for every $t\geq r$.*
4. *There is a constant $C>0$ such that for $x,y\in X$ and $t\in[0,\infty)$,*

$$\|f(x,t)-f(y,t)\|\leq C\,\|x-y\|_\infty .$$

5. *There exists a Lebesgue integrable function $C:[t_0,t_0+\sigma]\to\mathbb{R}$ such that for every $s_1,s_2\in[t_0,t_0+\sigma]$ and $z\in O$*

$$\left|\int_{-r}^{0}\mathrm{d}_\theta\mu(s_2,\theta)z(s_2+\theta)-\int_{-r}^{0}\mathrm{d}_\theta\mu(s_1,\theta)z(s_1+\theta)\right|\leq\int_{s_1}^{s_2}C(s)\int_{-r}^{0}\mathrm{d}_\theta\mu(s,\theta)\|z(s+\theta)\|\mathrm{d}s,$$

Define

$$f_0(x)=\frac{1}{h(T)-h(0)}\int_0^T f(x,s)\,\mathrm{d}h(s),\quad x\in X;\qquad \eta_0(\theta)=\frac{\eta(t+T,\theta)-\eta(t,\theta)}{T}.$$

Let $\phi\in X$. Suppose that for every $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, the initial-value problems

$$y(t)=y(0)+\varepsilon\int_0^t f(y_s,s)\,\mathrm{d}h(s)+\varepsilon^2\int_0^t g(y_s,s,\varepsilon)\,\mathrm{d}h(s)+\varepsilon\int_{-r}^0 d_\theta[\eta(t,\theta)]y(t+\theta)-\varepsilon\int_{-r}^0 d_\theta[\eta(0,\theta)]\varphi(\theta),$$

$y_0=\phi,$

$$x(t)=x(0)+\varepsilon\int_0^t f_0(x_s)\,\mathrm{d}h(s)+\varepsilon\int_{-r}^0 d_\theta[\eta_0(\theta)]x(\theta),\quad x_0=\phi$$

have solutions x^ε, $y^\varepsilon:\left[0,\frac{L}{\varepsilon}\right]\to\mathbb{R}^n$. Then there exists a constant $J>0$ such that

$$\|x^\varepsilon(t)-y^\varepsilon(t)\|\leq J\varepsilon$$

for every $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ and $t\in[0,\frac{L}{\varepsilon}]$.

References

[1] KURZWEIL, J. - Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter, *Czech. Math. J.*, **7**(82), 418–449, 1957.

[2] MESQUITA, J.G. AND SLAVÍK, A. - Periodic averaging theorems for various types of equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **387**(2), 862-877, 2012.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *113–114*

OPTIMAL CONTROL OF A MATHEMATICAL MODEL FOR RADIOTHERAPY OF GLIOMAS: A TWO-EQUATION SYSTEM

ENRIQUE FERNÁNDEZ-CARA[1,2,†], LAURENT PROUVÉE[3,4,‡] & JUAN LÍMACO[5]

[1]Dpto. EDAN, Universidad de Sevilla, Sevilla, Spain, [2]Partially supported by grant MTM2010-15592, DGI-MICINN, Spain, [3]IME, UERJ, RJ, Brazil, [4]Partially supported by CAPES, BEX 7446/13-6, MEC, Brasil, [5]IME, Universidade Federal Fluminense, RJ, Brazil.

[†]cara@us.es, [‡]laurent.prouvee@ime.uerj.br, [§]jlimaco@vm.uff.br

Abstract

This paper deals with the optimal control of a mathematical model of low-grade glioma progression incorporating the basic facts of the evolution of this type of primary brain tumor. We will consider a model for the two compartments of tumor cells of the Fischer-Kolmogorov kind, using ideas from Galochkina, Bratus and Pérez-García in [2] and Pérez-García in [3]; in a previous paper, we considered a very similar model where tumoral cells of only one kind appeared. The control is the $2n$-tuple $(t_1, \ldots, t_n; d_1, \ldots, d_n)$, where t_i is the i-th administration time and d_i is the i-th applied radiotherapy dose. We look for controls that maximizes, over the class of admissible controls, the first time at which the tumor mass reaches a critical value M_*.

1 Introduction

The most frequent type of primary brain tumor is the glioma. At present, it is a major challenge for medicine, since known therapies cannot erradicate them and patients diagnosed with gliomas typically die because of the complications related to tumor evolution. Radiation therapy (RT) is one of the main techniques used to treat malignant gliomas.

In order to capture in a minimal way the response of the tumor to radiation it is necessary to work with a model that classifies tumor cells into two generic compartments: the first one $u = u(x, t)$ is the density of functionally alive tumor cells; the second one $v = v(x, t)$ represents the density of tumor cells that, after the action of radiation, are not able to repair the DNA damage and thus will die after some average mitosis cycles k. To do so, we based our work on an article from Galochkina, Bratus and Pérez-García in [2] and Pérez-García in [3] .

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ be a bounded open connected set ($N = 1$, 2 or 3) and let us fix the number of radiotherapy doses (n), the specific irradiation times t_j with $0 \le t_1 \le \ldots \le t_n \le \widetilde{T} < +\infty$, the doses $d_j \in L^2(\Omega)$ and the initial cell density c_0, with $c_0 \in L^\infty(\Omega)$, $0 \le c_0 \le m < 1$ a.e. and $c_0 \not\equiv 0$.

In each stage of the treatment, let the j-th cell densities $u_j = u_j(x, t)$ and $v_j = v_j(x, t)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, be the solutions of

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_{j,t} & = & D\Delta u_j + \rho(1-(u_j+v_j))u_j, & \text{in } Q_j := \Omega \times (t_j, t_{j+1}), \\ v_{j,t} & = & D\Delta v_j - \dfrac{\rho}{k}(1-(u_j+v_j))u_j, & \text{in } Q_j := \Omega \times (t_j, t_{j+1}), \\ \dfrac{\partial u_j}{\partial \eta} = \dfrac{\partial v_j}{\partial \eta} & = & 0, & \text{on } \partial\Omega \times (t_j, t_{j+1}), \end{array}\right. \tag{1}$$

with initial conditions

$$u_j(x,t_j) = \left\{\begin{array}{ll} c_0(x), & \text{if } j = 0, \\ S(d_j(x))u_{j-1}(x,t_j), & \text{if } j \neq 0, \end{array}\right. \quad \text{and} \quad v_j(x,t_j) = \left\{\begin{array}{ll} 0, & \text{if } j = 0, \\ v_{j-1}(x,t_j) + (1 - S(d_j(x)))u_{j-1}(x,t_j), & \text{if } j \neq 0, \end{array}\right.$$

with the convention that $t_0 = 0$ and $t_{n+1} = +\infty$ and the *survival fraction* given by $S(d_j) = e^{-\alpha_t d_j - \beta_t d_j^2}$. The positive constant D is the diffusion coefficient accounting for cellular motility, ρ is the proliferation rate.

From the (u_j, v_j), we can now define the global in time tumor cell concentrations $u = u(x,t)$ and $v = v(x,t)$, with

$$\begin{cases} u(x,t) := u_j(x,t) & \text{for } t \in [t_j, t_{j+1}),\ 0 \le j \le n, \\ v(x,t) := v_j(x,t) & \text{for } t \in [t_j, t_{j+1}),\ 0 \le j \le n, \end{cases} \tag{2}$$

Then, the optimization problem consists of finding specific irradiation times t_j and doses d_j such that the overall survival time $T_*(t_1, \ldots, t_n; d_1, \ldots, d_n)$ is maximum. By definition, $T_*(t_1, \ldots, t_n; d_1, \ldots, d_n)$ is the smallest time for which the total tumor mass

$$M(t) := \int_\Omega u(x,t) + v(x,t)\ dx, \tag{3}$$

reaches the critical value M_*. In other words, we want to maximize the pay-off function

$$T_*(t_1, \ldots, t_n; d_1, \ldots, d_n) := \inf \left\{ T \in \mathbb{R}_+ : \int_\Omega u(x,T) + v(x,T)\ dx \ge M_* \right\} \tag{4}$$

subject to the constraint $(t_1, \ldots, t_n; d_1, \ldots, d_n) \in \mathcal{U}_{ad}$, where the set of *admissible controls* $\mathcal{U}_{ad}$ is given by

$$\mathcal{U}_{ad} := \left\{ (t_1, \ldots, t_n, d_1, \ldots, d_n) \in \mathcal{U} :\ 0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n \le \widetilde{T},\ 0 \le d_j \le d_* \text{ a.e.},\ \alpha_h \left(\sum_{j=1}^n d_j + \frac{1}{\alpha_h/\beta_h} \sum_{j=1}^n d_j^2 \right) \le E_* \text{ a.e.} \right\} \tag{5}$$

with $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n \times L^2(\Omega)^n$. The coefficients α_h, β_h are the parameters of the normal tissue and E_* is the main limitation for the damage to normal tissues.

2 Main Result - Existence of an Optimal Control

Theorem 2.1. *Let us assume that* $0 < M_* < |\Omega|$. *Then, there exists at least one solution to the optimal control problem*

$$\begin{cases} \textit{Maximize } T_*(w) \\ \textit{subject to } w \in \mathcal{U}_{ad}. \end{cases} \tag{6}$$

This is equivalent to minimize the functional $J : \mathcal{U}_{ad} \mapsto \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, with

$$J(w) := \sup \left\{ -T : T \in \mathbb{R}_+ : \int_\Omega u(x,T) + v(x,T)\ dx \ge M_* \right\}, \forall w \in \mathcal{U}_{ad}. \tag{7}$$

From well known results from *Calculus of Variations*, we observe that the existence of a minimum of J in $\mathcal{U}_{ad}$ will be ensured if we prove the following: J is well-defined; $\mathcal{U}_{ad}$ is non-empty, bounded, convex and closed in $\mathcal{U}$; J is lower semi-continuous (l.s.c.) for the weak convergence in $\mathcal{U}$.

References

[1] FERNÁNDEZ-CARA, E., AND PROUVÉE, L., - *Optimal control of mathematical models for the radiotherapy of gliomas: a scalar case* (preprint).

[2] GALOCHKINA T., BRATUS A., PÉREZ-GARCÍA V. M., - *Optimal radiation fractionation for low-grade gliomas: Insights from a mathematical model*, Mathematics of Biosciences (2015).

[3] PÉREZ-GARCÍA V. M. - *Mathematical Models for the Radiotherapy of Gliomas* (preprint)

[4] PROUVÉE, L., - *Optimal control of mathematical models for the radiotherapy of gliomas*, PhD Thesis, 2015.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *115–116*

UNIFORM STABILIZATION OF WAVE EQUATIONS WITH LOCALIZED DAMPING AND ACOUSTIC BOUNDARY CONDITIONS

ANDRÉ VICENTE[1,†] & CÍCERO LOPES FROTA[2,‡]

[1]CCET, UNIOESTE, PR, Brazil, [2]DMA, UEM, PR, Brazil.

[†]andre.vicente@unioeste.br, [‡]clfrota@uem.br

Abstract

In this paper we deal with the uniform stabilization of the nonlinear wave equation with acoustic boundary conditions to non-locally reacting boundary. Using the techniques of [3] we prove a stability result when the damping acts on a domain portion.

1 Introduction

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an open, bounded and connected set with smooth boundary Γ, $n \geq 2$. Let Γ_0 and Γ_1 be closed and disjoint subsets of Γ with positive measure such that $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. This work is devoted to the study of the uniform stabilization of solutions of the following nonlinear problem:

$$u'' - \Delta u + a(x)g_1(u') = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty); \tag{1}$$

$$u = 0 \quad \text{on } \Gamma_0 \times (0, \infty); \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \delta' \quad \text{on } \Gamma_1 \times (0, \infty); \tag{3}$$

$$m\delta'' - c^2 \Delta_\Gamma \delta + g_2(\delta') + r\delta = -\rho_0 u' \ \text{ on } \Gamma_1 \times (0, \infty); \tag{4}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \ u'(x, 0) = u_1(x) \quad \text{for } x \in \Omega; \tag{5}$$

$$\delta(x, 0) = \delta_0(x) \quad \text{for } x \in \Gamma_1, \tag{6}$$

$$\delta'(x, 0) = \frac{\partial u_0}{\partial \nu}(x), \ \text{ for } x \in \Gamma_1, \tag{7}$$

where $' = \dfrac{\partial}{\partial t}$; $\Delta = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ and Δ_Γ are the Laplace and the Laplace-Beltrami operators, respectively; ν is the outward normal unit vector on Γ_1; $r : \overline{\Gamma_1} \to \mathbb{R}$ is a non negative continuous function; $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u_0, u_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ and $\delta_0 : \Gamma_1 \to \mathbb{R}$ are given functions; m, c and ρ_0 are positive constants; and $a : \Omega \to \mathbb{R}$ (the action function) is such that $a(x) \geq a_0 > 0$ over $\omega \subset \Omega$, where ω is a neighborhood of a boundary portion.

When the equation (1) has no dissipative term ($a \equiv 0$), $c = 0$ and $g_2(x) = dx$, for $x \in \Gamma_1$ and $d > 0$ constant, Beale [1] proved that there is no uniform rate of decay for the associated energy. Therefore three ways have been considered to ensure stability results: *a) Negligible boundary structure mass ($m = 0$)*; this technique was initially used by Frota, Cousin and Larkin [5] where the authors proved a stabilization result, when $m = 0$ in (4) and no internal or boundary damping term involving the function u were added. Many authors have used this technique, specially when memory terms are introduced. See also Graber [7] where the study involving the relations between negligible/non-negligible boundary structure mass was made. *b) Damping terms in the impenetrability condition*; dissipative boundary terms have been used to solve problems involving wave equations with Neumann boundary conditions, see, for example, [9, 10]. The strategy consists in to introduce to the equation (3) an appropriate (dissipative) term involving the trace of the function u', see [7, 8, 12]. *c) Damping acting in the whole domain*; this consists in putting damping terms in the wave equation which are effective in all domain Ω, as [6, 11]. In [6] the authors studied the problem with a general nonlinear internal damping. This internal damping was weaken in [11], but an assumption involving the size of initial data was necessary. Dynamic boundary conditions were also discussed in [4] and references therein.

The main purpose of this work is to introduce a fourth way to get stabilization for this class of problem, which is between the extremal cases of Beale (without internal damping term) and (c) cases (damping acting in the whole domain). Precisely, we show that it is possible to get uniform decay rates to the energy of the non linear problem (1)–(7), when the internal damping acts *only on a subset of the domain (localized damping)*. To the best of our knowledge, in all papers considering wave equations with acoustic boundary conditions the damping terms are effective in the whole domain. Therefore, the goal of this work is weaken the damping effect involving the function u, i.e., we prove an uniform stabilization result when the damping acts only on a small region near a portion of the boundary. The tool we use here was introduced in [3] where the authors considered the multipliers techniques combined with Lasiecka and Tataru's techniques [10] to prove a stabilization result to a nonlinear wave equation. This technique allows us to consider domains with no geometric restriction on the sets Γ_1 (dissipative boundary portion) and Γ_0 (the non controlled boundary portion).

References

[1] BEALE, J.T. - Spectral properties of an acoustic boundary condition. *Indiana Univ. Math. J.*, **25**, 895-917, 1976.

[2] BEALE, J.T. AND ROSENCRANS, S. I. - Acoustic boundary conditions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **80**, 1276-1278, 1974.

[3] CAVALCANTI, M.M., DOMINGOS CAVALCANTI, V. N., FUKUOKA, R. AND TOUNDYKOV, D. - Stabilization of the damped wave equation with Cauchy Ventcel boundary conditions. *J. Evol. Equ.*, **9** 143-169, 2009.

[4] COCLITE, G. M., GOLDSTEIN, G. R. AND GOLDSTEIN, J. A. - Stability of parabolic problems with nonlinear Wentzell boundary conditions. *J. Differential Equations*, **246**, 2434-2447, 2009.

[5] FROTA, C. L., COUSIN, A. T. AND LARKIN, N.A. - On a system of Klein-Gordon type equations with acoustic boundary conditions. *J. Math. Anal. Appl.*, **293**, 293-309, 2004.

[6] FROTA, C. L., MEDEIROS, L. A. AND VICENTE, A. - Wave equation in domains with non-locally reacting boundary. *Differential and Integral Equations*, **24**, 1001-1020, 2011.

[7] GRABER, P. J. - Uniform boundary stabilization of a wave equation with nonlinear acoustic boundary conditions and nonlinear boundary damping. *J. Evol. Equ.*, **12**, 141-164, 2012.

[8] GRABER, P. J. AND SAID-HOUARI, B. - On the wave equation with semilinear porous acoustic boundary conditions. *J. Differential Equations*, **252**, 4898-4941, 2012.

[9] KOMORNIK, V. AND ZUAZUA, E. - A direct method for the boundary stabilization of the wave equation. *J. Math. pures et appl.*, **69**, 33-54, 1990.

[10] LASIECKA, I. AND TATARU, D. - Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping. *Differential and Integral Equations*, **6**, 507-533, 1993.

[11] VICENTE, A. AND FROTA, C. L. - Nonlinear wave equation with weak dissipative term in domains with non-locally reacting boundary. *Wave Motion*, **50**, 162-169, 2013.

[12] WU, J. - Uniform energy decay of a variable coefficient wave equation with nonlinear acoustic boundary conditions. *J. Math. Anal. Appl.*, **399**, 369-377, 2013.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *117–118*

HIPER-IDEAIS E O MÉTODO DA LIMITAÇÃO

GERALDO BOTELHO[1,†] & EWERTON R. TORRES[1,‡]

[1]Faculdade de Matemática, UFU, MG, Brasil.

[†]botelho@ufu.br, [‡]ewertonrtorres@gmail.com

Resumo

Neste texto propomos um método para gerar hiper-ideais de aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach a partir de um ideal de operadores lineares. Tal método se baseia em uma inclusão apresentada por Stephani [6] e é fortemente inspirado no seu correspondente polinomial, introduzido por Aron e Rueda em [1].

1 Introdução

Primeiramente recordamos a definição de hiper-ideais de aplicações multilineares, apresentada em [2], conceito central desse trabalho e cuja proposta é motivada na tentativa de generalizar o famoso conceito de ideal de aplicações multilineares, ou multi-ideais, introduzido por Pietsch em [4].

Definição 1.1. Um *hiper-ideal de aplicações multilineares*, ou simplesmente *hiper-ideal*, é uma subclasse $\mathcal{H}$ da classe das aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach tal que, para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e espaços de Banach $E_1, \ldots, E_n, F$, as componentes $\mathcal{H}(E_1, \ldots, E_n; F) := \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F) \cap \mathcal{H}$ satisfazem as seguintes condições:

(1) $\mathcal{H}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ que contém as aplicações n-lineares de tipo finito;

(2) Propriedade de hiper-ideal: Dados números naturais n e $1 \leq m_1 < \cdots < m_n$, espaços de Banach $G_1, \ldots, G_{m_n}$, $E_1, \ldots, E_n$, F e H, se $B_1 \in \mathcal{L}(G_1, \ldots, G_{m_1}; E_1), \ldots, B_n \in \mathcal{L}(G_{m_{n-1}+1}, \ldots, G_{m_n}; E_n)$, $t \in \mathcal{L}(F; H)$ e $A \in \mathcal{H}(E_1, \ldots, E_n; F)$, então a composta $t \circ A \circ (B_1, \ldots, B_n)$ pertence a $\mathcal{H}(G_1, \ldots, G_{m_n}; H)$.

Se existem $p \in (0, 1]$ e uma função $\| \cdot \|_{\mathcal{H}} \colon \mathcal{H} \longrightarrow [0, \infty)$ tais que:

(a) A função $\| \cdot \|_{\mathcal{H}}$ restrita a toda componente $\mathcal{H}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é uma p-norma;

(b) A aplicação n-linear $I_n \colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$, dada por $I_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$, é tal que $\|I_n\|_{\mathcal{H}} = 1$;

(c) Se $A \in \mathcal{H}(E_1, \ldots, E_n; F)$, $t \in \mathcal{L}(F; H)$, $B_1 \in \mathcal{L}(G_1, \ldots, G_{m_1}; E_1), \ldots, B_n \in \mathcal{L}(G_{m_{n-1}+1}, \ldots, G_{m_n}; E_n)$, então

$$\|t \circ A \circ (B_1, \ldots, B_n)\|_{\mathcal{H}} \leq \|t\| \cdot \|A\|_{\mathcal{H}} \cdot \|B_1\| \cdots \|B_n\|,$$

então $(\mathcal{H}; \| \cdot \|_{\mathcal{H}})$ é um *hiper-ideal p-normado*. Mais ainda, se todas as componentes $\mathcal{H}(E_1, \ldots, E_n; F)$ são espaços completos relativamente à topologia gerada por $\| \cdot \|_{\mathcal{H}}$, dizemos que $(\mathcal{H}; \| \cdot \|_{\mathcal{H}})$ é um *hiper-ideal p-Banach*. Se $p = 1$ dizemos simplesmente que $(\mathcal{H}; \| \cdot \|_{\mathcal{H}})$ é um *hiper-ideal normado* (*Banach*, respectivamente).

O objetivo deste trabalho é introduzir um método para gerar hiper-ideais.

2 Resultados Principais

O método que introduzimos neste trabalho para gerar hiper-ideais é baseado no conceito de conjuntos $\mathcal{I}$-limitados, onde $\mathcal{I}$ é um ideal de operadores, que foi introduzida por Stephani em [6] e tem sido desenvolvida em vários trabalhos mais recentes, por exemplo [1, 3].

Definição 2.1. Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores. Dizemos que um subconjunto K de um espaço de Banach F é *$\mathcal{I}$-limitado* se existem um espaço de Banach H e um operador $u \in \mathcal{I}(H;F)$ tais que $K \subseteq u(B_H)$. A coleção dos subconjuntos $\mathcal{I}$-limitados de F será denotada por $C_{\mathcal{I}}(F)$.

Em [1], Aron e Rueda utilizaram o conceito de conjunto $\mathcal{I}$-limitado para definir um ideal de polinômios homogêneos. A definição a seguir é uma adaptação da definição de Aron e Rueda para o caso de aplicações multilineares:

Definição 2.2. Seja $\mathcal{I}$ ideal de operadores. Dizemos que uma aplicação multilinear $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é *$\mathcal{I}$-limitada* se $A(B_{E_1} \times \cdots \times B_{E_n})$ é um conjunto $\mathcal{I}$-limitado de F, ou seja, se existem um espaço de Banach H e um operador $u \in \mathcal{I}(H;F)$ tais que

$$A(B_{E_1} \times \cdots \times B_{E_n}) \subseteq u(B_H). \tag{1}$$

Nesse caso escrevemos $A \in \mathcal{L}_{\langle \mathcal{I} \rangle}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Se $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ for uma p-norma do ideal $\mathcal{I}$, definimos ainda a função $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_{\langle \mathcal{I} \rangle}} : \mathcal{L}_{\langle \mathcal{I} \rangle} \longrightarrow [0, \infty)$ por

$$\|A\|_{\mathcal{L}_{\langle \mathcal{I} \rangle}} = \inf\{\|u\|_{\mathcal{I}} : \ u \text{ satisfaz (1)}\}.$$

Teorema 2.1. *Sejam $0 < p \leq 1$ e $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ um ideal de operadores p-normado (p-Banach, respectivamente). Então $(\mathcal{L}_{\langle \mathcal{I} \rangle}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}_{\langle \mathcal{I} \rangle}})$ é um hiper-ideal p-normado (p-Banach, respectivamente).*

Na demonstração do teorema acima usamos o critério da série para hiper-ideais, que pode ser encontrado em [2, Theorem 2.5]. Terminamos o trabalho exibindo alguns exemplos concretos de hiper-ideais que são gerados pelo método que acabamos de descrever:

Exemplo 2.1. Denotemos $\mathcal{K}$ e $\mathcal{W}$ os ideais dos operadores compactos e fracamente compactos, respectivamente. Usando o mesmo argumento de [1, Example 3.1], prova-se que $C_{\mathcal{K}}(E)$ coincide com a classe dos subconjuntos relativamente compactos de E; e que $C_{\mathcal{W}}(E)$ coincide com a classe dos subconjuntos relativamente fracamente compactos de E. Então as classes $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ das aplicações multilineares compactas e $\mathcal{L}_{\mathcal{W}}$ das aplicações multilineares fracamente compactas são hiper-ideais fechados (ou seja, hiper-ideais de Banach com a norma usual do sup).

O método da limitação também gera um hiper-ideal baseado no ideal $\mathcal{K}_p$ dos operadores p-compactos introduzido por Sinha e Karn [5], e que tem sido objeto de muitos trabalhos recentemente:

Exemplo 2.2. A classe $(\mathcal{L}_{\mathcal{K}_p}; \|\cdot\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{K}_p}})$ das aplicações multilineares p-compactas é definida de forma análoga ao que foi feito em [1] para polinômios homogêneos. Para todo $p \geq 1$, $\mathcal{L}_{\mathcal{K}_p} = \mathcal{L}_{\langle \mathcal{K}_p \rangle}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{K}_p}} = \|\cdot\|_{\mathcal{L}_{\langle \mathcal{K}_p \rangle}}$. Pelo Teorema 2.1, $(\mathcal{L}_{\mathcal{K}_p}; \|\cdot\|_{\mathcal{L}_{\mathcal{K}_p}})$ é um hiper-ideal de Banach.

Referências

[1] R. Aron and P. Rueda, *Ideals of homogeneous polynomials*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **46** (2012), 957–969.

[2] G. Botelho and E.R. Torres, *Hyper-ideals of multilinear operators*, Linear Algebra Appl. **482** (2015), 1–20.

[3] M. González and J.M. Gutiérrez, *Surjective factorization of holomorphic mappings*, Comment. Math. Univ. Carolin. **41** (2000), 469–476.

[4] A. Pietsch, *Ideals of multilinear functionals*, Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and Their Applications in Theoretical Physics, Leipzig Teubner Texte Math. **62** (1983), 185–199.

[5] D.P. Sinha and A.K. Karn, *Compact operators whose adjoints factor through subspaces of ℓ_p*, Studia Math. **150** (2002), 17–33.

[6] I. Stephani, *Generating systems of sets and quotients of surjective operator ideals*, Math. Nachr. **99** (1980), 13–27.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *119–120*

ENVELOPES DE AB-HOLOMORFIA EM ESPAÇOS DE BANACH

DANIELA M. VIEIRA[1,2,†], DANIEL CARANDO[3,‡] & SANTIAGO MURO[3,§]

[1]Instituto de Matemática e Estatística, USP, SP, Brasil, [2]FAPESP, Proc. 2014/07373-0,
[3]Universidad de Buenos Aires, Argentina.

[†]danim@ime.usp.br, [‡]dcarando@dm.uba.ar, [§]smuro@dm.uba.ar

Resumo

Falaremos sobre envelopes de AB-holomorfia, um conceito que relaciona envelopes de holomorfia com as extensões de Aron-Berner, no contexto de domínios de Riemann. Nos dedicamos às funções holomorfas de tipo limitado, e caracterizamos o AB-H_b-envelope de um aberto equilibrado de um espaço de Banach simetricamente regular. Estudamos quando as extensões ao AB-H_b-envelope são de tipo limitado.

1 Introdução

Em 1978, R. Aron e P. Berner [1] mostraram que toda função $f \in H_b(E)$ pode ser estendida a uma função $AB(f) \in H_b(E'')$, no seguinte sentido: $AB(f)(J_E(x)) = f(x)$, para todo $x \in E$, sendo J_E a inclusão canônica de E em E''. Este resultado foi melhorado em [4] para bolas e em [6] para abertos absolutamente convexos. Tais resultados podem ser relacionados com o conceito de H_b-*envelope de holomorfia*, que pode ser entendido como o maior *domínio* no qual as funções de $H_b(U)$ admitem extensões holomorfas. Quando E é simetricamente regular, o espectro $M_b(U)$ pode ser munido de uma estrutura de domínio de Riemann sobre E'', baseada na extensão de Aron-Berner, ver [2].

Neste trabalho, utilizamos o modelo sobre E'' considerado em [2] e em também em [5]. Apresentamos uma definição de AB-envelope de holomorfia, que relaciona o conceito já conhecido de envelope de holomorfia com as extensões de Aron-Berner. Para o caso da álgebra de funções holomorfas de tipo limitado, apresentamos uma relação destes envelopes com seu espectro, e damos uma descrição dos mesmos. Finalizamos investigando quando as extensões ao AB-H_b-envelope são de tipo limitado.

Este é um trabalho em conjunto com D. Carando e S. Muro, ambos da Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina. Este trabalho obteve financiamento da FAPESP, Proc. 2014/07373-0.

2 Resultados Principais

Definição 2.1. *Sejam E um espaço de Banach, (X,p) e (Y,q) domínios de Riemann sobre E e E'', respectivamente. Um AB-**morfismo** é uma aplicação contínua $\tau : X \to Y$ que cumpre $J_E(p(x)) = q(\tau(x))$, para todo $x \in X$.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tau} & Y \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ E & \xrightarrow{J_E} & E'' \end{array}$$

Definição 2.2. *Sejam $F \subset H(X)$ e $G \subset H(Y)$. Um AB-morfismo $\tau : X \to Y$ é uma AB-F-G-**extensão de** X se para cada $f \in F$ existe uma única $\tilde{f} \in G$ que cumpre as seguintes condições: (1)$\tilde{f} \circ \tau = f$; **(2)** para cada $x \in X$, $AB\Big(f \circ (p|_{B(x,r)})^{-1}\Big) = \tilde{f} \circ (q|_{B(\tau(x),r)})^{-1}$, para algum $r > 0$.*

Definição 2.3. *Sejam $F \subset H(X)$ e $G \subset H(Y)$. Uma AB-F-G-extensão $\tau : X \to Y$ é um AB-F-G-**envelope de holomorfia de** X se para cada AB-F-G-extensão de X: $\nu : X \to Z$, existir um morfismo:*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "r"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & E'' & \end{tikzcd}$$

tal que $\mu \circ \nu = \tau$.

