(vii) ENAMA
ENCONTRO NACIONAL DE ANÁLISE MATEMÁTICA E APLICAÇÕES

Caderno de Resumos

Apresentação Oral e Pôster

Realização

UNIRIO

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia (CCET)
Departamento de Matemática e Estatísitca (DME)
Escola de Matemática

Rio de Janeiro, 06 a 08 de novembro de 2013

VII ENAMA

O Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações (ENAMA) é um evento científico anual com propósito de criar um fórum de debates entre alunos, professores e pesquisadores de instituições de ensino e pesquisa, tendo como áreas de interesse: Análise Funcional, Análise Numérica, Equações Diferenciais Parciais, Ordinárias e Funcionais.

Esta sétima edição acontece no período de 06 a 08 de novembro de 2013 na Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO), no campus da Praia Vermelha, organizada pelo Departamento de Matemática e Estatística (DME), pela Escola de Matemática e pelo Centro de Ciências Exatas e Tecnologia (CCET). O evento conta com noventa comunicações orais, vinte e um painéis, dois minicursos e três palestras plenárias.

Os organizadores do VII ENAMA expressam sua gratidão às instituições que apoiaram e tornaram possível a realização desta edição, UNIRIO, CAPES, CNPq e Banco Santander, e ao Prof. Luis Pedro San Gil Jutuca, reitor da UNIRIO. Agradecem também a todos os participantes do evento, bem como a todos aqueles que, de alguma forma, estiveram envolvidos em sua realização.

A Comissão Organizadora

Comissão Organizadora

Gladson Antunes (UNIRIO)
Leonardo Silvares (UNIRIO)
Luis Amacio M. de Souza Jr. (UNIRIO)
Marcelo Rainha (UNIRIO)
Michel Cambrainha (UNIRIO)
Sandra Malta (LNCC)

Comissão Científica

Cícero Lopes Frota (UEM)
Claudianor Alves (UFCG)
Daniel Pellegrino (UFPB)
Fágner Araruna (UFPB)
Sandra Godoy (USP – SC)
Sandra Malta (LNCC)
Valdir Menegatto (USP – SC)

Apresentação Oral

Adams type inequality and application for a class of polyharmonic equations with critical growth. Abiel Costa Macedo (UFPE) and João Marcos do Ó (UFPB) 01

Some results of discrete almost automorphic solutions for Volterra difference equations with infinite delay. Airton Castro (UFPE), Claudio Cuevas (UFPE), Filipe Dantas (UFPE) and Herme Soto Segura (Universidad de la Frontera, Temuco, Chile) 03

Decay of solutions of a second order differential equation with non-smooth second member. Aldo T. Louredo (UEPB), Luis A. Medeiros (UFRJ) and M. Milla Miranda (UEPB) 05

On second order differential equations with non-smooth second members. Aldo T. Louredo (UEPB), Luis A. Medeiros (UFRJ) and M. Milla Miranda (UEPB) 07

Uma análise assintótica de um sistema de placas termoelástica do tipo hiperbólico. Alisson R. Aguiar Barbosa (USP-SCarlos) 09

Standing waves for a Hamiltonian system of Schrödinger equations with arbitrary growth. Anderson J. V. Cardoso (UFS) and João Marcos do Ó (UFPB), Everaldo Medeiros (UFPB) 11

Um sistema de equações parabólicas modelando a invasão de um tumor sólido. Anderson L. A. de Araújo (UFV) e Paulo M. D. de Magalhães (UFOP) 13

A uniqueness result for an inverse problem to the system modeling nonhomogeneous asymmetric fluids. Anibal Coronel (Universidad del Bío-Bío, Concepción, Chile) and Marko A. Rojas-Medar (Universidad del Bío-Bío, Concepción, Chile) 15

Padrões em problema parabólico com intersecção das raízes da equação degenerada. Arnaldo S. do Nascimento (UFSCar), Maicon Sônego (UNIFEI) 17

Famílias regularizadas e equações de evolução de terceira ordem. Bruno L. de Andrade Santos (USP-S. Carlos) 19

Almost automorphic solutions for evolutions equations. Bruno L. de Andrade Santos (USP-S.Carlos). Eder Mateus (UFS) and Arlúcio C. Viana (UFS) 21

Estimativas uniformes para equações de Schrödinger e placa com dissipação não linear localmente distribuída. C. A. Bortot (UEM), M. M. Cavalcanti (UEM), Wellington J. Corrêa (UTFPR) e V. N. Domingos Cavalcanti (UEM) 23

Decaimento geral da energia de problemas mistos para equações de ondas, com termo de memória, em domínios com fronteira não localmente reagente. Cícero Lopes Frota (UEM) e André Vicente (UNIOESTE) 25

Multiple solutions for a NLS equation with critical growth and magnetic field. Claudianor O. Alves (UFCG) and Giovany M. Figueiredo (UFPA) 27

Optimal decay rates for wave equations with a fractional damping via new method. Cleverson R. da Luz (UFSC), Ryo Ikehata (Hiroshima University, Japão) and Ruy Coimbra Charão (UFSC) 29

Distances between operator spaces. Cristina Radu (UFRJ) and S. Dineen (University College Dublin, Irlanda) 31

On the polynomial Bohnenblust-Hille inequality. Daniel Núñez Alarcón (UFPB) 33

Absolutely γ-summing multi-linear operators. Diana M. Serrano Rodríguez (UFPB) ... 35

Equações lineares em espaços linearmente topologizados. Dinamérico Pombo Júnior (UFRJ) 37

Sharp estimates for eigenvalues of dot product kernels on the sphere. Douglas Azevedo (UFJF) and Valdir Menegatto (USP-SCarlos) 39

Comportamento assintótico via método de Nakao de um sistema acoplado de equações diferenciais parciais fracamente amortecido. Ducival C. Pereira (UEPA), Mauro de L. Santos (UFPA) e Renato F. C. Lobato (UFPA) 41

Positive solution for a class of $(p, q)-$Laplacian nonlinear systems. Eder Marinho Martins (UFOP) and Wenderson M. Ferreira (UFOP) 43

Quasiperiodic collision solutions in the spatial isosceles three-body problem with rotating axis of symmetry. Eder Mateus (UFS), Andrea Venturelli (Université d'Avignon, Avignon, France) e Claudio Vidal (Universidad del Bío-Bío, Concepción, Chile) 45

A Equação de Daugavet para polinômios em JB^*-triplas e C^*-álgebras. Elisa dos Santos (UFU) 47

Sistemas globalmente Lipschitz governados pelo $p-$laplaciano em domínio ilimitado. Érika Capelato (UNESP) e Cláudia B. Gentile (UFSCAR) 49

Blow-up of solutions for the Kirchhoff equation of r-Laplacian type with boundary damping and source term. Eugenio C. Lapa (UNMSM, Peru), B. G. Torres (UNMSM, Peru), J. B. Barros (Unv. Nac. del Callao, Peru) and F. I. Barboza (Univ. Nac. del Callao, Peru) ... 51

Propriedades de ideal do operador de integração de Dunford. Fábio Bertoloto (UFU), Geraldo Botelho (UFU) e Ariosvaldo M. Jatobá (UFU) 53

Convergence estimates of the dynamics of a hyperbolic system with variable coefficients. Flank D. M. Bezerra (UFPB) and Marcelo J. D. Nascimento (UFSCar) 55

Novos resultados sobre funções contínuas que atingem máximo em um único ponto. Geraldo Botelho (UFU), Daniel Cariello (UFU), Vinícius Fávaro (UFU), Daniel Pellegrino (UFPB) e Juan B. Seoane-Sepúlveda (UCM, Madrid, Espanha) 57

New exemples of Π_1-holomorphy types. Geraldo Botelho (UFU), Erhan Caliskan (YTU, Turquia) and Giselle Moraes (UFU) 58

Extensões compactas de operadores multilineares. Geraldo Botelho (UFU) e Kuo Po Ling (UFU) 60

On a system of a non-Newtonian micropolar fluid. Geraldo M. de Araújo (UFPA), Marcos A. F. de Araújo (UFMA) e Elizardo F. L. Lucena (UFPA) 62

On fractional integro-differential equations with state-dependent delay. Giovana Siracusa (UFS), Ravi Agarwal (FIT, Florida, USA) and Bruno L. de Andrade Santos (USP-SCarlos) 64

Multiplicity and concentration behavior of positive solutions for a Schrödinger-Kirchhoff type problem via penalization method. Giovany M. Figueiredo (UFPA) e João R. Santos Júnior (UFPA) 66

Remarks on a nonlinear wave equation in a noncylindrical domain. Gladson O. Antunes (UNIRIO), Luis A. Medeiros (UFRJ), Ivo F. Lopez (UFRJ) and Maria D. da Silva (UFRJ) ... 68

Stabilizability and critical Set restrictions for the Zakharov-Kuznetsov equation. Gleb G. Doronin (UEM) and Nikolai A. Larkin (UEM) 70

Nonlinear boundary damping for nonlinear Kirchhoff plates. Haroldo R. Clark (UFF), Marcondes R. Clark (UFPI), Aldo T. Louredo (UEPB) and Alexandre M. Oliveira (UFPI) 72

Asymptotically periodic solution of neutral partial differential equations with infinite delay. Hernán R. Henríquez (USACH, Santiago, Chile), Claudio Cuevas (UFPE) and Alejandro Caicedo (UFPE) 74

Dynamical properties of explicit LL-Runge-Kutta for ODEs. Hugo de la Cruz (FGV) e Juan C. Jimenez (ICMAF, Havana, Cuba) 76

An abstract result on Cohen strongly summing linear operators. Jamilson Campos (UFPB) 78

Espaços de Hilbert torcidos e interpolação complexa. Jesus Castillo (Universidad de Extrematura, Espanha), Valentin Ferenczi (USP-S.Paulo) e Manuel Gonzalez (Universidad de Cantabria, Espanha) 80

Soluções radiais para uma classe de equações elípticas que modelam MEMS eletrostáticos. João Marcos do Ó (UFPB) e Esteban Pereira da Silva (UFPE) 82

Um problema de controle ótimo com restrições envolvendo a equação de transporte com renovação. José L. Boldrini (Unicamp) e Cícero A. da S. Filho (UESC) 84

Global Well-posedness and Exponential Decay Rates for a Kdv-Burgers Equation with Indefinite Damping. José H. Rodrigues (UEM), Valéria N. D. Cavalcanti (UEM) 86

Controlabilidade nula de um sistema parabólico com não-linearidade não-local. Juan Límaco (UFF) e André da R. Lopes (UFF) 88

Controlabilidade nula de uma equação parabólica com não-linearidade não-local. Juan Límaco (UFF) e André da R. Lopes (UFF) 90

Controlabilidade nula de um sistema parabólico-elíptico linear acoplado. Juan Límaco (UFF) e Laurent Prouvée (UFF) 92

Controlabilidade exata para um sistema de Bresse com coeficientes variáveis. Juan A. Soriano (UEM) and Rodrigo A. Schulz (UEM) 94

Estabilização local para equações de termo-difusão. Juan A. Soriano (UEM), Juliano de Andrade (UEM) and Rodrigo A. Schulz (UEM) 96

On the local solvability in Morrey spaces of the Navier-Stokes equations in a rotating frame. Lucas C. Ferreira (Unicamp) and Marcelo F. Almeida (UFS) 98

Comportamento assintótico para um problema parabólico com difusão grande. Luis A. F. de Oliveira (USP-SPaulo) e Ricardo de Sá Teles (Unesp) 100

Comparation and positive solutions for a class Dirichlet problem involving the (p,q)-Laplacian. Luiz F. O. Faria (UFJF), Olimpio H. Miyagaki (UFJF) and Dumitru Montreanu (Universit de Perpignan, França) 102

Measure neutral functional differential equations as generalized ODEs. Márcia Federson (USP-S.Carlos), Miguel Frasson (USP-S.Carlos), Jaqueline G. Mesquita (USP-S.Carlos) e Patricia Tacuri (USP-S.Carlos) 104

Existence of periodic orbits in an electromechanical system under parametric and external excitations. Márcio J.H. Dantas (UFU), Rubens Sampaio (PUC-Rio) and Roberta Lima (PUC-Rio) 106

Asymptotic behavior for a class of extensible beams and plates. Marcio A. Jorge Silva (UEL) 108

Eigenvalue decay of positive integral operators on compact two-point homogeneous spaces. Mario H. de Castro (UFU) and Ana C. Piantella (UFU) 110

L^p-boundedness properties for Volterra difference equations. Mario Choquehuanca Quispe (Universidad de la Frontera, Temuco, Chile) , Claudio Cuevas (UFPE), Filipe Dantas (UFPE) and Herme Soto Segura (Universidad de la Frontera, Temuco, Chile) 112

Boundaries for algebras of analytic functions. Mary Lilian Lourenço (USP-SPaulo) 114

Optimally results to Timoshenko system with second sound and past history. Mauro de L. Santos (UFPA) and Dilberto S. Almeida Junior (UFPA) 116

Sobre o coeficiente de Fujita para alguns sistemas de reação-difusão. Miguel Loayza (UFPE) 118

Signorini's problem for the Mindlin-Timoshenko system. Milton I. Oliveira (UFPB) and Fágner D. Araruna (UFPB) 120

Maximal lineability of continuous surjections in Euclidean spaces. Nacib A. G. Albuquerque (UFPB) 122

The multidimensional Muskat problem. Nikolai Chemetov (Universidade de Lisboa, Portugal) and Wladimir Neves (UFRJ) 124

Caos Distribucional para Operadores Lineares. Nilson C. Bernardes (UFRJ), A. Bonilla (Universidad de la Laguna, Espanha), V. Müller (Czech Academy of Sciences, República Tcheca) and A. Peris (Univ. Politècnica de València, Espanha) 126

Dinâmica topológica coletiva de aplicações genéricas do espaço de Cantor. Nilson Bernardes (UFRJ) e Rômulo Maia Vermersch (UFRRJ) 128

Simultaneous reconstruction of coefficients and sources parameters with Lipschitz dissection of Cauchy data at boundary. Nilson C. Roberty (UFRJ) 130

Soluções não-negativas para equações de Schrödinger envolvendo expoentes supercríticos. Olimpio H. Miyagaki (UFJF) e Sandra I. Moreira Neto (UEMA/UFJF) 132

Sobre o limite de viscosidade nula no problema de Cauchy para as equações dos fluidos assimétricos não-homogêneos em $\mathbb{R}^3$. Pablo Braz e Silva (UFPE), Marko Rojas-Medar (Universidad del Bío-Bío, Concepción, Chile) e Felipe Wergete Cruz (UNIVAF) 134

A formula type Itô-Kunita-Ventzel for Young integration. Pedro Catuogno (Unicamp) and Rafael A. Castrequini (Unicamp) 136

Espaços lipschitz-livres associados a uniões e quocientes de espaços métricos. Pedro L. Kaufmann (Univ. Paris VI, França) 138

Resultados recentes sobre os esquemas WENO para leis de conservação hiperbólicas. Rafael B. R. Borges (UFRJ) e Bruno Costa (UFRJ) 140

Soluções positivas para equações assintoticamente lineares via variedade de Pohozaev. Raquel Lehrer (Unioeste) e Liliane de A. Maia (Unb) 142

Imersões em espaços de Sobolev com peso e soluções radiais de equações elípticas de quarta ordem com expoentes não homogeneous. Reginaldo D. da Rocha (UFF) e Olimpio H. Miyagaki (UFJF) 144

Estimativas para $n-$larguras de conjuntos de funções suaves sobre o toro T^d. Régis L. B. Stábile (Unicamp) e Sérgio A. Tozoni (Unicamp) 146

New decay rates for the plate equation with fractional damping. Ruy C. Charão (UFSC), Ryo Ikehata (Hiroshima University, Japão) and Cleverson R. da Luz (UFSC) 148

Uma abordagem numérica do problema de torção elasto-plástico via algoritmo de complementaridade. Sandro R. Mazorche (UFJF) 150

Banach spaces of homogeneous polynomials without the approximation property. Seán Dineen (University College Dublin, Irlanda) and Jorge Mujica (Unicamp) 152

