Homological algebra and Banach spaces

Daniel Victor Tausk
IME-USP

Several constructions used in homological algebra for the category of modules over a ring can be readily adapted to the category of Banach spaces and bounded linear operators: for instance, the latter has enough projectives and injectives, so that the functors Ext_n and the corresponding long exact homology sequence can be defined. For Banach spaces X and Y, the space $\mathrm{Ext}_1(X, Y)$ can be identified with the set of equivalence classes of short exact sequences $0 \to Y \to Z \to X \to 0$, which are called *twisted sums* of Y and X. A twisted sum is called *trivial* if the short exact sequence splits, i.e., if the range of the operator $Y \to Z$ is complemented in Z.

Many problems in Banach space theory are related to the quest for conditions under which $\mathrm{Ext}_1(X, Y) = 0$, i.e., under which every twisted sum of Y and X is trivial. For instance, an equivalent statement for the classical Theorem of Sobczyk is that if X is a separable Banach space, then $\mathrm{Ext}_1(X, c_0) = 0$. The converse of the latter statement does not hold in general, but it remains an open problem whether it holds when X is a $C(K)$ space. In this talk, we discuss recent developments towards the solution of this problem.

Álgebra homológica e espaços de Banach

Daniel Victor Tausk
IME-USP

Diversas construções usadas em álgebra homológica na categoria de módulos sobre um anel podem ser diretamente adaptadas para a categoria de espaços de Banach e operadores lineares limitados: por exemplo, essa categoria tem suficientes projetivos e injetivos e portanto os funtores Ext_n e a correspondente sequência exata longa de homologia podem ser definidos. Dados espaços de Banach X e Y, o espaço $\mathrm{Ext}_1(X, Y)$ pode ser identificado com o conjunto das classes de equivalência das sequências exatas curtas $0 \to Y \to Z \to X \to 0$, que são chamadas de *somas torcidas* de Y e X. Uma soma torcida é dita *trivial* se a sequência exata curta cinde, i.e., se a imagem do operador $Y \to Z$ é complementada em Z.

Muitos problemas na teoria dos espaços de Banach estão relacionados à busca por condições sob as quais $\mathrm{Ext}_1(X, Y) = 0$, i.e., sob as quais toda soma torcida de Y e X é trivial. Por exemplo, um enunciado equivalente para o clássico Teorema de Sobczyk é que se X é um espaço de Banach separável, então $\mathrm{Ext}_1(X, c_0) = 0$. A recíproca da última afirmação não vale em geral, mas continua sendo um problema em aberto saber se ela vale no caso em que X é um espaço da forma $C(K)$. Nessa palestra, discutiremos recentes avanços obtidos visando a resolução desse problema.