Adaptando as ideias de [7, Teorema 56.4], mostramos a existência e a unicidade do H_b-envelope definido em 2.3.

O *espectro* de $H_b(X)$ é denotado por $M_b(X)$. As *avaliações em x*, definidas por $\delta_x(f) = f(x)$, para toda $f \in H_b(X)$, são elementos de $M_b(X)$. Quando E é simetricamente regular, $(M_b(X), \pi)$ é um domínio de Riemann sobre E'', sendo $\pi : M_b(X) \to E''$ dada por $\pi(\varphi)(\xi) = \varphi(\xi \circ p)$, para toda $\xi \in E'$, ver [2, 5]. A seguir, mostramos como o AB-H_b-envelope de holomorfia pode ser relacionado com o espectro $M_b(X)$.

Teorema 2.1. *Seja (X, p) um domínio de Riemann conexo sobre um espaço de Banach simetricamente regular E, e seja Y a componente conexa de $M_b(X)$ que intercepta $\delta(X)$. Seja $\delta : (X, p) \to (Y, \pi)$ dada por $\delta(x) = \delta_x$, para todo $x \in X$. Então δ é o AB-H_b-envelope de X.*

Iremos agora nos restringir a subconjuntos abertos em espaços de Banach. Neste caso, descrevemos o AB-H_b-envelope de U.

Definição 2.4. *Sejam E um espaço de Banach, $A \subset E$ limitado e $U \subset E$ aberto. Denotamos: **(1)** $\widehat{A}''_P = \{z'' \in E'' : |AB(P)| \leq \sup |P|_A, \forall P \in P(E)\}$; **(2)** $\widehat{U}''_P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\widehat{U}n\right)''_P$, onde $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência fundamental de U-limitados.*

Teorema 2.2. *Seja U um subconjunto aberto e equilibrado de um espaço de Banach E simetricamente regular. Então $\pi(E_b^{AB}(U)) = \widehat{U}''_P$.*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "i"'] & E_b^{AB}(U) \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[r, "J_E"] & \widehat{U}''_P \end{tikzcd}$$

Finalmente investigamos quando as extensões ao AB-H_b-envelope são de tipo limitado. Seguindo as mesmas ideias de [3, Teorema 2.4], provamos que isto acontece quando U é um subconjunto aberto equilibrado e limitado de um espaço de Banach simetricamente regular.

Referências

[1] ARON, R. M., BERNER, P. - A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings. *Bull. Soc. Math. France*, **106**, 3-24, 1978.

[2] ARON, R. M., GALINDO, P., GARCÍA, D., MAESTRE, M. - Regularity and algebras of analytic functions in infinite dimensions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **348**, 543-559, 1996.

[3] CARANDO, D., MURO, S. - Envelopes of holomorphy and extension of functions of bounded type. *Adv. Math.*, **229**, 2098-2121, 2012.

[4] DAVIE, A. M., GAMELIN, T. W. - A theorem on polynomial-star approximation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **106**, 351-356, 1989.

[5] DINEEN, S., VENKOVA, M. - Extending bounded type holomorphic mappings on a Banach space. *J. Math. Anal. Appl.*, **297**, 645-658, 2004.

[6] GALINDO, P., GARCÍA, D., MAESTRE, M. - Entire funcions of bounded type on Fréchet spaces. *Math. Nachr.*, **161**, 185-198, 1993.

[7] MUJICA, J. - *Complex Analysis in Banach Spaces*, North-Holland Math. Stud. 120, Amsterdam, 1986.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *121–122*

EQUAÇÕES DE SCHRÖDINGER QUASE LINEARES COM CRESCIMENTO SUPERCRÍTICO

GIOVANY M. FIGUEIREDO[1,†], O. H. MIYAGAK[2,‡] & SANDRA IM. MOREIRA[3,§]

[1]Faculdade de Matemática , UFPA, PA, Brasil, [2]Departamento de Matemática, UFJF, MG, Brasil,
[3]Departamento de Matemática e Informática, UEMA, MA, Brasil.

[†]giovany@ufpa.br, [‡]olimpio@ufv.br, [§]ymaculada@gmail.com

Resumo

Neste artigo, vamos provar a existência de solução positiva para uma classe de equações de Schrödinger quase lineares envolvendo crescimento supercrítico. Ao utilizar uma mudança de variáveis, a equação quase linear é reduzida para uma equação semilinear. Em seguida, método variacional é utilizada em conjunto com um argumento de truncamento usado em Del Pino e Felmer [1].

1 Introdução

Recentemente vários matemáticos tem estudado equações do tipo

$$-\Delta u + W(x)u - k\Delta(u^2)u = p(x,u), \tag{1}$$

em $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 3$, $W : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função potencial e $p : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função contínua. As soluções de (1) estão relacionadas com a existência de ondas estacionárias para equações de Schrödinger quase lineares da forma

$$i\partial_t z = -\Delta z + W(x)z - f(|z^2|)z - k\Delta\left[g(|z^2|)\right] g'(|z^2|)z, \tag{2}$$

em que W é um potencial dado, k uma constante real, f, g são funções reais. A fim de buscar solução para a equação (1) dois métodos variacionais vem sendo amplamente usados. O primeiro por meio de argumentos de minimização com vínculos, em [5] e estendidos em [3], os autores provaram a existência de soluções positivas usando um Multiplicador de Lagrange. No segundo método os autores em [4] introduziram uma mudança de variáveis, para transformar o problema quase linear em um semilinear.

2 Resultados Principais

Iremos tratar da existência de solução, para a seguinte classe de problema:

$$-\Delta u - \Delta(u^2)u + V(x)u = p(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad N \geq 3, \tag{3}$$

onde V é uma função contínua que satisfaz as seguintes hipóteses:

(V_1) Existe $W_0 > 0$ e $W \in C^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \cap L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$ tal que $V(x) = V_p(x) - W(x) \geq W_0$, com $W(x) \geq 0$, com a desigualdade estrita em um conjunto de medida positiva e V_p verificando $V_p(x) = V_p(x+y), \forall x \in \mathbb{R}^N,\ y \in \mathbb{Z}^N$.

A função $p \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pode ser escrita $p(s) = f_0(s) + \epsilon g(s)$, em que ϵ é um parâmetro real positivo, f_0 e g são funções localmente Hölder contínuas satisfazendo:

(F_1) $f_0(0) = g(0) = 0$ e $g(s) \geq 0$ para todo $s \neq 0$;

(F_2) $\displaystyle\lim_{|s|\to 0^+} \frac{f_0(s)}{s} = 0$ e $\displaystyle\lim_{|s|\to 0^+} \frac{g(s)}{s} = 0$;

(F_3) Existe $q \in (4, 2(2^*))$ tal que $|f_0(s)| \leq C\,|s|^{q-1}$, para todo $s \in \mathbb{R}$;

(F_4) $\displaystyle\lim_{|s|\to\infty} \frac{F_0(s)}{s^4} = \infty$, onde $F_0(s) = \int_0^s f_0(t)dt$;

(F_5) Existe uma sequência de números reais positivos, (M_n) convergindo para $+\infty$ tal que

$$\frac{g(s)}{s^{q-1}} \leq \frac{g(M_n)}{M_n^{q-1}} \text{ para todo } s \in [0, M_n], \quad n \in \mathbb{N}.$$

(F_6) Para $W_0 > 0$ dado por (V_2) existem $l > 2$ e $\sigma \in (0, (\frac{l}{2} - 1)W_0)$ tal que

$$\frac{1}{2}sf_0(s) - lF_0(s) \geq -\sigma s^2 \text{ e } \frac{1}{2}sg(s) - lG(s) \geq 0 \text{ para todo } s \neq 0$$

onde $G(s) = \int_0^s g(t)dt$;

(F_7) $s \to \dfrac{p(s)}{s^3}$ é crescente.

Para garantir a existência de solução positiva consideramos $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo $(F_1) - (F_7)$ sobre $[0, +\infty)$ e definida como zero sobre $(-\infty, 0]$. Obtendo o seguinte resultado:

Teorema 2.1. *Suponhamos que V e p satisfazem (V_1) e $(F_1) - (F_7)$ respectivamente. Então existe $\epsilon_0 > 0$ tal que (3) tem uma solução positiva para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$.*

Primeiro, usamos a mudança de variáveis e reduzimos nosso problema a encontrar solução para uma equação semilinear, lembrando que com isso perdemos a homogenidade do problema. Depois disso, provamos que o problema envolvendo expoente subcrítico possui uma solução positiva. Para isso consideramos o funcional associado ao problema modificado e usamos uma versão do Teorema do Passo da Montanha, a fim de garantir a existência de uma sequência de Cerami limitada associada ao nível minimax. Finalmente, construímos uma sequência de funções corte e modificamos a não linearidade para satisfazer o crescimento subcrítico, obtendo assim uma família de funcionais de classe C^1. Utilizando um argumento de iteração de Moser, fornecemos uma estimativa envolvendo a norma L^∞ para a solução relacionada ao problema subcrítico.

Referências

[1] DEL PINO, M. AND FELMER, P.L. - Local Mountain Pass for semilinear elliptic problems in unbounded domains. *Calc. Var. Partial Dif. Equations*, **4**, 121-137, 1996.

[2] FIGUEIREDO, G. M., MIYAGAKI, O.H. AND MOREIRA, S.IM. - Nonlinear perturbations of a periodic Schrödinger equation with supercritical growth. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*, Publish online: 08 de abril, 2015.

[3] LIU, J. AND WANG, Z.-Q. - Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations, I. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **131** , 441-448, 2003.

[4] LIU, J., WANG, Y. AND WANG, Z.-Q. - Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations, II. *J. Differential Equations* , **187**, 473-493, 2003.

[5] POPPENBERG, M., SCHMITT, K. AND WANG, Z.-Q. - On the existence of soliton solutions to quasilinear Schrödinger equations. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **14**, 329-344, 2002.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *123–124*

NO-FLUX BOUNDARY PROBLEM ARISING FROM CAPILLARITY PHENOMENA VIA TOPOLOGICAL METHODS

WILLY BARAHONA MARTÍNEZ[1,†], EUGENIO CABANILLAS LAPA[1,‡], ROCÍO DE LA CRUZ MARCACUZCO[1,§] & GABRIEL RODRÍGUEZ VARILLAS[1,§§]

[1]Instituto de Investigación FCM, UNMSM, Lima, Perú.

[†]wilbara_73@yahoo.es, [‡]cleugenio@yahoo.com, [§]rodema_71@yahoo.es, [§§]grv712003@yahoo.es

Abstract

The purpose of this article is to obtain weak solutions for a class nonlinear elliptic problem involving non-standard growth condition and arising from the capillarity phenomena, under no-flux boundary conditions. Our result is obtained using a Fredholm-type result for a couple of nonlinear operators and the theory of the variable exponent Sobolev spaces.

1 Introduction

In this paper we discuss the existence of weak solutions for the following nonlinear elliptic problem for the $p(x)$-Laplacian-like operators originated from a capillary phenomena

$$\begin{aligned} -M\Big(L(u)\Big)\Big[\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u+\frac{|\nabla u|^{2p(x)-2}\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2p(x)}}})-|u|^{p(x)-2}u\Big] &= f(x,u)|u|^{t(x)}_{s(x)} \qquad \text{in } \Omega,\\ u = constant \qquad\qquad & \text{on } \partial\Omega, \\ \int_{\partial\Omega}\Big(|\nabla u|^{p(x)-2}+\frac{|\nabla u|^{2p(x)-2}}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2p(x)}}}\Big)\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ with a smooth boundary $\partial\Omega$, and $N \geq 1$, $p,s,t \in C(\overline{\Omega})$ for any $x \in \overline{\Omega}$; $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ is a continuous function, f is a Caratheodory function and

$$L(u) = \int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)} + \sqrt{1+|\nabla u|^{2p(x)}} + |u|^{p(x)}}{p(x)}\, dx$$

is a $p(x)$-Laplacian type operator.

The study of differential and partial differential equations with variable exponent has been received considerable attention in recent years .This importance reflects directly into various range of applications.There are applications concerning elastic mechanics, thermorheological and electrorheological fluids , image restoration and mathematical biology (See [3]). In the context of the study of capillarity phenomena, many results have been obtained , for example [1, 2]. Recently, Avci [1] ha considered the existence and multiplicity of solutions for the problem (1),without the term $|u|^{p(x)-2}u$ and with boundary condition
$u = 0$ on $\partial\Omega$. We consider (1) to study the existence and uniqueness of weak solutions. Here, we observe that our problem is not variational, so the tool in searching solutions is a result of the Fredholm alternative type for a couple of nonlinear operator obtained by G. Dinca [4].

2 Mains Results

Theorem 2.1 (Dinca [4]). *Let X and Y be real Banach spaces and two nonlinear operators $T, S : X \to Y$ such that*

1. *T is bijective and T^{-1} is continuous.*
2. *S is compact.*
3. *Let $\lambda \neq 0$ be a real number such that: $\|(\lambda T - S)(x)\| \to +\infty$ as $\|x\| \to +\infty$;*
4. *There is a constant $R > 0$ such that*
   $\|(\lambda T - S)(x)\| > 0$ *if* $\|x\| \geq R$, $\quad d_{LS}(I - T^{-1}(\frac{S}{\lambda}), B(\theta, R), 0) \neq 0$.

Then $\lambda I - S$ is suryective from X onto Y.

Here $d_{LS}(G, B, 0)$ denotes the Leray-Schauder degree.
Throughout this paper, let

$$V = \{u \in W^{1,p(x)}(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = \text{constant}\}.$$

The space V is a closed subspace of the separable and reflexive Banach space $W^{1,p(x)}(\Omega)$ Suppose that M and f satisfy the following hypotheses:

(M0) $M : [0, +\infty[\to]m_0, +\infty[$ is a continuous and nondecreasing function with $m_0 > 0$.

(F1) $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a Carathéodory function and there exist positive constants c_1 and c_2 such that

$$|f(x, s)| \leq c_1 + c_2 |s|^{\alpha(x)-1}, \quad \forall x \in \Omega, s \in \mathbb{R},$$

for some $\alpha \in C_+(\Omega)$ such that $1 < \alpha(x) < p^*(x)$ for $x \in \overline{\Omega}$.

Our main result is as follows.

Theorem 2.2. *Assume that hypotheses (M0) and (F1) hold. Then (1) has a weak solution in V.*

Proof: We apply theorem (2.1),by taking $Y = V'$ and the operators $T, S : V \to V'$ in the following way

$$\begin{aligned} \langle Tu, v \rangle &= M\Big(L(u)\Big) \left[\int_\Omega \Big(|\nabla u|^{p(x)-2} + \tfrac{|\nabla u|^{2p(x)-2}}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2p(x)}}} \Big) \nabla u \nabla v \, dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-2} uv \, dx \right] \\ \langle Su, v \rangle &= \int_\Omega f(x, u) |u|_{s(x)}^{t(x)} v \, dx \end{aligned}$$

for all $u, v \in V$ $\blacksquare$.

References

[1] Avci M.- Ni-Serrin type equations arising from capillarity phenomena with non-standard growth, Boundary Value Problems 2013 2013:55, doi:10.1186/1687-2770-2013-55

[2] G. Bin; *On superlinear p(x)-Laplacian-like problem without Ambrosetti and Rabinowitz condition*, Bull. Korean Math. Soc. 51 (2014), No. 2, pp. 409-421.

[3] E.Cabanillas L.,J.B.Bernui B.,Z.Huaringa S.,B.Godoy T.;*Integro-differential Equation of p-Kirchhoff Type with No-flux boundary condition and nonlocal source term*, Int. J. Adv. Appl. Math. andMech. 2(3)(2015)23 - 30.

[4] G. Dinca, *A Fredholm-type result for a couple of nonlinear operators*, CR. Math. Acad. Sci. Paris, 333(2001), 415-419

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *125–126*

SOLUÇÃO PARA UMA CLASSE ABSTRATA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS DEGENERADAS

RAUL M. IZAGUIRRE[1,†] & RICARDO F. APOLAYA[2,‡]

[1]Facultad de Ciencias Matemáticas, UNMSM, Lima, Perú, [2]IME, UFF, RJ, Brasil.

[†]raul_izaguirre2222@yahoo.es, [‡]ricardof16@yahoo.com.br

Resumo

Este artigo está direcionado a mostrar a existência e unicidade da solução global da equação

$$Bu''(x,t) - M(t)Au(t) = 0 \quad \text{em} \quad Q, \tag{1}$$

com condições iniciais e de fronteira

$$u(x,0) = u^0(x), \quad u'(x,0) = u^1(x) \quad \text{em} \quad \Omega,$$
$$u(x,t) = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma \times]0,\infty[,$$

onde u é o deslocamento, $A : V \to V'$ denota o operador definido por $\langle Au, v\rangle$, $\forall u, v \in V$ e $B : H \to H$ é um operador linear, simétrico não negativo, estritamente convexo, M é uma função real derivável, estrictamente positiva. Os espaços de Hilbert $\{H, (.)\}$ e $\{V, ((.))\}$ verificam a imersão densa e compacta $V \hookrightarrow H$.

1 Introdução

Sejam H e V espaços de Hilbert reais com imersão densa e compacta de V em H. Consideramos os operadores lineares $A, B : V \to V'$ com

$$\langle Av, v\rangle \geq \gamma \|v\|_V^2, \ \forall v \in V \ (\gamma \text{ constante positiva});$$

$$\langle Bv, v\rangle > 0, \ \forall v \in V, \ v \neq 0;$$

e a função regular $M(\xi)$ com

$$M(\xi) \geq 0, \ \forall \ \xi \geq 0.$$

Consideramos dois números reais $\beta \geq 1$ e $\delta > 0$. Em estas condições tenemos o seguinte problema:

$$(*) \left| \begin{array}{l} Bu''(t) + M\left(\|u(t)\|_W^\beta\right) Au(t) + \delta Bu'(t) = 0, \text{ in } V', t > 0, \\ u(0) = u^0, \ \ u'(0) = u^1 \ (u^0 \neq 0). \end{array} \right.$$

A equação (*) é a versão abstrata com damping em espaço de Banach da equação de Kirchhoff [3] e a equação de Carrier [1]. Quando $B = I, \beta = 2$, W é um espaço de Hilbert e $\delta \geq 0$, existe uma extensa literatura deste problema (cf. Medeiros, Limaco and Menezes [4]).

A existência da solução local do problema (*) foi obtida por os Autores em [2].

Em este paper estudamos a existência global de soluções de (*) quando $M(\xi) \geq 0, M = M(t), \delta = 0$ e

$$\langle Bv, v\rangle \geq 0, \ \forall v \in V, \ v \neq 0;$$

2 Resultado Principal

Teorema 2.1. *Assumimos hipóteses adequadas e* $u^0 \in D(S^{2\alpha+5/2}), u^1 \in D(S^{2\alpha+2}), u^0 \neq 0$ *existe uma única* $u = u(x,\, t)$ *tal que verifica*

$$(P) \quad \left| \begin{array}{l} Bu'' + M\,(t)\,Au(t) = 0 \text{ em } L^\infty(0,\infty; D(S^{\alpha+1/2})), \\ u\,(0) = u^0 \quad , u'(0) = u^1. \end{array} \right.$$

Prova: Usamos propriedades de espaços de Hilbert, teorema espectral, construção de espaços adequados e método de Faedo-Galerkim.

Referências

[1] CARRIER, G. F. - *On the non-linear vibration problem of the elastic string*, Quart. Appl. Math., 3 (1945), 157-165.

[2] IZAGUIRRE R., APOLAYA R., MILLA M. - *Existence of local solutions of the Kirchhoff-Carrier equation in Banach spaces*, Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications, 68, 2008, p. 3565 - 3580.

[3] KIRCHHOFF G. - *Vorlesunger über Mechanik*, Teubner, Leipzig, 1883.

[4] MEDEIROS L., LIMACO J., MENEZES S. - *Mathematical vibrations of elastic string : mathematical aspects, part one*, J. Comp. Analysis and Applications, 4 (2002), 91-127.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *127–128*

ENERGY DECAY FOR A SYSTEM OF WAVE EQUATIONS AND CONTROL

WALDEMAR D. BASTOS[1,2,†]

[1]UNESP-University of São Paulo State, SJ Rio Preto, SP, Brazil,
[2]grant# 2014/09900-7, São Paulo Research Foundation (FAPESP).

[†]waldemar@ibilce.unesp.br

Abstract

We obtain polynomial decay of energy for a system of coupled wave equations and apply it to a controllability problem.

1 Notations

Let $N \geq 1$ be an integer, $\Xi \subset \mathbb{R}^N$ a bounded domain, $L^2(\Xi)$ and $H^1(\Xi)$ the usual Lebesgue and Sobolev spaces with their usual norms $\|.\|_0$ and $\|.\|_1$ respectively (see [1]). For an integer $m \geq 1$ we consider the spaces,

$$\mathcal{H}^1(\Xi) = [H^1(\Xi)]^m = H^1(\Xi) \times \ \ldots \ \times H^1(\Xi),$$
$$\mathcal{L}^2(\Xi) = [L^2(\Xi)]^m \ = \ L^2(\Xi) \times \ \ldots \ \times L^2(\Xi),$$

with norms $\left\|(u^1, ..., u^m)\right\|_1 = [\left\|u^1\right\|_1^2 + \ \ldots \ + \|u^m\|_1^2]^{\frac{1}{2}}$ and $\left\|(u^1, ..., u^m)\right\|_0 = [\left\|u^1\right\|_0^2 + \ \ldots \ + \|u^m\|_0^2]^{\frac{1}{2}}$ respectively. We denote $U = (u^1, ..., u^m)^T$, $U_{tt} = (u^1_{tt}, ..., u^m_{tt})^T$, $\Delta U = (\Delta u^1, ..., \Delta u^m)^T$ (^{T} denotes transpose).

2 Main Results

Let $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ be a real diagonalizable matrix with positive eigenvalues. Consider the following Cauchy problem

$$\begin{cases} U_{tt} - \Delta U + AU = 0, & \text{in } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \\ U(.,0) = U_0, & \text{in } \mathbb{R}^N \\ U_t(.,0) = U_1, & \text{in } \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{1}$$

Lemma (Local Energy Decay): Let Ξ be a bounded domain in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ and $U_0 \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^N)$, $U_1 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ functions with compact support in Ξ. Let $U \in \mathcal{H}^1_{loc}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ be a solution to the Cauchy problem (1) with initial state U_0 and U_1. Then, there exist constants $T > 0$ and $K > 0$ depending on A and the diameter of Ξ such that the restriction of U to the domain Ξ satisfies

$$\|U(.,t)|_\Xi\|_1^2 + \|U_t(.,t)\,|_\Xi\,\|_0^2 \leq K\ t^{-N}\{\|U_0\|_1^2 + \|U_1\|_0^2\} \tag{2}$$

for all $t > T$. Here $|_\Xi$ denotes restriction to the set Ξ.
To prove the lemma we used some ideas from [2] and some estimates obtained in [3] for the energy of solutions to the single equations $u_{tt} - \triangle u + \lambda u = 0$, $\lambda \geq 0$.
Now, using the estimate (2) and D. L. Russell´s approach as in [2] we prove the following result.

Theorem: Let $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ be a bounded domain with piecewise smooth boundary $\partial\Omega$ with no cuspidal points. There exists a big enough $T > 0$ such that for each initial state $U_0 \in \mathcal{H}^1(\Omega)$, $U_1 \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ there exist a control $f \in \mathcal{L}^2(\partial\Omega\times]0,T[)$ so that the solution $U \in \mathcal{H}^1(\Omega\times]0,T[)$ of the problem

$$\begin{cases} U_{tt} - \Delta U + AU = 0 & \text{in } \Omega\times]0,T[, \\ U(.,0) = U_0 & \text{in } \Omega, \\ U_t(.,0) = U_1 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial U}{\partial \eta} = f & \text{on } \partial\Omega\times]0,T[, \end{cases}$$

satisfies the final condition

$$U(.,T) = U_t(.,T) = 0 \text{ on } \Omega.$$

Here $\frac{\partial U}{\partial \eta} = (\frac{\partial u^1}{\partial \eta}, ..., \frac{\partial u^m}{\partial \eta})^T$ with $\frac{\partial}{\partial \eta}$ denoting the exterior normal derivative.

A remark on the proof of the theorem: let Ω_δ be a δ -neigborhood of Ω and let $\mathcal{H}_0^1(\Omega_\delta)$ be the subspace of $\mathcal{H}^1(\Omega_\delta)$ of the functions vanishing on the boundary of Ω_δ. Let $W_0 \in \mathcal{H}^1(\Omega_\delta)$, $W_1 \in \mathcal{L}^2(\Omega_\delta)$ be functions extended by zero outside Ω_δ and let W be the solution of (1) with initial data W_0 and W_1. For a fixed $T \geq diam(\Omega_\delta)$ we define the bounded linear operator $S_T : \mathcal{H}_0^1(\Omega_\delta)\times\mathcal{L}^2(\Omega_\delta) \longrightarrow \mathcal{H}^1(\Omega_\delta)\times\mathcal{L}^2(\Omega_\delta)$ by setting $S_T(W_0, W_1) = (W(.,T)\,|_{\Omega_\delta}, W_t(.,T)\,|_{\Omega_\delta})$. The theory of PDE asserts that S_T is compact if $T \geq diam(\Omega_\delta)$. The inequality (2) applied to$W$ shows that S_T is a contraction if T is taken sufficiently large. This is an important ingredient in the proof of the theorem.

Proceeding as in [4] we reduce the time of controllability to any value $T >$ diameter of Ω, as it is well known for the single wave equation ([5], [6]). The idea is to prove that the family of compact operators $\{S_T : T \geq diam(\Omega_\delta)\}$ can be extended analytically to the sector $\Sigma = \{T \in \mathbb{C} : T = diam(\Omega_\delta) + z : |\arg\ z| < \pi/4\}$ and use spectral theory as in [5] and [6].

References

[1] BREZIS, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2011.

[2] BASTOS, W. D., SPEZAMIGLIO, A., RAPOSO, C. A., *On exact boundary controllability for linearly coupled wave equations*, J. Math. Anal. Appl. 381 (2011) 557–564.

[3] NUNES, R. S. O, BASTOS, W. D. , *Energy decay for the linear Klein-Gordon equation and boundary control.* J. Math. Anal. Appl. 414 (2014) 934–944.

[4] NUNES, R. S. O., BASTOS, W. D., *Analycity and Near Optimal Time Boundary Controllability for the Linear Klein-Gordon Equation*, submitted.

[5] LAGNESE, J., *Boundary value control of a class of hyperbolic equations in a general region.* SIAM J. Control Optim, v. 15, n. 6 (1977) 973-983.

[6] BASTOS, W. D.,SPEZAMIGLIO, A., *A note on the controllability for the wave equation in nonsmooth plane domains.* Systems & Control Letters, 55 (2006) 17 - 19.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *129–130*

WELL-POSEDNESS AND UNIFORM STABILITY FOR NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATIONS WITH DYNAMIC/WENTZELL BOUNDARY CONDITIONS

MARCELO. M. CAVALCANTI[1,2,†], WELLINGTON J. CORRÊA[3,‡], IRENA LASIECKA[3,§] & CHRISTOPHER LEFLER[4,§§]

[1]Department of Mathematics, State University of Maringá, Maringá, PR, Brazil, [2]Research of Marcelo M. Cavalcanti partially supported by the CNPq Grant 300631/2003-0, [3]Academic Department of Mathematics, Federal Technological University of Paraná, Campo Mourão, PR, Brazil, [4]Department of Mathematical Sciences, University of Memphis, USA, [5]University of Virginia, Charlottesville.

[†]mmcavalcanti@uem.br, [‡]wcorrea@utfpr.edu.br, [§]lasiecka@memphis.edu, [§§]cgl9b@virginia.edu

Abstract

In this work, we consider the Schrödinger equation with a defocusing nonlinear term and dynamic boundary conditions defined on a smooth boundary of a bounded domain $\Omega \in R^N, N = 2,3$ is considered. Local wellposedness of strong H^2 solutions is established. In the case $N = 2$ local solutions are shown to be global. In addition, existence of weak H^1 solutions in dimensions $N = 2, N = 3$ is also shown. The energy corresponding to weak solution is shown to satisfy uniform decay rates under appropriate monotonicity conditions imposed on the nonlinear terms appearing in the dynamic boundary conditions. The proof of wellposedness is critically based on converting the equation into Wentzell boundary value problem associated with Schrödinger dynamics. The analysis of this later problem with nonhomegenous boundary data allows to build a theory suitable for the treatment of the dynamic boundary conditions.

1 Introduction

We consider a nonlinear Schrödinger equation with dynamic boundary conditions:

$$\begin{cases} y_t - i\Delta y = f(y) & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ y = 0 & \text{on } \Gamma_0 \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial y}{\partial n} + g(y_t) = 0 & \text{on } \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ y(0) = y_0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Here Ω is a bounded smooth domain in R^N, $N \leq 3$. The boundary Γ consists of two disjoint parts Γ_0, Γ_1 . $g(z)$, $z \in C$ is a monotone function and $f(y)$ represents a nonlinear term in the equation. Our main focus is to study cubic defocusing nonlinearity $f(y) = -i|y|^2 y$.