Ideal topologies and approximation properties. Sonia Berrios (UFU) and Geraldo Botelho (UFU) 154

Estimates of Fourier coefficients on the sphere by moduli of smoothness. Thaís Jordão (USP-SCarlos), Valdir Menegatto (USP-SCarlos) and Xingping Sun (Missouri State University, USA) 156

Lineability and algebrability of the set of holomorphic functions with a given domain of existence. Thiago R. Alves (Unicamp) 158

Long-time dynamics for a model of viscoelastic beam equation with nonlinear damping. Vando Narciso (UEMS) 160

Existence of solutions for a $p(x)-$Laplacian type problems with nonlocal source and nonlinear Neumann boundary conditions. Victor E. Carrera Barrantes (UNMSM, Peru), Eugenio Cabanillas Lapa (UNMSM, Peru) and Zacarias Huaringa S. (UNMSM, Peru) 162

A Hermite analogue of the lowest order Raviart-Thomas method for convection-diffusion equations with enhanced convergence properties. Vitoriano Ruas (PUC-Rio) e Paulo R. Trales (UFF) 164

Solução para uma classe de problemas em $\mathbb{R}^n$ com o operador biharmônico e com potencial que tende a zero no infinito. Waldemar D. Bastos (Unesp), Olimpio H. Miyagaki (UFJF) e Rônei S. Vieira (CEFET-MG) 166

Taxas de decaimento para sistemas de Bresse com dissipação localizada não-linear. Wenden Charles (UFAC), Juan A. Soriano (UEM), Flávio A. Falcão Nascimento (UECE) e José H. Rodrigues (UEM) 168

Existence of Solutions for a $p(x)-$Kirchhoff Type Problem with Nonlocal Source. Willy Barahona Martinez (UNMSM, Peru), Eugenio C. Lapa (UNMSM, Peru), P. Seminario (USP-SPaulo) and R. De La Cruz Marcacuzco (UNMSM, Peru) 170

Wellposedness for stochastic continuity equations with Ladyzhenskaya-Prodi-Serrin condition. Wladimir Neves (UFRJ) and Christian H. Olivera (Unicamp) 172

Operators that attain their minima. Xavier Carvajal (UFRJ) and Wladimir Neves (UFRJ) 174

Pôster

Analytical and numerical approaches for a study of qualitative solutions in a stiff isothermal system of Euler equations. Abel Alvarez (Unicamp), Eduardo Abreu (Unicamp) and Wanderson Lambert (UFRRJ) 176

Multiplicidade de soluções para um problema quaselinear com crescimento do tipo côncavo convexo. Alex J. Becker (UFSM) e Márcio L. Miotto (UFSM) 178

Uma análise matemática de um sistema não isotérmico do tipo Allen-Cahn. Anderson L. A. de Araújo (UFV) e Rondinei A. da Silva (UFV) 180

Um modelo de campo de fases para o processo de solidificação isotérmica de uma liga binária. Anderson L. A. de Araújo (UFV) e Thiago Marciano (UFV) 184

Estabilização da equação de Bernoulli-Euler: aspectos teóricos e computacionais. Carla E. O. de Moraes (UFRJ), Mauro A. Rincon (UFRJ) e Gladson O. Antunes (UFRJ) 184

Band limited majorants for truncated and odd functions via de Branges spaces. Felipe Ferreira (IMPA) and Emanuel Carneiro (IMPA) 186

Equações de Navier-Stokes em domínios tridimensionais com uma dimensão fina. Felipe C. Minuzzi (UFSM) e João Paulo Lukaszczyk (UFSM) 188

Existência de soluções para uma classe de problemas elíticos. Francisco H. Soares Dias (UFSM) e Márcio L. Miotto (UFSM) 190

O Teorema de Hutton polinomial. Geraldo Botelho (UFU) e Letícia G. Polac (UFU) . . . 192

Sobre a igualdade $CC^{\text{dual}} = CC$. Giselle Moraes R. Pereira (UFU) e Geraldo Botelho (UFU) 194

Sobre soluções de equações elípticas envolvendo o N-Laplaciano e crescimento crítico exponencial. Gustavo da Silva Araújo (UFPB) e Uberlândio Batista Severo (UFPB) 196

Propriedades assintóticas de um sistema semilinear de ondas elásticas com potencial do tipo dissipativo. Jaqueline Luiza Horbach (UFSC) e Cleverson Roberto da Luz (UFSC) 198

Tensor product stabilization under multiplicative perturbation. João Zanni (PUC-Rio) and Carlos Kubrusly (PUC-Rio) 200

A Lagrangian approximation schemes for balance laws. John Perez (Unicamp) and Eduardo Abreu (Unicamp) 202

Método da energia no espaço de Fourier para a equação de placas com dissipação fracionária. Maíra Fernandes Gauer (UFSC) e Cleverson Roberto da Luz (UFSC) 204

Teoria e simulação numérica da equação de onda não-linear. Natanael P. Quintino (UFRJ), Ivo Lopez (UFRJ) e Mauro A. Rincon (UFRJ) 206

Estabilizacão da equacão de Berger-Timoshenko como limite singular da estabilizacão uniforme do sistema de Von-Kármán para vigas. Pammella Queiroz de Souza (UFPB) 208

Operadores hipercíclicos definidos em espaços de Fréchet. Rafaela N. Bonfim (UFU) e Vinícius Fávaro (UFU) 210

Boundary stability of star shaped source in the modified Helmholtz equation. Roberto M. G. Silva (UFRJ) and Nilson C. Roberty (UFRJ) 212

Estabilização de energia para uma classe dissipativa de equação de placas. Rodrigo Capobianco (UEL) 214

O Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores definidos em C0 somas de espaços de Banach a espaços uniformemente convexos. Thiago Grando (USP) e Mary Lilian Lourenço (USP) 216

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

ADAMS TYPE INEQUALITY AND APPLICATION FOR A CLASS OF POLYHARMONIC EQUATIONS WITH CRITICAL GROWTH.

Abiel C Macedo* & João Marcos do Ó†

In this present work we consider the following class of nonlinear elliptic problem

$$(-\Delta)^m u + u = f(|x|, u), \qquad \text{in} \quad \mathbb{R}^{2m}, \tag{0.1}$$

when the nonlinearity $f(|x|, u)$ has the maximal growth on u which allows to treat the problem (0.1) variationally in the Sobolev space $W^{m,2}(\mathbb{R}^{2m})$. Explicitly, we treat the case when $f(|x|, u)$ has critical exponential growth at infinite, i.e., there exists $\alpha_0 > 0$ such that

$$\lim_{|s|\to+\infty} f(|x|, s)e^{-\alpha s^2} = \begin{cases} 0, & \text{for all} \quad \alpha > \alpha_0, \\ +\infty, & \text{for all} \quad \alpha < \alpha_0, \end{cases}$$

uniformly in x. Our study will be through the variational method by studying the associated energy functional

$$J(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{2m}} \left(|\nabla^m u|^2 + u^2\right)\, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^{2m}} F(|x|, u)\, \mathrm{d}x, \qquad u \in W^{m,2}(\mathbb{R}^{2m}).$$

where $F(|x|, s) = \int_0^s f(|x|, t)dt$ and $\nabla^m u$ is the m-th gradient of u, i.e.,

$$\nabla^m u = \begin{cases} \Delta^{m/2} u, & m = 2, 4, 6, ... \\ \nabla\Delta^{(m-1)/2} u, & m = 1, 3, 5, ... \end{cases}$$

This notion of criticality is motivated by the so-called Trudinger-Moser type inequality. To the study functional J we establish a new Adams type inequality which guarantee that the functional is well define and of class C^1

1 Mathematical Results

To apply variational method to study polyharmonic problem (0.1), we establish the following Adams type inequality:

Theorem 1.1. *Let m be a positive integer and $\beta < \beta_0 = \frac{m2^{2m+1}\pi^{2m}}{\omega_{2m-1}}$. Then there exists a constant $C_{m,\beta} > 0$ such that*

$$\sup_{\substack{u\in W_0^{m,2}(\Omega) \\ \|\nabla^m u\|_2^2 + \|u\|_2^2 \le 1}} \int_\Omega \left(e^{\beta|u|^2} - 1\right)\, \mathrm{d}x < C_{m,\beta}, \tag{1.2}$$

for any domain $\Omega \subset \mathbb{R}^{2m}$. Moreover, the supremum became infinite for $\beta > \beta_0$.

For the study of the functional J we assume also that f satisfies the following additional conditions

(f_0) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous and $f(|x|, 0) = 0$.

(f_1) There exist $R > 0$ and $M > 0$ such that

$$0 < F(|x|, t) = \int_0^t f(|x|, \tau)d\tau \le M|f(|x|, t)|, \qquad \forall |t| \ge R, \forall x \in \mathbb{R}^{2m}.$$

*Departamento de Matemática, UFPE, PE, Brasil, abielcosta@dmat.ufpe.br
†Departamento de Matemática, UFPB, PB, Brasil, e-mail: jmbo@pq.cnpq.br

(f_2) There exists $\theta > 2$ such that

$$0 < \theta F(|x|, t) \leq f(|x|, t)t,$$

for all $(x, t) \in \mathbb{R}^{2m} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

(f_3) There exists $p > 2$ such that

$$f(|x|, s) \geq \lambda\ s^{p-1},$$

for all $(x, t) \in \mathbb{R}^{2m} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ and $\lambda > 0$ sufficiently large.

In this conditions we prove the following existence result.

Theorem 1.2. *Assume that f has critical exponential growth at infinite and satisfies $(f_1) - (f_3)$. In addition, assume that*

$$(f_4) \qquad \limsup_{t \to 0^+} \frac{2F(|x|, t)}{t^q} < S_q^2, \ \textit{uniformly in } x \in \mathbb{R}^{2m},$$

where $S_q^2 = \inf\{\|u\|_2^2 + \|\nabla^m u\|_2^2 : u \in W_{rad}^{m,2}(\mathbb{R}^{2m}), \|u\|_q^q = 1\}$, for some $q > 3$. Then the problem (0.1) has a nontrivial radial solution $u_M \in W^{m,2}(\mathbb{R}^{2m})$. Furthermore, assuming that

$$(f_5) \qquad (ts)^{-1} f(|x|, ts) \quad \textit{is an increasing function for } t > 0, \quad \textit{for any} \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

the solution u_M is a radial ground state solution, i.e.,

$$J(u_M) = \inf\{J(u) : u \in \mathcal{M}_r\},$$

where

$$\mathcal{M}_r := \{u \in W_{rad}^{m,2}(\mathbb{R}^{2m}) \setminus \{0\} : u \textit{ is a weak solution for } (0.1)\}.$$

Proof of Theorem 1.1 The prove is based on the Adams type inequality proved by by N. Lam and G. Lu [2, Theorem 1.2] in combination with an interpolation inequality which relates the norm of the lower order derivative with the norm of the higher order derivative:

$$|u|_{j,2}^2 \leq K(|u|_{m,2}^2 + |u|_{0,2}^2), \quad \forall\ 0 \leq j < m \quad \text{and} \quad \forall\ u \in W^{m,2}(\mathbb{R}^{2m}),$$

for some positive constant $K = K(m)$, where

$$|u|_{j,2}^2 = \sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha u\|_2^2.$$

Proof of Theorem 1.2 Using the inequality (1.1), in combination with the compact embedding of the Sobolev space $W_{rad}^{m,2}(\mathbb{R}^{2m})$ in $L^p(\mathbb{R}^{2m})$ for $2 < p < \infty$, we prove that the functional J satisfies the Palias-Smale compactness condition and, applying the Mountain-pass Theorem, we prove that the functional J has a critical point u_M in the Mountain-pass level over $W_{rad}^{m,2}(\mathbb{R}^{2m})$. Hence using condition (f_5) we prove that u_M is a radial ground state solution. We note that the compact embedding of the Sobolev space mentioned above is a consequence of the Radial Lemma [1, Radial Lemma AII].

References

[1] Berestycki, H.; Lions, P.-L.: *Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state.* Arch. Rational Mech. Anal. 82 , no. 4, 313–345 (1983).

[2] Lam, N.; Lu, G.: *Sharp Adams type inequalities in Sobolev spaces $W^{m,n/m}(\mathbb{R}^n)$ for arbitrary integer m* . J. Differential Equations 253, 1143–1171 (2012).

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

SOME RESULTS OF DISCRETE ALMOST AUTOMORPHIC SOLUTIONS FOR VOLTERRA DIFFERENCE EQUATIONS WITH INFINITE DELAY

AIRTON CASTRO [*], CLAUDIO CUEVAS [†], FILIPE DANTAS [‡] & HERME SOTO [§]

1 Introduction

We study the existence of discrete almost automorphic solutions and asymptotic behavior for non-linear Volterra difference equations of convolution type with infinite delay where the nonlinear perturbation f is considered not necessarily globally Lipschitz. The results are consequence of applications of different fixed point theorems. Let $\mathbb{X}$ be an arbitrary Banach space. In this work, we study the existence of discrete almost automorphic solutions to the following semi-linear Volterra functional difference equation in $\mathbb{X}$

$$u(n+1) = \lambda \sum_{j=-\infty}^{n} a(n-j)u(j) + f(n, u_n),\ n \in \mathbb{Z}, \tag{1.1}$$

where λ is a complex number, $a(n)$ is an $\mathbb{C}$-valued summable function and $u_n : \mathbb{Z}_- \to \mathbb{X}$ is the history function, which is defined by $u_n(\theta) = u(n+\theta)$ for all $\theta \in \mathbb{Z}_-$.

To establish the first main result, we need introduce the following:

We will define the phase space $\mathcal{B}$ axiomatically.

Specifically, $\mathcal{B}$ will denote a vector space of functions defined from $\mathbb{Z}_-$ into $\mathbb{X}$ endowed with a norm denoted $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ so that $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ is a Banach space and the following axiom holds:

(A) There are a positive constant J and nonnegative functions $K(\cdot), M(\cdot)$ defined on $\mathbb{Z}_+$ having the following property: If $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$ is a function such that $x_0 \in \mathcal{B}$, then for all $n \in \mathbb{Z}_+$ the following conditions are fulfilled:

(i) $x_n \in \mathcal{B}$,

(ii) $J\|x(n)\| \leq H\|x_n\|_{\mathcal{B}} \leq K(n) \max_{0\leq i\leq n} ||x(i)|| + M(n)\|x_0\|_{\mathcal{B}}$.

To obtain our results, we consider also the following axiom:

(B) If $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a uniformly bounded sequence in $\mathcal{B}$ which converges pointwise to φ, then $\varphi \in \mathcal{B}$ and $\|\varphi^n - \varphi\|_{\mathcal{B}} \to 0$ as $n \to \infty$.

$(H1)$ Assume that $f : \mathbb{Z} \times \mathcal{B} \to \mathbb{X}$ is locally Lipschitz with respect to the second variable, that is, for each positive number σ, for all $k \in \mathbb{Z}$ and for all $\varphi, \psi \in \mathcal{B}$ with $||\varphi||_{\mathcal{B}} \leq \sigma$ and $||\psi||_{\mathcal{B}} \leq \sigma$, we have $||f(k,\varphi) - f(k,\psi)|| \leq L_f(\sigma)||\varphi - \psi||_{\mathcal{B}}$, where $L_f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ is a nondecreasing function.