In order to study the nonlinear model, we shall first establish well-posedness of the following linear model:

$$\begin{cases} y_t = i\Delta y & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ y = 0 & \text{on } \Gamma_0 \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial y}{\partial n} = -y_t & \text{on } \Gamma_1 \times (0,\infty). \end{cases} \tag{2}$$

The key to this is treating the above problem as a Wentzell problem, i.e. by substituting $i\Delta y$ for y_t on the boundary. While Wentzell boundary conditions have been well studied in the context of heat and wave equation, see Goldstein [2], we are not aware of any treatment pertinent to Schrödinger equations. Thus our first task is devoted to that goal. Once settling the issues of well-posedness and regularity for the linear model, we shall seek a suitable framework for engaging fixed point theory. In this process, the so called "hidden boundary regularity" is very beneficial. A fixed point method, exploiting *hidden regularity* and other structural features of Wentzelll problem, will be used to ultimately show local existence of solutions corresponding to nonlinear model.

2 Mains Results

Define the spaces $V = H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$, $X_0 = \left\{(y_0, z_0) \in V \times V, \Delta y_0 \in V, z_0 \equiv i\Delta y_0 + F(y_0), \dfrac{\partial y_0}{\partial \nu} + z_0 = 0 \; on \; \Gamma_1\right\}$, with norm $\|(y,z)\|^2_{X_0} = \|y\|^2_{H^2(\Omega)} + \|z\|^2_{V'}$ and $X_T = \left\{(y,z) : y \in C[0,T; H^2(\Omega) \cap V], z \in C(0,T;V'), y_t = z, y(0) = y_0\right\}$, with norm $\|(y,z)\|^2_{X_T} = \sup\limits_{t\in[0,T]} \|y\|^2_{H^2(\Omega)} + \sup\limits_{t\in[0,T]} \|z\|^2_{V'}$.

For $N = 2, 3$, we have the following *local* well-posedness result:

Theorem 2.1 (Local solution). *For every bounded subset $B \subset X_0$, there exists $T > 0$ such that for all $(y_0, z_0) \in B$, there exists a unique solution y of (1) with time derivative $y_t = z$ such that the pair $(y, z) \in X_T$.*

The result announced in Theorem 2.1 will be proved by way of a fixed point argument applied to a suitable Wentzell representation of the non homogenous problem.

Theorem 2.2 (Global solution). *Suppose $N = 2$. For all $(y_0, z_0) \in X_0$ and for all $T > 0$, there exists a unique solution y of (1) with time derivative $y_t = z$ such that the pair $(y, z) \in X_T$.*

With respect to weak solutions, we are able to provide a similar global existence result by the Galerkin approach. We shall study the problem (1) in two situations, namely,

case 1 when $g(z)$ is linear and $f(y) = -i|y|^2\, y$;

case 2: when $f : V \to V$ is globally Lipschitz and its primitive satisfies certain conditions borrowed from Burq, Gérard e Tzvetkov [1].

We define a weak solution of (1) as a solution to the variational form with test functions $v \in V$.

$$i(y', v)_{L^2(\Omega)} - (\nabla y, \nabla v)_{L^2(\Omega)} + (y', v)_{L^2(\Gamma_1)} - (f(y), v)_{L^2(\Omega)} = 0, \; \forall\, t \in (0, \infty). \tag{1}$$

However, we obtain weak and global solutions-the result announced in the Theorem below.

Theorem 2.3 (Weak solution). *Let $y_0 \in V$. Then for all $v \in V$ there exists a (unique – in the case 2) solution in the class $y \in L^\infty(0,\infty;V)$; $y' \in L^\infty(0,\infty;V')$ to (1).*

Having established existence of weak and strong solution, a natural question to address is that of decay rates for the energy.

Theorem 2.4 (Decay rates). *Assume that Ω is star-shaped and let y be a regular solution of the problem (1). Then, there exist positive constants γ and C such that the H^1-energy associated to problem (1) decays exponentially, that is, $E(t) \le Ce^{-\gamma t}E(0)$, for all $t > T_0$, $T_0 > 0$ large enough and $E(t) \equiv ||\nabla y(t)||^2 + 1/2\|y(t)\|^4_{L_4(\Omega)}$.*

References

[1] BURQ, N. AND GÉRARD AND TZVETKOV, N. - On nonlinear Schrödinger equations in exterior domains. *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse Non LinÃ©aire*, **21**, 295-318, 2004.

[2] FAVINI, A. AND GOLDSTEIN, G. R. AND GOLDSTEIN, J. A. AND ROMANELLI, S. - The heat equation with generalized Wentzell boundary conditions. *Journal of Evolution Equations*, 1-19, 2002.

A NON-PERIODIC AND ASYMPTOTICALLY LINEAR INDEFINITE VARIATIONAL PROBLEM IN $\mathbb{R}^N$

LILIANE A. MAIA[1,†], JOSÉ CARLOS DE OLIVEIRA JUNIOR[1,‡] & RICARDO RUVIARO[1,§]

[1]Universidade de Brasília, Departamento de Matemática, Brasília, DF, Brazil.

[†]lilimaia@unb.br, [‡]concrets@gmail.com, [§]ruviaro@unb.br

Abstract

We consider the nonlinear Schrödinger equation

$$-\Delta u + V(x)u = f(u),$$

in $\mathbb{R}^N$, where V changes sign and f is an asymptotically linear function at infinity, with V non-periodic and radially symmetric. The existence of a radial solution is established employing spectral theory, a classical linking theorem and interaction between translated solutions of the problem at infinity.

1 Introduction

A nonlinear Schrödinger equation which models a light beam propagating in a saturable medium may present a sign changing potential in the linear term and lead to a semilinear elliptic equation in $\mathbb{R}^N$ with a potential that has a negative part, see [1] and references therein. This class of problems in which the potential is not strictly positive has not been deeply explored so far. Our goal is to tackle this problem and show the existence of a nontrivial solution for

$$-\Delta u + V(x)u = f(u) \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \tag{P}$$

$N \geq 3$, with a continuous and non-periodic potential V which changes sign, with an asymptotic limit V_∞ at infinity and a function f asymptotically linear at infinity.

2 Main Results

In this work, we do not assume any monotonicity at $s \mapsto f(s)/s$. For this reason we do not use projections on the Nehari manifold neither apply the generalized Nehari method as in [2]. We apply the classical linking theorem with Cerami condition. This is possible by using the positive ground state solution u_0 of the limit problem

$$-\Delta u + V_\infty u = f(u) \ \text{ in } \ \mathbb{R}^N, \tag{P$_\infty$}$$

projected on a infinite dimensional subspace of $H^1(\mathbb{R}^N)$ with finite codimension. Moreover, it is crucial to estimate the interactions of the translations of u_0 in order to obtain the linking geometry. These estimates are intricate and constitute the core of our work.

One difficulty in this problem is that the associated functional I is strongly indefinite. It is convenient to decompose the space $H^1(\mathbb{R}^N)$ into a direct sum of two subspaces E^+ and E^-, one of them finite dimensional, and assume a nonquadraticity condition on F, see assumption (f_3) below.

Moreover, the strong convergence of the Cerami sequences is obtained by a version of Brezis-Lieb lemma under no assumptions of f' , the derivative of f, based in the ideas of [3], Lemma 3.2, and [4], Lemma 4.2.

As far as we understand our results complement the works of [1] and [6]. To our knowledge this is an original result in the existence of a nontrivial solution for (P) under no periodicity condition on V, a potential which may change sign, and a non linearity f asymptotically linear at infinity under very mild additional assumptions.

We will consider the elliptic problem (P) with $N \geq 3$, $u \in E := H^1(\mathbb{R}^N)$ and that V is a potential satisfying the conditions:

(V_1) $V \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $-V_0 \leq V(x) \leq V_\infty$ for some constants $V_0, V_\infty > 0$ and $V(x) = V(|x|)$;

(V_2) $\lim_{|x| \to +\infty} V(x) = V_\infty$;

(V_3) $0 \notin \sigma(L)$ and $\inf \sigma(L) < 0$, where $\sigma(L)$ is the spectrum of the operator $L = -\Delta + V$.

The conditions that we consider on the nonlinearity f are the following:

(f_1) $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ and $\lim_{s \to 0} \dfrac{f(s)}{s} = 0$;

(f_2) $\lim_{|s| \to +\infty} \dfrac{|f(s)|}{|s|} = m > V_\infty$ and $\dfrac{|f(s)|}{|s|} < m$ for all $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(f_3) Setting $F(s) := \displaystyle\int_0^s f(t)dt$ and $Q(s) := \frac{1}{2} f(s)s - F(s)$, then for all $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$F(s) \geq 0, \quad Q(s) > 0 \quad \text{and} \quad \lim_{s \to \infty} Q(s) = +\infty.$$

The main result of this paper is the following theorem.

Theorem 2.1. *Under assumptions $(V_1) - (V_3)$ and $(f_1) - (f_3)$ equation (P) has a nontrivial radially symmetric weak solution $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$.*

Remark 2.1. *We note that the hypothesis that V is radially symmetric makes it possible to restrict the problem to the space of radial functions in $H^1(\mathbb{R}^N)$. This yields compactness in the proof of strong convergence of a bounded sequence. The symmetry assumption is employed only in this step of the work.*

References

[1] STUART, C. A. - Guidance properties of nonlinear planar waveguides, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **125** (1993), 145–200.

[2] PANKOV, A. A. - Periodic nonlinear Schrödinger equation with application to photonic crystals, *Milan J. Math.*, **73** (2005), 259–287.

[3] ACKERMANN, N. - On a periodic Schrödinger equation with nonlocal superlinear part, *Mathematische Zeitschrift*, **248** (2004), 423–443.

[4] DING, Y. AND LEE, C. - Multiple solutions of Schrödinger equations with indefinite linear part and super or asymptotically linear terms, *J. Differential Equations*, **222** (2006), 137–163.

[5] DING, Y. AND RUF, B. - Solutions of a nonlinear Dirac equation with external fields, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **190** (2008), 57–82.

[6] JEANJEAN, L. AND TANAKA, K. - A positive solution for an asymptotically linear elliptic problem on $\mathbb{R}^N$ autonomous at infinity, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, **7** (2002), 597–614.

[7] MAIA, L. A., OLIVEIRA JUNIOR, J. C. AND RUVIARO, R. - A non-periodic and asymptotically linear indefinite variational problem in $\mathbb{R}^N$, *IUMJ*, online 2015.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *133–134*

ANÁLISE DE ESTABILIDADE E CONVERGÊNCIA DE UM MÉTODO ESPECTRAL TOTALMENTE DISCRETO PARA SISTEMAS DE BOUSSINESQ

JULIANA C. XAVIER[1,†], MAURO A. RINCON[2,‡], DANIEL G. ALFARO[2,§] & DAVID AMUNDSEN[3]

[1]Programa de Pós-Graduação em Informática, UFRJ, RJ, Brasil, Bolsista da CAPES - Processo 99999.011638/2013-03,
[2]Instituto de Matemática, UFRJ, RJ, Brasil,
[3]Department of Mathematics and Statistics, Carleton University, Ottawa, Canadá.

[†]julianacastanon@ppgi.ufrj.b, [‡]rincon@dcc.ufrj.br, [§]dgalfaro@dcc.ufrj.br

Resumo

Na primeira parte deste trabalho, apresentamos a análise de estabilidade da família linear de sistemas de Boussinesq com o objetivo de determinar a influência de seus parâmetros (a, b, c, d) na eficiência e precisão do método espectral de Fourier Galerkin aplicado na variável espacial, juntamente com o método de Runge Kutta de quarta ordem aplicado na variável temporal. São identificadas quais regiões de parâmetros são as mais adequadas para a obtenção de uma solução numérica consistente. Na segunda parte é apresentada a análise de convergência da família não linear de sistemas de Boussinesq no caso em que a condição de estabilidade linear é dada por $\Delta t \leq C\Delta x$. Experimentos numéricos são fornecidos com o objetivo de verificar a estabilidade das soluções do problema linear em cada região de parâmetros, e confirmar a ordem teórica de precisão das soluções do problema não linear.

1 Introdução

A família (a, b, c, d) de sistemas de Boussinesq foi obtida e analisada em [1], como um modelo assintótico obtido a partir das equações de Euler para ondas de pequena amplitude e grande comprimento de onda. É dada por:

$$\eta_t + u_x + (u\eta)_x + au_{xxx} - b\eta_{xxt} = 0, \tag{1}$$
$$u_t + \eta_x + uu_x + c\eta_{xxx} - du_{xxt} = 0, \tag{2}$$

onde

$$a = \frac{1}{2}\Big(\theta^2 - \frac{1}{3}\Big)\lambda, \quad b = \frac{1}{2}\Big(\theta^2 - \frac{1}{3}\Big)(1-\lambda), \quad c = \frac{1}{2}\Big(1-\theta^2\Big)\mu, \quad d = \frac{1}{2}\Big(1-\theta^2\Big)(1-\mu)$$

com λ, $\mu \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \theta \leq 1$.

O sistema (1)-(2) descreve a propagação não linear de ondas de pequena amplitude em um canal. As variáveis dependentes $\eta = \eta(t, x)$ e $u = u(t, x)$ representam, respectivamente, a altura da superfície livre do fluido em relação a superfície de repouso e a velocidade horizontal do fluido em algum ponto acima do fundo do canal. Até onde sabemos, a maior parte dos resultados numéricos para esses sistemas são concentrados em escolhas específicas dos parâmentros (a, b, c, d), como por exemplo em [2].

Embora esses resultados respondam a uma importante pergunta levantada em [1], sobre a construção de métodos numéricos eficientes e precisos para a obtenção de soluções aproximadas de PVICs relacionados com esses sistemas, seria útil explorar de maneira mais abrangente e consistente a escolha desses parâmetros na construção destes esquemas numéricos.

2 Resultados Principais

Nosso objetivo é analisar os sistemas de Boussinesq dados por (1)-(2) num domínio $\Omega = [-L, L]$ com condições de contorno periódicas em $\partial\Omega$. Aplicamos o método de Fourier Galerkin a variável espacial do sistema (1)-(2) sem os termos $(\eta u)_x$ e uu_x, que é a versão linear do sistema original. Obtemos então, o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\hat{\eta}_t = -ikw_1(k)\hat{u}, \tag{1}$$

$$\hat{u}_t = -ikw_2(k)\hat{\eta}, \tag{2}$$

com $w_1(k) = \dfrac{1 - ak^2}{1 + bk^2}$ and $w_2(k) = \dfrac{1 - ck^2}{1 + dk^2}$. Aplicando a análise de estabilidade de Von Neumann no sistema (1)-(2), obtemos o seguinte resultado:

Teorema 2.1. *O sistema (1)-(2) é estável se $\Delta t \leq CN^{-\ell}$ para alguma constante positiva C e $\ell \in \{0, 1, 2, 3\}$, onde Δt é o tamanho do passo de tempo e N é o número de pontos considerados na discretização espacial. O valor de ℓ irá depender da região à qual pertencem os parâmentos (a, b, c, d).*

Observação 3. *As regiões de parâmetros mencionadas no Teorema 2.1 decorrem do estudo sobre a boa colocação dos sistemas de Boussinesq (1)-(2), que foi feita em [1]. São estas:*

$$a \leq 0, b \geq 0, c \leq 0, d \geq 0,$$
$$a = c > 0, b \geq 0, d \geq 0$$
$$a = c > 0, b = d < 0.$$

Observação 4. *Experimentos numéricos foram feitos de modo a comprovar as condições de estabilidade do problema linear obtidas no Teorema 2.1, para regiões de parâmetros distintas.*

Para o problema não linear, realizamos a análise de convergência do sistema (1)-(2) totalmente discretizado pelos métodos de Fourier Galerkin na variável espacial e o método de Runge Kutta de quarta ordem na variável temporal. Essa análise de convergência está direcionada, inicialmente, para algumas regiões específicas dos parâmentros (a, b, c, d); a saber, aquelas que fornecem condição de estabilidade para o problema linear do tipo $\Delta t \leq CN^{-1}$. Para esses casos, temos então o seguinte resultado:

Teorema 2.2. *Sejam $s \geq 4$ e $(\eta, u) \in C(0, T; H^s(\Omega) \times H^{s+2}(\Omega))$ solução do sistema (1)-(2) para uma determinada região de parâmentros (a, b, c, d) e para algum $0 < T < \infty$, com dado inicial $(\eta_0, u_0) \in H^s(\Omega) \times H^{s+2}(\Omega)$. Seja (H^n, U^n) solução do problema totalmente discreto associado. Então, para N suficientemente grande e Δt suficientemente pequeno tais que $\Delta t \leq cN^{-1}$ para alguma constante $c > 0$, existe uma constante C independende de N, tal que:*

$$\max_{0 \leq n \leq M} \left(\|\eta(t^n) - H^n\| + \|u(t_n) - U^n\|_1 \right) \leq C \left(\Delta t^4 + N^{1-s} \right) \tag{3}$$

Referências

[1] BONA, J. L, CHEN, M., SAUT, J.-C. - Boussinesq equations and other systems for small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media: I. Derivation and linear theory., *J. Nonlin. Sci.*, **12**, 283-318, 2002.

[2] DOUGALIS, V. A.,MITSOTAKIS, D.,SAUT, J.-C. - Numerical analysis of Boussinesq systems of the Bona-Smith family. *Applied Numerical Mathematics*, **60**, 314-336, 2010.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *135–136*

FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS EM VELOCIDADE PARA O PROBLEMA DIFUSIVO-REATIVO

BENEDITO S. ABREU[1,†] & MAICON R. CORREA[1,‡]

[1]Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP, SP, Brasil.

[†]ra139872@ime.unicamp.br, [‡]maicon@ime.unicamp.br

Resumo

Neste trabalho estudamos uma versão do método de elementos finitos misto dual para o problema difusivo-reativo estacionário no qual a pressão é eliminada pontualmente, resultando em uma formulação posta unicamente em termos da velocidade. Utilizamos os espaços de Raviart-Thomas para discretizar o problema sobre uma malha com elementos quadrilaterais. Diferentes formas de pós-processamento para a pressão são discutidas e analisadas e são tecidas comparações com o método misto usual. São apresentados experimentos numéricos, usando condensação estática, para verificar características de estabilidade e convergência das formulações envolvidas.

1 Introdução

No âmbito de aplicações, especialmente em meios porosos, muitas vezes precisa-se resolver numericamente o problema parabólico linear associado a um escoamento monofásico pouco compressível, descrito como

$$\alpha(\mathbf{x})\frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}(K(\mathbf{x})\nabla p) = f, \quad (x,t) \in \Omega \times I, \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, com contorno suave $\Gamma = \partial\Omega$ e vetor normal unitário exterior $\mathbf{n}$, representa o domínio do meio poroso, $I = (0, T]$ é um intervalo de tempo, α representa a compressibilidade do meio e p representa a pressão. Um problema estacionário relacionado pode ser estudado pelo modelo matemático que descreve o escoamento, em regime permanente, de um fluido sujeito a reação em um meio poroso, que pode ser visto, sem perda de generalidade, como um problema elíptico linear na forma:

$$\alpha(\mathbf{x})p - \operatorname{div}(K(\mathbf{x})\nabla p) = f, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{2}$$

com condições de contorno

$$p = p_D, \ \mathbf{x} \in \Gamma_D,$$

$$-(K(\mathbf{x})\nabla p) \cdot \mathbf{n} = 0, \ \mathbf{x} \in \Gamma_N,$$

com $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ e $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, onde $p : \Omega \to \mathbb{R}$ respresenta a pressão no fluido, $\alpha(\mathbf{x}) \geq \alpha_{\min} > 0$ e $K(\mathbf{x}) \geq K_{\min} > 0$.

O emprego do método de Galerkin clássico para a aproximação numérica da solução desta equação, com pós-processamento do campo de velocidades dado pelo gradiente do campo de pressões, fornece fluxos descontínuos entre elementos e falha na conservação local de massa. Outras técnicas de pós-processamento podem ser encontradas em [1, 2, 3]. Em [3], o método de [2], obtido pela adição do resíduo de mínimos quadrados da equação de conservação da massa à forma fraca da lei de Darcy, tem sua origem relacionada a métodos estabilizados, sendo aplicado para o caso de campos de permeabilidade anisotrópicos descontínuos.

Uma outra alternativa para a resolução numérica da equação (2) é o uso de formulações mistas, onde a pressão e a velocidade são calculadas simultaneamente. Para tal, a escrevemos na forma de sistema de primeira ordem

$$\alpha(\mathbf{x})p + \operatorname{div}\mathbf{u} = f, \quad \mathbf{u} = -K(\mathbf{x})\nabla p, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{3}$$

onde $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ é a velocidade de Darcy. Em particular, para este problema, as variáveis $\mathbf{u}$ e p são aproximadas em subespaços de aproximação de $H(\operatorname{div}, \Omega)$ e $L^2(\Omega)$, respectivamente, o que resulta em um sistema de equações de grande porte. Além disso, exige-se uma condição de compatibilidade entre estes subespaços [4], o que reduz a flexibilidade na escolha de espaços de elementos finitos estáveis. Uma forma de reduzir a dimensão do sistema e de facilitar a construção dos espaços de dimensão finita é a adoção de uma formulação de elementos finitos mista híbrida[4], onde a velocidade passa a ser aproximada em um subespaço de $(L^2(\Omega))^2$, com a continuidade do fluxo sendo imposta através de multiplicadores de Lagrange. Isso representa vantagens tanto em termos de construção de espaços quanto na resolução computacional do problema. Por outro lado, dada a particular forma deste problema, podemos também simplesmente eliminar a pressão e ficar com uma formulação desacoplada, cuja variável é apenas a velocidade. Desta forma, a pressão pode ser pós-processada e teremos maior flexibilidade não apenas na escolha do parâmetro α, mas também para a adoção de estratégias iterativas.

2 Resultados Principais

Neste trabalho é apresentada uma versão do método de elementos finitos misto dual para o problema difusivo-reativo estacionário no qual a pressão é eliminada pontualmente, resultando em uma formulação posta unicamente em termos da velocidade. São relatados estudos em andamento feitos a partir da comparação da formulação mista dual clássica com o emprego dos espaços de Raviart-Thomas em elementos quadrilaterais, levando em conta os seguintes aspectos:

- condicionamento de ambos os sistemas de equações;
- hibridização para o método misto;
- influência de malhas distorcidas sobre a performance de ambos os métodos;
- estratégias de enriquecimento para o esquema em velocidade;
- emprego dos espaços desenvolvidos em [1] para pós-processar a pressão.

Referências

[1] Durlofsky, L. J. - *A Triangle Based Mixed Finite Element-Finite Volume Technique for Modeling Two-Phase Flow Through Porous Media*, Journal of Computational Physics, **105**: 252-266, 1993.

[2] Loula, A. F. D. and Rochinha, F. A. and Murad, M. A. - *Higher-order gradient post-processings for second-order elliptic problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **128**: 361-381, 1995.

[3] Correa, M. R. and Loula, A. F. D. - *Stabilized Velocity Post-Processings for Darcy flow in heterogeneous porous media*, Communications in Numerical Methods in Engineering, **23**: 461-489, 2007.

[4] Brezzi, F. and Fortin, M. - *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer Series in Computational Mathematics, **15**, Springer-Verlag, New York, 1991

[5] Arbogast, T. and Correa, M. R. - *Two Families of H(div) Mixed Finite Elements on Quadrilaterals of Minimal Dimension*, SIAM Journal on Numerical Analysis (SINUM), 2015.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *137–138*

DETECÇÃO DE COMPLEXOS QRS DO ECG PELA DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES EM MULTIRRESOLUÇÃO

BRUNO R. DE OLIVEIRA[1,†], JOZUÉ VIEIRA FILHO[1,‡] & MARCO A. Q. DUARTE[2,§]

[1]Universidade Estadual Paulista-"Júlio de Mesquita Filho-Campus de Ilha Solteira, UNESP, SP, Brasil,
[2]Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, UEMS, MS, Brasil.

[†]bruno.ro.net@gmail.com, [‡]jozue@dee.feis.unesp.br, [§]marco@uems.br

Resumo

Neste trabalho propõe-se a utilização da Decomposição em Valores Singulares em Multirresolução, numa etapa de pré-processamento, para detecção dos complexos QRS de sinais de ECG. A eficiência do método proposto é comprovada pelos resultados obtidos para a base de dados "Challenge 2011-*Training Set A*" que apresentam taxas de previsibilidade de 99,20%, de sensibilidade de 99,70% e de erro em apenas 1,10%, superiores àquelas obtidas por um método clássico da área.

1 Introdução

A análise do Eletrocardiograma (ECG) ainda é um método muito utilizado pelos especialistas devido ao seu baixo custo e a sua eficiência para determinar a saúde do coração e do paciente [1]. O ECG é um sinal unidimensional que representa a variação da atividade elétrica do coração em função do tempo. Suas principais ondas características são: onda P e onda T, que registram a despolarização atrial e ventricular, respectivamente. Complexo QRS, formado pelas ondas Q, R e S, que representa a despolarização ventricular [2]. O monitoramento do coração pode ser realizado por longos períodos de tempo. Os sinais gerados são demasiado extensos para análise manual, por isso, sistemas computacionais são utilizados. Para tal tarefa é necessário segmentar os sinais de ECG obtendo suas ondas características, sendo que uma das primeiras etapas é a detecção dos complexos QRS [3].

2 Resultados Principais

Para a detecção dos complexos QRS foi proposta uma metodologia que utiliza a Decomposição em Valores Singulares em Multirresolução (MRSVD), para obtenção de um sinal onde as ondas de baixas frequências, não pertencentes aos complexos QRS, estão atenuadas. Seja $\phi_0 = [\phi_0(1), \cdots, \phi_0(n)]$ um sinal qualquer com n amostras. Pela MRSVD (método proposto por [1]), para $l = 1, \cdots, L$ níveis de resolução, tem-se:

$$\mathbf{X}_l = \begin{bmatrix} \phi_{l-1}(1) & \cdots & \phi_{l-1}(2n_l - 1) \\ \phi_{l-1}(2) & \cdots & \phi_{l-1}(2n_l) \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\mathbf{X}_l\mathbf{X}_l^T = \mathbf{U}_l\mathbf{\Gamma}_l\mathbf{U}_l^T \tag{2}$$

$$\hat{\mathbf{X}}_l = \mathbf{U}_l^T\mathbf{X}_l \tag{3}$$

$$\phi_l = \hat{\mathbf{X}}_l(1, \cdot) \tag{4}$$

$$\psi_l = \hat{\mathbf{X}}_l(2, \cdot) \tag{5}$$

onde $n_l = n/2^l$; $\mathbf{\Gamma}_l$ e $\mathbf{U}_l$ matrizes de valores e vetores singulares, respectivamente, resultado da decomposição da matriz de dispersão $\mathbf{X}_l\mathbf{X}_l^T$ e $\hat{\mathbf{X}}(m, \cdot)$ a m-ésima linha de $\hat{\mathbf{X}}_l$.

Após decompor um sinal de ECG pela MRSVD, obtém-se um sinal cujas amplitudes dos complexos QRS estão amplificadas, devido às característica de filtro passa-alta dos coeficientes da segunda coluna da matriz filtro $\mathbf{U}_l$, que produz as componentes de detalhe ψ_l. Primeiro obtêm-se um sinal resultante da soma dos valores absolutos das componentes de detalhes sobreamostradas, do segundo ao terceiro nível de resolução: $\psi_{sum} = |(\uparrow 2)\psi_2| + |(\uparrow 3)\psi_3|$. Para encontrar o início/fim dos complexos QRS verifica-se quando a amplitude do sinal é superior/inferior ao limiar $thr = 0,3max(\psi_{sum})$. Para evitar falsas detecções, utiliza-se de informações da fisiologia do coração que implicam em restrições aos pontos de início/fim dos complexos QRS. Se Fs é a taxa de amostragem do sinal de ECG, t_i e t_f as localizações iniciais e finais, respectivamente, de um complexo QRS, então a relação entre essas variáveis, considerando que a largura de um complexo QRS máxima é de até 0,12 segundos [1], é: $|t_i - t_f| \leq 0,12Fs$. Outra restrição, que inibe a detecção prematura de complexos QRS, causada por ruído, por exemplo, é utilizar-se do fato que há uma distância mínima entre os picos das ondas R, porque quanto menor for essa distância maior será a frequência cardíaca. Essa distância é dada pela relação: $RR_{min} = \frac{60}{208}Fs$. Quando uma quantidade insuficiente de complexos QRS é detectada, sendo que o mínimo é dado por $R_{min} = \tau\frac{35}{60}$ e τ é a duração em segundos do sinal analisado, é verificado se o segundo maior ponto de máximo das ondas R é menor que 30% da maior amplitude. Quando for, então o complexo QRS com a maior amplitude é desconsiderado e um novo limiar calculado para o sinal resultante. O algoritmo é então reiniciado utilizando esse novo limiar.

Os sinais da base de dados "Challenge 2011-*Training Set A*"(PhysioNet) [6], utilizada para experimentos neste trabalho, foram obtidos por pessoal com experiência variada na área e por meio de dispositivos móveis, o que resultou em alguns sinais com bastante distorção. Ao todo foram analisados 10 registros, num total de 120 sinais de ECG, todos obtidos utilizando as derivações I, II, III, aVF, aVL, aVR, V1, V2, V3, V4, V5 e V6. Obteve-se taxas de previsibilidade de 99,20%, de sensibilidade de 99,70% e de erro em apenas 1,10%, contra 97,10%, 99,00% e 3,70%, respectivamente, obtidas pelo método proposto por [4].

Referências

[1] BRAUNWALD, E. AND ZIPES, D. P. AND LIBBY, P. - *Tratado de Medicina Cardiovascular*, Roca, São Paulo, 2003.

[2] GOLDBERGER, A. L. AND AMARAL, L. A. N. AND GLASS, L. AND HAUSDORFF, J. M. AND IVANOV, P. CH. AND MARK, R. R. AND MIETUS, J. E. AND MOODY, G. B. AND PENG, C. K. AND STANLEY, H. E. - PhysioBank, PhysioToolkit, and PhysioNet: Components of a New Research Resource for Complex Physiologic Signals. *Circulation Electronic Pages http://circ.ahajournals.org/cgi/content/full/101/23/e215*, doi: 10.1161/01.CIR.101.23.e215.

[3] GUYTON, A. C. AND HALL, J. E. - *Tratado de Fisiologia Médica*, Elsevier, Rio de Janeiro, 11ª ed., 2011.

[4] KAKARALA, AND R. OGUNBONA, P. O. - Signal Analysis Using a Multiresolution Form of the Singular Value Decomposition. *IEEE Transactions on Image Processing*, **10**, 724-735, 2001.

[5] LEPAGE, R. AND BOUCHER, J. AND BLANC, J. - ECG Segmentation and P-wave Feature Extraction: Application to Patients Prone To Atrial Fibrillation. *23rd Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, 2001.

[6] PAN, J. AND TOMPKINS, W. J. - A Real-time QRS detection algorithm. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, **3**, 230-236, 1985.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *139–140*

RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE POISSON COM PGD E O MÉTODO DE GALERKIN DESCONTÍNUO

I. A. SCHUH[1,†] & IGOR MOZOLEVSKI[1,‡]

[1]Departamento de Matemática, UFSC, SC, Brasil.

[†]luciane.schuh@ufsc.br, [‡]igor.e.mozolevski@gmail.com

Resumo

A técnica PGD (do inglês *Proper Generalized Decomposition*) permite construir aproximações numéricas para problemas multidimensionais por meio de uma estratégia de enriquecimento sucessivo e está baseada no conceito de separação de variáveis, possibilitando assim a resolução de problemas complexos sem recorrer ao problema multidimensional original. Dentre as aplicações podemos citar dinâmica de fluidos complexos, química quântica, bem como nas simulações em tempo-real. Neste trabalho ilustramos a aplicação do método PGD na equação de Poisson em 2D, o que permitiu desacoplar o problema em dois problemas unidimensionais, os quais foram resolvidos com o método de Galerkin Descontínuo com penalização interior. Apresentamos um exemplo numérico que ilustra a precisão e convergência do método.

1 Descrição do problema

Considere a equação de Poisson

$$\Delta u(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

no domínio $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y = (0,L) \times (0,H)$ com condições de fronteira de Dirichlet homogêneas. Supomos que o termo de fonte pode ser decomposto na forma separada $f(x,y) = \sum_{j=1}^{\mathcal{F}} F_j^x(x).F_j^y(y)$. A aproximação PGD procurada para a equação de Poisson (1) é uma solução na forma separada:

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^{N} X_i(x).Y_i(y) \tag{2}$$

Em cada passo de enriquecimento $n(n \geq 1)$, queremos calcular o termo $X_n(x).Y_n(y)$ e supomos que já calculamos os $n-1$ primeiros termos da aproximação PGD. Neste caso ambas funções $X_n(x)$ e $Y_n(y)$ não são conhecidas e o problema resultante é não-linear necessitando um esquema iterativo no processo de solução. Um dos processos iterativos usados para lidar com a não-linearidade do problema é a estratégia de direção alternada que consiste em calcular $X_n^p(x)$ a partir de $Y_{n-1}^p(y)$ e após calcular Y_n^p a partir de $X_n^p(x)$. Cada iteração do esquema de direção alternada consiste nos dois seguintes passos:

1) Calcular $X_n^p(x)$ de $Y_n^{p-1}(y)$: Neste caso, a aproximação é dada por

$$u^{n,p}(x,y) = \sum_{i=1}^{n-1} X_i(x)Y_i(y) + X_n^p(x).Y_n^{p-1}(y) \tag{3}$$

onde X_n^p é a incógnita. Substituimos (3) na forma residual da equação de Poisson e obtemos um problema unidimensional sobre Ω_x para ser resolvido dado por

$$\alpha^x \frac{d^2 X_n^p}{dx^2} + \beta^x X_n^p = -\sum_{i=1}^{n-1}\left(\gamma_i^x \frac{d^2 X_i}{dx^2} + \delta_i^x X_i\right) + \sum_{j=1}^{\mathcal{F}} \epsilon_j^x F_j^x(x) \tag{4}$$

2) Calcular $Y_n^p(y)$ de $X_n^p(x)$: a aproximação é dada por,

$$u^{n,p}(x,y) = \sum_{i=1}^{n-1} X_i(x)Y_i(y) + X_n^p(x).Y_n^p(y) \tag{5}$$

onde Y_n^p é a incógnita. Após substituir (5) na forma residual da equação de Poisson obtemos o problema unidimensional sobre Ω_y para ser resolvido dado por

$$\alpha^y \frac{d^2Y_n^p}{dy^2} + \beta^y Y_n^p = -\sum_{i=1}^{n-1}\left(\gamma_i^y \frac{d^2Y_i}{dy^2} + \delta_i^y Y_i\right) + \sum_{j=1}^{\mathcal{F}} \epsilon_j^y F_j^y(y) \tag{6}$$

Os coeficientes das equações (4) e (6) estão especificados em (7) e (8) e resolvemos estas equações diferenciais usando o método de Galerkin Descontínuo com penalização interior [4]. Paramos o processo de enriquecimento da solução se $\varepsilon(n) < \epsilon_1$ onde $\varepsilon(n) = \frac{||X_n(x).Y_n(y)||}{||X_1(x).Y_1(y)||}$ e paramos o processo iterativo em p de obtenção da solução pelo método do ponto fixo se $||X_n^p(x).Y_n^p(y) - X_n^{p-1}.Y_n^{p-1}|| < \epsilon_2$, para precisões ϵ_1 e ϵ_2 dadas. Para mais detalhes sobre o método PGD ver [1, 3].

$$\begin{cases} \alpha^x = \int_{\Omega_y} \left(Y_n^{p-1}(y)\right)^2 dy \\ \beta^x = \int_{\Omega_y} Y_n^{p-1}(y) \frac{d^2Y_n^{p-1}(y)}{dy^2} dy \\ \gamma_i^x = \int_{\Omega_y} Y_n^{p-1}(y) Y_i(y) dy \\ \delta_i^x = \int_{\Omega_y} Y_n^{p-1}(y) \frac{d^2Y_i(y)}{dy^2} dy \\ \epsilon_j^x = \int_{\Omega_y} Y_n^{p-1}(y) F_j^y(y) dy \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \alpha^y = \int_{\Omega_x} \left(X_n^p(x)\right)^2 dx \\ \beta^y = \int_{\Omega_x} X_n^p(x) \frac{d^2X_n^p(x)}{dx^2} dx \\ \gamma_i^y = \int_{\Omega_x} X_n^p(x) X_i(x) dx \\ \delta_i^y = \int_{\Omega_x} X_n^p(x) \frac{d^2X_i(x)}{dx^2} dx \\ \epsilon_j^y = \int_{\Omega_x} X_n^p(x) F_j^x(x) dx \end{cases} \tag{8}$$

2 Exemplo numérico

Consideramos a equação de Poisson (1) com condições de fronteira de Dirichlet homogêneas em que $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y = (0,2) \times (0,1)$ e o termo de fonte $f = 1$. Neste caso a solução exata é:

$$u_{ex}(x,y) = \sum_{m,n\ impar} \frac{64}{\pi^4 nm(4n^2+m^2)} \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right) \text{sen}\ (n\pi y) \tag{9}$$

Implementamos o método PGD com precisão $\epsilon_1 = 1e-4$ e $\epsilon_2 = 1e-6$. Empregamos o método de Galerkin descontínuo com penalização interior para resolver as equações diferenciais (4) e (6) em diferentes malhas (Mx em (4) e My em (6)) e ordens de aproximação polinomial. Na Fig. (1) analisamos a convergência da solução reconstruida u^n para a solução exata u_{ex} por meio do erro na norma $L^2(\Omega_x \times \Omega_y)$, ou seja, $\|u_{ex}(x,y) - u^n(x,y)\|_2$. Analisamos esta convergencia em função dos modos n. Note que precisamos apenas alguns passos de enriquecimento para obter convergência para a solução exata.

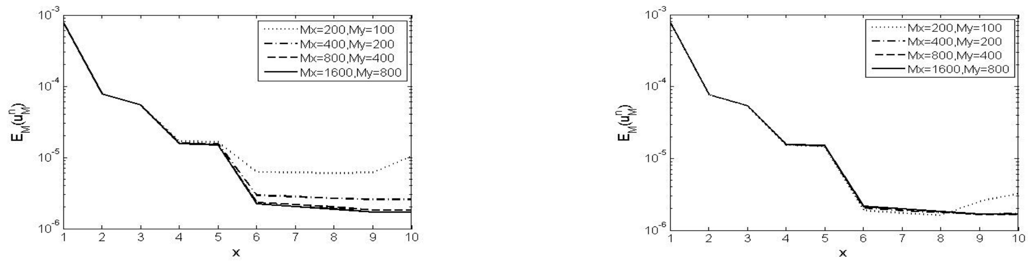

Figura 1: Erro na norma L^2 da solução PGD em função do numero de enriquecimentos n obtida com ordem de aproximação polinomial $k = 2$ no gráfico da esquerda e $k = 3$ no gráfico da direita.

Referências

[1] Chinesta, F., Keunings, R. and Leygue, A. - *The Proper Generalized Decomposition for advanced numerical simulations.*, Springer, 2014.

[2] Ammar,A. et al - An error estimator for separated representations of highly multidimensional models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **199**, 1872-1880, 2010.

[3] Ern, A., Mozolevski, I. and Schuh, L. - Accurate velocity reconstruction for Discontinous Galerkin approximations of two-phase porous media flows. *Comptes Rendus Mathematique*, **347**, 551-554, 2009.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *141–142*

TIPO E SOMAS TORCIDAS INDUZIDAS POR INTERPOLAÇÃO

WILLIAN CORRÊA[1,2,†]

[1]Instituto de Matemática e Estatística, USP, SP, Brasil.

[†]willhans@ime.usp.br

Resumo

Uma autoextensão de um espaço de Banach Y é um espaço (quasi-)Banach X que o contém como subespaço (isomorfo) e cujo respectivo quociente também é isomorfo a Y. Uma autoextensão é trivial se Y é complementado em X. Estudamos condições garantindo que certas autoextensões sejam não-triviais ou singulares, que em certo sentido são o mais não-triviais o possível.

1 Introdução

Dados dois espaços de Banach Y e Z, uma soma torcida de Y e Z (nessa ordem) nada mais é do que um espaço quasi-normado X que contém Y como subespaço (isto é, um subespaço isomorfo a Y) e tal que X/Y é isomorfo a Z. Isso pode ser descrito por uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{q} Z \longrightarrow 0$$

onde i e q são operadores lineares limitados. Isto garante que X é um espaço quasi-Banach. Se $Y = Z$, diremos que X é uma autoextensão de Y.

Dizemos que duas somas torcidas X_1, X_2 de Y e Z são equivalentes se existe $T : X_1 \to X_2$ um operador linear limitado que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "T"] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & X_2 \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Isso implica que T é um isomorfismo. Uma soma torcida de Y e Z é dita trivial se Y é complementada nela, o que ocorre se, e somente se, ela é equivalente a $Y \oplus Z$. Para mais informações sobre somas torcidas, veja [1].

Dada uma soma torcida de Y e Z com operador quociente q

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow X \xrightarrow{q} Z \longrightarrow 0$$

e dado um subespaço fechado W de Z, podemos induzir uma soma torcida de Y e W

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow q^{-1}(W) \longrightarrow W \longrightarrow 0$$

Diremos que X é uma soma torcida singular se a para todo subespaço fechado de dimensão infinita de Z a soma torcida induzida for não-trivial. É fácil provar que isso ocorre se, e somente se, o operador quociente é estritamente singular, isto é, sua restrição a qualquer subespaço fechado de dimensão infinita de X nunca é um isomorfismo.

Um esquema de interpolação complexa de espaços de Banach induz naturalmente uma autoextensão do espaço X_θ, para cada $\theta \in (0, 1)$:

$$0 \longrightarrow X_\theta \longrightarrow dX_\theta \longrightarrow X_\theta \longrightarrow 0$$

Em nosso trabalho, estudamos condições que garantem que a autoextensão acima seja não-trivial ou singular.

2 Resultados Principais

Definição 2.1. *Sejam X um espaço de Banach e $p \in [1,2]$. Dizemos que X tem tipo p se existe $C > 0$ tal que se $x_1, ..., x_n \in X$, então*

$$\mathbb{E}\left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i \right\| \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

onde a esperança é tomada sobre todas as possíveis escolhas de sinais $\epsilon_i = \pm 1$.

Definimos $p_X = \sup\{p : X \text{ tem tipo } p\}$.

Teorema 2.1. *Seja (X_0, X_1) um par compatível de espaços de Banach no sentido de interpolação. Suponha que X_0 tem tipo p_{X_0} e X_1 tem tipo p_{X_1}, $p_{X_0} \neq p_{X_1}$, e considere p dado por $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_{X_0}} + \frac{\theta}{p_{X_1}}$.*

(a) Se $p_{X_\theta} = p$, então dX_θ é não-trivial.

(b) Caso $p_W = p$ para todo W subespaço fechado de dimensão infinita de X_θ , então dX_θ é singular.

Para provar esse resultado, usamos estimativas como as de [2] e o teorema de Maurey-Pisier [3], que diz que l_{p_X} é finitamente representado em X, se este tem dimensão infinita. Note que em [2] é dado um resultado do mesmo tipo, contudo, os espaços envolvidos devem ter estrutura de reticulado ou uma base.

Este trabalho foi feito sob orientação de Valentin Ferenczi, como parte do doutorado (em andamento) do autor.

Referências

[1] J. M. F. Castillo and M. González - *Three-space Problems in Banach Space Theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997.

[2] J. M. F. Castillo and V. Ferenczi and M. González - *Singular twisted sums generated by complex interpolation*, arXiv:1410.5505, 2014.

[3] B. Maurey and G. Pisier - *Séries de variables aléatoires vectorièlles independantes et priopriétés géométriques des espaces de Banach*, Studia Math.58 (1976).

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *143–144*

ESTRUTURAS COMPLEXAS COMPATÍVEIS NO ESPAÇO DE KALTON-PECK

J. M. F. CASTILLO[1,†], W. CUELLAR[2,‡], V. FERENCZI[2,§] & Y. MORENO[3,§§]

[1]Departamento de Matemáticas, Universidad de Extremadura, Espanha, [2]IME, Universidade de São Paulo, Brasil,
[3]Escuela Politécnica, Universidad de Extremadura, Espanha.

[†]castillo@unex.es, [‡]cuellar@ime.usp.br, [§]ferenczi@ime.usp.br, [§§]ymoreno@unex.es

Resumo

Usando a teoria de estruturas complexas estudamos o problema clássico dos hiperplanos no espaço Z_2 de Kalton-Peck. Com o propósito de distinguir Z_2 de seus hiperplanos nos perguntamos se os hiperplanos admitem estrutura complexa. Nesse sentido, provamos que os hiperplanos de Z_2 contendo a cópia canônica de ℓ_2 não admitem estruturas complexas que sejam extensões de estruturas complexas em ℓ_2.

1 Introdução

Dados X e Y espaços de Banach. Uma soma torcida de X e Y é um espaço quase-Banach Z que possui um subespaço X' isomorfo a X tal que Z/X' seja isomorfo a Y. Equivalentemente, Z é uma soma torcida de X e Y se existe uma *sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{q} Y \longrightarrow 0.$$

Usando a teoria desenvolvida por N. J. Kalton e N. Peck [3] as somas torcidas podem ser identificadas com aplicações homogêneas $\Omega : Y \to X$ satisfazendo

$$\|\Omega(y_1 + y_2) - \Omega(y_1) - \Omega(y_2)\| \leq M\left(\|y_1\| + \|y_2\|\right),$$

as quais são chamadas de aplicações quase-lineares. Cada uma destas aplicações induz uma quase-norma em $X \times Y$ definida por

$$\|(x, y)\|_{\Omega} = \|y\| + \|x - \Omega(y)\|.$$

O espaço quase-Banach $X \oplus_{\Omega} Y := (X \times Y, \|.\|_{\Omega})$ é uma soma torcida de X e Y determinada pela sequência exata

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{j} X \oplus_{\Omega} Y \xrightarrow{q} Y \longrightarrow 0,$$

onde j e q são a inclusão e a projeção canônica, respetivamente.

O espaço de Kalton-Peck Z_2 [3] é definido como a soma torcida de ℓ_2 com ℓ_2 associado a uma aplicação quase linear Ω_2 tal que

$$\Omega_2(x) = \sum x_n \log \frac{\|x\|_2}{|x_n|} e_n$$

para todo $x \in \ell_2$ de suporte finito. Desde sua construção a começos da década de 1980, conjecturou-se que Z_2 não é primo, e que, de fato, é um contra-exemplo ao problema dos hiperplanos de Banach. A resposta ao problema dos hiperplanos de Banach foi dada por Gowers [2] em 1994, e desde então vários outros exemplos tem sido construídos, porém a pergunta em Z_2 continua aberta. A questão em Z_2 é relevante, pois seria o exemplo mais simples com a propriedade de não ser isomorfo a seus hiperplanos. Uma estratégia para provar a conjectura de Z_2, seria provando que seus hiperplanos não admitem estrutura complexa (Z_2 admite estrutura complexa pois é isomorfo a seu quadrado), ou seja, provando que Z_2 tem dimensão infinita par, segundo a terminologia de [1].

2 Resultados Principais

Consideraremos hiperplanos de Z_2 da forma $\ell_2 \oplus_{\Omega_2 i} H$ para algum hiperplano H de ℓ_2, onde $i : H \to \ell_2$ é a inclusão canônica. Nosso resultado principal é:

Teorema 2.1. *Seja $\alpha : \ell_2 \to \ell_2$ uma estrutura complexa. Então nenhuma estrutura complexa $\gamma : \ell_2 \oplus_{\Omega_2 i} H \to \ell_2 \oplus_{\Omega_2 i} H$ faz o seguinte diagrama comutar*

$$\begin{tikzcd}
\ell_2 \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\alpha"] & \ell_2 \oplus_{\Omega_2 i} H \arrow[d, dotted, "\gamma"] \\
\ell_2 \arrow[r, "j"] & \ell_2 \oplus_{\Omega_2 i} H
\end{tikzcd}$$

Para demonstrar o Teorema 2.1 serão necessárias as seguintes proposições.

Definição 2.1. *Sejam Z uma soma torcida de espaços de Banach X e Y e operadores $\alpha : X \to X$ e $\beta : Y \to Y$. Dizemos que o par (α, β) é* compatível *com Z se existir um operador $\gamma : Z \to Z$ tal que o seguinte diagrama seja comutativo.*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & Z \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\gamma"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & Z \arrow[r] & Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Proposição 2.1. *Sejam $T, U : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ um par de operadores lineares limitados compatíveis com Z_2. Então $T - U$ é compacto.*

Proposição 2.2 (Ferenczi- Galego, 2007)**.** *Sejam T e U estruturas complexas em um espaço de Banach de dimensão infinita X e em um hiperplano H de X, respetivamente. Então o operador $T|_H - U$ não é estritamente singular.*

Esquema da prova do Teorema 2.1. Por absurdo, supondo que existe uma estrutura complexa γ em $\ell_2 \oplus_{\Omega_2 i} H$ tal que o diagrama anterior seja comutativo (i.e., γ estende a α). Obtemos um operador U em ℓ_2 tal que $U|_H$ é uma estrutura complexa em H e um operador $\tilde{\gamma}$ em Z_2 tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ell_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \ell_2 \oplus_{\Omega_2} \ell_2 \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\gamma}"] & \ell_2 \arrow[r] \arrow[d, "U"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ell_2 \arrow[r] & \ell_2 \oplus_{\Omega_2} \ell_2 \arrow[r] & \ell_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Segue da Proposicção 2.1 que $\alpha - U$ é compacto. Agora, pela Proposição 2.2, $\alpha|_H - U|_H$ não é estritamente singular. Obtemos assim uma contradição. $\square$

Entretanto, permanece em aberto determinar se em geral os hiperplanos de Z_2 não admitem estrutura complexa.

Referências

[1] V. Ferenczi, E. Galego. Countable groups of isometries on Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc. 362* **(8)** (2010), 4385–4431.

[2] W.T. Gowers. A solution to Banach's hyperplane problem, *Bull. Lond. Math. Soc. 26* **(6)** (1994), 523–530.

[3] N. J. Kalton, N. T. Peck. Twisted sums of sequence spaces and the three space problem, *Trans. Amer. Math. Soc. 255* (1979), 1–30.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *145–146*

ESPECTRO DO OPERADOR LAPLACIANO DE DIRICHLET EM TUBOS DEFORMADOS

CARLOS RONAL MAMANI MAMANI[1,†] & ALESSANDRA APARECIDA VERRI[1,‡]

[1]Departamento de Matemática, UFSCAR, SP, Brasil.

[†]carlosmamani@dm.ufscar.br, [‡]alessandraverri@dm.ufscar.br

Resumo

Seja Ω um tubo deformado em $\mathbb{R}^3$ e $-\Delta_D^\Omega$ o operador Laplaciano de Dirichlet em Ω. Neste trabalho, vamos estudar o espectro $\sigma(-\Delta_D^\Omega)$ do operador $-\Delta_D^\Omega$. Mais precisamente, vamos analisar como as características geométricas de Ω podem influenciar no conjunto $\sigma(-\Delta_D^\Omega)$. Primeiramente, vamos mostrar que, sob certas condições, o espectro essencial $\sigma_{\rm ess}(-\Delta_D^\Omega)$ de $-\Delta_D^\Omega$ é o mesmo, independente se o tubo é reto, curvado ou torcido. Com relação ao espectro discreto $\sigma_{\rm dis}(-\Delta_D^\Omega)$ de $-\Delta_D^\Omega$, vamos mostrar que se Ω é um tubo apenas curvado, então o conjunto $\sigma_{\rm dis}(-\Delta_D^\Omega)$ é não vazio. Por outro lado, se Ω é um tubo apenas torcido, então $\sigma_{\rm dis}(-\Delta_D^\Omega)$ é vazio. No caso em que Ω é simultaneamente torcido e levemente curvado, veremos que o espectro discreto permanece vazio.

1 Introdução

Seja ω um subconjunto aberto, limitado, simplesmente conexo e não vazio de $\mathbb{R}^2$. Consideramos um tubo deformado como sendo a região obtido transladando-se ω ao longo de uma curva parametrizada por comprimento de arco Γ em $\mathbb{R}^3$. Este movimento é de acordo com um Frenet Frame apropriado e por razões técnicas exigimos que Γ seja de classe C^3 (para mais detalhes sobre a construção de um tubo deformado ver [7]). Denotamos por $k(s)$ e $\tau(s)$ a curvatura e a torção de Γ no ponto s, respectivamente. Se a curvatura é não nula, obtemos um tubo curvado e dizemos que Ω possui um efeito da curvatura. Por outro lado, a região ω pode se mover ao longo de Γ e ao mesmo tempo realizar uma rotação de ângulo $\theta(s)$ em cada ponto $\Gamma(s)$. Neste caso, se ω não é um disco centrado em Γ e $\tau + \dot\theta \neq 0$, obtemos um tubo torcido e dizemos que Ω possui um efeito de torção.

Seja Ω um tubo deformado definido como acima, consideremos a forma quadrática

$$q(\psi) := \int_\Omega |\nabla\psi|^2 \, dx, \qquad \mathrm{dom}\, \mathrm{q} = \mathcal{H}_0^1(\Omega), \tag{1}$$

em que ∇ denota o gradiente de ψ nas coordenadas usuais de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ denota o completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ no espaço de Sobolev $\mathcal{H}^1(\Omega)$. Observemos que, se $\psi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, então $\psi|_{\partial\Omega} = 0$ no sentido do Teorema do traço [2].

A escolha do domínio da forma quadrática $q(\psi)$ surge de uma questão natural quando se restringe o Hamiltoniano de uma partícula livre em Ω. De fato, existe a necessidade de uma condição de contorno em $\partial\Omega$. Este assunto é discutido em [3] e os autores mostram que sob certo ponto de vista a condição de Dirichlet em $\partial\Omega$ é a mais natural a ser considerada.

É conhecido que $q(\psi)$ é uma forma quadrática fechada e limitada inferiormente [7]. Chamamos de operador Laplaciano de Dirichlet em Ω como sendo o operador autoadjunto associado à (1). Denotamos este operador por $-\Delta_D^\Omega$ e o seu espectro por $\sigma(-\Delta_D^\Omega)$.

Nosso objetivo é o estudo dos estados limitados ou seja os valores do espectro discreto $\sigma_{\rm dis}(-\Delta_D^\Omega)$ de $-\Delta_D^\Omega$.

Seja $a = \sup_{y\in\omega} |y|$ no trabalho consideramos como hipóteses geral que

$$\kappa \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \mathrm{a}\|\kappa\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})} < 1. \tag{2}$$

e que o tubo não se auto-intercepta.

2 Principais Resultados

Se o tubo é reto, ou seja , $\kappa = 0 = \tau + \dot{\theta}$, o operador $-\Delta_D^{\mathbb{R}\times\omega}$ é unitariamente equivalente ao operador $-\Delta^{\mathbb{R}} \otimes I + I \otimes (-\Delta_D^{\omega})$, o qual é densamente definido em $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{L}^2(\omega)$. Aqui, $-\Delta^{\mathbb{R}}$ denota o operador Laplaciano em $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ e, como antes, $-\Delta_D^{\omega}$ denota o operador Laplaciano de Dirichlet na seção transversal ω. Sabemos que $\sigma(-\Delta^{\mathbb{R}}) = [0, \infty)$ e o espectro do operador $-\Delta_D^{\omega}$ é puramente discreto. Assim,

$$\sigma(H) = \sigma(-\Delta_D^{\mathbb{R}\times\omega}) = \sigma_{\text{ess}}(-\Delta_D^{\mathbb{R}\times\omega}) = \overline{\sigma(-\Delta^{\mathbb{R}}) + \sigma(-\Delta_D^{\omega})} = [E_1, \infty).$$

En que E_1 denota o primeiro autovalor de $-\Delta_D^{\omega}$.

De forma mais geral, ao trabalharmos com tubos deformados, temos o seguinte resultado [1].

Teorema 2.1. *Suponhamos que*

$$\lim_{|s|\to\infty} \kappa(s) = 0 \quad e \quad \lim_{|s|\to\infty} (\tau + \dot{\theta})(s) = 0. \tag{3}$$

Então, $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta_D^{\Omega}) = [E_1, \infty)$.

A seguir, mostramos como o efeito da curvatura pode influenciar no espectro discreto do operador $-\Delta_D^{\Omega}$ (ver [7] e [6]).

Teorema 2.2. *Suponhamos que $\kappa \neq 0$ e $\tau + \dot{\theta} = 0$. Então,* $\inf \sigma(-\Delta_D^{\Omega}) < E_1$.

Como uma consequência do Teorema 2.2, segue o seguinte corolário.

Corolário 2.1. *Sobre as hipóteses dos Teoremas 2.1 e 2.2, temos* $\sigma_{\text{dis}}(-\Delta_D^{\Omega}) \neq \varnothing$.

Finalmente no caso en que que Γ é uma linha reta. Assim, a sua curvatura κ é nula e, consequentemente, a sua torção τ também é nula. Nestas condições, mostramos as desigualdade do tipo Hardy.

$$\int_{\Omega} \Big(|\nabla\psi|^2 - E_1 |\psi|^2 \Big) dx \geq \int_{\Omega} \rho(x) |\psi|^2 dx, \qquad \forall \psi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega),$$

em que $\rho(x)$ é uma função positiva num conjunto medida não nula, estas desigualdades implicam que o espectro es puramente essencial.

Referências

[1] de Oliveira, C. R.: Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics. Basel: Birkhäuser, 2008.

[2] Evans, L. C.: Partial Differential Equations. AMS, Providence, 1998.

[3] Froese, R. e Herbst, I.: Realinzing holonomic constraints in classical and quantum mechanics. Communications in Mathematical Physics **220**, Issue 3, 489-535 (2001).

[4] Goldstone, J. e Jaffe, R. L.: Bound states in twisting tubes. Phys. Rev. B **45**, 14100-14107 (1992).

[5] Kalf, H., Schmincke, U. W., Walter, J. e Wüst, R.: On the espectral theory of Schrödinger and Dirac operators with strongly singular potentials. In LNM **448**, 182-226. Springer-Verlang, Berlin (1975).

[6] KrejčiřÃk, D. e Lu, Z.: Location of the essential spectrum in curved quantum layers. arXiv:1211.2541 [math.DG].

[7] KrejčiřÃk, D.: Twisting versus bending in quantum waveguides. Proc. Sympos. Pure Math. **77**, 617-636, Amer. Math. Soc., Proidence, RI (2008).