Definition 1.1. *Assume that $\mathcal{B}$ is a phase space. A function $u : \mathbb{Z} \times \mathcal{B} \to \mathbb{X}$ is said to be discrete almost automorphic in $k \in \mathbb{Z}$ for each $\varphi \in \mathcal{B}$, if for every sequence of integers numbers (k'_n), there is a subsequence (k_n) such that $\lim_{n\to\infty} u(k+k_n, \varphi) =: \overline{u}(k, \varphi)$ is well defined for each $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi \in \mathcal{B}$ and $\lim_{n\to\infty} \overline{u}(k-k_n, \varphi) =: u(k, \varphi)$ for each $k \in \mathbb{Z}$ and $\varphi \in \mathcal{B}$.*

[*]Universidade Federal de Pernambuco,Recife, Brasil, airton@dmat.ufpe.br
[†]Universidade Federal de Pernambuco,Recife, Brasil, cch@ufpe.br
[‡]Universidade Federal de Pernambuco,Recife, Brasil, filipeddsmat@gmail.com
[§]Universidad de la Frontera,Temuco, Chile, herme.soto@ufrontera.cl

For a given $\lambda \in \mathbb{C}$, let $s(\lambda, k) \in \mathbb{C}$ be the solution of the difference equation

$$s(\lambda, k+1) = \lambda \sum_{j=0}^{k} a(k-j)s(\lambda, j),\ k = 0, 1, 2, \ldots,\ s(\lambda, 0) = 1.$$

We define the set $\Omega_s := \{\lambda \in \mathbb{C} : ||s(\lambda, \cdot)||_1 := \sum_{k=0}^{\infty} |s(\lambda, k)| < +\infty\}$.

2 Mathematical Results

Theorem 2.1. *Assume that $\mathcal{B}$ is a phase space that satisfies axiom* **(B)**. *Let λ be in Ω_s and let $f : \mathbb{Z} \times \mathcal{B} \to \mathbb{X}$ be a discrete almost automorphic function in $k \in \mathbb{Z}$ for each $\varphi \in \mathcal{B}$ that satisfies the condition* **(H1)**. *If there is $r > 0$ such that*

$$||s(\lambda, \cdot)||_1 \left(\rho L_f(\rho r) + \frac{1}{r} \sup_{k \in \mathbb{Z}} ||f(k, 0)|| \right) < 1,$$

where $\rho > 0$ denotes a constant such that $\|\varphi\|_{\mathcal{B}} \leq \rho \|\varphi\|_{\infty}$ for every $\varphi \in B(\mathbb{Z}_-, \mathbb{X})$. Then equation (1.1) has a discrete almost automorphic solution $u(n)$ satisfying

$$u(n+1) = \sum_{j=-\infty}^{n} s(\lambda, n-j) f(j, u_j).$$

References

[1] Cuevas, C. Weighted convergent and bounded solutions of Volterra difference systems with infinite delay. *J. Difference Equ. Appl. 6*, 4 (2000), 461–480.

[2] Cuevas, C., Henríquez, H. R., and Lizama, C. On the existence of almost automorphic solutions of Volterra difference equations. *J. Difference Equ. Appl.* (2011), 1-16.

[3] Cuevas, C., and Lizama, C. Almost automorphic solutions to integral equations on the line. *Semigroup Forum 79*, 3 (2009), 461–472.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

DECAY OF SOLUTIONS OF A SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH NON-SMOOTH SECOND MEMBER

A. T. LOUREDO *, L. A. MEDEIROS † & M. MILLA MIRANDA ‡

1 Introduction

Let V and H be two Hilbert spaces whose scalar products and norms are denoted by $((u,v))$,$||u||$ and (u,v),$|u|$, respectively. Assume that V is continuously embedding in H and V is dense in H. Let A be the self-adjoint operator of H defined by the triplet $\{V,H,((u,v))\}$. With $D(A^\alpha), \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0$, will be denoted the domain of the operator A^α. The space $D(A^\alpha)$ with the scalar product given by the graphic of the operator A^α is a Hilbert space. We use the notation $D(A^\alpha)' = D(A^{-\alpha})$ where $D(A^\alpha)'$ is the dual of the space $D(A^\alpha)$.

With the above consideration, we have the problem

$$\left| \begin{array}{l} u''(t) + Au(t) + a(|A^{-\frac{\theta}{2}}u(t)|^2)u(t) + b(|A^{-\eta}u'(t)|)Au'(t) = f(t) \text{ in } (0,\infty); \\ u(0) = u^0,\ u'(0) = u^1, \end{array} \right. \tag{1.1}$$

where $f(t)$ is a vectorial function with values in $D(A^{-\alpha})$.

The objective of this work is to study the existence of solutions and the decay of the energy associated to Problem (1.1).

In our approach, we apply the Galerkin method with a special basis of H, the Theory of Linear Operators in Hilbert Spaces and the compactness Aubin-Lions Theorem. In the decay of energy we use a Liapunov functional.

2 Mathematical Results

We introduce the following hypotheses:

$$V \text{ is compactly embedding in } H; \tag{2.2}$$

$$\mu \in W^{1,1}_{loc}(0,\infty),\ \mu(t) \geq \mu_0 > 0,\ \forall t \geq 0, (\ \mu_0\ \text{ constant}); \tag{2.3}$$

$$a \in C^0([0,\infty)),\ a(s) \geq 0,\ \forall s \geq 0; \tag{2.4}$$

$$b \in C^0([0,\infty)),\ b(s) \geq b_0 > 0,\ \forall s \geq 0, (\ b_0\ \text{ constant})\ ; \tag{2.5}$$

$$\theta, \eta \in \mathbb{R} \text{ with } \frac{\theta}{2} < \eta \leq \frac{1+\theta}{2}. \tag{2.6}$$

Theorem 2.1. *Assume hypotheses* (2.2)-(2.6). *Consider*

$$u^0 \in D(A^{\frac{1-\theta}{2}}),\ u^1 \in D(A^{-\frac{\theta}{2}}) \text{ and } f \in L^2_{loc}(0,\infty; D(A^{-\frac{1+\theta}{2}})). \tag{2.7}$$

Then there exists a function u in the class

$$u \in L^\infty_{loc}(0,\infty; D(A^{\frac{1-\theta}{2}})),\ u' \in L^\infty_{loc}(0,\infty; D(A^{-\frac{\theta}{2}})) \cap L^2_{loc}(0,\infty; D(A^{\frac{1-\theta}{2}})),\ u'' \in L^2_{loc}(0,\infty; D(A^{-\frac{1+\theta}{2}})) \tag{2.8}$$

*DM-UEPB, C. Grande, PB, Brasil, e-mail: aldotl@cct.uepb.edu.br
†IM-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil e-mail:luizadauto@gmail.com
‡DM-UEPB, C. Grande,PB,Brasil, e-mail:milla@im.ufrj.br

satisfying the equation

$$u'' + \mu Au + a(|A^{-\frac{\theta}{2}}u|^2)u + b(|A^{-\eta}u'|)Au' = f \text{ in } L^2_{loc}(0,\infty;D(A^{-\frac{1+\theta}{2}})) \tag{2.9}$$

and the initial conditions

$$u(0) = u^0,\ u'(0) = u^1. \tag{2.10}$$

With the supplementary hypothesis

$$\mu' \in L^1(0,\infty) \text{ and } f \in L^2(0,\infty;D(A^{-\frac{1+\theta}{2}})) \tag{2.11}$$

we obtain bounded solutions u of Problem (2.9)-(2.10).

Consider the energy

$$E(t) = \frac{1}{2}|A^{-\frac{\theta}{2}}u'(t)|^2 + \frac{1}{2}|A^{\frac{1-\theta}{2}}u(t)|^2 + \frac{1}{2}a^*(|A^{-\frac{\theta}{2}}u(t)|^2),\ t \in [0,\infty), \text{ where } a^*(s) = \int_0^s a(s)ds.$$

Theorem 2.2. *Let u be the solution obtained in Theorem (2.1) with the supplementary hypothesis (2.11) and the hypotheses $a(s)s \geq ka^*(s),\ \forall s \geq 0$ ($k \geq 1$ constant)); $\mu'(t) \leq 0, a.e. t \in (0,\infty)$. Then u satisfies*

$$E(t) \leq 3E(0)e^{-\frac{2}{3}\beta t} + de^{-\frac{2}{3}\beta t}\int_0^t e^{\frac{2}{3}\beta s}|A^{-\frac{1+\theta}{2}}f(s)|^2,\ \forall t \in [0,\infty) \tag{2.12}$$

where
$\frac{\beta}{2} = \min\left\{\frac{b_0}{4P}, \frac{1}{2}\varepsilon_2, \varepsilon_2 k_0\right\},\ \varepsilon_2 = \min\left\{\frac{\mu_0^{\frac{1}{2}}}{4P}, \frac{b_0}{4}, \frac{\mu_0}{\mu_0 P^2 + N^2}\right\},\ b(|A^{-\eta}u'(t)|) < N,\ \forall t \in [0,\infty),\ d = \frac{1}{2b_0} + \frac{\varepsilon_2}{\mu_0},\ |A^{-\frac{\theta}{2}}z| \leq P|A^{\frac{1-\theta}{2}}z|,\ \forall z \in D(A^{\frac{1-\theta}{2}})$. *If $|A^{-\frac{1+\theta}{2}}f(t)| \leq Ce^{-\tau t},\ a.e.\ t \in (0,\infty),\ \tau \neq \frac{\beta}{3}$. Then inequality (2.12) becomes*

$$E(t) \leq 3E(0)e^{-\frac{2}{3}\beta t} + \frac{dC}{\frac{2}{3}\beta - 2\tau}[e^{-2\tau t} - e^{-\frac{2}{3}\beta t}],\ \forall t \in [0,\infty). \tag{2.13}$$

References

[1] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations,* Springer, New York, 2010.

[2] Grotta Ragazzo, C., *Chaos and integrability in a nonlinear wave equation,* J. Dyn. Diff. Eq. 6 (1994), 227-245.

[3] Jörgens, K., *Des aufangswert problem in groṡsen für eine klasse nichtlinearer wellengleichungen,* Math. Zeitschr. 77 (1971), 295-308.

[4] Lions, J.L., *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non-Linéaires,* Dunod, Paris, 1969.

[5] Lions, J. L., *Équations aux Dérivées Partielles-Interpolation, Vol.I,* Oeuvres choisies de Jacques Louis Lions, SMAI, EDP Sciences, Paris 2003.

[6] Lions, J. L., *Some Methods in the Mathematical Analysis of System and Their Control,* Science Press, Beijing, 1981 and Gordon Breach, Science Publishers, Inc. New York, 1981.

[7] Lions, J.L. and Magenes, E., *Problèmes aux Limites Non-Homogènes et Applications,* Vol.1, Dunod, Paris, 1968.

[8] Louredo, A.T., Araújo, M.A.F and Milla Miranda, M., *On a nonlinear wave equation with boundary damping,* accepted in Math. Meth. Appl. Sc., 2013.

[9] Schiff, L.I., *Nonlinear meson theory of nuclear forces I (Neutral scalar mesons with point-contact repulsion),* The Physical Reviews, Second Series, Vol. 84, N^o1 (October 1, 1951), 1-9.

[10] Simon, J., *Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$,* Ann. Mat. Pura Appl., Serie IV, CXLVI (1987), 65-96.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

ON SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH NON-SMOOTH SECOND MEMBERS

A. T. LOUREDO *, L. A. MEDEIROS † & M. MILLA MIRANDA ‡

1 Introduction

Let V and H be two real separable Hilbert spaces with V dense and compactly embedded in H. The scalar products and norms of V and H are represented by (u,v), $|u|$ and ((u,v)), $||u||$, respectively.

Let A be the self-adjoint operator defined by the triplet {V,H,((u,v))}. Consider $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$. We denote by $D(A^\alpha)$ the Hilbert space

$$D(A^\alpha) = \{u \in H; A^\alpha u \in H\}$$

equipped with the scalar product

$$(u, v)_{D(A^\alpha)} = (A^\alpha u, A^\alpha v).$$

The dual of $D(A^\alpha)$ is denoted by $D(A^{-\alpha})$.

Consider the problem

$$(*) \qquad \left| \begin{array}{l} u'' + \mu Au + F(u)u = f \ \text{ in } \ (0,T), \\ u(0) = u^0 \ \ , \ \ u'(0) = u^1, \end{array} \right.$$

where $\mu(t)$ is a positive function and f a non-smooth vectorial function.

The objective of this paper is to study the following inverse problem: given $u^0, u^1$and a non-smooth vectorial function f, how to determine $F(u)$ such that Problem (*) has a solution u. We analize two cases of $F(u)$.

2 Mathematical Results

Teorema 2.1. *Let θ and p be two real numbers with $p \geq 1$. Consider*

$$\begin{array}{l} \mu \in W^{1,1}(0,T), \mu(t) \geq \mu_0 > 0 \ , \ \forall t \in [0,T] \ \ (\mu_0 \ \textit{constant}); \\ u^0 \in D(A^{\frac{1-\theta}{2}}) \ , \ u^1 \in D(A^{-\frac{\theta}{2}}) \ \ \textit{and} \ \ f \in W^{1,1}(0,T; D(A^{-\frac{1+\theta}{2}})). \end{array}$$

Then there exists a function u in the class

$$u \in L^\infty(0,T; D(A^{\frac{1-\theta}{2}})) \ , \ u' \in L^\infty(0,T; D(A^{-\frac{\theta}{2}})) \ , \ u'' \in L^\infty(0,T; D(A^{-\frac{1+\theta}{2}})) \tag{2.1}$$

such that u is solution of the problem

$$\left| \begin{array}{l} u'' + \mu Au + |A^{-\frac{\theta}{2}}u|^{2p}u = f \ \ \textit{in} \ \ L^\infty(0,T; D(A^{-\frac{1+\theta}{2}})); \\ u(0) = u^0 \ \ , \ \ u'(0) = u^1. \end{array} \right.$$

Let λ be a real number with $-\frac{\theta}{2} \leq \lambda < \frac{1-\theta}{2}$.

*DM-UEPB, C. Grande, PB, Brasil, e-mail: aldotl@cct.uepb.edu.br
†IM-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil e-mail: luizadauto@gmail.com
‡DM-UEPB, C. Grande, PB ,Brasil, e-mail: milla@im.ufrj.br

Teorema 2.2. *Assume that θ, u^1 and f satisfy the hypotheses of Theorem 2.1 and consider $u^0 = 0$. Then there exists a function u in the class (2.1) such that u is solution of the problem*

$$\left| \begin{array}{l} u'' + \mu Au + ||u||_{C^0([0,T];D(A^\lambda))}\ u = f \ \text{ in } L^\infty(0,T;D(A^{-\frac{1+\theta}{2}})); \\ u(0) = 0 \quad , \quad u'(0) = u^1. \end{array} \right.$$

The uniqueness of solutions of Theorem 2.1 is obtained when $\theta = 0$. In the proof of the results we use the Galerkin method with a special basis of H and an argument of Fixed Point. Theorem 2.2 is an abstract setting of a slightly modified open problem formulated by J.L.Lions[7]. He considers $\mu(t) = 1$ and $f = v\delta(x - x_0)$, where $v(t)$ is a real function and $\delta(x - x_0)$ is the Dirac mass supported at $\{x_0\}$, x_0 a point of a bounded open set Ω of $\mathbb{R}^n$.

References

[1] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations,* Springer, New York, 2010.

[2] Cazenave, T., Haraux, A. and Weissler, F.B., *A class of nonlinear completely integrable abstract wave equations,* J. Dyn. Diff. Eq. 5(1993), 129-154.

[3] Grotta Ragazzo, C., *Chaos and integrability in a nonlinear wave equation,* J. Dyn. Diff. Eq. 6 (1994), 227-245.

[4] Jörgens, K., *Des aufangswert problem in groṡsen für eine klasse nichtlinearer wellengleichungen,* Math. Zeitschr. 77 (1971), 295-308.

[5] Lions, J.L., *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non-Linéaires,* Dunod, Paris, 1969.

[6] Lions, J. L., *Équations aux Dérivées Partielles-Interpolation, Vol.I,* Oeuvres choisies de Jacques Louis Lions, SMAI, EDP Sciences, Paris 2003.

[7] Lions, J. L., *Some Methods in the Mathematical Analysis of System and Their Control,* Science Press, Beijing, 1981 and Gordon Breach, Science Publishers, Inc. New York, 1981.

[8] Lions, J.L. and Magenes, E., *Problèmes aux Limites Non-Homogènes et Applications,* Vol.1, Dunod, Paris, 1968.

[9] Louredo, A.T., Araújo, M.A.F and Milla Miranda, M., *On a nonlinear wave equation with boundary damping,* to appear in Math. Meth. Appl. Sc., 2013.