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *147–148*

UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DE UM FLUIDO MICROPOLAR NÃO NEWTONIANO NA FORMA ESTACIONARIA

MICHEL MELO ARNAUD[1,†] & GERALDO MENDES DE ARAÚJO[2,‡]

[1]PPGME, UFPA, PA, Brasil, [2]Faculdade de Matemática ,UFPA, PA, Brasil.

[†]michelmat1@yahoo.com.br, [‡]gera@gmail.com

Resumo

Neste trabalho investigamos um sistema acoplado de fluido micropolar não-newtoniano sob a forma estacionária. O problema foi considerado num domínio suave e limitado do $\mathbb{R}^3$. O tensor de estresse é dado por $\tau(e(u)) = [(\nu + \nu_r + M(|e(u)|^2))e(u)]$.Para provar existência de soluções fracas usamos o método de Galerkin e os argumentos de compacidade. Também consideramos a análise da unicidade de solução.

1 Introdução

Neste trabalho estudamos o sistema

$$-\nabla\cdot\tau(e(u)) + (u.\nabla)u + \nabla p = 2\nu_r w + f \qquad \text{em } \Omega, \tag{1}$$

$$-\nu_1\nabla\cdot e(w) \;\; + (u\cdot\nabla)w + 4\nu_r w = 2\nu_r\nabla\times u + g \qquad \text{em } \Omega, \tag{2}$$

$$\nabla\cdot u = 0 \qquad \text{em } \Omega, \tag{3}$$

$$u = 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega, \tag{4}$$

$$w = 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega, \tag{5}$$

o qual é um modelo para um fluido micropolar com viscosidade variável caracterizada pelo tensor de estresse $\tau(e(u)) = (\nu + \nu_0 + M(|e(u)|^2))e(u)$ e os símbolos ν, ν_0, ν_r são constantes positivas. Nesse estudo estabelecemos resultados de existência e unicidade.

Em relação as notações usadas: vamos considerar um domínio Ω contido em $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, com fronteira suave $\partial\Omega$. Nesse contexto, os vetores $u = (u_1, ..., u_d)$ e $w = (w_1, ..., w_d)$ representam, respectivamente, a velocidade linear e microrrotacional de um fluido contido em Ω. Essas velocidades são as variáveis de nosso problema. A pressão desse fluido é representada por p, ρ é uma constante positiva que determina sua densidade e $f = (f_1, ..., f_d)$ será a resultante das forças externas aplicadas a esse fluido. A aplicação $\tau : \mathbb{R}^{d^2}_{sym} \to \mathbb{R}^{d^2}_{sym}$ é o tensor de estresse, onde $e : R^d \to R^{d^2}_{sym}$ leva cada vetor $u \in R^d$ na parte simétrica do gradiente da velocidade, dada pela expressão

$$e(u) = \frac{1}{2}\left[\nabla u + (\nabla u)^T\right], \tag{6}$$

Também consideramos uma aplicação real $M : (0, \infty) \to (0, \infty)$ satisfazendo as seguintes hipóteses

$$c_1(1 + |e(u)|)^2 \quad \leq \quad M(|e(u)|^2) \leq c_2(1 + |e(u)|)^2, \tag{7}$$

$$0 \quad \leq \quad M'(|e(u)|^2) \leq \frac{c_3(1 + |e(u)|)}{|e(u)|}, \tag{8}$$

em que M_0, c_1 e c_2 são constantes positivas e, o símbolo $|e(u)|$ denota a norma euclidiana da matriz $e(u)$

Definição 1.1. *Seja* $f \in (V \cap V)'$ *e* $g \in H^{-1}(\Omega)$. *Uma solução para* $(1-5)$ *é um par de funções* (u, w), *tal que*

$$u \in V \cap V_4, \quad w \in H_0^1(\Omega),$$

satisfazendo a seguinte identidade

$$\left| \begin{array}{l} (\nu + \nu_r)a(u, \varphi) + b(u, u, \varphi) + \displaystyle\int_\Omega M(|e(u)|^2) e_{ij}(u) e_{ij}(\varphi) dx \\ = 2\nu_r(\nabla \times w, \varphi) + (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}, \\ \\ \nu_1 a(w, \phi) + \nu_1(\nabla \cdot w, \nabla \cdot \phi) + b(u, w, \phi) + 4\nu_r(w, \phi) \\ \\ = 2\nu_r(\nabla \times u, \phi) + (g, \phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \end{array} \right. \tag{9}$$

2 Resultados Principais

Teorema 2.1. *Se* $d \leq 3$, $f \in (V \cap V')$ *e* $g \in H^{-1}(\Omega)$, *então existe uma solução fraca do sistema (1-5), no sentido da definição (1.1),*

Teorema 2.2. *Supondo as condições do teorema (2.1) com* $d \leq 3$ *e* $(\nu + \nu_r)$ *suficientemente grande, o sistema (1-5) possui uma única solução fraca.*

Referências

[1] G. M. de Araújo, M. M. Araújo and E. F. L. Lucena, *ON A SYSTEM OF EQUATIONS OF A NON-NEWTONIAN MICROPOLAR FLUID*, Hindawi Publishing Corporation Journal of Applied Mathematics Volume 2015, Article ID 481754, 11 pages. (2015)

[2] G. Lukaszewicz, *Micropolar Fluids, Theory and applications*, Modeling and simulations in Science, Engineering and Technology, Birkhäuser Boston, Inc.,Boston, MA, 1999.

[3] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Resolution Des Problémes Aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[4] J. Málek, J. Nečas, and M. Růžička, *On weak solutions to a class of non-Newtonian incompressible fluids in bounded three-dimensional domains: the case* $p \geq 2$, Advances in Differential Equations, Vol. 6, N. 3, March 2001, pp. 257-302

[5] J. Málek, J. Nečas, M. Rokyta and M. Růžička, *Weak and Measure-valued Solutions to Evolutionary PDEs*, Chapman & Hall, First Edition 1996.

[6] Piotr Szopa, *On Existence and Regularity of Solutions for 2-D Micropolar Fluid Equations with Periodic Boundary Conditions* , Mathematical Methods in the Applied Sciences (2007)**30**:331-346.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *149–150*

PROBLEMA DE QUARTA ORDEM COM CONDIÇÃO DE FRONTEIRA DE NAVIER

THIAGO RODRIGUES CAVALCANTE[1,†] & EDCALOS DOMINGOS DA SILVA[1,‡]

[1]Instituto de Matemática e Estatística, UFG, GO, Brasil.

[†]thiago_cavalcante@ufg.br, [‡]edcarlos@ufg.br

Resumo

Neste trabalho consideramos o seguinte problema de quarta ordem com condição de contorno de Navier

$$\textbf{(P)} \quad \begin{cases} \alpha\Delta^2 u + \beta\Delta u &= f(x,u)\,, \quad \text{em } \Omega \\ u = \Delta u &= 0\,, \qquad \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) -$ biharmônico (operador de quarta ordem),
α e β são constantes, a não linearidade $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 4)$ é um domínio limitado cuja fronteira $\partial\Omega$ é uma variedade suave.

O operador biharmônico pode descrever a mudança na forma estática de uma estrutura ou o movimento rígido de um determinado corpo. Este problema elíptico de quarta ordem é análogo à uma classe de problemas que têm sido estudada por diversos autores. Em [1] há um levantamento dos resultados obtidos nessa direção, foi apontado que esse tipo de não linearidade pode fornecer um modelo para o estudo das oscilações acontecidas em pontes suspensas. Um caso famoso na teoria é o colapso da ponte de Takoma, no dia 7 de novembro de 1940 em Washington (EUA), mais precisamente no estreito de Takoma, entrou em colapso uma ponte pênsil de aproximadamente 1600 m após oscilar por aproximadamente 10 horas. Os ventos atingiram a velocidade de 64 km/h, fazendo com que a ponte oscilasse muito juntamente com os cabos de sustentação, alcançando assim o valor de uma das frequências naturais da ponte, denominadas frequências ressonantes.

Modelado matematicamente, este colapso pode ser descrito através deste problema de quarta ordem, analisando a não linearidade $f(x,u) = b[(u+1)^+ - 1]$ onde b é uma constante positiva, $\alpha = 1$ e $\beta > 0$.

A dificuldade encontrada nesse trabalho foi o fato de omitirmos a condição superquadrática no infinito de Ambrosetti-Rabinowitz, a qual é dada por:

(AR) Existem $\mu > 2$ e $L > 0$ tais que :

$$0 < \mu F(x,u) \leq u f(x,u), \;\; \forall \mid u \mid \geq L, \;\; x \in \Omega,$$

onde $F(x,u) = \displaystyle\int_0^u f(x,t)\,dt$.
Nos últimos anos este problema tem sido muito estudado, supondo condições sobre função $H(x,t) = tf(x,t) - 2F(x,t)$, as quais substituem a condição **(AR)**. Neste trabalho vamos supor uma condição de não quadraticidade no infinito para esta função H a qual inclue funções como a $f(x,t) = t\ln(1+t)$, a qual, verifica-se trivialmente que não satisfaz **(AR)**.

1 Introdução

Encontrar soluções do problema **(P)** é equivalente a encontrar os pontos críticos do funcional I associado a **(P)** definido no espaço $E = \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \alpha|\Delta u|^2 - \beta|\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega F(x,u)\,dx, \quad u \in E.$$

Utilizando algumas desigualdades variacionais, verificamos que E é um espaço de Hilbert, com o seguinte produto interno: $\langle u,v\rangle = \alpha\displaystyle\int_\Omega \Delta u\Delta v\,dx - \beta\int_\Omega \nabla u\nabla v\,dx$.

Considerando λ_i os autovalores do problema $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, então vamos supor as seguintes condições sobre a função não linear $f(x,t)$:

$(\mathbf{f_0})$ Existem $a_1 > 0$ e $p \in \left(2, 2_* = \dfrac{2N}{N-4}\right)$, tais que:

$$| f(x,t) | \leq a_1(1+ | t |^{p-1}),\ \forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R};$$

$(\mathbf{f_1})$ $\displaystyle\lim_{|t|\to\infty} \frac{f(x,t)}{t} = \infty$ uniformemente em Ω ;

$(\mathbf{f_2})$ $\displaystyle\lim_{|t|\to 0} \frac{f(x,t)}{t} = l_1$ uniformemente em Ω,

onde $l_1 < \mu_1$, onde $\mu_1 = \lambda_1(\alpha\lambda_1 - \beta)$ é o primeiro autovalor do problema (Δ^2, E).

Além destas hipóteses, vamos considerar a seguinte condição de não quadraticidade no infinito,

$(\mathbf{NQ})$ $\displaystyle\lim_{|t|\to\infty} H(x,t) = \infty$ uniformemente em Ω, com $H(x,t) = tf(x,t) - 2F(x,t)$.

2 Resultados Principais

Theorem 2.1. *Suponha que o funcional associado ao problema **(P)**, I, satisfaz* $(\mathbf{f_0}), (\mathbf{f_1})$ *e* $(\mathbf{f_2})$. *Então funcional I satisfaz :*

(PM-1) *$I \in C^1(\mathbf{E}, \mathbb{R})$, $I(0) = 0$ e $\exists r,\ \rho > 0$ tais que*

$$I(u) \geq \rho,\ \forall u \in S_r = \{u \in \mathbf{X} : \|u\| = r\}.$$

(PM-2) *$\exists\, e \in \mathbf{E}$ com $\|e\| > r$ tal que $I(e) \leq 0$.*

donde concluímos que I possui a geometria do Passo da Montanha.

Theorem 2.2. *Suponha que o funcional associado ao problema **(P)**,I, satisfaz as condições* $(\mathbf{f_0})$, $(\mathbf{f_1})$, $(\mathbf{f_2})$ *e além disso, satisfaz a condição de não quadraticidade no infinito* $(\mathbf{NQ})$. *Então I satisfaz a condição de Cerami.*

Theorem 2.3. *Suponha que o funcional I satisfaz* $(\mathbf{f_0})$, $(\mathbf{f_1})$, $(\mathbf{f_2})$ *e* $(\mathbf{NQ})$, *então existem duas soluções para o problema **(P)**, uma positiva $u_1 > 0$ e outra negativa $u_2 < 0$ em Ω.*

Referências

[1] A.C. Lazer, P.J. McKenna, Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges: some new connections with nonlinear analysis. SIAM Review 32 (1990) 537 578.

[2] A.M. Micheletti, A. Pistoia, Nontrivial solutions for some fourth order semilinear elliptic problems, Nonlinear Anal. 34 (4) (1998) 509-523.

[3] Y. Pu, X. P. Wu and C. L. Tang, Fourth-order Navier boundary value problem with combined nonlinearities, J. Math. Anal. Appl., 398 (2013), 798-813.

[4] Ye, Yiwei; Tang, Chun-Lei Existence and multiplicity of solutions for fourth-order elliptic equations in RN. J. Math. Anal. Appl. 406 (2013), no. 1, 335-351. 35J30

[5] X. Liu, Y. Huang, On sign-changing solution for a fourth-order asymptotically linear elliptic problem, Nonlinear Anal. 72 (5) (2010) 2271-2276.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *151–152*

TAXAS DE DECAIMENTO PARA UM MODELO VISCOELÁSTICO COM HISTÓRIA

CARLOS E. MIRANDA[1,†], MARCIO A. J. DA SILVA[1,‡] & VANDO NARCISO[3,§]

[1]Universidade Estadual de Londrina, UEL, PR, Brasil, [2]Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul , UEMS, MS, Brasil.

[†]professorcarlosem@gmail.com, [‡]marcioajs@uel.br, [§]vnarciso@uems.br

Resumo

Neste trabalho estudamos, via método de semigrupos, a boa colocação e o comportamento assintótico para uma classe de equações integro-diferenciais de segunda ordem.

1 Introdução

Considere a seguinte equação integro-diferencial de segunda ordem

$$u_{tt}(t) + Au(t) - \int_0^\infty g(s)Au(t-s)\,ds = 0, \quad \forall\ t > 0, \tag{1}$$

com condições iniciais

$$u(-t) = u_0(t), \quad \forall\ t \geq 0, \quad u_t(0) = u_1, \tag{2}$$

onde $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ é um operador autoadjunto positivo definido, H é um espaço de Hilbert e g é uma função positiva não crescente. Para a boa colocação do problema e o comportamento assintótico, assumimos que A e g satisfazem as seguintes hipóteses:

$(H1)$ Existe uma constante positiva a tal que

$$\|v\|^2 \leq \frac{1}{a}\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2, \quad \forall\ v \in D(A^{\frac{1}{2}}). \tag{3}$$

$(H2)$ $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função não crescente de classe C^1 sobre $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$ e satisfaz

$$g_0 := \int_0^\infty g(s)\,ds \in \left]0, 1\right[. \tag{4}$$

$(H3)$ Existe uma função $\xi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ não crescente e diferenciável tal que

$$g'(s) \leq -\xi(s)g(s), \quad \forall\ s \in \mathbb{R}^+. \tag{5}$$

Utilizando o método introduzido em [1], inserimos uma nova variável denominada *história relativa de u*

$$\begin{aligned} \eta = \eta^t(s) &= u(t) - u(t-s), \quad \forall\ t, s \in \mathbb{R}^+, \\ \eta^0(s) &= u_0 - u_0(-s) := \eta_0(s), \quad \forall\ s \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Assim, reformulamos (1)-(2) como um problema abstrato de Cauchy de primeira ordem

$$\begin{cases} \mathcal{U}_t = \mathcal{A}\mathcal{U}, \quad \forall\ t > 0, \\ \mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0, \end{cases} \tag{6}$$

onde $\mathcal{U}_0 = (u_0, u_1, \eta_0)^T$, $\mathcal{H} := D(A^{\frac{1}{2}}) \times H \times \mathcal{M}_{1/2}$ com $\mathcal{M}_p = \{z : \mathbb{R}^+ \longrightarrow D(A^p); \int_0^\infty g(s)\|A^p z(s)\|^2\,ds < \infty\}$ e

$$\mathcal{A}\mathcal{U} = \begin{pmatrix} v \\ (1-g_0)Au + \int_0^\infty g(s)A\eta(s)\,ds \\ -\eta_s + v \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U} = (u, v, \eta)^T \in D(\mathcal{A}) := D(A) \times D(A^{\frac{1}{2}}) \times \mathcal{M}_1.$$

2 Resultados Principais

Teorema 2.1. *Sob as hipóteses* $(H1)$-$(H2)$ *temos: Se* $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{H}$, *então o problema abstrato de Cauchy* (6) *tem uma única solução (generalizada) na classe*

$$\mathcal{U} \in C\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}\right). \tag{1}$$

Além disso, se $\mathcal{U}_0 \in D(\mathcal{A})$, *então a solução satisfaz*

$$\mathcal{U} \in C^1\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}\right) \cap C\left(\mathbb{R}^+, D(\mathcal{A})\right). \tag{2}$$

Prova: A prova é feita com base no Teorema de Lumer-Phillips, ver [4]. Para tanto, mostra-se que o operador $\mathcal{A}$ satisfaz:

(i) $D(\mathcal{A})$ é denso em $\mathcal{H}$;

(ii) $\mathcal{A}$ é dissipativo em $\mathcal{H}$;

(iii) $(I - \mathcal{A})$ é um operador sobrejetivo, onde I é o operador identidade.

□

Teorema 2.2. *Suponhamos que* $(H1)$-$(H3)$ *sejam satisfeitas. Então para cada* $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{H}$ *satisfazendo*

$$\|A^{\frac{1}{2}} u_0(s)\| \leq m_0, \quad \forall\ s > 0,$$

para algum $m_0 > 0$, *existem constantes* $\gamma_0 \in (0,1)$ *e* $\delta_1 > 0$ *tais que, para todo* $t \in \mathbb{R}^+$ *e para todo* $\delta_0 \in (0, \gamma_0]$,

$$\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \delta_1 \left(1 + \int_0^t (g(s))^{1-\delta_0} ds\right) e^{-\delta_0 \int_0^t \xi(s) ds} + \delta_1 \int_t^{\infty} g(s) ds. \tag{3}$$

Prova: A prova de (3) é feita utilizando o método da perturbação de energia, a qual requer o mesmos multiplicadores estabelecidos em [2, 3]. □

Referências

[1] DAFERMOS, C. M. - Asymptotic Stability in Viscoelasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.* **37**, 297-308, 1970.

[2] GUESMIA, A. - Asymptotic stability of abstract dissipative systems with infinite memory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **382**, 748-760, 2011.

[3] GUESMIA, A. AND MESSAOUDI, S. A. - A new approach to the stability of an abstract system in the presence of infinite history. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **416**, 212-228, 2014.

[4] PAZY, A. - *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.*, Applied Mathematical Sciences v. 44, Springer-Verlag, New York, 1983.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *153–154*

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARABÓLICA VIA MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

CLICIA G. PEREIRA[1,†], VIVIANE COLUCCI[1,‡], ANALICE C. BRANDI[2,§] ADILANDRI M. LOBEIRO[1,§§] & JUAN A. SORIANO[3,§§§]

[1]Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, PR, Brasil, [2]Departamento de Matemática e Computação, UNESP, SP, Brasil, [3]Departamento de Matemática, UEM, PR, Brasil.

[†]cliciapereira@utfpr.edu.br, [‡]colucci@utfpr.edu.br, [§]analice@fct.unesp.br, [§§]alobeiro@utfpr.edu.br, [§§§]jaspalomino@uem.br

Resumo

Obteve-se a solução numérica da equação de difusão do calor utilizando-se os Métodos de Diferenças Finitas Progressiva, Regressiva e Mediadas. Observou-se que no Método de Diferenças Finitas Progressiva necessitou de um maior refinamento da malha, pois este precisa satisfazer o critério de estabilidade de von Neumann, já os Métodos de Diferenças Finitas Regressiva e Mediadas são incondicionalmente estável no entanto possuem ordem de convergência $O(k + h^2)$ e $O(h^2 + k^2)$ respectivamente.

1 Introdução

Neste trabalho estudou-se o comportamento de uma equação parabólica (1). Para um estudo de caso, considerou uma barra delgada isolada termicamente ao longo do seu comprimento, com suas extremidades mantidas às temperaturas de $T_0 = 0^oC$ e $T_1 = 100^oC$. Supondo a barra à temperatura inicial de $T = 0^oC$, obteve-se a temperatura ao longo da barra no decorrer do tempo resolvendo-se numericamente a equação diferencial parcial (EDP) parabólica

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) \quad = \quad \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) \quad , \quad 0 < x < L \text{ e } 0 < t < T, \tag{1}$$

com condições inicial e de contorno

$$\begin{aligned} T(x,0) &= 0 \quad , \quad 0 < x < L, \\ T(0,t) &= 0 \quad , \quad 0 \leq t \leq T, \\ T(L,t) &= 100 \quad , \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \tag{2}$$

em que T é a temperatura, t é o tempo, L é o comprimento da barra e α é o coeficiente de difusidade térmica do material.

Obteve-se a solução numérica da EDP (1) sujeita as condições (2) aplicando o Método das Diferenças Finitas (MDF). Particularmente, utilizou-se os métodos de diferenças Progressiva, Regressiva e Mediadas, em seguida comparou-se os resultados numéricos obtidos [3].

2 Resultados Principais

Para fazer a discretização do domínio, foi selecionado dois números inteiros $N > 0$ e $M > 0$ e assim definiu-se o tamanho dos passos da malha $h = L/N$ e $k = T/M$, para os eixos x e t respectivamente, onde $L = 0,1$m é o comprimento da barra e T é o tempo máximo. Assim obteve-se $x_i = x_0 + ih$ para $i = 0, 1, \ldots, N-1, N$ e $t_j = t_0 + jk$ para $j = 0, 1, \ldots, M-1, M$, onde $x_0 = 0$, $x_N = 0,1$, $t_0 = 0$ e $t_M = T$ [1].

Considerando os pontos interiores da malha (x_i, t_j), aproximou-se a derivada de primeira ordem por:

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{T(x_i, t_j + k) - T(x_i, t_j)}{k} - \frac{k}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(x_i, \mu_j), \tag{3}$$

usando diferenças progressivas, para algum $\mu_j \in (t_j, t_j + k)$, e

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x_i, t_j) \quad = \quad \frac{T(x_i, t_j) - T(x_i, t_j - k)}{k} + \frac{k}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(x_i, \mu_j), \tag{4}$$

utizando diferenças regressivas, onde $\mu_j \in (t_j - k, t_j)$. A derivada de segunda ordem foi aproximada por

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{T(x_i + h, t_j) - 2T(x_i, t_j) + T(x_i - h, t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}(\xi_i, t_j), \tag{5}$$

para algum $\xi_i \in (x_i - h, x_i + h)$ [2].

Substituindo as equações (3) e (5) em (1) e (4) e (5) em (1) respectivamente, e utilizando as condições inicial e de contorno, obtém-se o Método de Euler Explícito (Diferenças Progresssivas)

$$w_{i,j+1} \quad = \quad (1 - 2\lambda)w_{i,j} + \lambda(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}), \tag{6}$$

onde $\lambda = (\alpha k)/h^2 > 0$, $w_{i,j} \approx T(x_i, t_j)$ para $i = 0, 1, \ldots, N-1$ e $j = 0, 1, \ldots, M-1$ e o Método de Euler Implícito (Diferenças Regressivas)

$$(1 + 2\lambda)w_{i,j} - \lambda w_{i+1,j} - \lambda w_{i-1,j} \quad = \quad w_{i,j-1}, \tag{7}$$

para $i = 1, \ldots, N-1$ e $j = 0, 1, \ldots, M-1$.

Calculando a média do método das Diferenças Progressiva no j-ésimo passo em t, com o método das Diferenças Progressivas no $(j+1)$-ésimo passo em t, obtêm-se o chamado Método de Diferenças Mediadas,

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - \frac{\alpha}{2}\left[\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} + \frac{w_{i+1,j+1} - 2w_{i,j+1} + w_{i-1,j+1}}{h^2}\right] \quad = \quad 0, \tag{8}$$

que é conhecido como Método de Crank-Nicolson [1].

Com base na equação (6) foi implementado um código no software MATLAB® utilizando os dados que satisfaz o critério de estabilidade de von Neumann, ou seja, $\alpha k/h^2$. No entanto, na equação (7), por ser incondicionalmente estável, teve-se uma certa liberdade para escolher o valor de k, tendo $O(k + h^2)$. Já a equação (8), além de ser incondicionalmente estável tem $O(h^2 + k^2)$.

Após executar as simulações numéricas, percebeu-se que a diferença entre os três métodos, Progressiva, Regressiva e Mediadas, está no tamanho do passo k, sendo que no MDF Mediadas necessitou-se de um menor refinamento da malha.

Referências

[1] BURDEN, R. L. AND FAIRES, J.D. - *Análise numérica.*, São Paulo, Oitava edição, Pioneira Thomson Learning, 2003.

[2] CUMINATO, J. A. AND JUNIOR M. M. - *Discretização de Equações Diferenciais*, Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[3] FORTUNA, A. O. - *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações*, Editora da Universidade de São Paulo, 2012.

[4] GILAT, A. - *MATLAB com Aplicações em Engenharia*, Bookman, Quarta, 2012.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *155–156*

ESTABILIDADE ORBITAL DE ONDAS VIAJANTES PERIÓDICAS PARA A EQUAÇÃO DE KAWAHARA GENERALIZADA

FABRÍCIO CRISTÓFANI[1,†] & FÁBIO NATALI[1,‡]

[1]Departamento de Matemática, UEM, PR, Brasil.

[†]fabriciognr@gmail.com, [‡]fmnatali@hotmail.com

Resumo

Nesta palestra investigamos a estabilidade orbital de ondas viajantes periódicas para a equação de Kawahara generalizada.

Para obtermos tal resultado, provamos que a onda viajante, sob certas condições, minimiza um funcional restrito a uma variedade. O método utilizado é uma adaptação do método desenvolvido por Grillakis, Shatah e Strauss (Ver [3]) .

1 Introdução

O estudo de equações que modelam o movimento de ondas iniciou-se em meados do século XVIII quando John Scott Russell observou que ondas criadas na superfície da água em um canal com profundidade pequena possuíam evolução constante sem mudar de forma. Estas ondas especiais receberam o nome de ondas viajantes. Após o ocorrido, várias equações dispersivas com aplicações semelhantes foram estudadas até o presente momento, como por exemplo, a equação de Kawahara generalizada:

$$u_t + u^p u_x + \lambda u_{xxx} - u_{xxxxx} = 0, \tag{1}$$

onde $u = u(x,t)$ é uma função de valores reais definida em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $p \geq 1$ e $\lambda \geq 0$. Estas equações descrevem a propagação de ondas de pequenas amplitudes em uma dimensão. Mais especificamente, formulações físicas representadas pelo modelo estudado contribuem para a solução de problemas relacionados a fluídos e física de plasma.

A equação (1) possui soluções ondas viajantes L-periódicas da forma $u(x,t) = \phi(x - ct)$, $c \in \mathbb{R}$. Substituindo estas soluções na equação, obtemos a equação diferencial

$$c\phi - \frac{1}{p+1}\phi^{p+1} - \lambda\phi'' + \phi'''' + A = 0, \tag{2}$$

onde A é uma constante de integração.

No caso $p = 1$ e $\lambda = 1$ a equação (2) possui soluções da forma

$$\phi(x) = a + b\,\mathrm{dn}^2\left(\frac{2K}{L}x, k\right) + d\,\mathrm{dn}^4\left(\frac{2K}{L}x, k\right) \tag{3}$$

onde $a = a(k,c,L)$, $b = b(k,L)$ e $d = d(k,L)$ são funções suaves e dn representa a função elíptica dnoidal que depende do módulo $k \in (0,1)$. No caso $p = 2$ e $\lambda = 0,1$, temos que a equação (2) possui soluções da forma

$$\phi(x) = a + b\,\mathrm{dn}^2\left(\frac{2K}{L}x, k\right) \tag{4}$$

onde $a = a(k,L)$, $b = b(k,L)$ e $c = c(k)$ são funções suaves e $k \in (0,1)$.

2 Resultados Principais

Antes de enunciarmos nosso resultado principal, vamos definir o sentido de estabilidade tratado em nossa abordagem.

Definition 2.1. *Dizemos que a onda viajante periódica ϕ é orbitalmente estável em um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$, se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $\|u_0 - \phi\|_X < \delta$ e $u(x,t)$ é solução da equação com $u(x,0) = u_0$, então $u(x,t)$ existe para todo $t \in \mathbb{R}$ e*

$$\inf_{y\in\mathbb{R}} \|u(t) - \phi(\cdot + y)\|_X < \varepsilon, \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

É sabido que a equação (1) admite três invariantes sobre a ação de simetria presente na órbita gerada por translações dadas por

$$E(u) = \int_0^L \frac{1}{2}u_{xx}^2 + \frac{\lambda}{2}u_x^2 - \frac{1}{(p+1)(p+2)}u^{p+2}dx, \quad Q(u) = \frac{1}{2}\int_0^L u^2 dx \quad \text{e} \quad V(u) = \int_0^L u dx.$$

Tais quantidades permitem deduzir o operador linearizado

$$\mathcal{L} := \frac{d^4}{dx^4} - \lambda\frac{d^2}{dx^2} - \phi^p + c. \tag{5}$$

As propriedades espectrais necessárias para a estabilidade são obtidas através da positividade da Transformada de Fourier da onda combinado com a abordagem [1].

Temos assim os seguintes resultados:

Theorem 2.1. *Existe $L > 0$ tal que para cada $c > 0$ suficientemente pequeno que satisfaz $a > 2c$, temos que a onda viajante $\phi(x - ct)$ com ϕ dado em (3), é orbitalmente estável pelo fluxo da equação (1) em $H^2_{per}([0, L])$.*

Theorem 2.2. *Para cada $k \in (0, k_L)$ com k_L suficientemente pequeno tal que $8K(Kk^2 - 2K + 3E)\sqrt{10}/L^2 > 12\pi K\sqrt{10}/K'L^2$, a onda viajante periódica $\phi(x - c(k)t)$ com ϕ e c dados em (4), é orbitalmente estável pelo fluxo da equação (1) em $H^2_{per}([0, L])$.*

Referências

[1] NATALI, F., ANGULO, J. - *Positivity Properties of the Fourier Transform and the Stability of Periodic Travelling-Wave Solutions. SIAM J. Math. Anal.*, **40**, 1123-1151, 2008.

[2] ANDRADE, T. A. - *Equações Dispersivas: Estabilidade Orbital de ondas viajantes periódicas*, Tese de Doutorado, Doutorado em Matemática-Unicamp, 2014.

[3] GRILLAKIS, M., SHATAH, J., STRAUSS, W. - Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I. *J. Functional Anal*, **74**, 160-197, 1987.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *157–158*

ANÁLISE DE UM SISTEMA HÍBRIDO LINEAR COM MEMÓRIA

FLÁVIO G. DE MORAES[1,†] & JUAN A. SORIANO[2,‡]

[1]Universidade Federal de Goiás - Regional de Jataí, UFG, GO, Brasil,
[2]Universidade Estadual de Maringá - UEM, PR, Brasil.

[†]flaviomoraesbr@yahoo.com.br, [‡]jaspalomino@uem.br

Resumo

Nesse trabalho, estamos interessados em obter resultados de existência e estabilidade assintótica para um sistema híbrido linear de equações de onda com memória. Para a existência de solução, lançaremos mão das técnicas introduzidas por Dafermos [2], Fabrizio at al [3], Micu e Zuazua [5,6,7] Cavalcanti [1]. Uma mudança de variável (veja Dafermos [2]) nos permitirá sair de um sistema não autônomo para um autônomo. Feito isso, será aplicado a Teoria de Semigrupos para garantir solução. Para a estabilização, será utilizado método de Lyapounov e/ou técnicas desenvolvidas por Lasiecka e Tataru em [4].

1 Introdução

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, um aberto limitado tal que $\Omega = \Omega_1 \setminus \overline{\Omega}_2$, onde Ω_2 é um aberto de classe C^2 com fronteira limitada contida em Ω_1. A fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ de Ω está dividida em três partes, $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$, onde $\Gamma_0 = \{(x,0) : x \in (0,1)\}$ é uma parte da fronteira de Ω_1, $\Gamma_1 = \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_0$ e $\Gamma_2 = \partial\Omega_2$.

Vamos supor que Ω é ocupado por um fluído elástico, não viscoso e compressível. Ainda vamos admitir que o subconjunto Γ_1 é rígido e impomos que a velocidade normal do líquido seja zero nele. Para a parte Γ_0, é suposto ser flexível e ocupado por uma corda flexível que vibra com a pressão do líquido no plano onde $|\Omega$ se encontra. O deslocamento de Γ_0 é descrito por uma função escalar $w = w(x,t)$ que obedece a equação de onda dissipativa unidimensional. Ainda, em Γ_0 vamos impor a continuidade da velocidade normal do líquido na corda.

Consideremos também que todas as deformações, são suficientemente pequenas de modo que a teoria linear se aplique. Sob condições iniciais naturais, estamos interessados em estudar o seguinte sistema de equações de onda acopladas:

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - \Delta\varphi + \displaystyle\int_{-\infty}^{t} g(t-s)\Delta\varphi(s)ds = 0 & \text{em } \Omega \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu} - \displaystyle\int_{-\infty}^{t} g(t-s)\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}(s)ds = 0 & \text{em } \Gamma_1 \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu} - \displaystyle\int_{-\infty}^{t} g(t-s)\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}(s)ds = -w_t & \text{em } \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ \varphi = 0 & \text{em } \Gamma_2 \times (0,\infty) \\ w_{tt} - w_{xx} + w_t + \varphi_t = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ w_x(0,t) = w_x(1,t) = 0 & \text{para } t > 0 \\ \varphi(x,t) = \varphi_0(x,t) & \text{em } \Omega \times (-\infty, 0] \\ \varphi_t(0) = \varphi_1 & \text{em } \Omega \\ w(0) = w_0, \quad w_t(0) = w_1 & \text{em } \Gamma_0. \end{cases} \tag{1}$$

Para o núcleo da memória vamos assumir que $g \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}^+),\ g(s) \geq 0\ \forall\ s \in \mathbb{R}^+, g'(s) \leq 0\ \forall\ s \in \mathbb{R}^+$, $1 > \displaystyle\int_0^\infty g(s)ds = l_1 > 0$, e ainda que existe uma função ξ, diferenciável, não decrescente, limitada e positiva tal que $g'(t) \leq -\xi(t)g(t)\ \forall t \geq 0$ e $\displaystyle\int_0^\infty \xi(s)ds = \infty$.

2 Resultados Principais

Para obter resultados de existência e unicidade solução, iremos fazer uma mudança de variável introduzida por Dafermos [2], considerando

$$\eta^t(s) = \varphi(t) - \varphi(t-s) \tag{1}$$

onde $\eta = \eta^t(s)$ é a variável que caracteriza o passado relativo ou história relativa de φ. Essa mudança nos permite obter um sistema autônomo e equivalente ao sistema (1).

Considerando um "Espaço História"apropriado $\mathcal{M}$ e com o intuito de aplicar a teoria de semigrupos, considere o seguinte espaço de fase

$$\mathcal{X} = H^1_{\Gamma_2}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathcal{M} \times H^1(\Gamma_0) \times L^2(\Gamma_0) \tag{2}$$

munido com o produto interno usual (a menos de multiplicação por constantes positivas), o que torna $\mathcal{X}$ um espaço de Hilbert.

Do exposto acima, o sistema autônomo obtido com a mudança de variável pode ser expresso da forma

$$\begin{cases} U_t = AU(t) \\ U(0) = (\varphi_0, \varphi_1, \eta_0, w_0, w_1) \\ U(t) \in D(A) \ \forall \ t \in (0, \infty). \end{cases} \tag{3}$$

Feito isso, mostra-se que o operador $-I + A$ é um operador m-dissipativo, o que juntamente com o Teorema de Lumer-Phillips e uma mudança de variável adequada nos garante a existência de solução para o problema (3) e que consequentemente é remetida a uma solução do sistema (1).

Para obter resultados de estabilização será utilizado método de Lyapounov e/ou técnicas desenvolvidas por Lasiecka e Tataru em [4].

Referências

[1] CAVALCANTI, M.M, CAVALCANTI, V.N.D E SORIANO, J.A. - *Exponencial decay for solution of semilinear viscoelastic wave equations with localized damping.* E. J. Differ. Equ. 44, 1-14 2002.

[2] DAFERMOS, C. M. - *Asymptotic Stability in Viscoelasticity.* Arch. Rational Mech. Anal 37297-308, 1970.

[3] FABRIZIO, M., GIORGI, C. E PATA, V. - *A New Approach to Equations with Memory.* Arch. Rational Mech. Anal 198, 189-232, 2010.

[4] LASIECKA, I. E TATARU, D. - *Uniform Boundary Stabilization of Semilinear Wave Equations with Nonlinear Boundary Damping.* Diferential and Integral Equations, Volume 6, Number 3, 507-533, 1993.

[5] MICU, S. D. E ZUAZUA, E. - *Analisis de un Sistema Hibrido Bidimensional Fluido-Estructura.* Ph.D dissertacion at Universidad Complutense de Madrid, Madrid, 1999.

[6] MICU, S. D. E ZUAZUA, E. - *Asymptotic for the Spectrum of a Fluid/Ftruture Fybrid System Arising in the Control of Noise.* Siam J. Math, Anal 29,4, 967-1001, 1998.

[7] MICU, S. D. E ZUAZUA, E. - *Boundary Controllability of a Linear Hybrid System Arising in the Control of Noise.* Siam. J. Cont. Optim. 35, nº 5, 1614-1638, 1997.

[8] MUÑOZ, J.E., GAMBOA, P. E VILLAGRAN, O. V. - *Analysis of the Asymptotic Behavior of a Bi-Dimensional Hybrid System.* Anais do XII Workshop on Partial Diferential Equations, Rio de Janeiro,2013.

[9] PAZY, A. - *Semigroups of Linear Operators and Aplications to Partial Differential Equations.* Applied Mathematical Sciences 44, Spring - Verlag, New York, 1983.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *159–160*

ESTABILIDADE DE ONDAS PERIÓDICAS PARA A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER DO TIPO CÚBICA-QUÍNTICA

GIOVANA ALVES[1,†] & FÁBIO NATALI[1,‡]

[1]Universidade Estadual de Maringá - UEM, PR, Brasil.

[†]a_giovanaalves@yahoo.com.br, [‡]fmanatali@uem.br

Resumo

Neste trabalho, vamos estudar a estabilidade orbital de soluções periódicas para a equação de Schrödinger não linear, com potência tipo cúbica quíntica, usando a teoria proposta em [4]. Mostraremos a boa colocação da equação, seguindo as idéias de [2] e utilizamos a abordagem de [3] para obter a existência da onda periódica e estabelecer as propriedades espetrais.

1 Introdução

Estudaremos a estabilidade de soluções do tipo ondas periódicas para a equação de Schrödinger não linear

$$iu_t + u_{xx} + a|u|^2u + b|u|^4u = 0, \tag{1}$$

onde $a > 0$ e $b < 0$. Esta equação aparece na interação gás-boson e ótica não linear. Consideremos $c \in \mathbb{R}$ e suponhamos a existência de uma função suave $\phi_c : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, periódica de período $L > 0$, tal que

$$u_c(x,t) = e^{ict}\phi_c(x),\ \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \tag{2}$$

seja uma solução clássica para a equação (1). Substituindo a função (2) na equação (1), para cada $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, obtemos a seguinte equação diferencial ordinária não linear de segunda ordem

$$\phi_c'' - c\phi_c + a\phi_c^3 + b\phi_c^5 = 0. \tag{3}$$

A equação (1) admite pelo menos duas quantidades conservadas, E e F, dadas respectivamente por

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_0^L |u_x|^2 - \frac{a}{3}|u|^4 - \frac{b}{3}|u|^6 dx \tag{4}$$

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_0^L |u|^2 dx. \tag{5}$$

Considerando $U(t) = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$, temos que

$$\begin{cases} P_t = -Q_{xx} - aQ(P^2+Q^2) - bQ(P^2+Q^2)^2 \\ Q_t = P_{xx} + aP(P^2+Q^2) + bP(P^2+Q^2)^2. \end{cases} \tag{6}$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}U(t) = JE'(U), \tag{7}$$

onde E' representa a derivada de Fréchet de E com respeito a U e J é a matriz

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Definindo o funcional $G = G_c := E + cF$, vemos que o vetor $\Phi = (\phi, 0)$ é ponto crítico de G. Este fato motiva a definição do operador autoadjunto $\mathcal{L}$ por $\mathcal{L} := G''(\phi, 0)$, ou seja

$$\mathcal{L} = \left(\begin{array}{cc} -\partial_x^2 - 3a\phi_c^2 - 5b\phi_c^4 + c & 0 \\ 0 & -\partial_x^2 - a\phi_c^2 - b\phi_c^4 + c \end{array} \right). \tag{9}$$

Notemos que (1) é invariante sob a ação unitária de rotação e translação, isto é, se $U(t) = (P, Q)$ é solução de (1), então

$$T_1(\theta)U = \left(\begin{array}{cc} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} P \\ Q \end{array} \right) \quad \text{e} \quad T_2(r)U = \left(\begin{array}{c} P(\cdot - r, \cdot) \\ Q(\cdot - r, \cdot) \end{array} \right) \tag{10}$$

também são soluções de (1).

2 Resultados Principais

Intuitivamente, dizemos que uma onda é orbitalmente estável se ao considerarmos o estado inicial do problema próximo da onda, a evolução no tempo permanecerá próximo a esta onda módulo as simetrias que a equação possui. Mais especificamente, temos

Definição 2.1. *Seja $\Theta(x,t) = (\phi(x)\cos(ct), \phi(x)\sin(ct))$ a onda estacionária periódica para (7). Dizemos que Θ é orbitalmente estável em $H^1_{per} \times H^1_{per}$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ com a seguinte propriedade: Se $U_0 \in H^1_{per} \times H^1_{per}$ satisfaz $\|U_0 - \Phi\|_{H^1_{per} \times H^1_{per}} < \delta$, então a solução, $U(t)$, de (7) com dado inicial U_0 existe para todo $t \geq 0$ e satisfaz*

$$d(U_0, \Omega_\Phi) = \inf\{\|U_0 - T_1(\theta)T_2(r)\Phi\|_{H^1_{per} \times H^1_{per}};\ \theta, r \in \mathbb{R}\} < \varepsilon.$$

Em nossa palestra, vamos provar que a equação (1) está bem colocada globalmente no espaço $H^1_{per}([0, L])$, seguindo as idéias de [2]. Em um segundo momento, mostraremos a existência de soluções periódicas para (3) estudando o plano de fase estabelecido por esta equação, usando a abordagem de [3]. Em seguida, usando as idéias de [3], mostraremos que o operador $\mathcal{L}$, definido em (9), admite exatamente um autovalor negativo, o qual é simples e 0 é um autovalor de multiplicidade dois, associado às autofunções $(\phi_c', 0)$ e $(0, \phi_c)$. E finalmente, seguindo a teoria proposta em [4], construiremos uma função de Lyapunov adequada para provar a estabilidade da equação.

Nosso principal resultado é então obtido:

Teorema 2.1. *Seja ϕ_c uma solução periódica de (3). Então a onda estacionária periódica $\Theta(x,t) = (\phi(x)\cos(ct), \phi(x)\sin(ct))$ é orbitalmente estável em $H^1_{per} \times H^1_{per}$.*

Referências

[1] Cardoso, E. J. - *Estabilidade de Ondas Periódicas para Modelos Dispersivos Não-Lineares.* Tese de Doutorado, Doutorado em Matemática UEM - Maringá/PR, 2014.

[2] MELO, C. - *Estabilidade de ondas viajantes para equações de Schrödinger do tipo cúbica-quíntica.* Tese de Doutorado, Doutorado em Matemática USP - São Paulo/SP, 2012.

[3] NATALI, F.; NEVES, A. -*Orbital Stability of Solitary Waves.* IMA Journal of Applied Mathematics, 2013.

[4] NATALI, F.; PASTOR, A. - *The forth-order dispersive nonlinear schrödinger equation: Orbital stability of a standing wave.* Aceito para publicação em SIAM Journal of Appl. Dyn. System. 2015.

[5] OHTA, M. - *Stability and Instability of standing waves for one dimensional nonlinear Schrödinger equations with double power nonlinearity.* Kodai Math. J., 1995.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *161–162*

CONTROLE NA FRONTEIRA E NO INTERIOR PARA O SISTEMA DE BRESSE COM TRÊS CONTROLES NA FRONTEIRA E UM OU DOIS NO INTERIOR

JULIANO DE ANDRADE[1,†] & JUAN A. SORIANO[2,‡]

[1]Universidade Estadual de Maringá - UEM, PR, Brasil.

[†]ja_voz@yahoo.com.br, [‡]jaspalomino@uem.br

Resumo

Neste trabalho queremos encontrar a controlabilidade exata interna de um sistema de Bresse, cujos mecanismos de controle agem em um subintervalo arbitrário pequeno (l_1, l_2) de $(0, L)$, e também a controlabilidade na fronteira cujos mecanismos de controle agem no ponto L de $(0, L)$.

O principal resultado é obtido pela desigualdade de Carleman e a aplicação do método HUM (Hilbert Uniqueness Method).

1 Introdução

Neste trabalho trataremos em obter controle na fronteira e no interior de $(0, L)$ para o seguinte sistema de Bresse

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x + k_0 l(w_x - l\varphi) = f_1, \quad em \quad (0, L) \times (0, T) \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) = f_2, \quad em \quad (0, L) \times (0, T) \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw)_x = 0, \quad em \quad (0, L) \times (0, T) \\ \varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \phi(L, t) = w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad t \in (0, T) \\ \varphi(., 0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(., 0) = \varphi_1, \quad em \quad (0, L) \\ \psi(., 0) = \psi_0, \quad \psi_t(., 0) = \psi_1, \quad em \quad (0, L) \\ w(., 0) = w_0, \quad w_t(., 0) = w_1, \quad em \quad (0, L) \end{cases} \tag{1}$$

na fronteira com três controles e no interior com um ou dois controles, aqui usaremos a estimativa de Carleman e o método HUM, para obter o controle. Até o presente momento temos a existência e unicidade de soluções forte, fraca e ultrafraca do sistema de Bresse e estamos tentando obter uma desigualdade do tipo Carleman na fronteira e outra no interior.

2 Resultados Principais

Neste momento estamos procurando uma desigualdade do tipo Carleman na fronteira de $(0, L)$ para poder obter controles $v_1, v_2, v_3 \in L^2(0, T)$ tal que a solução (φ, ψ, w) de (1) com $f_1 = f_2 = 0$ satisfaça

$$\begin{cases} \varphi_x(0, t) = \psi_x(0, t) = w_x(0, t) = 0, \quad t \in (0, T) \\ \varphi_x(L, t) = v_1, \quad em \quad (0, T) \\ \psi_x(L, t) = v_2, \quad em \quad (0, T) \\ w_x(L, t) = v_3, \quad em \quad (0, T) \\ \varphi(., T) = \psi(., T) = w(., T) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

em um tempo final T.

E também pretendemos encontrar uma estimativa do tipo Carleman no interior de $(0, L)$ para obter o controles $f_1 = h_1(x,t)\chi$, $f_2 = h_2(x,t)\chi$ com $h_1, h_2 \in L^2((l_1, l_2) \times (0,T))$, χ é a função característica de $(l_1, l_2) \times (0,T)$ e $(l_1, l_2) \subset (0,T)$, de tal forma que a solução de (1) satisfaça

$$\varphi(.,T) = \psi(.,T) = w(.,T) = 0$$

Referências

[1] BREZIS, H. - *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Diferential Equations.*, Springer, 2011.

[2] LIONS, J.L. (1988) - *Controlabileté Exacte Perturbations et Estabilisation de systèmes Distribués.*, Tome 1 Controlabilité Exacte Masson, Paris Milan Barcelone Mexico.

[3] PAZY, A. (1983) - *Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.*, Springer-Verlag, New York, vifi+ 279pp.

[4] SORIANO, J.A. AND SCHULZ, R.A.(2014) - *Exact Controllabity for Bresse System with Variable Coefficients.*, Mathematical Methods in the Applied Sciences.

[5] TUCSNAK. M AND WEISS(2000) - *Obsevation and Control for Operator Semigroups.*, Birkhäuser Advanced Texts,Basel. Boston. Berlin.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *163–164*

GRADIENT FLOWS OF TIME-DEPENDENT FUNCTIONALS IN METRIC SPACES AND APPLICATIONS IN THE WASSERSTEIN SPACE

JULIO C. VALENCIA-GUEVARA[1,†] & LUCAS C. F. FERREIRA[1,‡]

[1]IMECC, UNICAMP, SP, Brasil.

[†]juliogueVara08@gmail.com, [‡]lcff@ime.unicamp.br

Abstract

We develop a gradient-flow theory for time-dependent functionals in abstract metric spaces. Results about global well-posedness and asymptotic behavior of solutions are obtained. Conditions on functionals and metric spaces allow to consider the Wasserstein space $\mathcal{P}_2$ and apply the results for a large class of PDEs with time-dependent coefficients like confinement and interaction potentials and diffusion. Our results can be seen as an extension of those in [1] to the case of time-dependent functionals. For that matter, we need to consider a time version of the concept of λ-convexity, time-differentiability of the minimizer of Moreau-Yosida approximation, and *a priori* estimates with explicit time-dependence for De Giorgi interpolation.

1 Introduction

Gradient flow theory has been used to study several PDE's. In the context of the Wasserstein space $\mathcal{P}_2$, we have the seminal work [2] for the Fokker-Plank equation. An important tool is optimal transport theory (see [3]) that provides a nice Riemannian structure in $\mathcal{P}_2$. This space is defined as

$$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) = \left\{ \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) : M_2(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 d\mu(x) < \infty \right\},$$

where $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ is the set of Borel probability measures in $\mathbb{R}^d$. In this work we consider the metric version of the EDO

$$\begin{aligned} u'(t) &= -\nabla \mathcal{E}(t, u(t)) && (1) \\ u(0) &= u_0, && (2) \end{aligned}$$

where the gradient is taken with respect to the second variable. Let (X, d) be a metric space and $\mathcal{E} : [0, \infty) \times X \to (-\infty, +\infty]$ be a time-dependent functional defined on X. It is well-known that the problem (1)-(2) admits a metric reformulation given by a differential inequality. In order to obtain well-posedness and asymptotic behavior of solutions, we impose some conditions on the functional $\mathcal{E}$. Before doing that, we give some notations. A function $f : A \to (-\infty, \infty]$ is said to be proper if there exists $x \in A$ such that $f(x) < +\infty$. The set $\mathrm{Dom}(f) = \{x \in A : f(x) < +\infty\}$ is called the domain of f. Also, we denote the Moreau-Yosida approximation by

$$\varphi_{t,\tau}(u) = \inf_{v \in X} (\mathbf{E}(t, \tau, u; v)), \quad \text{where } \mathbf{E}(t, \tau, u; v) = \mathcal{E}(t, v) + \frac{d^2(u, v)}{2\tau}$$

The conditions on $\mathcal{E}$ are listed below.

E1.- For each $t \geq 0$, the functional $\mathcal{E}(t, \cdot)$ is proper and lower semicontinuous with respect to d and the set $\mathbf{D} := \mathrm{Dom}(\mathcal{E}(t, \cdot))$, is independent of t.

E2.- There exist $u^* \in X$ and a function $\beta : [0, \infty) \to [0, \infty) \in L^1_{loc}([0, \infty))$ such that, for each $u \in \mathbf{D}$ the function $t \to \mathcal{E}(t, u)$ satisfies

$$|\mathcal{E}(t, u) - \mathcal{E}(s, u)| \leq \int_s^t \beta(r)\, dr (1 + d^2(u, u^*)). \tag{3}$$

E3.- For each $T > 0$, there exist $u^* \in X$ and $\tau^*(T) = \tau^* > 0$ such that the function $t \to \varphi_{t,\tau^*}(u^*)$ is bounded from below on $[0, T]$.

E4.- There is a function $\lambda : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ in $L^\infty_{loc}([0, \infty))$ such that: given $u, v_0, v_1 \in X$, there exists a curve $\gamma : [0, 1] \to X$ satisfying $\gamma(0) = v_0$, $\gamma(1) = v_1$ and

$$\mathbf{E}(t, \tau, u; \gamma(s)) \leq (1 - s)\mathbf{E}(t, \tau, u; v_0) + s\mathbf{E}(t, \tau, u; v_1) - \frac{1 + \tau\lambda(t)}{2\tau} s(1 - s)d^2(v_0.v_1), \tag{4}$$

for $0 < \tau < \frac{1}{\lambda_T^-}$ and $s \in [0, 1]$, where $\lambda_T^- = \max\{-\inf_{t\in[0,T]} \lambda(t), 0\}$.

2 Main Results

Using the concepts of metric derivative $|u'|$ for curves and local-slope $|\partial\mathcal{E}(t)|$ of functionals, we obtain the:

Theorem 2.1. *Assume **E1** to **E5**. If $u_0 \in \overline{\mathbf{D}}$, then there exists an absolutely continuous curve $u : [0, \infty) \to X$, $u(0) = u_0$, such that:*

i) *The function $t \to \mathcal{E}(t, u(t))$ is locally absolutely continuous and the following relations hold*

$$\begin{aligned} \int_s^t \partial_t\mathcal{E}(r, u(r))\, dr - \frac{1}{2}\int_s^t |u'|^2(r)\, dr - \frac{1}{2}\int_s^t |\partial\mathcal{E}(r)|^2(u(r))\, dr &= \mathcal{E}(t, u(t)) - \mathcal{E}(s, u(s)). && (1)\\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}d^2(u(t), V) + \frac{\lambda(t)}{2}d^2(u(t), V) + \mathcal{E}(t, u(t)) &\leq \mathcal{E}(t, V).\ \textit{for } t > 0 && (2) \end{aligned}$$

ii) *Let u, v be two curves with respective initial data $u_0, v_0 \in \overline{\mathbf{D}}$. We have the contraction property*

$$d(u(t), v(t)) \leq e^{-\int_0^t \lambda(s)\ ds} d(u_0, v_0). \tag{3}$$

As application, we take $X = \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ with the Wasserstein metric $\mathbf{d}_2$ given by the Monge-Kantorovich minimization problem with quadratic cost. For the functionals

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(t, \mu) &= \kappa(t)\int_{\mathbb{R}^d} \mu\log(\mu)dx + \int_{\mathbb{R}^d} V(t, x)\ d\mu(x) && (4)\\ \mathcal{E}_2(t, \mu) &= \kappa(t)\int_{\mathbb{R}^d} \mu\log(\mu)dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} W(t, x - y)\ d\mu\otimes\mu(x, y), && (5) \end{aligned}$$

Theorem 2.1 gives curves that are distributional solutions for the PDEs

$$\partial_t\rho = \kappa(t)\Delta\rho + \nabla\cdot(\nabla V(t, x)\rho), \text{ and } \partial_t\rho = \kappa(t)\Delta\rho + \nabla\cdot((\nabla W(t) * \rho)\rho), \tag{6}$$

respectively. Of course, many others equations can be covered by this theory.

References

[1] Ambrosio, L., Gigli, N., Savaré, G., *Gradient flows: in metric spaces and in the space of probability measures*, Birkhäuser, 2005.

[2] Jordan, R., Kinderlehrer, D., Otto, F., *The variational formulation of the Fokker-Plank Equation*, SIAM J. Math Anal. 29 (1) (1998), 1–717.

[3] Villani, C., *Topics in Optimal Transportation*, Graduate Studies in Mathematics 58, American Mathematical Society, providence, RI, 2003.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *165–166*

EXACT CONTROLABILLITY OF A SYSTEM FOR THE TIMOSHENKO BEAM WITH MEMORY

LEONARDO RODRIGUES[1,†] & MARCOS ARAÚJO[2,‡]

[1]Math & Coordination of Natural Sciences, UFMA, MA, Brasil, [2]DEMAT, UFMA, MA, Brasil.

[†]leonardo.rodrigues@ufma.br, [‡]marcosttte@gmail.com

Abstract

We study the exact controlabillity of a Timoshenko beam by one control force acting on the border. Combining HUM and Compactness arguments the exact controlabillity is proved for time dependent smooth Kernels. In the case where the wave speeds are the same.

1 Introduction

In this paper we consider systems of Timoshenko type with memory, which are written as

$$\begin{aligned} &z_{tt} - bz_{xx} + y_x = 0. \\ &y_{tt} - ay_{xx} - z_x + y - \int_0^t K(t,\sigma)y(\sigma)d\sigma = 0 \end{aligned} \quad \text{on} \quad Q \tag{1}$$

The boundary conditions we consider here are given by

$$y(0,t) = v(t),\ y(1,t) = 0,\ z(0,t) = w(t),\ z(1,t) = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma_0. \tag{2}$$

The initial conditions are

$$y(x,0) = y^0,\ y_t(x,0) = y^1,\ z(x,0) = z^0,\ z_t(x,0) = z^1 \quad \text{on} \quad \Omega. \tag{3}$$

Here, t is the time variable and x the space coordinate along the beam, the length of which is 1, in its equilibrium position. The function y is the transverse displacement of the beam and z is the rotation angle of a filament of the beam. The coefficients a and b are positive constants.
By $v(t)$ and $w(t)$ denotes the unit vector normal to outside Ω at the point Γ. The exact controlabillity to the border (1) is formulated as follows: Given $T > 0$, for all $\{y^0, z^0, y^1, z^1\} \in L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1)$, there is a pair of controls $v(t), w(t) \in L^2(0,T)$, such that the solution $y = y(x,t)$, $z = z(x,t)$ of (1) complies with:

$$\begin{aligned} y(x,T) = 0, y'(x,T) = 0 \\ z(x,T) = 0, z'(x,T) = 0 \end{aligned} \quad \text{on} \quad \Omega \tag{4}$$

If we can do that, then we say that the system (1) is exactly controllable. It is on the K following assumptions:

$$\begin{gathered} K(t,\sigma) \in L^1((0,T) \times (0,T)) \\ \frac{\partial K(t,\sigma)}{\partial \sigma} \in L^1((0,T) \times (0,T)) \\ K(t,t) \in L^1(0,T) \end{gathered} \tag{5}$$

and design $T > 2\alpha$.

2 Main Results

Theorem 2.1. *Suppose a and b real numbers such that: $min = \{a, b\} > 1$ and $\alpha = max\left\{\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}\right\}$, and let be $T > 2\alpha$ with K satisfies the hypotheses* (5) *, then the system* (1) *is exactly controllable.*

Proof Using H.U.M method, we can define the operator Λ_K:

$$\begin{gathered}\Lambda_K : [H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)]^2 \to [H^{-1}(0,1) \times L^2(0,1)]^2 \\ \left\{\varphi^0, \varphi^1, \theta^0, \theta^1\right\} \to \{-\eta'(T), \eta(T), -\omega'(T), \omega(T)\}\,.\end{gathered} \tag{1}$$

This operator is linear and continuous. It is known (L. A. Medeiros [2]) if $T > 2\alpha$, then, $\Lambda(= \Lambda_0)$ with $K = 0$ is an isomorphism, we will show that for the same T, $\Lambda_K(K \neq 0)$ is an isomorphism. We will use the method that is introduced by E. Zuazua in Appendix 1 J.L.Lions [1].