[10] Medeiros, L.A and Milla Miranda, M., *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elíticos Não-Homogêneos),* Ed. IM-UFRJ, Rio, Fifth Ed. 2006.

[11] Schiff, L.I., *Nonlinear meson theory of nuclear forces I (Neutral scalar mesons with point-contact repulsion),* The Physical Reviews, Second Series, Vol. 84, N^o1 (October 1, 1951), 1-9.

[12] Showalter, R.E., *Monotone Operators in Banach Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations,* Mathematical Surveys and Monographas, Vol.49, AMS, 1997.

[13] Simon, J., *Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$,* Ann. Mat. Pura Appl., Serie IV, CXLVI (1987), 65-96.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

UMA ANÁLISE ASSINTÓTICA DE UM SISTEMA DE PLACAS TERMOELÁSTICA DO TIPO HIPERBÓLICO

ALISSON RAFAEL AGUIAR BARBOSA *

Resumo

Este trabalho é dedicado ao estudo do comportamento a longo prazo de uma equação de placas estensíveis acoplada a uma equação de calor. O problema corresponde a um modelo de termo-elasticidade baseado em teorias de calor do tipo não-Fourier. Considerando que efeitos de inércia de rotação estão presentes no modelo, mostramos que o efeito dissipativo do calor é suficiente para estabilizar exponencialmente o sistema, sem dissipações adicionais. Além disso, provamos que o sistema possui um atrator global de dimensão fractal finita e também atratores exponenciais. Nossos resultados generalizam e complementam diversos trabalhos existentes.

Palavras-chave: Equações diferenciais parciais, termoelasticidade, placas estensíveis, calor do tipo não-Fourier, atrator global, atratores exponenciais.

1 Introdução

O presente trabalho se insere no estudo da dinâmica assintótica de sistemas termoelásticos não lineares. Mais precisamente, nossos resultados são dedicados ao estudo de placas elásticas extensíveis sob efeito dissipativo térmico originado por uma equação de calor hiperbólico, e portanto não satisfazendo a lei de Fourier. Tais modelos termoelásticos são estudados como sistemas de equações diferenciais parciais do tipo

$$u_{tt} + \Delta^2 u - M(\textstyle\int_\Omega |\nabla u|^2)\Delta u - \Delta u_{tt} + f(u) + \nu\Delta\theta = h(x) \text{ in } \Omega\times\mathbb{R}^+, \tag{1.1}$$

$$\theta_t - \omega\Delta\theta - (1-\omega)\int_0^\infty k(s)\Delta\theta(t-s)ds - \nu\Delta u_t = 0 \text{ in } \Omega\times\mathbb{R}^+, \tag{1.2}$$

com condições iniciais e de fronteira

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) \quad \theta(x,t)_{|_{t\le 0}} = \theta_0(x,-t) \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{1.3}$$

$$u = \Delta u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega\times\mathbb{R}^+, \tag{1.4}$$

em que Ω é uma região do plano que representa a placa em repouso, u é o deslocamento transversal, θ é a temperatura relativa ao meio ambiente. As constantes ω μ são positivas, o termo $M(\int_\Omega |\nabla u|^2)\Delta u$ contabiliza o efeito da extensibilidade da placa durante as vibrações transversais e Δu_{tt} é a inércia de rotação.

2 Resultados

Notação:

$$V_0 = L^2(\Omega), \;\; V_1 = H_0^1(\Omega), \;\; V_2 = H^2(\Omega)\cap H_1(\Omega) \tag{2.5}$$

e

$$V_3 = \{u\in H^3(\Omega) | u = \Delta u = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma\}, \tag{2.6}$$

Para a variável η, definimos

$$\mathcal{M}_1 = L^2_\mu(\mathbb{R}^+; V_1) = \left\{\eta : \mathbb{R}^+ \to V_1; \int_0^\infty \mu(s)\|\eta(s)\|^2_{V_1} ds\right\}, \tag{2.7}$$

*Instituto de Ciências Matemática e de Computação , USP, SP , Brasil, alissonrafael@yahoo.com.br

Com essa notação, nosso espaço de fase é

$$\mathcal{H}_0 = V_2 \times V_1 \times V_0 \times \mathcal{M}_1. \tag{2.8}$$

Denotaremos o produto interno e sua respectiva norma de $\mathcal{H}_0$ por

$$< U_1, U_2 \cdot >_{\mathcal{H}_0} = (\Delta u_1, \Delta u_2) + (\nabla v_1, \nabla v_2) + (\theta_1, \theta_2) + (\eta_1, \eta_2)_{\mu,1}$$

e

$$\|U_1\|^2_{\mathcal{H}_0} = \|\Delta u_1\|_2^2 + \|\nabla v_1\|_2^2 + \|\theta_1|_2^2 + \|\eta_1\|^2_{\mu,1},$$

em que $U_i = (u_i, v_i, \theta_i, \eta_i)$, com $i = 1, 2$.

Teorema 2.1. *O sistema dinâmico $(\mathcal{H}_0, S(t))$ produzido pelo problema (1.1)-(1.4) possui um atrator global $\mathcal{A}$ de dimensão fractal finita. Além disso,*

$$\mathcal{A} = \mathcal{W}^u(\mathcal{N}), \tag{2.9}$$

em que $\mathcal{N}$ é o conjunto das soluções estacionárias do problema (1.1)-(1.4).

Prova: *Existência do atrator global-* Para mostrar a existência do atrator global para o problema (1.1)-(1.4), nos seguimos de perto o método apresentado em Chueshov & Lasiecka [2]. Mostramos que que o sistema dinâmico é gradiente e que é assintoticamente suave.□

Teorema 2.2. *Suponha que as hipóteses do Teorema 2.1 sejam válidas. Então para cada $\delta \in (0, 1]$, o sistema dinâmico associado ao problema (1.1)-(1.4) possui um atrator exponencial generalizado, com dimensão fractal finita no espaço estendido*

$$\mathcal{H}_{-\delta} = V_{2-\delta} \times V_{1-\delta} \times V_{-\delta} \times L^2_\mu(\mathbb{R}^+; V_{1-\delta}). \tag{2.10}$$

Prova: *Existência do atrator global-* A prova deste teorema segue os mesmos passos de Potomkin [6](demonstração do Teorema 4.5).

Referências

[1] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle: Theórie et Applications. Masson, Paris, 1983.

[2] I. Chueshov & I. Lasiecka, *Long-Time Behavior of Second Order Evolution Equations with Nonlinear Damping*, Mem. Amer. Math. Soc. 195, no. 912, Providence, 2008.

[3] I. Chueshov & I. Lasiecka, Von Karman Evolution Equations Well-posedness and Long-Time Dynamics, New York, Springer, 2010.

[4] M. Grasselli & V. Pata, *Uniform attractors of nonautonomous dynamical systems with memory*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 50 (2002) 155-178.

[5] T.F. Ma & V. Narciso, Pelicer, *Long-time behavior of a model of extensible beams with nonlinear boundary dissipations*, J. Math. Anal. Appl. 396 (2012) 694-703.

[6] M. Potomkin,*Asymptotic behavior of thermoviscoelastic Berger plate*, Commun. Pure Appl. Anal. 9 (2010) 161-192.

boundary stabilization of solutions. *Analysis Journal Theory*, **10**, 422-444, 2010.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

Standing waves for a hamiltonian system of Schrödinger equations with arbitrary growth

J. A. Cardoso [*], J. M. do Ó [†] & E. Medeiros [‡]

1 Introduction

In this work we study the existence of standing wave solutions for the following class of elliptic Hamiltonian-type systems

$$\begin{cases} -\hbar^2\Delta u + V(x)u = g(v) & \text{in} \quad \mathbb{R}^N \\ -\hbar^2\Delta v + V(x)v = f(u) & \text{in} \quad \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1.1}$$

with $N \geq 2$, where $\hbar$ is a positive parameter and the nonlinearities $f(s), g(s)$ are superlinear and can have arbitrary growth at infinity. This system is in variational form and the associated energy functional is strongly indefinite. Moreover, in view of the unboundedness of the domain $\mathbb{R}^N$ and the arbitrary growth of the nonlinearities we have lack of compactness. To overcome these difficulties we use a dual variational methods in combination with a minimax procedure and we prove the existence of positive solution for $\hbar$ sufficiently small.

More explicitly, we consider system (1.1) when the potential $V(x)$ satisfies the following geometric conditions:

(V_0) $V : \mathbb{R}^N \to [0, +\infty)$ is a radial function locally Hölder continuous;

(V_1) there exist $0 < R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ and $\alpha > 0$ such that

$$V(x) = 0, \quad \forall\, x \in A_{r_1}^{r_2} \quad \text{and} \quad V(x) \geq \alpha > 0, \quad \forall\, x \in mathbbR^N \setminus A_{R_1}^{R_2},$$

where $A_{\rho_1}^{\rho_2}$ denotes the annulus of radius $0 < \rho_1 < \rho_2$, that is,

$$A_{\rho_1}^{\rho_2} = \{x \in \mathbb{R}^N : \rho_1 < |x| < \rho_2\}.$$

We are looking for positive solutions of (1.1), and so, as usual, we set $f(s) = g(s) = 0$ for all $s \leq 0$ and assume:

(H_1) $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ and $f(0) = f'(0) = 0 = g(0) = g'(0)$;

(H_2) there exists $\delta' > 0$ such that

$$0 < (1+\delta')f(s)s \leq f'(s)s^2 \ \text{ and } \ 0 < (1+\delta')g(s)s \leq g'(s)s^2, \quad \forall\ s > 0.$$

2 Main Results

In our first result we guarantee the existence of solutions for (1.1) when the nonlinearities have polynomial arbitrary growth at infinity, explicitly,

Theorem 2.1. *Assume $(V_0) - (V_1)$ and $(H_1) - (H_2)$. Furthermore, suppose that*

[*]Departamento de Matemática, Universidade Federal de Sergipe, SE, Brazil, e-mail: andersonjvc@gmail.com
[†]Departamento de Matemática, Universidade Federal de Paraíba, PB, Brazil, e-mail: jmbo@pq.cnpq.br
[‡]Departamento de Matemática, Universidade Federal de Paraíba, PB, Brazil, e-mail: everaldo@mat.ufpb.br

(H_3) *there exist* $p, q > 2 + \delta'$ *such that the following limits are finite:*

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{s^{p-1}} = l_1 \quad \textit{and} \quad \lim_{s\to+\infty} \frac{g(s)}{s^{q-1}} = l_2.$$

Then, there exists $\hbar_0 > 0$ *such that (1.1) has a solution* $(u_\hbar, v_\hbar) \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \times H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$*, for all* $\hbar \in (0, \hbar_0]$*. Moreover,* $u_\hbar, v_\hbar \in C^2(\mathbb{R}^N)$ *are positive and*

$$u_\hbar(x),\ v_\hbar(x) \to 0, \quad \textit{as} \quad |x| \to \infty.$$

Next, in complement to above result, we consider nonlinearities satisfying a kind of global condition but not necessarily polynomial at infinity.

Theorem 2.2. *Assume* $(V_0) - (V_1)$ *and* $(H_1) - (H_2)$*. Moreover, suppose that*

(H_4) *for all* $\varepsilon > 0$*, there exists* $C_\varepsilon > 0$ *such that*

$$f(s)t + g(t)s \le \varepsilon(s^2 + t^2) + C_\varepsilon(f(s)s + g(t)t), \quad \forall\, s, t \in \mathbb{R}.$$

Then there exists $\hbar_0 > 0$ *such that (1.1) has a solution* $(u_\hbar, v_\hbar) \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \times H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$*, for all* $\hbar \in (0, \hbar_0]$*. Furthermore,* $u_\hbar, v_\hbar \in C^2(\mathbb{R}^N)$ *are positive and*

$$u_\hbar(x),\ v_\hbar(x) \to 0, \quad \textit{as} \quad |x| \to \infty.$$

Remark 2.1. *Note that the hypothesis* (H_3) *is a growth condition at infinity, but there are no restrictions on the values of* p *and* q*, that is, it can be allowed in the range subcritical, critical or supercritical. We recall that if* $N \ge 3$*, the notion of criticality for related with the so-called* critical hyperbola

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 - \frac{2}{N},$$

where $p, q > 1$*, see Ph. Clément et al. [3] and J. Hulshof-R. Van der Vorst [5].*

References

[1] Alves, C. O. - *Existence of positive solutions for an equation involving supercritical exponent in* $\mathbb{R}^N$, Nonlinear Anal. **42** (2000), 573-581.

[2] Cardoso, J. A., do Ó, J. M. and Medeiros, E. - *Standing waves for a hamiltonian system of Schrödinger equations with arbitrary growth*, Preprint.

[3] Clément, Ph., de Figueiredo D. G. and Mitidieri, E. - *Positive solutions of semilinear elliptic systems*, Comm. Partial Differential Equations **17** (1992), 923-940.

[4] del Pino, M. and Felmer, P. L. - *Local mountain-pass for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Calc. Var. Partial Differential Equations **4** (1996), 121-137.

[5] Hulshof, J. and Van der Vorst, R. C. A. M. - *Differential systems with strongly indefinite variational structure*, J. Funct. Anal. **114** (1993), 32-58.

[6] Ramos, M. and Tavares, H. - *Solutions with multiple spike patterns for an elliptic system*, Calc. Var. Partial Differential Equations **31** (2008), 1-25.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

Um sistema de equações parabólicas modelando a invasão de um tumor sólido

anderson l. a. de araujo * & paulo m. d. de magalhães †

Neste trabalho estudamos existência e unicidade para o modelo matemático bidimensional da invasão de um tecido saudável por um tumor sólido genérico.

1 Introdução

Neste trabalho temos o interesse em provar um resultado de existência e unicidade para o seguinte modelo sugerido por Anderson [1].

$$\begin{cases} \partial_t n - D_n \Delta n &= -\chi \nabla (n \nabla f) & \text{in } Q, \\ \partial_t m - D_m \Delta m &= \mu n - \lambda m & \text{in } Q, \\ \partial_t f &= -\alpha m f & \text{in } Q, \\ \partial_t c - D_c \Delta c &= \beta f - \gamma u - \alpha c & \text{in } Q, \end{cases} \tag{1.1}$$

com condições iniciais e condições de fronteira do tipo Neumann, D_n coeficiente de difusão de n, D_m coeficiente de difusão de m e D_c coeficiente de difusão de c.

Este modelo matemático é sobre o crescimento de um tumor genérico sólido, que acabou de ser vascularizado, ou seja, um fornecimento de sangue foi estabelecido. Escolhemos focar em quatro componentes que são as variáveis envolvidas na invasão de células tumorais, produzindo assim um modelo mínimo, caraterizado por: densidade de células tumorais (denotado por n), concentração de enzimas degradantes (MDE - indicado por m), concentração de macro moléculas (MM - denotado por f) e concentração de oxigénio (designado por c). Cada uma das quatro variáveis (n, m, f, c), é uma função da variável espacial x e da variável temporal t.

Como ferramenta para este trabalho, usaremos o teorema do ponto fixo de Leray-Schauder e argumentos de princípio do máximo para equações parabólicas.

2 Resultados preliminares e o Teorema principal

Denotaremos por $W_p^{2,1}(Q)$ o espaço de Banach de todas as funções $u \in L^p(Q)$ tal que $D_x u, D_x^2 u, D_t u \in L^p(Q)$, munido da norma

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q)} = \|u\|_{L^p(Q)} + \|D_x u\|_{L^p(Q)} + \|D_x^2 u\|_{L^p(Q)} + \|D_t u\|_{L^p(Q)}.$$

Lema 2.1. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um domínio limitado com fronteira suficientemente suave e $1 \leq q < \infty$. Então:*
se $\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{2} < 0, \qquad W_q^{2,1}(Q) \subset L^\infty(Q);$
se $\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{2} = 0, \qquad W_q^{2,1}(Q) \subset L^p(Q), \quad \forall p \in [q, \infty);$
se $\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{2} > 0, \qquad W_q^{2,1}(Q) \subset L^p(Q), \quad p = \left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{2}\right)^{-1},$
onde as imersões são contínuas.