For this we use the following lemmas

Lemma 2.1. *If $T > 2\alpha$, then $ker\ \Lambda_K$ is of finite dimension.*

Lemma 2.2. *If $T > 2\alpha$, then*

$$ker\Lambda_k = \{0\}\,.$$

So, by the Fredholm alternative, Λ_k is an isomorphism. ■

References

[1] Lions, J.L., *Contrôlabilité Exacte, Pertubation et Estabilization de Systémes Distribuées*, Tome I, RMA 8, Masson, Paris, 1988.

[2] Medeiros, L. A., *Exact Controllability for Timoshenko Model of Vibrations of Beams*, Advances in Mathematical Sciences and Applications, Vol. 2 No 1(1993), pp. 47 - 61.

[3] Rivera, J. E. M.; Naso, Maria Grazia *Exact boundary controllability in thermoelasticity with memory.* Adv. Differential Equations 8 (2003), no. 4, 471–490.

[4] Yan, J., *Contrôlabilité Exacte pour des Systémes Mémoire*, Rev. de la Matematica, Universidad Complutense de Madrid, Vol. 5, No.2 (1992).

[5] Zuazua, E. *Lectures Notes on Exact Control and Stabilization*, UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, (1990).

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *167–168*

THE KAWAHARA EQUATION ON BOUNDED INTERVALS AND ON A HALF-LINE

NIKOLAI A. LARKIN[1,†] & MÁRCIO H. SIMÕES[2,‡]

[1]Departamento de Matemática, UEM, PR, Brasil, [2]Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, PR, Brasil.

[†]nlarkine@uem.br, [‡]marcio@utfpr.edu.br

Resumo

Este trabalho refere-se a existência e unicidade de solução global para a equação de Kawahara posta sobre intervalos limitados e sobre a semi-reta positiva e, além disso, trata a aproximação de um problema de valor inicial e de fronteira colocado sobre a semi-reta positiva por um problema de valor inicial e de fronteira definido sobre intervalos limitados.

1 Resultados Principais

Iniciamos o trabalho com o seguinte problema de valor inicial e de fronteira:

$$u_t + uDu + D^3u - D^5u = 0, \quad \text{in} \quad Q_t = (0,L)\times(0,t); \tag{1}$$

$$u(0,t) = Du(0,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(L,t) = Du(L,t) = D^2u(L,t) = 0, \quad t>0, \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,L). \tag{4}$$

Teorema 1.1. *Sejam T, L, k números finitos positivos tais que $3-5k^2 = 2a > 0$. Dada $u_0 \in H^5(0,L)$ satisfazendo*

$$u_0(0) = Du_0(0) = u_0(L) = Du_0(L) = D^2u_0(L) = 0$$

e

$$\int_0^L e^{kx}\left[u_0^2(x) + \left(D^3u_0(x) + u_0(x)Du_0(x) - D^5u_0(x)\right)^2\right]dx = J_0 < \infty$$

para qualquer $L>0$ finito, existe uma única solução regular $u(x,t)$ para (1)-(4) tal que

$$u \in L^\infty(0,T;H^5(0,L)) \cap L^2(0,T;H^7(0,L));$$
$$u_t \in L^\infty(0,T;L^2(0,L)) \cap L^2(0,T;H^2(0,L))$$

e estas inclusões não dependem de L.

Usando este resultado conseguimos provar o próximo teorema.

Teorema 1.2. *Sejam T, k números reais positivos e suponhamos que $3-5k^2>0$. Dada $u_0 \in H^5(\mathbb{R}^+)$ satisfazendo*

$$K_0 = \int_{\mathbb{R}^+} e^{kx}\left[u_0^2u_{0x}^2 + \sum_{i=0}^{5}|D^iu_0|^2\right]dx < \infty$$

e

$$\lim_{L\to\infty}\int_L^\infty e^{kx}\left[u_0^2u_{0x}^2 + \sum_{i=0}^{5}|D^iu_0|^2\right]dx = 0,$$

então existe uma única solução regular $u(x,t)$ *de*

$$u_t + uDu + D^3u - D^5u = 0 \quad em \quad Q_t = \mathbb{R}^+ \times (0,t), \quad t > 0; \tag{5}$$

$$u(0,t) = Du(0,t) = 0,\ t > 0, \tag{6}$$

$$\lim_{x\to+\infty} u(x,t) = 0, \tag{7}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{8}$$

de classe:

$$u \in L^\infty\big(0,T;H^5(\mathbb{R}^+)\big) \cap L^2\big(0,T;H^7(\mathbb{R}^+)\big),$$
$$u_t \in L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^+)) \cap L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^+)),$$

que é um limite da solução regular do Teorema 1.1 quando $L \to +\infty$.

Teorema 1.3. *Sejam* T, k *números rais positivos e* $3 - 5k^2 > 0$. *Dada* $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^+)$ *tal que* $\int_{\mathbb{R}^+} e^{kx}u_0^2\,dx < \infty$, *existe uma única solução fraca* $u(x,t)$ *of (5) - (8) de classe:*

$$u \in L^\infty\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^+)\big) \cap L^2\big(0,T;H^2(\mathbb{R}^+)\big)$$

que é um limite da solução fraca do caso de intervalos limitados:

$$u \in L^\infty(0,T_0;L^2(0,L)) \cap L^2(0,T_0;H^2(0,L));$$
$$u_t \in L^2(0,T_0;H^{-3}(0,L))$$

quando $L \to +\infty$.

Referências

[1] N.A. Larkin, M.H. Simões, *The Kawahara equation on bounded intervals and on a half-line,* Nonlinear Analysis. (to appear)

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *169–170*

MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS APLICADO A UM PROBLEMA HIPERBÓLICO COM USO DO MATLAB®

MARLON V. PASSOS[1,†], ADILANDRI M. LOBEIRO[2,‡], JUAN A. SORIANO[3,§] CLICIA G. PEREIRA[2,§§] & ELOY KAVISKI[4,§§§]

[1]Departamento Acadêmico de Construção Civil, UTFPR, PR, Brasil, [2]Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, PR, Brasil, [3]Departamento de Matemática, UEM, PR, Brasil, [4]Departamento Engenharia Hidraúlica, UFPR, PR, Brasil.

[†]mpassos@alunos.utfpr.edu.br, [‡]alobeiro@utfpr.edu.br, [§]jaspalomino@uem.br, [§§]jaspalomino@uem.br, [§§§]eloy.dhs@ufpr.br

Resumo

A solução numérica de uma equação diferencial parcial (EDP) hiperbólica foi obtida utilizando-se o método das características. Através do software MATLAB®, foi implementado um algoritmo para discretizar o domínio em malha retangular, introduzir as condições iniciais e de contorno e os coeficientes da EDP. Comparou-se os resultados numéricos determinados por meio de interpolação cúbica e linear. A solução numérica apresentou precisão satisfatória em relação à analítica.

1 Introdução

O Método das Características é uma abordagem consagrada para transformar o problema de resolver EDPs hiperbólicas para resolver equações diferenciais ordinárias [1]. Uma EDP de segunda ordem hiperbólica quase linear sobre um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ pode ser escrita na forma

$$A(x,t)u_{xx} + B(x,t)u_{xt} + C(x,t)u_{tt} + F(x,t,u,u_x,u_t) = 0, \tag{1}$$

em que $u = u(x,t)$ é uma função desconhecida e x e t representam o espaço e o tempo, respectivamente. Pelo menos um dos coeficientes A, B e C é não nulo. Além disso, os valores das condições iniciais $u_x(x,0)$ e $u_t(x,0)$ são conhecidos, compondo assim um problema de Cauchy. Como o discriminante $B^2 - 4AC > 0$, a equação diferencial parcial é denominada hiperbólica. As inclinações das curvas características para esta equação são obtidas por meio das expressões

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_+ = \frac{B(x,t) + \sqrt{B(x,t)^2 - 4A(x,t)C(x,t)}}{2A(x,t)} \tag{2}$$

e

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_- = \frac{B(x,t) - \sqrt{B(x,t)^2 - 4A(x,t)C(x,t)}}{2A(x,t)}. \tag{3}$$

As coordenadas x_P e t_P de um ponto P em relação aos pontos L e R são obtidas a partir da construção de uma malha retangular, regularmente espaçada, cujo refinamento depende dos passos de espaço e tempo, Δx e Δt.

As invariantes de Riemann $p = \partial u(x,0)/\partial t$ e $q = \partial u(x,0)/\partial x$ no tempo zero são encontradas por meio das condições iniciais do problema. Para os demais instantes, as invariantes são aproximadas por diferenças finitas. Uma vez conhecidos os valores das invariantes de Riemann nos pontos da malha num instante t, calcula-se a solução numérica $w(x,t) \approx u(x,t)$ para um instante $t+1$ mediante aproximação de Taylor de primeira ordem aplicada aos pontos P,L e R [2]:

$$w_P \approx w_L + \frac{\Delta x}{2}(p_P + p_L) + \frac{\Delta t}{2}(q_P + q_L) \tag{4}$$

$$w_P \approx w_R + \frac{\Delta x}{2}(p_P + p_R) + \frac{\Delta t}{2}(q_P + q_R). \tag{5}$$

Como os pontos L e R dependem da inclinação das curvas características, não pertencem necessariamente à malha e portanto os valores das invariantes q e p e da solução w devem ser determinados por interpolação cúbica ou linear.

2 Resultados Principais

Como estudo de caso, considera-se o problema hiperbólico composto pela equação da onda que descreve o deslocamento $u(x,t)$ de uma corda vibrante uniformemente tracionada ao longo do eixo x

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t, \tag{6}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad 0 < t, \tag{7}$$

$$u(x,0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{9}$$

Utilizando-se passo de espaço $\Delta x = 0,1$ e passo de tempo $\Delta t = 0,01$, a interpolação cúbica é muito mais eficiente para aproximar os resultados numéricos do problema hiperbólico, como pode ser visto na Figura 1.

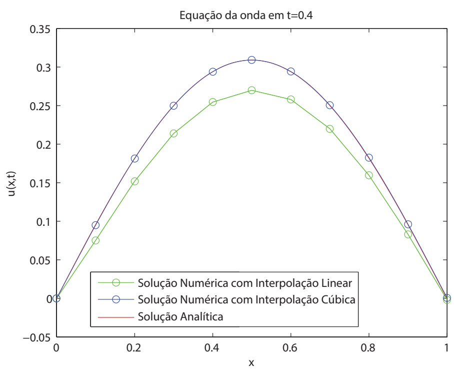

Figura 1: Comparação entre interpolação linear e cúbica e a solução analítica do problema hiperbólico.

Referências

[1] LYNCH, D. R. - *Numerical partial differential equations for environmental scientists and engineers.*, Springer, Londres, 2005.

[2] LOBEIRO, A. M. - *Solução das equações de Saint Venant em uma e duas dimensões usando o método das características*, UFPR, Curitiba, 2012.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *171–172*

ATRATOR PULLBACK PARA UMA EQUAÇÃO DE ONDA NÃO AUTÔNOMA COM CONDIÇÃO DE FRONTEIRA DA ACÚSTICA

THALES M. SOUZA[1,†]

[1]Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, USP, SP, Brasil.

[†]maier@icmc.usp.br

Resumo

Neste trabalho consideramos uma equação da onda definida em um domínio limitado Ω e acoplada a uma equação diferencial ordinária sobre a fronteira $\partial\Omega$, satisfazendo uma condição de compatibilidade por motivações físicas. Este tipo de problema é motivado por um modelo de ondas proposto por Beale e Rosencrans. Propomos uma versão não autônoma desse problema adicionando uma força externa do tipo $\varepsilon g(x,t)$. Nosso principal objetivo é provar a existência de um atrator pullback e a sua semi-continuidade superior quando $\varepsilon \to 0$.

1 Introdução

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado com fronteira suficientemente suave Γ. Considere um tempo inicial arbitrário $\tau \in \mathbb{R}$ e o seguinte problema

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \omega u_t(x,t) + u(x,t) + f(u) = \varepsilon g(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t \geq \tau, \\ \delta_{tt}(x,t) + \nu \delta_t(x,t) + \delta(x,t) = -u_t(x,t), \quad x \in \Gamma, \quad t \geq \tau, \\ \partial_n u(x,t) = \delta_t(x,t), \quad x \in \Gamma, \quad t \geq \tau, \end{aligned}$$

onde ω, ν são parâmetros positivos e n é o vetor normal exterior à Ω. As condições iniciais são

$$\begin{aligned} u(x,\tau) = u_\tau^0(x), \quad u_t(x,t)|_{t=\tau} = u_\tau^1(x), \quad x \in \Omega, \\ \delta(x,\tau) = \delta_\tau^0(x), \quad \delta_t(x,t)|_{t=\tau} = \delta_\tau^1(x), \quad x \in \Gamma. \end{aligned}$$

Suponha que $f \in C^1(\mathbb{R})$ e satisfaz

$$\liminf_{|u|\to 0} \frac{f(u)}{u} > -1 \quad \text{e} \quad |f(u) - f(v)| \leq c_1(1 + |u|^2 + |v|^2)|u - v|, \quad \forall\, u, v \in \mathbb{R}.$$

Denotando $F(u) = \displaystyle\int_0^u f(s)ds$, suponha também que existe $\beta \in (0,1)$ e $\rho_f > 0$ tal que

$$F(u) \geq -\frac{\beta}{2}u^2 - \rho_t \quad \text{e} \quad f(u)u - F(u) \geq -\frac{\beta}{2}u^2 - \rho_f \quad \forall\, u \in \mathbb{R}.$$

Vamos supor que $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$. A partir das considerações feitas acima, definimos a energia do sistema por

$$E(t) = \frac{1}{2}\left\{ \|u(t)\|^2_{H^1(\Omega)} + \|u_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\delta(t)\|^2_{L^2(\Gamma)} + \|\delta_t(t)\|^2_{L^2(\Gamma)} + 2\int_\Omega F(u) \right\} dx$$

e o espaço de fase por

$$\mathcal{H} = H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma).$$

2 Resultados Principais

Primeiramente vamos mostrar que o problema é bem colocado.

Teorema 2.1. *Assumindo as considerações feitas acima e que* $z_\tau^0 = (u_\tau^0, u_\tau^1, \delta_\tau^0, \delta_\tau^1) \in \mathcal{H}$. *Então, para todo* $T > \tau$, *o problema possui uma única solução fraca* $z_\varepsilon(\cdot) = z_\varepsilon(\cdot\,;\tau, z_\tau^0)$ *satisfazendo* $z_\varepsilon \in C\big([\tau,T],\mathcal{H}\big)$. *Mais ainda, se os dados iniciais são tais que* $(u_\tau^0, u_\tau^1, \delta_\tau^0, \delta_\tau^1) \in H^2(\Omega)\times H^1(\Omega)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *e* $\partial_n u_\tau^0 = \delta_\tau^1$ *então* $z_\varepsilon(\cdot\,;\tau, z_\tau^0)$ *é solução forte e satisfaz*

$$z_\varepsilon \in C^1\big([\tau,T],\mathcal{H}\big)\cap C^0\big([\tau,T],\mathcal{H}_1\big)$$

onde $\mathcal{H}_1 = \Big\{(z_1,z_2,z_3,z_4)\in H^2(\Omega)\times H^1(\Omega)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma);\ \partial_n z_1 = z_4\Big\}$. *Alem disso a solução fraca depende continuamente dos dados iniciais.*

Portanto, sendo $\mathbb{R}_d^2 = \big\{(t,\tau)\in\mathbb{R}^2;\ \tau \le t\big\}$, podemos definir o processo $U_\varepsilon : \mathbb{R}_d^2\times\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ como

$$U_\varepsilon(t,\tau)z_\tau^0 = z(t\,;\tau,z_\tau^0)$$

Definindo $R_0 = \big\{\rho:\mathbb{R}\to[0,\infty);\ e^{\sigma_1\tau}|\rho(\tau)|^4\to 0 \quad \text{quando} \quad \tau\to-\infty\big\}$, com $\sigma_1>0$. Podemos definir uma família de conjuntos dependendo do tempo da seguinte forma

$$\hat{D} = \big\{\{D(t)\}_{t\in\mathbb{R}};\ D(t)\neq\emptyset \text{ e } D(t)\subset\bar{B}(0,\rho_{\hat{D}}(t)) \text{ com } \rho_{\hat{D}}\in R_0\big\} \tag{1}$$

A classe de todas as famílias da forma $\hat{D}$ é denotada por $\mathcal{D} = \Big\{\hat{D};\ \hat{D} \text{ satisfaz } (1)\Big\}$ e é chamada de universo.

Teorema 2.2. *Sob as condições acima o processo* $\{U_\varepsilon(t,\tau)\}_{t\ge\tau}$ *admite um* $\mathcal{D}$*-atrator pullback minimal* $\{\mathcal{A}_\varepsilon(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$.

Prova: Basta provar que o processo $\{U_\varepsilon(t,\tau)\}_{t\ge\tau}$ é pullback $\mathcal{D}$-assintoticamente compacto e que a família $\hat{B}_0 = \{B_0(t)\}$, dada pelas bolas fechada de centro na origem e raio $\rho_0(t)$, é uma família pullback $\mathcal{D}$-absorvente, onde $|\rho_0(t)|^2 = \dfrac{2C_\omega}{\beta_0}\displaystyle\int_{-\infty}^t e^{-\sigma_0(t-s)}\|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \dfrac{21C_f}{\beta_0} + 1$, para algum $\sigma_0\in(0,\frac{\sigma_1}{2})$.

Teorema 2.3. *O processo* $\{U_\varepsilon(t,\tau)\}_{t\ge\tau}$ *é semi-contínuo superiormente em* $\varepsilon_0\in[0,1)$.

Prova: Basta provar que, fixados $t\in\mathbb{R}$ e $\varepsilon_0\in[0,1)$, tem-se

(i) $B = \displaystyle\bigcup_{\varepsilon\in[\varepsilon_0,1)}\bigcup_{s\le t_0}\mathcal{A}_\varepsilon(s)$ é limitado, para algum $t_0\in\mathbb{R}$.

(ii) Dado $z\in B$ existe $T_{t,B}>0$ tal que

$$d(U_\varepsilon(t,t-s)z, U_{\varepsilon_0}(t,t-s)z) \le C(\varepsilon-\varepsilon_0)^2\|h\|_{L^\infty(\mathbb{R},L^2(\Omega))}, \quad \forall\ s > T_{t,B}.$$

Referências

[1] Beale, J. T. and Rosencrans, S. I. *Acoustic boundary conditions*, Bull. Amer. Math. Soc., 80, 1276-1278, 1974.

[2] Frigeri, S. *Attractors for semilinear damped wave equation with an acoustic boundary condition*, J. Evolution Equations, 10, 29-58, 2010.

[3] Frota, C. L. and Goldstein, J. A. *Some nonlinear wave equations with acoustic boundary conditions*, J. Differential Equations, 164, 92-109, 2000.

[4] Ma, T. F. and Souza, T. M. *Non-autonomous perturbations of a wave equation with acoustic boundary condition*, Preprint 2015.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *173–174*

SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DO CALOR VIA MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

VIVIANE COLUCCI[1,†], CLICIA G. PEREIRA[1,‡], ANALICE C. BRANDI[2,§] ADILANDRI M. LOBEIRO[1,§§] & JUAN A. SORIANO[3,§§§]

[1]Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, PR, Brasil, [2]Departamento de Matemática e Computação, UNESP, SP, Brasil, [3]Departamento de Matemática, UEM, PR, Brasil.

[†]colucci@utfpr.edu.br, [‡]cliciapereira@utfpr.edu.br, [§]analice@fct.unesp.br, [§§]alobeiro@utfpr.edu.br, [§§§]jaspalomino@uem.br

Resumo

Implementou-se um código no software MATLAB® para obter a solução numérica da equação de difusão do calor utilizando-se os Métodos de Diferenças Finitas Progressiva e Regressiva na aproximação da derivada de primeira ordem. Observou-se que no Método de Diferenças Finitas Progressiva necessitou de um maior refinamento da malha, pois este precisa satisfazer o critério de estabilidade de von Neumann, enquanto que o Método de Diferenças Finitas Regressiva é incondicionalmente estável.

1 Introdução

Neste trabalho estudou-se o comportamento da equação de difusão do calor (1). Para um estudo de caso, considerou uma barra delgada isolada termicamente ao longo do seu comprimento, com suas extremidades mantidas às temperaturas de $T_0 = T_1 = 50^oC$. Supondo a barra à temperatura inicial de $T = 0^oC$, obteve-se a temperatura ao longo da barra no decorrer do tempo resolvendo-se numericamente a equação diferencial parcial (EDP) parabólica

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) \quad = \quad \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) \quad , \quad 0 < x < L \text{ e } 0 < t < T, \tag{1}$$

com condições inicial e de contorno

$$\begin{array}{rclclcl} T(x,0) & = & 0 & & & , & 0 < x < L, \\ T(0,t) & = & T(L,t) & = & 50 & , & 0 \le t \le T, \end{array} \tag{2}$$

em que T é a temperatura, t é o tempo, L é o comprimento da barra e α é o coeficiente de difusidade térmica do material.

Obteve-se a solução numérica da EDP (1) sujeita as condições (2) aplicando o Método das Diferenças Finitas (MDF). Particularmente, utilizou-se dois MDF para aproximar a derivada de primeira ordem da equação (1): Progressiva e Regressiva, em seguida comparou-se os resultados numéricos obtidos [3].

2 Resultados Principais

Para fazer a discretização do domínio, foi selecionado dois números inteiros $N > 0$ e $M > 0$ e assim definiu-se o tamanho dos passos da malha $h = L/N$ e $k = T/M$, para os eixos x e t respectivamente, onde $L = 0,1$m é o comprimento da barra e T é o tempo máximo. Assim obteve-se $x_i = x_0 + ih$ para $i = 0, 1, \ldots, N-1, N$ e $t_j = t_0 + jk$ para $j = 0, 1, \ldots, M-1, M$, onde $x_0 = 0$, $x_N = 0,1$, $t_0 = 0$ e $t_M = T$ [1].

Considerando os pontos interiores da malha (x_i, t_j), aproximou-se a derivada de primeira ordem por:

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x_i,t_j) = \frac{T(x_i,t_j+k) - T(x_i,t_j)}{k} - \frac{k}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(x_i,\mu_j), \tag{3}$$

usando diferenças progressivas, para algum $\mu_j \in (t_j, t_j + k)$, e

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x_i, t_j) \;=\; \frac{T(x_i, t_j) - T(x_i, t_j - k)}{k} + \frac{k}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(x_i, \mu_j), \tag{4}$$

utizando diferenças regressivas, onde $\mu_j \in (t_j - k, t_j)$. A derivada de segunda ordem foi aproximada por

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{T(x_i + h, t_j) - 2T(x_i, t_j) + T(x_i - h, t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}(\xi_i, t_j), \tag{5}$$

para algum $\xi_i \in (x_i - h, x_i + h)$ [2].

Substituindo as equações (3) e (5) em (1) e (4) e (5) em (1) respectivamente, e utilizando as condições inicial e de contorno, obtém-se o Método de Euler Explícito (Diferenças Progresssivas)

$$w_{i,j+1} \;=\; (1 - 2\lambda)w_{i,j} + \lambda(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}), \tag{6}$$

onde $\lambda = (\alpha k)/h^2 > 0$, $w_{i,j} \approx T(x_i, t_j)$ para $i = 0, 1, \ldots, N - 1$ e $j = 0, 1, \ldots, M - 1$ e o Método de Euler Implícito (Diferenças Regressivas)

$$(1 + 2\lambda)w_{i,j} - \lambda w_{i+1,j} - \lambda w_{i-1,j} \;=\; w_{i,j-1}, \tag{7}$$

para $i = 1, \ldots, N - 1$ e $j = 0, 1, \ldots, M - 1$.

Fazendo i e j variar obtêm-se os valores de $w_{i,j}$ para todo $i = 0, 1, \ldots, N - 1, N$ e $j = 0, 1, \ldots, M - 1, M$.

Com base na equação (6) foi implementado um código no software MATLAB® utilizando os dados vistos em [4]: $\alpha = 0,0834$ m^2/s, $L = 0,1$m, $T = 1$s, $N = 10$, $M = 2000$, $w_{0,j} = w_{N,j} = 50$ e $w_{i,0} = 0$, onde os valores de N e M foram escolhidos de modo que, $h = L/N = 0,01$ e $k = T/M = 0,0005$, satisfaça o critério de estabilidade de von Neumann, ou seja,

$$\frac{\alpha k}{h^2} = \frac{(0,0834)(0,0005)}{(0,01)^2} = 0,417 \leq \frac{1}{2}.$$

Já na equação (7), por ser incondicionalmente estável, teve-se uma certa liberdade para escolher o valor de k, e o código foi implementado com os mesmos valores dos dados anteriores com exceção do valor de M, que neste caso, foi escolhido $M = 500$.

Após executar as simulações numéricas, percebeu-se que a diferença entre os dois métodos, Progressiva e Regressiva, está no tamanho do passo k, sendo que no MDF Progressiva necessitou-se de um maior refinamento da malha.

Referências

[1] BURDEN, R. L. AND FAIRES, J.D. - *Análise numérica.*, São Paulo, Oitava edição, Pioneira Thomson Learning, 2003.

[2] CUMINATO, J. A. AND JUNIOR M. M. - *Discretização de Equações Diferenciais*, Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[3] FORTUNA, A. O. - *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações*, Editora da Universidade de São Paulo, 2012.

[4] GILAT, A. - *MATLAB com Aplicações em Engenharia*, Bookman, Quarta, 2012.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *175–176*

UNIFORM STABILIZATION OF A LINEAR PLATE MODEL IN HYPERBOLIC THERMOELASTICITY

CELENE BURIOL[1,†] & WILLIAM S. MATOS[2,‡]

[1]Departamento de matemática, UFSM, RS, Brasil, [2]CCNE, UFSM, RS, Brasil.

[†]celene.buriol@ufsm.br, [‡]w.silveiramatos@gmail.com

Abstract

We study dynamic elastic deformations of a quasilinear plate model of Timoshenko's type under thermal effects which are modeled by Cattaneo's law. We prove uniform exponential stabilization of the total energy as time approaches infinity.

1 Introduction

In this work we consider a pair of scalar functions $u = u(x,t)$ and $\theta = \theta(x,t)$ satisfying the hyperbolic/hyperbolic coupled system

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} - u_{xxt} + u_t + \delta\theta_{xxt} = 0 \\ \tau\theta_{tt} - \rho\theta_{xx} + \theta_t - \delta u_{xxt} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

in $\Omega = (0, L)$. In (1), δ, τ and ρ are positive constants and $u = u(x,t)$ represents the vertical displacement of $x \in (0, L)$ at time t. The function $\theta = \theta(x,t)$ denotes the temperature at $x \in (0, L)$ at time t.

The constants we are considering in (1) are usually associated with the following: τ is the "relaxation" time and δ is a coupling constant for (1).

We complement system (1) with Dirichlet boundary conditions

$$u(0,t) = u(L,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(L,t) = \theta(0,t) = \theta(L,t) = 0 \tag{2}$$

and initial conditions

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x),\ \ \theta(x,0) = \theta_0(x),\ \theta_t(x,0) = \theta_1(x) \text{ in } (0,L). \tag{3}$$

The total energy associated to (1) is given by

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L [u_t^2 + |u_{xx}|^2 + \tau\theta_t^2 + \rho|\theta_x|^2]\, dx. \tag{4}$$

Model (1) describes elastic deformations of a linear plate equation under the presence of thermal effects modeled by Cattaneo's Law (see [1] and [3]). Our main result says that the total energy given in (4) decays exponentially as time approaches to $+\infty$. More precisely, for any $\epsilon > 0$ sufficiently small, then we have $E(t) \leq 3E(0)exp\left(-\frac{2\epsilon}{3}t\right)$ for any $t \geq 0$.

2 Main Results

We consider the following spaces: $\mathcal{H} = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ and
$\mathcal{D}(A) = \{(u, v, \theta, w) \in \mathcal{H}$ such that $\theta, v,$ and u belong $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ and $w \in H_0^1(\Omega)\}$.

Using classical techniques in semigroup theory (see for instance [2]) we prove the folowing result.

Theorem 2.1. *(Global existence and uniqueness) Let us consider problem (1), (2), (3) with the above considerations. Given initial date* $U_0 = (u_0, u_1, \theta_0, \theta_1) \in \mathcal{D}(A)$ *then there exists a unique function* $U(t) = (u(t), u_t(t), \theta(t), \theta_t(t))$ *such that* $U \in C([0, +\infty); \mathcal{D}(A)) \cap C^1((0, +\infty); \mathcal{H})$ *and* $U(t)$ *satisfies (1)-(3).*

Now we will prove the exponential decay of the total energy $E(t)$. The main tool will be the constrution of a convenient Lyapunov functional.