*Unversidade Federal de Viçosa , UFV, MG, Brasil, anderson.araujo@ufv.br
†Universidade Federal de Ouro Preto, UFOP, MG, Brasil, e-mail: pmdm@iceb.ufop.br

Teorema 2.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado, $0 < T < \infty$ fixado, $c_0, m_0 \in H^1(\Omega)$, $n_0 \in W_3^{4/3}(\Omega)$ e $f_0 \in H^2(\Omega)$, com $n_0, f_0, m_0 \geq 0$. Então, existe $\xi > 0$ tal que, se*

$$\|n_0\|_{L^1(\Omega)} < \xi,$$

existem funções (f, n, m, c) satisfazendo:

(i) $f \in L^\infty(0,T; W_4^1(\Omega))$, $f_t \in L^2(Q)$, $f(0) = f_0$;

(ii) $n \in L^\infty(0,T; H^1(\Omega))$, $n_t \in L^2(Q)$, $n(0) = n_0$;

(iii) $m \in W_2^{2,1}(Q)$, $m(0) = m_0$;

(iv) $c \in W_2^{2,1}(Q)$, $c(0) = c_0$

e tal que,

$$\int_0^T \int_\Omega \partial_t n \varphi dx ds + D_n \int_0^T \int_\Omega \nabla n \nabla \varphi dx ds = \chi \int_0^T \int_\Omega n \nabla f \nabla \varphi dx ds, \tag{2.2}$$

para todo $\varphi \in L^2(0,T; H^1(\Omega))$.

$$\partial_t f = -\alpha m f \quad \text{q.t.p. in } Q, \tag{2.3}$$

$$\partial_t m - D_m \Delta m = \mu n - \lambda m \quad \text{q.t.p in } Q, \tag{2.4}$$

$$\partial_t c - D_c \Delta c = \beta f - \gamma n - \sigma c \quad \text{q.t.p. in } Q, \tag{2.5}$$

$$\nabla m.\eta = \nabla c.\eta = 0 \quad \text{q.t.p. on } \partial\Omega \times (0,T). \tag{2.6}$$

Além disso, $f \geq 0$, $n \geq 0$ e $m \geq 0$.

Prova: *Existência* - Para mostrar a existência de soluções introduziremos um problema regularizado relacionado com o sistema (1.1), para este, provaremos um resultado de existência de soluções usando o teorema do ponto fixo de Leray-Schauder e o princípio do máximo. Em seguida, provaremos que as soluções do problema regularizado são limitadas e assim, obtemos uma subsequência que converge para uma solução do problema original.

Um resultado que sera útil na introdução do problema regularizada e o seguinte: Existe um operador extensão $Ext(\cdot)$ que toma qualquer função w no espaço

$$W_2^{2,1}(Q) = \{w \in L^2(Q) / D_x w, D_x^2 w \in L^2(Q), w_t \in L^2(Q)\}$$

e extende esta para uma função Ext(w) $\in W_2^{2,1}(\mathbb{R}^{N+1})$ com **suporte compacto** satisfazendo:

$$\|\text{Ext(w)}\|_{W_2^{2,1}(\mathbb{R}^{N+1})} \leq C \|w\|_{W_2^{2,1}(Q)}$$

com C independente de w (veja Mikhailov [3]).

Referências

[1] ANDERSON, A. R. A. - *A hybrid mathematical model of solid tumor invasion: the importance of cell adhesion.*, Math. Medicine and Biology, 22, 2005, pp. 163-86.

[2] CZOCHRA, A. M. AND PTASHNYK, M. - *Boundedness on solutions of a haptotaxis model*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. Vol. 20, No. 3 (2010) 449-476.

[3] MIKHAILOV, V. P. - *Partial Differential Equations*, Mir: Moscow, 1978.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

A UNIQUENESS RESULT FOR AN INVERSE PROBLEM TO THE SYSTEM MODELING NONHOMOGENEOUS ASYMMETRIC FLUIDS

ANIBAL CORONEL* & MARKO A. ROJAS-MEDAR †

In this work we study the inverse problem of determining the density functions F and G, modeling the vector external sources for the linear and the angular momentum of particles, in a system for the motion of nonhomogeneous viscous incompressible asymmetric fluid on a bounded and regular domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, with boundary $\partial\Omega$ in a finite time $T > 0$:

$$(\rho u)_t + \mathrm{div}(\rho u \otimes u) - (\mu + \mu_r)\Delta u + \nabla p = 2\mu_r \mathrm{curl} w + \rho F, \quad \text{in} \quad Q_T := \Omega \times [0,T], \tag{0.1}$$

$$\mathrm{div} u = 0, \quad \text{in} \quad Q_T, \tag{0.2}$$

$$(\rho w)_t + \mathrm{div}(\rho w \otimes w) - (c_a + c_d)\Delta w - (c_0 + c_d - c_a)\nabla \mathrm{div} w + 4\mu_r w = 2\mu_r \mathrm{curl} u + \rho G, \quad \text{in} \quad Q_T, \tag{0.3}$$

$$\rho_t + u \cdot \nabla \rho = 0, \quad \text{in} \quad Q_T, \tag{0.4}$$

$$u(x,t) = w(x,t) = 0, \quad \text{on} \quad \Gamma_T := \partial\Omega \times [0,T], \tag{0.5}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad w(x,0) = w_0(x), \quad \rho(x,0) = \rho_0(x), \quad \text{on} \quad \Omega, \tag{0.6}$$

$$\int_\Omega \rho(x,t)u(x,t)\psi^u(x)dx = \phi^u(t) \quad \text{and} \quad \int_\Omega \rho(x,t)w(x,t)\psi^w(x)dx = \phi^w(t), \quad t \in [0,T]. \tag{0.7}$$

Here u, w, ρ and p denotes the velocity field, the angular velocity of rotation of the fluid particles, the mass density and the pressure distribution, respectively. The constant $\mu > 0$ is the usual Newtonian viscosity and the positive constants μ_r, c_0 and c_d are the additional viscosities related to the lack of symmetry of the stress tensor. The functions ψ^u, ψ^w, ϕ^u and ϕ^w in the integral overdetermination condition (0.7) are given and satisfies some restrictions which will be specified later. The differential notation is the standard ones, i.e. the symbols u_t, w_t and ρ_t denotes the time derivatives and $\nabla, \Delta, \mathrm{div}$ and curl denotes the gradient, Laplacian, divergence and rotational operators, respectively. Now, by applying the Helmholtz decomposition, the vector fields F and G are representable for $(x,t) \in \Omega_T$ by the following relations

$$F(x,t) = f(t)(\nabla h(x,t) - m(x,t)) \quad \text{and} \quad G(x,t) = g(t)(\nabla r(x,t) - q(x,t)), \tag{0.8}$$

where m and q are given functions and f, g, h and r are unknown functions such that

$$\mathrm{div}(\rho\nabla h) = \mathrm{div}(\rho m), \qquad \mathrm{div}(\rho\nabla r) = \mathrm{div}(\rho q), \quad \text{in} \quad \Omega \tag{0.9}$$

$$\frac{\partial h}{\partial n} = h \cdot n, \qquad \frac{\partial r}{\partial n} = r \cdot n, \quad \text{on} \quad \partial\Omega \tag{0.10}$$

$$\int_\Omega h(x,t)dx = 0, \qquad \int_\Omega r(x,t)dx = 0, \quad t \in [0,T], \tag{0.11}$$

where n is the outward unit normal vector to $\partial\Omega$.

*GMA, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ciencias, Universidad del Bío-Bío, Campus Fernando May, Chillán, Chile, e-mail: acoronel@ubiobio.cl

†GMA, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ciencias, Universidad del Bío-Bío, Campus Fernando May, Chillán, Chile, e-mail: marko@ubiobio.cl

1 Main Results

We consider the following assumptions:

$$c_0 + c_d > c_a, \quad \rho_0 \in C^1(\overline{\Omega}), \ \ \rho_0(x) \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^+, \ \ u_0 \in V \cap [H^2(\Omega)]^3, \ \ w_0 \in [H_0^1(\Omega)]^3 \cap [H^2(\Omega)]^3, \tag{1.12}$$

$$\psi^u, \psi^w \in H_0^1(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega) \cap H^2(\Omega), \ \ \mathrm{div}(\psi^u) = \mathrm{div}(\psi^w) = 0 \text{ in } \Omega, \ \ \phi^u, \phi^w \in H^2(\Omega), \ \ h, r \in C^1([0,T]), \tag{1.13}$$

$$|\int_\Omega \rho_0(x)(\nabla h(x,0) - m(x,0))dx| \geq 2\epsilon_0 > 0, \ \text{ and } \ |\int_\Omega \rho_0(x)(\nabla r(x,0) - g(x,0))dx| \geq 2\epsilon_0 > 0, \tag{1.14}$$

where $V = \overline{\mathcal{V}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{[H_0^1(\Omega)]^3}}$ with $\mathcal{V}(\Omega) = \left\{ v \in (C_0^\infty(\Omega))^3 \ : \ \mathrm{div} v = 0 \text{ in } \Omega \right\}$ and our main results are the following:

Teorema 1.1. *Assume that ρ_0, v_0 and w_0 satisfies the assumptions (1.12) and $(f,g) \in [H^1(\Omega)]^2$. Then the direct problem (0.6)-(0.1) and (0.8)-(0.11) possesses a unique strong solution $\{u, w, \rho, p, h, r\}$ defined on a maximal interval $[0, T_1[\subset [0,T]$.*

Teorema 1.2. *Let (1.12)-(1.14) be satisfied and $T_2 \leq T_1$, then there exists a unique collection of functions $\{u, w, \rho, p, f, g\}$ solution of the inverse problem (0.6)-(0.11).*

We prove the existence part of theorem 1.1 by applying the ideas of [2] and the uniqueness by the standard estimates [7]. Meanwhile, we prove the theorem 1.2 by characterizing the inverse problem solutions using an operator equation of second kind and introducing several estimates we deduce that the hypothesis of the Tikhonov fixed point theorem are satisfied.

Acknowledgment

We acknowledge the support of the research projects 124109 3/R (Universidad del Bío-Bío, Chile), 121909 GI/C (Universidad del Bío-Bío, Chile), Fondecyt 1120260 and MTM 2012-32325 (Spain).

References

[1] José Luiz Boldrini and Marko Rojas-Medar. On the convergence rate of spectral approximation for the equations for nonhomogeneous asymmetric fluids. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 30(2):123–155, 1996.

[2] José L. Boldrini, Marko A. Rojas-Medar, and Enrique Fernández-Cara. Semi-Galerkin approximation and strong solutions to the equations of the nonhomogeneous asymmetric fluids. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 82(11):1499–1525, 2003.

[3] S. N. Antontsev, A. V. Kazhikhov, and V. N. Monakhov. *Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids*, volume 22 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990. Translated from the Russian.

[4] Jacques Simon. Nonhomogeneous viscous incompressible fluids: existence of velocity, density, and pressure. *SIAM J. Math. Anal.*, 21(5):1093–1117, 1990.

[5] Roger Temam. *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1977. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 2.

[6] Aleksey I. Prilepko, Dmitry G. Orlovsky, and Igor A. Vasin. *Methods for solving inverse problems in mathematical physics*, volume 231 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker Inc., New York, 2000.

[7] Jishan Fan and Gen Nakamura. Local solvability of an inverse problem to the density-dependent Navier-Stokes equations. *Appl. Anal.*, 87(10-11):1255–1265, 2008.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

PADRÕES EM UM PROBLEMA PARABÓLICO COM INTERSECÇÃO DAS RAÍZES DA EQUAÇÃO DEGENERADA

ARNALDO SIMAL DO NASCIMENTO * & MAICON SÔNEGO †

1 Introdução

Neste trabalho usamos o conceito variacional de Γ-convergência para provar a existência de quatro famílias de soluções estacionárias, não-constantes e estáveis (as quais chamamos de *padrões*) para um problema parabólico singularmente perturbado. Além disso, o comportamento assintótico das soluções é apresentado.

Considere a seguinte equação parabólica singularmente perturbada com condições de Neumann na fronteira:

$$\begin{aligned} u_t(x) = \epsilon^2 div(k(x)\nabla u(x)) + f(u,x) \quad &\text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0 \quad &\text{sobre} \quad \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.1}$$

sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ um conjunto aberto, limitado e com fronteira suave, ϵ um pequeno parâmetro positvo e ν o vetor normal exterior a $\partial\Omega$. A função de difusibilidade $k(\cdot)$ é suave e estritamente positiva.

A função $f(\cdot)$ é de classe C^1 e satisfaz as hipóteses apresentadas abaixo.

(f_1) Existem uma subvariedade $(n-1)$-dimensional $\gamma \subset \Omega$ dividindo Ω em duas componentes conexas denominadas Ω_a e Ω_b, tais que as fronteiras $\partial\Omega_a$ e $\partial\Omega_b$ são de Lipschitz, e três funções $\theta, a, b \in C^1(\overline{\Omega})$ que são raízes de f, ou seja,

$$f(a(x),x) = f(b(x),x) = f(\theta(x),x) = 0, \quad \forall \quad x \in \Omega.$$

Além disso, $a > \theta > b$ em Ω_a, $b > \theta > a$ em Ω_b, e $a = \theta = b$ em γ.

(f_2) $\partial_1 f(a(x),x) < 0$ para todo $x \in (\Omega \setminus \gamma)$, e $\partial_1 f(b(x),x) < 0$ para todo $x \in (\Omega \setminus \gamma)$.

(f_3) $\displaystyle\int_{\min\{a(x),b(x)\}}^{\max\{a(x),b(x)\}} f(\xi,x)d\xi = 0$, para todo $x \in \Omega$ (*condição de igualdade de área*).

(f_4) Existem constantes positivas c_1, c_2 e s_0 e um número $p \geq 2$ tal que $c_1 |s|^p \leq F(s,x) \leq c_2 |s|^p$, para todo s satisfazendo $|s| \geq s_0$, onde

$$F(u,x) = \begin{cases} -\displaystyle\int_{b(x)}^{u} f(\xi,x)d\xi, & x \in \Omega_a \\ 0, & x \in \gamma \\ -\displaystyle\int_{a(x)}^{u} f(\xi,x)d\xi, & x \in \Omega_b. \end{cases} \tag{1.2}$$

A hipótese (f_1) diz que $\partial_1 f(a(x),x) = \partial_1 f(b(x),x) = 0$, para todo $x \in \gamma$, ou seja, as raízes $a(x)$ e $b(x)$ da equação degenerada $f(u,x) = 0$ se intersectam em γ e esta é a principal fonte de dificuldade do problema. Muitos autores têm estudado este tipo de problema e o principal caso considerado é o chamado *caso de mudança de estabilidade* (veja [1,3,5]), onde assume-se que $\partial_1 f(a(x),x) > 0$ para todo $x \in (\Omega \setminus \gamma)$, e $\partial_1 f(b(x),x) < 0$ para todo $x \in (\Omega \setminus \gamma)$. Nossa hipótese (f_2) garante que não estamos em um caso de mudança de estabilidade. Em geral,

*DM, UFSCar, SP, Brasil, arnaldon@dm.ufscar.br
†IMC, UNIFEI, MG, Brasil, mcn.sonego@unifei.edu.br

nestes problemas, são consideradas apenas dimensões 1 ou 2, o termo de difusibilidade constante e, devido à técnica utilizada (expansão assintótica), assume-se que a sub-variedade γ não intercepta a fronteira do domínio. Neste contexto os resultados limitam-se a existência e comportamento assintótico de soluções estacionárias, sendo raros aqueles que mostram a estabilidade, veja [2,3].

Nosso trabalho fornece a existência, o comportamento assintótico e principalmente a estabilidade de quatro famílias de soluções estacionárias de (1.1). Além disso, não restringimos a dimensão do domínio, não excluímos a possibilidade de γ interceptar a fronteira de Ω e consideramos o termo de difusibilidade não-constante.

2 Resultado Principal

Nosso objetivo é demonstrar o teorema abaixo.