Theorem 2.2. *Consider the global solution of problem (1)-(3) given by Theorem 2.1. Then, the total energy considered in Section 1 satisfies*

$$E(t) \leq 3E(0)exp(-\gamma\, t)$$

for all $t \geq 0$, *where* γ *is a positive constant independent of the initial data.*

Proof Considering ϵ suficiently small and using multiplier technics we prove that

$$a) \qquad \frac{1}{2}E(t) \leq H(t) \leq \frac{3}{2}E(t) \quad \text{for all } t \geq 0$$

and

$$b) \qquad \frac{d}{dt}H(t) \leq -\epsilon E(t) \quad \text{for all } t \geq 0.$$

Here $H(t) = E(t) + \epsilon J(t)$ where $E(t)$ (the total energy) was given in (1.4) and $J(t) = \int_0^L [uu_t + \tau\theta\theta_t]\, dx$.
Using a and b we obtain $\frac{d}{dt}\{H(t)\} \leq -\frac{2\epsilon}{3} H(t)$. Integration over $[0, t]$ give us
$H(t) \leq H(0)exp(-\frac{2\epsilon}{3}t)$ for all $t \geq 0$.

Thus, using a and b it follows that

$$E(t) \leq 3E(0)exp(-\frac{2\epsilon}{3}t) \quad \text{for all } t \geq 0$$

which prove theorem 2.2 with $\gamma = \frac{2\epsilon}{3}$.

■

References

[1] Chandrasekharaiah, D. S., Hyperbolic thermoelasticity: A review of of recente literature, Appl. Mech. Rev. 51, (1998), 705-729.

[2] Pazy, A.; Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer-Verlag (1983).

[3] Racke, R.; Asymptotic behaviour of solutions in linear 2-or 3-d thermoelasticity with second sound, Quart. Appl. Math. 61, (2003), 315-328.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *177–178*

ESTUDO DE UM MODELO DISPERSIVO NÃO LINEAR PARA ONDAS INTERNAS

JANAINA SCHOEFFEL[1,†] & AILÍN RUIZ DE ZÁRATE[2,‡]

[1]Programa de Pós-Graduação em Matemática, DMAT, UFPR, PR, Brasil, [2]Departamento de Matemática, UFPR, PR, Brasil.

[†]janainaschoeffel@ufpr.br, [‡]ailin@ufpr.br

Resumo

Apresenta-se neste trabalho um estudo em andamento sobre a boa colocação de um sistema do tipo Boussinesq para ondas intermediárias que contém, no regime unidirecional de propagação, a equação de ondas longas intermediárias regularizada (ILWR), a qual também é considerada aqui.

1 Introdução

A geração de ondas internas a grandes profundidades em mares e oceanos é um fenômeno de interesse muito atual no estudo da dinâmica oceânica. Diferenças de temperatura e salinidade provocam estratificação nas camadas de água, onde ondas de centenas de metros de altura e comprimento ainda maior podem viajar vários quilômetros. Acredita-se que elas sejam responsáveis por transportar e misturar nutrientes do fundo até a superfície, propiciando o desenvolvimento da vida marinha. Por outro lado, essas ondas interagem com as estruturas submersas e as linhas de extração de petróleo e gás, o que pode afetar as operações de recuperação em águas profundas. Tais fatos evidenciam o potencial de impacto econômico e ambiental da pesquisa no tema.

Este trabalho tem como ponto de partida o modelo fracamente não linear de duas camadas para fundo plano introduzido em [7],

$$\begin{cases} \eta_t - \big[(1-\alpha\eta)u\big]_x = 0 \\ u_t + \alpha u\, u_x - \eta_x = \sqrt{\beta}\,\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\mathcal{T}\left[u_{xt}\right], \end{cases} \tag{1}$$

onde η representa a amplitude da onda interna (Figura 1), u a média ao longo da direção vertical da componente horizontal da velocidade na camada superior, t a variável temporal e x a coordenada horizontal. As constantes $\alpha = \frac{a}{h_1} > 0$ e $\beta = \left(\frac{h_1}{L}\right)^2 > 0$ são parâmetros adimensionais pequenos e α é da mesma ordem de $\sqrt{\beta}$. Os parâmetros básicos são: a = amplitude da perturbação, L = comprimento de onda, h_1 = profundidade da camada superior, $h = \frac{h_2}{L}$ (L comparável com h_2 e $h_2 \gg h_1$), h_2 = profundidade da camada inferior e $\rho_2 > \rho_1 > 0$ as densidades dos fluidos. O operador Transformada de Hilbert na faixa $\mathcal{T}$ é definido no domínio das frequências como sendo

$$\widehat{\mathcal{T}[f]}(k) = i\coth(kh)\widehat{f}(k), \qquad \text{para } k \in \mathbb{R} - \{0\}. \tag{2}$$

2 Resultados

Antes de estudar o sistema (1), abordou-se a equação de ondas longas intermediárias regularizada (ILWR), $u_t + u_x - \frac{3}{2}\alpha u u_x - \sqrt{\beta}\,\frac{\rho_2}{\rho_1}\mathcal{T}[u_{xt}] = 0$, por ser tecnicamente mais fácil de tratar do que o sistema.

A equação de ondas longas intermediárias (ILW), $u_t + u_x - \frac{3}{2}\alpha u u_x - \sqrt{\beta}\,\frac{\rho_2}{\rho_1}\mathcal{T}[u_{xx}] = 0$, foi introduzida por [9] (1977), que fez um estudo analítico da equação. O artigo [2] (1982) introduz a versão periódica da equação. A boa colocação da equação ILW em espaços de Sobolev H^s, com $s > 3/2$, aparece em [1] (1989), onde os resultados são demonstrados para a equação de Benjamin-Ono e enunciados para a equação ILW, e na tese de doutorado [6] (1991), para espaços de Sobolev com pesos.

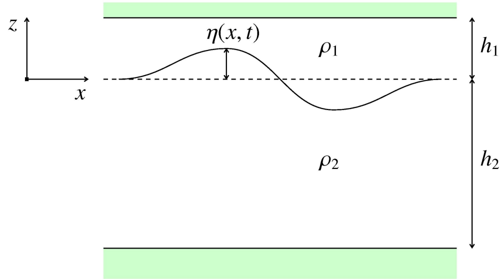

Figura 1: Configuração de um sistema com dois fluidos.

Neste trabalho é demonstrada a boa colocação da equação ILWR para espaços de Sobolev de tipo L^2, $H^s(\mathbb{R})$, com $s > 1/2$, seguindo as ideias de [6]. Também consideramos uma versão periódica linearizada do sistema (1), cuja boa colocação para espaços de Sobolev periódicos $H^s_{\text{per}} \times H^{s+\frac{1}{2}}_{\text{per}}$, $s \in \mathbb{R}$, foi demonstrada com base nas ideias de [4]. Voltando a atenção para o sistema (1), é importante destacar o fato de que só há um termo dispersivo na segunda equação. Esse é um aspecto importante que diferencia este sistema de outros já estudados, por exemplo, em [3, 5, 8, 11]. Pretendemos mostrar os avanços obtidos na boa colocação do sistema fracamente não linear (1) para espaços de Sobolev de tipo L^2 seguindo as ideias e técnicas utilizadas por [10, 6], entre outros.

Referências

[1] ABDELOUHAB, L., BONA, L., FELLAND, M. AND SAUT, J.-C. - Nonlocal models for nonlinear, dispersive waves. *Physica D*, **40**, 360-392, 1989.

[2] ABLOWITZ, M. J., FOKAS, A. S., SATSUMA, J. AND SEGUR, H. - On the periodic intermediate long wave equation. *Journal of Physics, A*, **15**, 781-786, 1982.

[3] ALAZMAN, A. A., ALBERT, J. P., BONA, J. L., CHEN, M. AND WU, J. - Comparisons between the BBM equation and a Boussinesq system. *Advances in Differential Equations*, **11**, 121-166, 2006.

[4] ALFARO, D. G., OLIVEIRA, A. P., RUIZ DE ZÁRATE, A. AND NACHBIN, A. - Fully discrete stability and dispersion analysis for a linear dispersive internal wave model. *Computational and Applied Mathematics*, **33**, 203-221, 2014.

[5] BONA, J. L., CHEN, M. AND SAUT, J.-C. - Boussinesq equations and other systems for small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media: II.The nonlinear theory. *Nonlinearity*, **17**, 925-952, 2004.

[6] BORBA, M. P. - *A Equação Intermediária de Ondas Longas em Espaços de Sobolev com Pesos, Tese de Doutorado.* IMPA, Rio de Janeiro: 1991.

[7] CHOI, W. AND CAMASSA, R. - Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system. *Journal of Fluid Mechanics*, **396**, 01-36, 1999.

[8] GRAJALES, J. C. M. - Existence and Numerical Approximation of Solutions of an Improved Internal Wave Model. *Mathematical Modelling and Analysis*, **19**, 309-333, 2014.

[9] JOSEPH, R. I. - Solitary waves in finite depth fluid. *Journal of Physics, A*, **10**, L225-L227, 1977.

[10] SCHONBEK, M. E. - Existence of Solutions for the Boussinesq System of Equations. *Journal of Differential Equations*, **42**, 325-352, 1981.

[11] XU, L. - Intermediate long wave systems for internal waves. *Nonlinearity*, **25**, 597-640, 2012.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *179–180*

ON THE SIZE OF CERTAIN SUBSETS OF INVARIANT BANACH SEQUENCE SPACES

TONY NOGUEIRA[1,†] & DANIEL PELLEGRINO[1,‡]

[1]Departamento de Matemática, UFPB, PB, BRASIL.

[†]tonykleverson@gmail.com, [‡]dmpellegrino@gmail.com

Abstract

The essence of the notion of lineability and spaceability is to find linear structures in somewhat chaotic environments. The existing methods, in general, use *ad hoc* arguments and few general techniques are known. Motivated by the search of general methods, in this paper we formally extend recent results of G. Botelho and V.V. Fávaro on invariant sequence spaces.

1 Introduction

The notion of invariant sequence spaces, as we investigate in this note, was introduced in [3] although it seems to have its roots in [1, 2]. Our main results are formal extensions of recent results of G. Botelho and V.V. Fávaro [4].

Definition 1.1. *([3]) Let $X \neq \{0\}$ be a Banach space.*
(a) Given $x \in X^{\mathbb{N}}$, x^0 is defined as: if x has only finitely many non-zero coordinates, then $x^0 = 0$; otherwise, $x^0 = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ where x_j is the j-th non-zero coordinate of x.
(b) An invariant sequence space over X is an infinite-dimensional Banach or quasi-Banach space E of X-valued sequences enjoying the following conditions:
(b1) For $x \in X^{\mathbb{N}}$ such that $x^0 \neq 0$, $x \in E$ if and only if $x^0 \in E$, and $\|x\| \leq K\|x^0\|$ for some constant K depending only on E.
(b2) $\|x_j\| \leq \|x\|$ for every $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in E$ and every $j \in \mathbb{N}$.

The following definition is a natural extension of [4, Definition 2.2]:

Definition 1.2. *Let X and Y be Banach spaces, Γ be an arbitrary set and E be an invariant sequence space over X. If E_l, for all $l \in \Gamma$, are invariant sequence spaces over Y and $f : X \longrightarrow Y$ is any map, we define the set*

$$G(E, f, (E_l)_{l\in\Gamma}) = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in E : (f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin \bigcup_{l\in\Gamma} E_l \right\}. \tag{1}$$

When $E_l(Y)$ is equal to $\ell_l(Y), c_0(Y)$ and $\ell_l^w(Y)$, then (1) is denoted by $C(E, f, \Gamma), C(E, f, 0)$ and $C^w(E, f, \Gamma)$, respectively.

According to [4, Definition 2.3] a map $f : X \longrightarrow Y$ between normed spaces is said to be:
(a) *Non-contractive* if $f(0) = 0$ and for every scalar $\alpha \neq 0$ there is a constant $K(\alpha) > 0$ such that $\|f(\alpha x)\|_Y \geq K(\alpha) \cdot \|f(x)\|_Y$ for every $x \in X$.
(b) *Strongly non-contractive* if $f(0) = 0$ and for every scalar $\alpha \neq 0$ there is a constant $K(\alpha) > 0$ such that $|\varphi(f(\alpha x))| \geq K(\alpha) \cdot |\varphi(f(x))|$ for all $x \in X$ and $\varphi \in Y'$.
The following result was recently proved by Botelho and Fávaro (see [4, Theorem 2.5]):

Theorem 1.1. *([4]) Let X and Y be Banach spaces, E be an invariant sequence space over X, $f : X \longrightarrow Y$ be a function and $\Gamma \subseteq (0, \infty]$.*
(a) If f is non-contractive, then $C(E, f, \Gamma)$ and $C(E, f, 0)$ are either empty or spaceable in E.
(b) If f is strongly non-contractive, then $C^w(E, f, \Gamma)$ is either empty or spaceable in E.

In the present paper we formally extend Theorem 1.1 to more general settings.

2 Main Results

An invariant sequence space E over a Banach space X will be called strongly invariant sequence space when:

(a) $c_{00}(X) \subset E$;

(b) $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in E$ if, and only if, all subsequences of $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ also belong to E.

Definition 2.1. *Let X, Y be Banach spaces and E be an invariant sequence space over Y. A map $f : X \to Y$ such that $f(0) = 0$ is said to be compatible with E if for any sequence $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ of elements of X, we have $(f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin E \Rightarrow (f(ax_j))_{j=1}^{\infty} \notin E$ regardless of the scalars $a \neq 0$.*

Theorem 2.1. *Let X and Y be Banach spaces, Γ be an arbitrary set, E be an invariant sequence space over X and E_l be strongly invariant sequence spaces over Y for all l in Γ. If $f\colon X \longrightarrow Y$ is compatible with E_l for all $l \in \Gamma$, then $G(E, f, (E_l)_{l\in\Gamma})$ is either empty or spaceable.*

Definition 2.2. *Let E be an invariant sequence space over $\mathbb{K}$. For any Banach space Y we define*

$$E^w(Y) := \{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in Y^{\mathbb{N}} : (\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty} \in E \text{ for all } \varphi \in Y'\}.$$

Definition 2.3. *Let X and Y be Banach spaces, and E be an invariant sequence space over $\mathbb{K}$. A map $f : X \to Y$ such that $f(0) = 0$ is strongly compatible with $E^w(Y)$ if $\varphi \circ f$ is compatible with E for all continuous linear functionals $\varphi : Y \to \mathbb{K}$.*

Definition 2.4. *Let X and Y be Banach spaces, Γ be an arbitrary set and E be an invariant sequence space over X. If F_l, for all $l \in \Gamma$, are invariant sequence spaces over $\mathbb{K}$, and $f : X \longrightarrow Y$ is any map, we define the set*

$$G^w(E, f, (F_l)_{l\in\Gamma}) = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in E : (f(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin \bigcup_{l\in\Gamma} F_l^w(Y) \right\}.$$

Theorem 2.2. *Let X and Y be Banach spaces, Γ be an arbitrary set, E be an invariant sequence space over X and F_l be invariant sequence spaces over $\mathbb{K}$ such that $F_l^w(Y)$ are strongly invariant sequence spaces for all $l \in \Gamma$. If $f\colon X \longrightarrow Y$ is strongly compatible with $F_l^w(Y)$ for all $l \in \Gamma$, then $G^w(E, f, (F_l)_{l\in\Gamma})$ is either empty or spaceable.*

References

[1] BARROSO, C. S.; BOTELHO, G.; FÁVARO, V. V. AND PELLEGRINO, D. - *Lineability and spaceabiliy of sets of functions on* $\mathbb{R}$. Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), 1913–1923.

[2] BOTELHO, G.; CARIELLO, D.; FÁVARO, V. V. AND PELLEGRINO, D. - *Maximal spaceability in sequence spaces.* Linear Algebra Appl. **437** (2012), no. 12, 2978–2985.

[3] BOTELHO, G.; DINIZ, D.; FÁVARO, V. AND PELLEGRINO, P. - *Spaceability in Banach and quasi-Banach sequence spaces.* Linear Algebra Appl. **434** (2011), 1255–1260.

[4] BOTELHO, G. AND FÁVARO, V. V. - *Constructing Banach spaces of vector-valued sequences with special properties*, to appear in Michigan Math. Journal.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *181–182*

OBSERVAÇÕES SOBRE A DESIGUALDADE DE HARDY-LITTLEWOOD PARA POLINÔMIOS M-HOMOGÊNEOS

WASTHENNY V. CAVALCANTE[1,†], DANIEL N. ALARCÓN[1,‡] & DANIEL M. PELLEGRINO[2,§]

[1]Universidade Federal de Pernambuco, UFPE, PE, Brasil, [2]Universidade Federal da Paraíba, UFPB, PB, Brasil.

[†]wasthenny.wc@gmail.com, [‡]danielnunezal@gmail.com, [§]dmpellegrino@gmail.com

Resumo

A desigualdade de Hardy-Littlewood para polinômios m-homogêneos em espaços ℓ_p é válida quando $p > m$. Nesta nota, entre outros resultados, apresentamos uma versão ótima desta desigualdade para o caso $p = m$. Também mostramos que a constante ótima, quando restrita ao caso polinomial 2-homogêneo em $\ell_2(\mathbb{R}^2)$ é 2.

1 Introdução

A desigualdade de Hardy-Littlewood para formas bilineares (complexas ou reais) definidas em espaços ℓ_p quando $p > 2$ remonta a 1934. Esta desigualdade juntamente com a desigualdades de Bohnenblust-Hille e 4/3 de Littlewood são pilares do nascimento da teoria dos operadores múltiplos somantes. Existem, naturalmente, equivalentes naturais da desigualdade de Hardy-Littlewood para polinômios m-homogêneos e formas m-lineares definidas em espaços ℓ_p quando $p > m$.

Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Considere um espaço de Banach X e $m \in \mathbb{N}$. Uma função $p : X \to \mathbb{K}$ é chamada *polinômio m-homogêneo* se existe uma forma m-linear $\varphi : \prod_{k=1}^{m} X \to \mathbb{K}$ tal que para todo $x \in X$

$$p(x) = \varphi(x, \dots, x).$$

Usualmente denotamos por $\mathcal{P}(^m X)$ o espaço vetorial de todos os polinômios m-homogêneos contínuos p em X, equipado com a norma $\|p\| := \sup_{\|x\|\leq 1} |p(x)|$ é um espaço de Banach.

Dado $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, definimos $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Por x^α denotamos o monômio $x^{\alpha_1} \cdots x^{\alpha_n}$ para qualquer $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. A desigualdade polinomial 4/3 de Littlewood afirma que existe uma constante $B_{\mathbb{K},2}^{pol} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{|\alpha|=2} |a_\alpha|^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{3}{4}} \leq B_{\mathbb{K},2}^{\text{pol}} \|P\|$$

para quaisquer polinômios 2-homogêneos $P : \ell_p^n \to \mathbb{K}$ dados por

$$P(x_1, ..., x_n) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha \mathbf{x}^\alpha,$$

e todo inteiro positivo n. Quando mudamos ℓ_∞^n por ℓ_p^n obtemos a desigualdade de Hardy-Littlewood cujos expoentes ótimos são $\frac{4p}{3p-4}$ para $4 \leq p \leq \infty$ e $\frac{p}{p-2}$ para $2 < p \leq 4$. Em outras palavras, para $4 \leq p \leq \infty$ e $n \geq 1$, existe uma constante $C_{\mathbb{K},2,p}^{pol} \geq 1$ (independente de n) tal que

$$\left(\sum_{|\alpha|=2} |a_\alpha|^{\frac{4p}{3p-4}} \right)^{\frac{3p-4}{4p}} \leq C_{\mathbb{K},2,p}^{\text{pol}} \|P\|,$$

para quaisquer polinômios 2-homogêneos em ℓ_p^n dados por $P(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha \mathbf{x}^\alpha$. Quando $2<p\leq 4$ mudamos o expoente $\frac{4p}{3p-4}$ por $\frac{p}{p-2}$.

Quando $m<p<2m$ a desigualdade acima possui uma versão polinomial devida a Dimant e Sevilla-Peris [2]: Dado um polinômio m-homogêneo $P(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \mathbf{x}^\alpha$, definido em ℓ_p^n com $m<p<2m$, existe uma constante $C_{\mathbb{K},m,p}^{pol}\geq 1$ (independente de n) tal que

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha|^{\frac{p}{p-m}}\right)^{\frac{p-m}{p}} \leq C_{\mathbb{K},m,p}^{\mathrm{pol}} \|P\|.$$

Além disso, o expoente $\frac{p}{p-m}$ é ótimo. Para $p\geq 2m$, a desigualdade é análoga apenas trocando o expoente ótimo $\frac{p}{p-m}$ pelo expoente ótimo $\frac{2mp}{mp+p-2m}$ (devido a Praciano-Pereira [3]).

Proposição 1.1 (A desigualdade de Hardy-Littlewood para polinômios 2-homogêneos em ℓ_2)**.** *Se n é um inteiro positivo, então*

$$\max_{|\alpha|=2} |a_\alpha| \leq 4\sqrt{2}\,\|P\|$$

para todo $P=\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha \mathbf{x}^\alpha$ em $\mathcal{P}(^2\ell_2^n)$. Além disso este resultado é ótimo no sentido que a norma do sup *não pode ser trocada por qualquer norma ℓ_r sem que a constante continue independente de n.*

Proposição 1.2 (A desigualdade de Hardy-Littlewood para polinômios 2-homogêneos em ℓ_2 e escalares complexos)**.** *Se $n\geq 1$, então*

$$\max_{|\alpha|=2} |a_\alpha| \leq \frac{4}{\sqrt{\pi}}\|P\|$$

para qualquer $P=\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha \mathbf{x}^\alpha$ em $\mathcal{P}(^2\ell_2^n)$ sobre o corpo dos complexos. Além disso este resultado é ótimo no sentido da Proposição 1.1.

Teorema 1.1 (Desigualdade de Hardy-Littlewood para polinômios m-homogêneos em ℓ_m)**.** *Seja $m\geq 2$ um inteiro positivo. Dado $n\geq 1$, existe uma constante ótima $C_{\mathbb{K},m}\geq 1$ (independente do n) tal que*

$$\max_{|\alpha|=m} |a_\alpha| \leq C_{\mathbb{K},m}\|P\|$$

para todo $P\in\mathcal{P}(^m\ell_m^n)$, com

$$C_{\mathbb{R},m} \leq \left(\sqrt{2}\right)^{m-1} m^m \text{ e } C_{\mathbb{C},m} \leq \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1} m^m.$$

Além disso este resultado é ótimo no sentido que a norma do sup *não pode ser trocada por qualquer norma ℓ_r sem que a constante continue independente de n.*

Teorema 1.2. *Para $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, a constante ótima da desigualdade de Hardy-Littlewood para polinômios 2-homogêneos em $\mathcal{P}(^2\ell_2^2)$ é 2.*

As demonstrações dos resultados enunciados acima podem ser encontradas em [1].

Referências

[1] CAVALCANTE, W.; NUÑEZ-ALARCÓN, W. AND PELLEGRINO, D. - *Remarks on the Hardy–Littlewood inequality for m-homogeneous polynomials and m-linear forms*, arXiv:1507.06099.

[2] DIMANT, V. AND SEVILLA-PERIS, P. - *Summation of coefficients of polynomials on ℓ_p spaces*, A aparecer em Publ. Mat..

[3] PRACIANO-PEREIRA, T. - *On bounded multilinear forms on a class of ℓ_p spaces*, J. Math. Anal. Appl. 81 (1981), 561–568.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná
IX ENAMA - Novembro 2015 *183–184*

SCATTERING FOR INHOMOGENEOUS NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATIONS

CARLOS M. GUZMAN[1,†] & LUIZ G. FARAH[1,‡]

[1]Instituto de Matemática, UFMG, MG, Brasil.

[†]charlis.100@gmail.com, [‡]lgfarah@gmail.com

Abstract

The purpose of this work is to study scattering for the inhomogeneous nonlinear Schrödinger equation (INLS) in $H^1(\mathbb{R}^N)$. To do this, we use the ideas introduced by Kenig-Merle [5] in their study of the energy-critical NLS and Holmer-Roudenko [4] for the $3D$ cubic NLS.

1 Introduction

In this work we study the initial value problem (IVP) or also called the Cauchy problem for the inhomogenous nonlinear Schrödinger equation (INLS)

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + \lambda |x|^{-b}|u|^{\alpha}u = 0, & t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^N, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

where $u = u(t,x)$ is a complex-valued function in space-time $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ and $\alpha, b > 0$. The equation is called focusing INLS for $\lambda = +1$ and defocusing INLS for $\lambda = -1$.

The scale-invariant Sobolev norm is $H^{s_c}(\mathbb{R}^N)$ with $s_c = \frac{N}{2} - \frac{2-b}{\alpha}$ (Critical Sobolev index). If $s_c = 0$ (alternatively $\alpha = \frac{4-2b}{N}$) the problem is known as the mass-critical or L^2-critical; when $s_c = 1$ (alternatively $\alpha = \frac{4-2b}{N-2}$) it is called energy-critical or $\dot{H}^1$-critical, finally the problem is known as mass-supercritical and energy-subcritical if $0 < s_c < 1$. The Cauchy problem for the INLS (1) was already studied for many authors in recent years. Let us briefly recall the best results available in the literature. Cazenave studied the well-posedness using the abstract theory. To do this, he analized (1) in the sense of distributions, that is, $i\partial_t u + \Delta u + |x|^{-b}|u|^{\alpha}u = 0$ in $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ for a.a. $t \in I$, and using some results of Functional Analysis and Semigroups of Linear Operators, he proved that it is appropriate to seek solutions of (1)

$$u \in C\left([0,T), H^1(\mathbb{R}^N)\right) \cap C^1\left([0,T), H^{-1}(\mathbb{R}^N)\right) \text{ for some T} > 0,$$

for the defocusing case ($\lambda = -1$) any local solution of the (IVP) (1) with $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ extends globally in time. Other authors like Genoud and Stuart also studied this problem for the focusing case ($\lambda = 1$). They showed the IVP (1) is well-posed in $H^1(\mathbb{R}^N)$

- locally if $0 < \alpha < 2^* := \begin{cases} \frac{4-2b}{N-2} & N \geq 3; \\ \infty & N = 1,2; \end{cases}$
- globally for small initial conditions if $\frac{4-2b}{N} < \alpha < \frac{4-2b}{N-2}$;
- globally for any initial condition in $H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ if $0 < \alpha < \frac{4-2b}{N}$.

Another interesting problem to (1) is scattering. For the $3D$ defocusing NLS ((1) with $b = 0$), scattering has been established for all H^1 solutions (regardless of size) by Ginibre-Velo using a Morawetz inequality. This proof was simplified by Colliander-Keel-Staffilani-Takaoka-Tao using a new interaction Morawetz inequality they discovered.

Other authors like Killip-Tao-Visan, Tao-Visan-Zhang and Killip-Visan-Zhang extend for the L^2-critical defocusing NLS in arbitrary dimension $N \geq 1$. These Morawetz estimates, however, are not positive definite for solutions to the focusing case and cannot be used to study the scattering problem in this case.

In 2006, Kenig and Merle [5] developed a new method to show scattering for the focusing NLS. They proved scattering in $H^1(\mathbb{R}^N)$ in this case with initial data in $\dot{H}^1(\mathbb{R}^N)$ in dimensions $N = 3, 4, 5$. To do this, they applied the concentration-compactness and rigidity technique. The concentration-compactness method appears in the context of wave equation in Gerard and NLS in Keraani. The rigidity argument (estimates on a localized variance) is a technique developed by F. Merle in mid 1980's.

For the L^2-supercritical and H^1-subcritical case several scattering results were obtained for the focusing NLS in $H^1(\mathbb{R}^N)$. Holmer-Roudenko [4] showed scattering to $3D$ NLS for radial initial data, then Duyckaerts-Holmer-Roudenko [1] extended this result for the nonradial data. Recently, Fang-Xie-Cazenave and Cristi Guevara [3] generalized the above result for arbitrary $N \geq 1$.

In the spirit of Holmer, Roudenko, Duyckaerts and Guevara, we show scattering in $H^1(\mathbb{R}^N)$ for the focusing inhomogeneous nonlinear Schrödinger equation (1) in the case $0 < s_c < 1$ (mass-supercritical and energy subcritical equation). equation). Our aim in this work is to show the following result:

2 Main Result

Theorem 2.1. *Let $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, and let u the corresponding solution to (1) in H^1. Suppose*

$$M[u]^{s_c} E[u]^{1-s_c} < M[Q]^{s_c} E[Q]^{1-s_c},$$

and if $\|u_0\|^{s_c} \|\nabla u_0\|^{1-s_c} < \|Q\|^{s_c} \|\nabla Q\|^{1-s_c}$, then u scatters in H^1. That is, there exists $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ such that

$$\lim_{t \to \infty} \|u(t) - U(t)v\|_{H^1} = 0,$$

where Q is the ground state of $-Q + \Delta Q + \lambda |x|^{-b} |Q|^\alpha Q = 0$.

References

[1] T. Duyckaerts, J. Holmer, S. Roudenko. **Scattering for the non-radial 3D cubic nonlinear Schrödinger equation.** *Math. Res. Letters.*, 15: 1233–1250, 2008.

[2] L. G. Farah. **Global well-posedness and blow-up for the L^2-supercritical and H^1-subcritical inhomogeneous nonlinear Schrödinger equation.** *Prepint.*, 2014.

[3] C. Guevara. **Global behavior of finite energy solutions to the focusing NLS in d-dimensions.** *Appl. Math. Res. Express. AMRX .*, 2: 177-243.

[4] J. Holmer, S. Roudenko. **A sharp condition for scattering of the radial 3D cubic nonlinear Schrödinger equation.** *Comm. Math Phys.*, 282(2): 435–467, 2008.

[5] C. E. Kenig, F. Merle. **Global well-posedness, scattering, and blow-up for the energy-critical focusing nonlinear Schrödinger equation in the radial case.** *J. Invent. Math.*, 166: 645–675, 2006.