Teorema 2.1. *Assuma que f satisfaz as hipóteses $(f_1)-(f_4)$. Então existe $\epsilon_0>0$ e quatro famílias de soluções estacionárias estáveis $\left\{u_\epsilon^1\right\}_{0<\epsilon\leq\epsilon_0},\ldots,\left\{u_\epsilon^4\right\}_{0<\epsilon\leq\epsilon_0}$ de (1.1) tais que*

- $\left|u_\epsilon^1-u_0^1\right|_{L^1(\Omega)}\to 0$ *quando* $\epsilon\to 0$, *sendo* $u_0^1(x)=a(x)\chi_{\Omega_a}(x)+b(x)\chi_{\Omega_b}(x)$;
- $\left|u_\epsilon^2-u_0^2\right|_{L^1(\Omega)}\to 0$ *quando* $\epsilon\to 0$, *sendo* $u_0^2(x)=b(x)\chi_{\Omega_a}(x)+a(x)\chi_{\Omega_b}(x)$;
- $\left|u_\epsilon^3-u_0^3\right|_{L^1(\Omega)}\to 0$ *quando* $\epsilon\to 0$, *sendo* $u_0^3(x)=a(x)$;
- $\left|u_\epsilon^4-u_0^4\right|_{L^1(\Omega)}\to 0$ *quando* $\epsilon\to 0$, *sendo* $u_0^4(x)=b(x)$.

A prova do teorema acima é feita usando o Teorema de Kohn e Sternberg que relaciona os mínimos locais isolados de um determinado funcional Γ-limite E_0, com os mínimos locais da família de funcionais de energia $\{E_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ dos quais E_0 é o Γ-limite. A mesma técnica é utilizada em [4], por exemplo.

Exemplos simples podem ser construídos nos quais o Teorema 2.1 pode ser aplicado. Considere o problema (1.1) no intervalo $\Omega:=(-1,1)$ com a função f dada por

$$f(u,x)=-(u+x)(u-x^2)\left(u-\left(\frac{x^2-x}{2}\right)\right). \tag{2.3}$$

Não é difícil verificar que f satisfaz $(f_1)-(f_4)$ o que permite aplicar o Teorema 2.1 para garantir a existência, e exibir o perfil geométrico, de quatro famílias de soluções estacionárias não-constantes estáveis para este exemplo.

Referências

[1] BUTUZOV V. F., NEFEDOV N. N., SCHNEIDER K. R. - *Singularly perturbed problems in case of exchange of stabilities.*, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 121, No. 1, 2004.

[2] KARALI G. E SOURDIS, C. - *Radial and bifurcating non-radial solutions for a singular perturbation problem in the case of exchange of stabilities*, Ann. I. H. Poincaré, AN 29, 2012.

[3] BUTUZOV V. F. - *On the stability and domain of attraction of asymptotically nonsmooth stationary solutions to a singularly perturbed parabolic equation.* Comput. Math. and Math. Physics, Vol 46, No 3, 413-424, 2006.

[4] DO NASCIMENTO, A. S. - *Stable stationary solutions induced by spatial inhomogeneity via Γ-convergence.* Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, **29** No.1, 75-97, 1998.

[5] BUTUZOV V. F. E SMUROV, I. - *Initial boundary value problem for a singularly perturbed parabolic equation in case of exchange of stability.* J. Math. Anal. Appl., **234**, 183-192, 1999.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

FAMÍLIAS REGULARIZADAS E EQUAÇÕES DE EVOLUÇÃO DE TERCEIRA ORDEM

Bruno de Andrade *

Apresentaremos o conceito e as propriedades básicas da teoria de famílias regularizadas geradas por operadores lineares fechados definidos em espaços de Banach e exibiremos algumas aplicações ao estudo de equações de evolução que modelam vibrações em estruturas flexíveis.

1 Introdução

Seja $(X\|\cdot\|)$ um espaço de Banach e considere $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado. Neste trabalho abordaremos a teoria de existência de soluções globais para equações de evolução da forma

$$\begin{cases} \alpha u'''(t) + u''(t) - \gamma A u'(t) - \beta A u(t) = f(t),\ t \geq 0, \\ u(0) = x,\ u'(0) = y,\ u''(0) = z, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \infty)$. Por uma solução global entendemos uma função $u \in C([0,\infty); D(A)) \cap C^3([0,\infty); X)$ que verifica (1.1) e tal que $u' \in C([0,\infty); D(A))$.

Do ponto de vista aplicado, uma interessante motivação para estudar o problema de Cauchy (1.1) é dada, por exemplo, pelos trabalhos de Bose e Gorain [3, 4] publicados no final do século 20. Na ocasião, tais autores propuseram um modelo matemático para vibrações viscoelásticas de estruturas flexíveis no qual o stress não é simplesmente proporcional à tensão. Como resultado eles mostraram que a dinâmica de vibrações de estruturas elásticas é governada pela equação diferencial parcial

$$\alpha \partial_{ttt} u(t) + \partial_{tt} u(t) - \beta \Delta u(t) - \gamma \Delta \partial_t u(t) = 0,\ t \geq 0, \tag{1.2}$$

suplementada por condições iniciais e de frontera, onde α, β, γ são constantes positivas satisfazendo $\alpha\beta < \gamma$.

Utilizaremos a teoria da transformada de Laplace para fornecer um tratamento direto para o problema (1.1) sem que seja necessário uma redução para um problema de primeira ordem. Para isso, relembraremos na próxima seção o conceito de famílias regularizadas. Tal abordagem para (1.1) foi utilizada pela primeira vez em [5] com a restrição $u(0) = u'(0) = u''(0) = 0$. Não obstante, em [1] os autores mostraram que esta hipótese pode ser suprimida. Nos últimos anos foram publicados alguns trabalhos similares, dentre os quais destacamos [2, 6]. Em [2], os autores aplicaram as técnicas apresentadas em [1] no estudo do comportamento assintótico para equações de Volterra. Por sua vez, o trabalho [6] é dedicado à teoria de boa colocação e decaimento exponencial da energia para uma versão não autônoma de (1.1). Este trabalho é baseado em resultados recentes em colaboração com os professores Carlos Lizama [1], Claudio Cuevas e Erwin Henríquez [2].

2 Resultados principais

Dados $\alpha, \beta, \gamma > 0$ considere as funções

$$k(t) = -\alpha + t + \alpha e^{-t/\alpha} \quad \text{e} \quad a(t) = -(\alpha\beta - \gamma) + \beta t + (\alpha\beta - \gamma)e^{-t/\alpha},\ \ t \geq 0.$$

*Departamento de Matemática - ICMC-USP, São Carlos-SP, Brasil, e-mail: bruno00luis@gmail.com.

Definição 2.1. *Um operador linear fechado $A : D(A) \subset X \to X$ definido em um espaço de Banach X é o gerador de uma família regularizada $\{R(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ se as seguintes condições são satisfeitas:*

(R1) $R(t)$ é fortemente contínua em $\mathbb{R}_+$ e $R(0) = 0$;

(R2) $R(t)D(A) \subset D(A)$ e $AR(t)x = R(t)Ax$ para todo $x \in D(A)$ e $t \geq 0$;

(R3) A seguinte equação é válida

$$R(t)x = k(t)x + \int_0^t a(t-s)R(s)Axds$$

para todo $x \in D(A)$ e $t \geq 0$. Nesse caso, $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ é chamada a família (α, β, γ)-regularizada gerada por A.

Os seguintes resultados mostram que a classe de geradores de famílias regularizadas é bastante ampla e, como acontece na teoria de semigrupos, evidenciam interessantes relações entre tais famílias e seus geradores.

Proposição 2.1. *Seja $-A$ operador positivo auto-adjunto definido sobre um espaço de Hilbert H. Se $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \infty)$ são tais que $\alpha\beta \leq \gamma$, então A é o gerador de uma família (α, β, γ)-regularizada sobre H.*

Proposição 2.2. *Seja $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ uma família (α, β, γ)-regularizada gerada por A. Então:*

(a)Para todo $x \in D(A)$ temos $R(\cdot)x \in C^2(\mathbb{R}_+; X)$.

(b) Sejam $x \in X$ e $t \geq 0$. Então $\int_0^t a(t-s)R(s)xds \in D(A)$ e $R(t)x = k(t)x + A\int_0^t a(t-s)R(s)xds$.

O principal resultado desse trabalho é o seguinte

Teorema 2.1. *Seja $\{R(t)\}_{t\geq 0}$ uma família (α, β, γ)-regularizada gerada por A. Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, D(A^2))$, $x \in D(A^3)$, $y \in D(A^2)$ e $z \in D(A^2)$ então $u : [0, \infty) \to X$ dada por*

$$u(t) = \alpha R''(t)x + R'(t)x - \gamma AR(t)x + \alpha R'(t)y + R(t)y + \alpha R(t)z + \int_0^t R(t-s)f(s)ds, \tag{2.3}$$

é uma solução global de (1.1).

Referências

[1] B. de Andrade, C. Lizama, *Existence of asymptotically almost periodic solutions for damped wave equations*, J. Math. Anal. Appl., **382** (2011), 761-771.

[2] B. de Andrade, C. Cuevas, E. Henríquez, *Asymptotic periodicity and almost automorphy for a class of Volterra integro-differential equations.* Math. Methods Appl. Sci. **35** (2012), 795-811.

[3] S.K. Bose, G.C. Gorain, *Exact controllability and boundary stabilization of torsional vibrations of an internally damped flexible space structure*, J. Optim. Theory Appl. **99** (2) (1998), 423-442.

[4] S.K. Bose, G.C. Gorain, *Stability of the boundary stabilised damped wave equation $y'' + \lambda y''' = c^2(\Delta y + \mu\Delta y')$ in a bounded domain in $\mathbb{R}^n$*, Indian J. Math. **40** (1) (1998), 1-15.

[5] C. Fernández, C. Lizama, V. Poblete, *Maximal regularity for flexible structural systems in Lebesgue spaces,* Math. Probl. Eng. **2010** (2010), Article ID 196956, 1-15.

[6] B. Kaltenbacher, I. Lasiecka, M. Pospieszalska, *Well-posedness and exponential decay of the energy in the nonlinear Jordan-Moore-Gibson-Thompson equation arising in high intensity ultrasound.* Math. Models Methods Appl. Sci. **22** (2012), 11, 1250035, 34 pp.

ENAMA - Encontro Nacional de Anlise Matemtica e Aplicaes
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

Almost automorphic solutions for evolutions equations

Bruno de Andrade *, Éder Mateus † & Arlúcio C. Viana ‡

In this work we deal with existence and uniqueness of almost automorphic solutions for abstract semilinear evolution equations using a mix of fixed point theory and extrapolation spaces theory. We apply our abstract results in the framework of transmission problems for the Bernoulli-Euler plate equation.

1 Introduction

This presentation is part of the paper [1]. Here, we deal with existence and uniqueness of almost automorphic solutions for abstract semilinear evolution equations of the form

$$u'(t) \quad = \quad Au(t) + f(t, u(t)),\ t \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

where A is an unbounded linear operator, assumed to be Hille-Yosida of negative type, with domain $D(A)$ not necessarily dense on some Banach space X, $f : \mathbb{R} \times X_0 \to X$ is a continuous function and $X_0 = \overline{D(A)}$. In our framework we use a mix of fixed point theory and extrapolation spaces theory. Let us recall some basic definitions and properties of some natural tools in our setting.

Definition 1.1. *A continuous function $f : \mathbb{R} \longrightarrow X$ is called almost automorphic if for every sequence of real numbers $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ there exists a subsequence $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ such that*

$$\lim_{n,m\to\infty} \|f(t + s_n - s_m) - f(t)\| = 0.$$

.

The space of all almost automorphic functions on X is denoted by $AA(X)$. In addition, let X and Y be two Banach spaces. A continuous function $f : \mathbb{R} \times Y \longrightarrow X$ is said to be almost automorphic if $f(t, x)$ is almost automorphic in $t \in \mathbb{R}$ uniformly for all $x \in K$, where K is any bounded subset of Y. Similarly, we set $AA(Y; X)$ to represent the set of all almost automorphic functions in t uniformly for $x \in Y$.

Definition 1.2. *Let X be a Banach space and A be a linear operator with domain $D(A)$. One says that $(A, D(A))$ is a Hille-Yosida operator on X if there exist $\omega \in \mathbb{R}$ and a positive constant $M \geq 1$ such that $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ and*

$$\sup\left\{(\lambda - \omega)^n \|(\lambda - A)^{-n}\| : n \in \mathbb{N},\ \lambda > \omega\right\} \leq M.$$

The infinimum of such ω is called the type of A. If the constant ω can be chosen smaller than zero, A is called of negative type.

From now, let $(A, D(A))$ be a Hille-Yosida operator of negative type. Let X_{-1} and $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$ be the extrapolation space and the extrapolated semigroup associated to A (see [1, 4]). By a mild solution of (1.1) we understand a continuous function $u : \mathbb{R} \longrightarrow X_0$ which verifies

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t - s) f(s, u(s)) ds.$$

*ICMC , USP, So Carlos - SP, Brasil, bruno00luis@gmail.com
†DMAI, UFS, Itabaiana - SE, Brasil, e-mail: edermateus@ufs.br
‡DMAI, UFS, Itabaiana - SE, Brasil, e-mail: arlucioviana@ufs.br

2 Almost automorphic solutions with almost automorphic conditions

The following lemmas will be helpful in approach of (1.1).

Lemma 2.1 ([3]). *If $f : \mathbb{R} \times Y \mapsto X$ is almost automorphic, and $h \in AA(Y)$, and assume that $f(t, \cdot)$ is uniformly continuous on each bounded subset $K \subset Y$ uniformly for $t \in \mathbb{R}$, that is, for any $\epsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that $x, y \in K$ and $\|x - y\| < \delta$ imply that $\|f(t, x) - f(t, y)\| < \epsilon$ for all $t \in \mathbb{R}$, then the function $f(\cdot, h(\cdot)) \in AA(X)$.*

Lemma 2.2. *If $u \in AA(X_0)$, then $z : \mathbb{R} \to X$, defined by*

$$z(t) := \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t - s)u(s)ds$$

is in $AA(X_0)$.

The main result in this presentation is the following

Theorem 2.1. *Let $f \in AA(X_0, X)$ as in Lema 2.1. Assume that there exists a function $L \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; [0, \infty))$ such that*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L(t)\|x - y\|, \ t \in \mathbb{R}, \ x, y \in X_0. \tag{2.2}$$

Let $\theta(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\omega(t-s)}L(s)ds$, $t \in \mathbb{R}$. Suppose that there is a positive constant $K < 1$ such that $M\theta(t) < K$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Then the Equation (1.1) has a unique mild solution in $AA(X_0)$.

As application of our abstract result we consider the transmission problem for the Bernoulli-Euler plate equation. Precisely, let $\Omega_1 \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, be strictly convex, bounded domains with smooth boundaries $\Gamma_1 = \partial\Omega_1$ and $\Gamma = \partial\Omega$ with $\Gamma_1 \cap \Gamma = \emptyset$. Then $\mathcal{O} = \Omega \setminus \Omega_1$ is a bounded, connected domain with boundary $\partial\mathcal{O} = \Gamma_1 \cup \Gamma$. We are going to study the following mixed boundary value problem

$$\begin{cases} (\partial_t^2 + c^2\Delta^2)u_1(x, t) = b(t)f(u_1(x, t)) \text{ in } \Omega_1 \times \mathbb{R}, \\ (\partial_t^2 + \Delta^2)u_2(x, t) = b(t)f(u_2(x, t)) \text{ in } \mathcal{O} \times \mathbb{R}, \\ u_1|_{\Gamma_1} = u_2|_{\Gamma_1}, \partial_\nu u_1|_{\Gamma_1} = \partial_\nu u_2|_{\Gamma_1}, c\Delta u_1|_{\Gamma_1} = \Delta u_2|_{\Gamma_1}, c\partial_\nu \Delta u_1|_{\Gamma_1} = \partial_\nu \Delta u_2|_{\Gamma_1}, \\ u_2|_{\Gamma} = 0, \Delta u_2|_{\Gamma} = -a\partial_\nu \partial_t u_2|_{\Gamma}, \end{cases} \tag{2.3}$$

where $c > 1$ is a constant, ν denotes the inner unit normal vector to the boundary, a is a non-negative function on Γ, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are real functions. Following ideas of [2], system (2.3) can be regard as (1.1). Suppose that there is a constant $a_0 > 0$ such that $a_0 \leq a$ on Γ and assume that $b \in AA(\mathbb{R})$. If $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a globally Lipschitz continuous function with constant $K > 0$ and K is small enough, then the problem (2.3) has a unique almost automorphic mild solution.

References

[1] B. de Andrade, E. Mateus, A. Viana. *Almost automorphic solutions for evolution equations.* Topol. Methods Nonlinear Analysis. To appear.

[2] K. Ammari, G. Vodev, *Boundary stabilization of the transmission problem for the Bernoulli-Euler plate equation*, Cubo, **11** (2009), 39-49.

[3] J. Liang, J. Zhang, T.J. Xiao, *Composition of pseudo almost automorphic and asymptotically almost automorphic functions*, J. Math. Anal. Appl. **340** (2008), 1493-1499.

[4] G. Da Prato; E. Sinestrari, *Differential operators with non dense domain.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **14** (1989), 285-344.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

ESTIMATIVAS UNIFORMES PARA EQUAÇÕES DE SCHRÖDINGER E PLACA COM DISSIPAÇÃO NÃO - LINEAR LOCALMENTE DISTRIBUÍDA

C. A. Bortot * & M. M. Cavalcanti † &
W. J. Corrêa ‡ & V. N. Domingos Cavalcanti §

1 Introdução

Este artigo trata da estabilização das equações de Schrödinger e Placa com dissipação não - linear localmente distribuída:

$$(S)\begin{cases} iy_t + \Delta y + ia(x)\, g(y) = 0 & \text{in } \mathcal{M}\times(0,\infty) \\ y = 0 \quad \text{on } \partial\mathcal{M}\times(0,\infty) \\ y(0) = y_0 \quad \text{in } \mathcal{M}, \end{cases} \qquad (P)\begin{cases} y_{tt} + \Delta^2 y + a(x)\, g(y_t) = 0 & \text{in } \mathcal{M}\times(0,\infty) \\ y = \Delta y = 0 \quad \text{on } \partial\mathcal{M}\times(0,\infty) \\ y(0) = y_0,\, y_t(0) = y_1 \quad \text{in } \mathcal{M}, \end{cases}$$

onde $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ é uma variedade Riemannina compacta $n-$dimensional com fronteira regular. A função não-negativa $a(\cdot)$, responsável pelo efeito dissipativo localizado, satisfaz a seguinte condição:

$$a \in L^\infty(\mathcal{M}); a(x) \geq a_0 > 0 \text{ in } \omega \subset \mathcal{M}, \tag{1.1}$$

onde ω é um conjunto aberto de $\mathcal{M}$ devidamente contido em $\mathcal{M}$.

Considerando $g \equiv 0$, isto é, quando (S) e (P) são lineares, nós assumiremos a hipótese:
Existe (ω, T_0), $T_0 > 0, \omega \subset\subset \mathcal{M}$, tal que as seguintes desigualdades de observabilidade são satisfeitas:

$$||y_0||^2_{L^2(\mathcal{M})} \leq C \int_0^T \int_\omega |y(x,t)|^2\, dx\, dt, \quad \text{em relação ao problema } (S), \tag{1.2}$$

$$||y_1||^2_{L^2(\mathcal{M})} + ||\Delta y_0||^2_{L^2(\mathcal{M})} \leq C \int_0^T \int_\omega |\partial_t y(x,t)|^2\, dx\, dt, \quad \text{para o problema } (P), \tag{1.3}$$

para algum $C = C(\omega, T_0)$ e para todo $T > T_0$.

As seguintes hipóteses sobre a função g provém de Lasiecka e Triggiani [4]:

(H_1) (i) $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é contínua, $g(0) = 0$.

(ii) g é a subdiferencial de J_1, isto é, $g(z) = \partial J_1(z)$, onde $J_1 : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{R}} = (-\infty, +\infty]$ é uma função semi-contínua inferiormente, própria e convexa.

(iii) $Re\{(g(z) - g(v))(\overline{z} - \overline{v})\} \geq 0$, $\forall\, z, v \in \mathbb{C}$.

(iv) $Im\{g(z)\overline{z}\} \equiv 0$.

(H_2) Existe $m, c > 0$ tal que

(i) $m\,|z|^2 \leq g(z)\,\overline{z}$, se $|z| \leq 1$.

*Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, PR, Brasil, e-mail: cesarbortot@hotmail.com
†Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, PR, Brasil, e-mail: mmcavalcanti@uem.br
‡Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Campo Mourão, PR, Brasil, wcorrea@utfpr.edu.br
§Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, PR, Brasil, e-mail: vndcavalcanti@uem.br

(ii) $|g(z)| \leq c\,|z|$, se $|z| \geq 1$.

Consideramos $L^2(\mathcal{M})$ o espaço das funções complexas sobre $\mathcal{M}$. Este, é um espaço de Hilbert real quando munido com o produto interno com sua correspondente norma

$$(y,z) = Re \int_{\mathcal{M}} y(x)\overline{z(x)}\,dx, \quad ||y||^2_{L^2(\mathcal{M})} = (y,y)_{L^2(\mathcal{M})}.$$

Consideramos o espaço $H^1_0(\mathcal{M})$ munido com o produto escalar

$$(y,z)_{H^1_0(\mathcal{M})} = (\nabla y, \nabla z)_{L^2(\mathcal{M})}.$$

Também denotamos $V = H^1_0(\mathcal{M}) \cap H^2(\mathcal{M})$ com a correspondente norma em V como

$$||y||^2_V = ||\Delta y||^2,$$

que é uma norma equivalente para a norma em $H^2(\mathcal{M})$.

O objetivo geral é apresentar um método para tratar a estabilidade assintótica para equações lineares sujeitas a dissipações não lineares $a(\cdot)g(z)$. Definindo, $E_y(t) := \frac{1}{2}||y(t)||^2_{L^2(\mathcal{M})}$ nosso escopo é provar a seguinte desigualdade:

$$E_y(T) \leq C_T \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)(|y|^2 + |g(y)|^2)\,dx\,dt. \tag{1.4}$$

Assumindo que (1.4) ocorre e procedendo como em Lasiecka and Triggiani [4], a solução do problema (S) satisfaz a seguinte taxa de decaimento

$$E_y(t) \leq S\left(\frac{1}{T_0}\right) E_y(0) \searrow 0, \text{ for all } t \geq T_0,\ t \to \infty, \tag{1.5}$$

onde a função escalar $S(t)$ (contração não - linear) é a solução da seguinte EDO:

$$\frac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0, \quad S(0) = E_y(0), \tag{1.6}$$

onde a função q é definida em Lasiecka e Triggiani [4] (veja (2.12) na página 492). Para a boa colocação dos problemas (S) e (P) fazemos uso da teoria de semigrupo não lineares. Do exposto até então, temos o resultado principal:

Teorema 1.1. *Assuma que as hipóteses (1.1), (1.2), (1.3), (H_1) e (H_2) são satisfeitas. Então, o problema (S) (respect. (P)) possui uma única solução generalizada $y \in C([0,+\infty); L^2(\mathcal{M})$ (respect. $y \in C([0,+\infty); V) \cap C^1([0,+\infty); L^2(\mathcal{M}))$ que satisfaz a taxa de decaimento dada em (1.5).*

Referências

[1] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, R. Fukuoka, J. A. Soriano, Asymptotic stability of the wave equation on compact manifolds and locally distributed damping: a sharp result. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 197 (2010), no. 3, 925-964.

[2] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, R. Fukuoka, J. A. Soriano, Asymptotic stability of the wave equation on compact surfaces and locally distributed damping-a sharp result. *Trans. Amer. Math. Soc.* 361 (2009), no. 9, 4561-4580.

[3] S. Jaffard, Contrôle interne exact des vibrations d'une plaque rectangulaire. *Portugal. Math.* 47(4), (1990), 423-429.

[4] I. Lasiecka, R. Triggiani, Well-posedness and sharp uniform decay rates at the $L^2(\Omega)$-level of the Schrödinger equation with nonlinear boundary dissipation. J. Evol. Equ. 6 (2006), no. 3, 485-537.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

DECAIMENTO GERAL DA ENERGIA DE PROBLEMAS MISTOS PARA EQUAÇÕES DE ONDAS COM TERMO DE MEMÓRIA EM DOMÍNIOS COM FRONTEIRA NÃO LOCALMENTE REAGENTE

CÍCERO LOPES FROTA * & ANDRÉ VICENTE †

Há algum tempo, diversos autores tem se dedicado ao estudo do decaimento uniforme de soluções para problemas de valores iniciais e de fronteira envolvendo equações de ondas, em domínios limitados, com termo de memória do tipo

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t \beta(t-\tau)\Delta u(\tau)d\tau + f(u,u_t) = 0 \text{ in } \Omega \times (0,\infty),$$

onde β e f são funções conhecidas, veja por exemplo [1], [3], [4] e suas referências, cujas equações contém termo de memoria no domínio Ω, bem como [5] e [14] onde o termo de memória atua na fronteira do domínio. Recentemente, alguns autores consideraram problemas com hipóteses mais gerais no núcleo β, mais especificamente, β é uma função continuamente diferenciável satisfazendo $\beta'(t) \leq -\xi(t)\beta(t)$ para todo $t \geq 0$, onde ξ é uma função conhecida. Isto permitiu a obtenção de taxas de decaimento mais gerais do que as usuais taxas exponencial ou algébrica e, com isto, a teoria ganhou destaque passando-se a ser denominada por "decaimento geral". Mais precisamente, o decaimento geral consiste em mostrar que a energia $E = E(t)$ associada ao problema satisfaz, para todo $t_0 > 0$, $E(t) \leq c_1\, e^{-c_2 \int_0^t \xi(\tau)d\tau}$ para todo $t \geq t_0$, onde c_1 e c_2 são constantes positivas. Para maiores detalhes sobre o decaimento geral veja por exemplo [8], [9], [10], [15] e suas referências.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, um subconjunto aberto, limitado e conexo com fronteira suave denotada por Γ. Considere Γ_0, Γ_1 uma partição de Γ, isto é, $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, onde Γ_0, Γ_1 ambos com medida positiva, Γ_1 um subconjunto aberto e conexo de Γ com fronteira suave denotada por $\partial\Gamma_1$ e $\Gamma_0 = \Gamma \backslash \Gamma_1$. Veja que $\overline{\Gamma_1}$ é uma subvariedade de Γ e $\overline{\Gamma_1} = \Gamma_1 \cup \partial\Gamma_1$ é uma variedade compacta, C^∞, com fronteira. O objetivo deste trabalho é provar a existência e unicidade de solução, bem como o decaimento geral da energia associada, para o problema:

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t \beta(t-\tau)\Delta u(\tau)d\tau = 0 \text{ em } \Omega \times (0,\infty); \tag{1}$$

$$u = 0 \quad \text{em } \Gamma_0 \times (0,\infty); \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^t \beta(t-\tau)\frac{\partial u}{\partial \nu}(\tau)d\tau = \delta_t \quad \text{em } \Gamma_1 \times (0,\infty); \tag{3}$$

$$f\delta_{tt} - c^2\Delta_\Gamma \delta + g\delta_t + h\delta = -u_t \text{ em } \Gamma_1 \times (0,\infty); \tag{4}$$

$$\delta = 0 \quad \text{em } \partial\Gamma_1 \times (0,\infty); \tag{5}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x) \quad \text{para } x \in \Omega; \tag{6}$$

$$\delta(x,0) = \delta_0(x),\ \delta_t(x,0) = \frac{\partial u_0}{\partial \nu}(x) \quad \text{para } x \in \Gamma_1, \tag{7}$$

onde $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ e Δ_Γ são, respectivamente, os operadores de Laplace e Laplace-Beltrami; ν é o vetor unitário normal exterior à Γ_1; c é uma constante positiva; $\beta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f, g, h : \overline{\Gamma_1} \to \mathbb{R}$, $u_0, u_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ e $\delta_0 : \Gamma_1 \to \mathbb{R}$ são funções dadas. Em Frota-Medeiros-Vicente [6], os autores consideraram um problema relacionado, sem o termo de

*DMA, Universidade Estadual de Maringá, PR, Brasil, e-mail: clfrota@uem.br
†CCET, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, PR, Brasil, e-mail: andre.vicente@unioeste.br

memória, ou seja com $\beta \equiv 0$. Nesta referência considerou-se o problema (1)–(7) com a equação (1) trocada por

$$u_{tt} - \Psi\Big(\int_\Omega u^2\,dx\Big)\Delta u + au_t + b|u_t|^\lambda u_t = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty),$$

e as condições de fronteira foram denominadas de condições de fronteira da acústica para fronteira não localmente reagente. Neste caso a formulação das condições de fronteira tem motivação física no estudo de movimento de ondas acústicas em fluidos. Os autores provaram a existência, unicidade e decaimento exponencial da solução.

Para problemas em domínios com fronteira não localmente reagente ver também [12] e [13]. O caso $c = 0$ trata-se das condições de fronteira da acústica, introduzidas por Beale e Rosencrans [2] (veja também [7]). Neste caso particular o decaimento geral foi estudado em [8] e [11].

Concluindo, observamos que neste nosso trabalho estendemos os resultados de [8], [9] e [11] para a classe de problemas com fronteira não localmente reagente.

Referências

[1] ALABAU-BOUSSOUIRA, F.; CANNARSA, P. AND SFORZA, D. – Decay estimates for second order evolution equations with memory. *Journal of Functional Analysis*, **254**, 1342-1372, 2008.

[2] BEALE, J. T. AND ROSENCRANS, S. I. – Acoustic boundary conditions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **80**, 6, 1276–1278, 1974.

[3] BERRAMI, S. AND MESSAOUDI, S. A. – Exponential decay of solutions to a viscoelastic equation with nonlinear localized damping. *Electron. J. Differential Equations*, **88**, 1–10, 2004.

[4] CAVALCANTI, M. M. AND OQUENDO, H. P. – Frintional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation. *SIAM J. Control Optim.*, **42**, 4, 1310–1324, 2003.

[5] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. AND SANTOS, M. L. – Existence and uniform decay rates of solutions to a degenerate system with memory conditions at the boundary. *Applied Mathematics and Computation*, **150**, 439–465, 2004.

[6] FROTA, C. L.; MEDEIROS, L. A. AND VICENTE, A. – Wave equation in domains with non locally reacting boundary. *Differential and Integral Equations*, **24**, 1001–1020, 2011.

[7] FROTA, C. L. AND GOLDSTEIN, J. A. – Some nonlinear wave equations with acoustic boundary conditions. *Journal of Differential Equations*, **164**, 92–109, 2000.

[8] LIU, W. AND SUN, Y. – General decay of solutions for a weak viscoelstic equation with acoustic boundary conditions. *Z. Angew. Math. Phys.*, 2013, DOI 10.1007/s00033-013-0328-y.

[9] MESSAOUDI, S. A. – General decay of solutions of a viscoelastic equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **341**, 1457–1467, 2008.

[10] MESSAOUDI, S. A. AND FAREH, A. – General decay for a porous-thermoelastic system with memory: the case of nonequal sppeds. *Acta Mathematica Scientia*, **33B**, 1, 23–40, 2013.

[11] PARK, J. Y. AND PARK, S. H. – Decay rate estimates for wave equations of memory type with acoustic boundary conditions. *Nonlinear Analysis*, **74**, 993–998, 2011.

[12] VICENTE, A. AND FROTA, C. L. – Nonlinear wave equation with weak dissipative term in domains with non-locally reacting boundary. *Wave Motion*, **50**, 2, 162–169, 2013.

[13] VICENTE, A. AND FROTA, C. L. – On a mixed problem with a nonlinear acoustic boundary condition for a non-locally reacting boundaries. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **407**, 2, 328–338, 2013.

[14] WU,J.; LI, S. AND CHAI, S. – Uniform decay of the solution to a wave equation with memory conditions on the boundary. *Nonlinear Analysis*, **73**, 2213–2220, 2010.

[15] ZARAÏ, A.; TATAR, N-E. AND ABDELMALEK, S. – Elastic membrane equation with memory term and nonlinear boundary damping: global existence, decay and blowup of the solution. *Acta Mathematica Scientia*, **33B**, 1, 84–106, 2013.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

MULTIPLE SOLUTIONS FOR A NLS EQUATION WITH CRITICAL GROWTH AND MAGNETIC FIELD

Claudianor O. Alves * & Giovany M. Figueiredo †

1 Introduction

In this paper, we are concerned with the multiplicity of nontrivial solutions for the following class of complex problems

$$\begin{cases} (-i\nabla - A(\mu x))^2 u = \mu |u|^{q-2}u + |u|^{2^*-2}u \text{ in } \Omega \\ \\ u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{C}), \end{cases} \tag{P_μ}$$

where Ω is a bounded domain with smooth boundary in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 4$, μ is a positive parameter, $2 \leq q < 2^* = \frac{2N}{N-2}$ and $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ is a magnetic field belonging to $C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \bigcap L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$.

This class of problem is related with the existence of solitary waves, namely solutions of the form $\psi(x,t) := e^{-i\frac{E}{h}t}u(x)$, with $E \in \mathbb{R}$, for the nonlinear Schrödinger equation

$$ih\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\frac{h}{i}\nabla - A(z)\right)^2 \psi + U(z)\psi - f(|\psi|^2)\psi, \quad z \in \Omega, \tag{NLS}$$

where $t > 0$, $N \geq 2$, h is the Planck constant and A is a magnetic potential associated to a given magnetic B, $U(x)$ is a real electric potential and the nonlinear term f is a superlinear function. A direct computation shows that ψ is a solitary wave for (NLS) if, and only if, u is a solution of the following problem

$$\left(\frac{h}{i}\nabla - A(z)\right)^2 u + V(z)u = f(|u|^2)u, \quad \text{in } \Omega, \tag{1.1}$$

where $V(z) = U(z) - E$. It is important to investigate the existence and the shape of such solutions in the semiclassical limit, namely, as $h \to 0^+$. The importance of this study relies on the fact that the transition from Quantum Mechanics to Classical Mechanics can be formally performed by sending the Planck constant to zero.

The first result was obtained by Esteban and Lions [8]. They have used the concentration-compactness principle and minimization arguments to obtain solution for $h > 0$ fixed and dimensions $N = 2$ or $N = 3$. More recently, Kurata [10] proved that the problem has a least energy solution for any $h > 0$ when a technical condition relating V and A is assumed. Under this technical condition, he proved that the associated functional satisfies the Palais-Smale compactness condition at any level. We also would like to cite the papers [6, 7, 4, 11, 5, 1, 2] for other results related to the problem (1.1) in the presence of magnetic field.

2 Mathematical Results

Teorema 2.1. *Let $2 \leq q < 2^*$. Then, there exists $\mu^* > 0$ such that, for each $\mu \in (0, \mu^*)$, problem (P_μ) has at least $cat_\Omega(\Omega)$ nontrivial solutions.*

*Universidade Federal de Campina Grande , Departamento de Matemática e Estatística, coalves@dme.ufcg.edu.br
†Universidade Federal do Pará, Faculdade de Matemática, e-mail: giovany@ufpa.br

References

[1] C.O. Alves, G.M. Figueiredo and M.F. Furtado, *Multiple solutions for a nonlinear Schrödinger equation with magnetic fields, Comm. in Partial Differential Equations, 36 (2011), 1-22*

[2] C.O. Alves, G.M. Figueiredo and M.F. Furtado, *On the number of solutions of NLS equations with magnetics fields in expanding domains, J. Differential Equations 251 (2011), 2534-2548.*

[3] G. Cerami and D. Passaseo, *Existence and multiplicity of positive solutions for nonlinear elliptic problems in exterior domains with "Rich" topology, Nonlinear Anal. 18 (1992), 109-119.*

[4] J. Chabrowski and A. Szulkin, *On the Schrödinger equation involving a critical Sobolev exponent and magnetic field, Top. Meth. Nonlinear Anal. 25 (2005), 3-21.*

[5] S. Cingolani, L. Jeanjean and S. Secchi, *Multi-peak solutions for magnetic NLS equations without non-degeneracy conditions, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 15 (2009), 653-675.*

[6] S. Cingolani and S. Secchi, *Semiclassical limit for nonlinear Schrödinger equations with electromagnetic fields, J. Math. Anal. Appl. 275 (2002), 108-130.*

[7] S. Cingolani and S. Secchi, *Semiclassical states for NLS equations with magnetic potentials having polynomial growths, J. Math. Phys. 46 (2005), no. 5, 053503, 19 pp.*

[8] M. Esteban and P.L. Lions, *Stationary solutions of nonlinear Schrödinger equations with an external magnetic field, PDE and Calculus of Variations, Vol. I, 401-449, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 1, Birkhäuser Boston, MA, 1989.*

[9] M. Lazzo, *Solutions positives multiples pour une équation elliptique non linéaire avec l'exposant critique de Sobolev, C. R. Acad. Sci. Paris 314 (1992), 61-64.*

[10] K. Kurata, *Existence and semi-classical limit of the least energy solution to a nonlinear Schrödinger equation with electromagnetic fields, Nonlinear Anal. 41 (2000), 763-778.*

[11] Z. Tang, *Multi-bump bound states of nonlinear Schrödinger equations with electromagnetic fields and critical frequency, J. Differential Equations 245 (2008), 2723-2748.*

[12] M. Willem, *Minimax Theorems, Birkhäuser, 1996.*

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

OPTIMAL DECAY RATES FOR WAVE EQUATIONS WITH A FRACTIONAL DAMPING VIA NEW METHOD

Cleverson Roberto da Luz *, Ryo Ikehata † & Ruy Coimbra Charão ‡

1 Introduction

We consider the initial value problem for the wave equation with fractional damping in $\mathbb{R}^n$:

$$u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) + A^\theta u_t(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

with initial data

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2}$$

The fractional power operator $A^\theta : H^{2\theta}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ $(0 \le \theta \le 1)$ is defined by

$$A^\theta v(x) := \mathcal{F}^{-1}\big(|\xi|^{2\theta}\mathcal{F}(v)(\xi)\big)(x), \qquad v \in H^{2\theta}(\mathbb{R}^n), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

where $\mathcal{F}$ denotes the usual Fourier transform in $L^2(\mathbb{R}^n)$ and $|\cdot|$ denotes the usual norm in $\mathbb{R}^n$.

For each $(u_0,u_1) \in H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ the problem (1.1)-(1.2) admits a unique mild solution $u \in \mathcal{C}([0,\infty); H^1(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{C}^1([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^n))$ provided that $0 \le \theta \le 1$ (see Carvalho-Cholewa [1]).

The total energy $E_u(t)$ associated to the solution $u(t)$ of equation (1.1) is defined by

$$E_u(t) = \frac{1}{2}\left(\|u_t(t)\|^2 + \|\nabla u(t)\|^2\right),$$

where $\|\cdot\|$ denotes the L^2-norm.

We are concerned with the total energy decay estimates of solutions to problem (1.1)-(1.2). The equation (1.1) interpolates between the weak damping case ($\theta = 0$) and the strong damping case ($\theta = 1$). In the weak damping case we have historical results due to Matsumura [5], while in the strong damping case we can cite the Ponce result [6]. Quite recently, Ikehata-Natsume [4] proved the following estimates to the total energy:

$$E_u(t) \le C(\|\nabla u_0\|^2 + \|u_1\|^2)e^{-\eta t} + C\|u_0\|_{L^1}^2(1+t)^{-\frac{n+2}{\alpha}} + \|u_1\|_{L^1}^2(1+t)^{-\frac{n}{\alpha}}, \tag{1.3}$$

where $\alpha := \max\{2-2\theta, 2\theta\}$, and $\eta > 0$ is a small constant. On the other hand, in the weak damping case $\theta = 0$ it follows from the Matsumura [5] result that

$$E_u(t) \le C(\|\nabla u_0\|^2 + \|u_1\|^2)e^{-\eta t} + C(\|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2)(1+t)^{-\frac{n+2}{2}}. \tag{1.4}$$

If we take $\theta = 0$ in (1.3), we have

$$E_u(t) \le C(\|\nabla u_0\|^2 + \|u_1\|^2)e^{-\eta t} + C\|u_0\|_{L^1}^2(1+t)^{-\frac{n+2}{2}} + \|u_1\|_{L^1}^2(1+t)^{-\frac{n}{2}}. \tag{1.5}$$

So, if we compare (1.4) with (1.5), we encounter a significant gap in the decay rates, i.e., the decay rate introduced in (1.3) can't be connected continuously at $\theta = 0$. This shows that the rate of decay of (1.3) seems not to be optimal

*Dept. of Mathematics , UFSC, SC, Brazil, cleverson.luz@ufsc.br
†Hiroshima University, Japan, ikehatar@hiroshima-u.ac.jp
‡Dept. of Mathematics , UFSC, SC, Brazil, ruy.charao@ufsc.br

at least in the case when $\theta \in [0, 1/2]$. This is our motivation to re-study decay rates of the total energy. Our new method is relied on the energy method in the Fourier space (which has its origin in Umeda-Kawashima-Shizuta [7]) combined with the Haraux-Komornik inequality and the property of $\mathbb{R}^n$ that power singularities less than n are integrable around the origin. This combination seems new. We can also apply the method to the other systems which include the plate equation (see [3]) and the system of elastic waves and, in particular, it seems to be quite effective in case of frictional dissipation, i.e., when $\theta = 0$.

2 Mathematical Results

Our main result is given by the following theorem which shows explicit decay rates for the total energy depending on the power θ of the fractional damping and the dimension n.

Theorem 2.1. *Let $n \geq 1$ and $0 \leq \theta \leq 1$. If $[u_0, u_1] \in (H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)) \times (L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n))$, then there exists a constant $C > 0$ and a constant $C_\beta > 0$ depending on β, such that the total energy associated to the solution $u(t, x)$ of (1.1)-(1.2) satisfies*

$$E_u(t) \leq C_\beta \big\{ \|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2 \big\}\, t^{-1/\beta} + C \big\{ \|\nabla u_0\|^2 + \|u_1\|^2 \big\}\, e^{-t/4}, \qquad \forall\ t \geq T_0$$

where β is any positive fixed number satisfying $\beta > \frac{\alpha}{n - 2\theta + \alpha}$ with $\alpha = max\{2 - 2\theta, 2\theta\}$, and T_0 is a constant depending on the initial data.

Theorem 2.2. *We assume the hypotheses in the Theorem 2.1. Let $n \geq 3$, then there exists a constant $C_\beta > 0$ depending on β, such that the solution $u(t, x)$ of (1.1)-(1.2) satisfies*

$$\|u(t)\|^2 \leq C_\beta \left\{ \|u_0\|_{L^1}^2 + \|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_0\|^2 + \|u_1\|^2 \right\}\, t^{-1/\beta}, \qquad \forall\ t \geq T_0$$

where T_0 is a constant depending on the initial data and β is any positive fixed number satisfying

$$\beta > \begin{cases} \dfrac{2 - 2\theta}{n - 4\theta}, & if\ \ 0 \leq \theta \leq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2\theta}{n - 2}, & if\ \ \dfrac{1}{2} \leq \theta \leq 1. \end{cases}$$

References

[1] CARVALHO, A. N. AND CHOLEWA, J. W. - Local well posedness for strongly damped wave equations with critical nonlinearities. *Bull. Austral. Math. Soc.*, **3**, 443-463, 2002.

[2] CHARÃO, R. C., DA LUZ, C. R. AND IKEHATA, R. - Sharp decay rates for wave equations with a fractional damping via new method in the Fourier space. *J. Math. Anal. Appl.*, **408**, 247–255, 2013.

[3] CHARÃO, R. C., DA LUZ, C. R. AND IKEHATA, R. - New decay rates for a problem of plate dynamics with fractional damping. *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, **10**, 1–13, 2013.

[4] IKEHATA, R. AND NATSUME, M. - Energy decay estimates for wave equations with a fractional damping. *Differential Integral Equations*, **25**, 939-956, 2012.

[5] MATSUMURA, A. - On the asymptotic behavior of solutions of semi-linear wave equations. *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ.*, **12**, 169-189, 1976.

[6] PONCE, G. - Global existence of small solutions to a class of nonlinear evolution equations. *Nonlinear Anal.*, **9**, 399-418, 1985.

[7] UMEDA, T., KAWASHIMA, S. AND SHIZUTA, Y. - On the decay of solutions to the linearized equations of electro-magneto-fluid dynamics. *Japan J. Appl. Math.*, **1**, 435-457, 1984.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

Distances between operator spaces

Cristina Radu * & Seán Dineen †

The Banach Mazur distance between operator spaces was studied by Zhang [5] and Pisier [3]. We introduce new tecniques which we use to prove more general results [1], [4].

1 Introduction

An operator space is a closed subspace of the non-commutative C^* algebra

$$B(H) = \{T : H \to H |\ T \textit{ bounded linear operator, } H \textit{ a Hilbert space}\}.$$

Being a C^*-algebra, $B(H)$ has a unique norm which for each n induces a norm on $M_n(E)$ in the following way:

$$M_n(E) \subset M_n(B(H)) \simeq B(H \oplus \ldots \oplus H)$$
$$[a_{ij}]_{i,j=1}^n \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum a_{1j}h_j \\ \vdots \\ \sum a_{nj}h_j \end{bmatrix}$$

There are n terms in the product $H \oplus \ldots \oplus H$. For each n, the C^*-algebra $B(H \oplus \ldots \oplus H)$ induces a unique norm on $M_n(E)$. Therefore, for each n, $(M_n(E), \|\cdot\|_n)$ is a Banach space. If $E \subset B(H)$, the operator space structure on E is given by the sequece of norms $\{\|\cdot\|_n\}_n$ induced by $B(H \oplus \ldots \oplus H)$ on $M_n(E)$ for each n.

The morpshisms which keep track of the information about the matrix norm stuctures of operator spaces are the completely bounded maps. Let E and F be operator spaces and $u : E \to F$ a linear map. For each n, we define

$$u_n : M_n(E) \to M_n(F)$$
$$u_n([x_{ij}]) = [u(x_{ij})]$$
$$\|u\|_{cb} := \lim_{n\to\infty} \|u_n\|.$$

If $\|u\|_{cb} < \infty$ we say u is completely bounded. An operator space E is homogeneous if for any $u : E \to E$ we have $\|u\|_{cb} = \|u\|$. If E, F are operator spaces we define the Banach Mazur distance

$$d_{cb}(E, F) = \inf\{\|u\|_{cb}\|u^{-1}\|_{cb} \mid u : E \to F \textit{ complete isomorphism}\}$$

where $\|u\|_{cb}$ is the completely bounded norm of the operator $u : E \to F$.

The space l_2^n becomes and operator space in two different ways. The row operator space, R_n, and the column operator space, C_n, can be viewed as the first row and the first column in the space of square matrices M_n with the operator space structure inherited from $B(l_2^n, l_2^n)$. As Banach spaces R_n and C_n are identical but as operator spaces they are different, in fact $\overline{R_n^*} = C_n$.

A pair of operator spaces E and F are called compatible if they can be continuously injected into the same topological vector space. This allows one to define a continuum of operator spaces, $(E, F)_\theta$, $\theta \in [0, 1]$, that interpolate between E and F. For example we interpolate between $R := R_n$ and $C := C_n$ to get $R_\theta = (R, C)_\theta$, $0 \le \theta \le 1$. The spaces R, C and R_θ are homogeneous Hilbertian operator spaces. We give other examples of such spaces ($R \cap C$, $R + C$, $\min(\ell_2^n)$ $\max(\ell_2^n)$) and compute distances between them.

*Instituto de Matemática , UFRJ, RJ, Brasil, cristinar@im.ufrj.br
†University College Dublin, Ireland, e-mail: sean.dineen@ucd.ie

2 Results

Proposition 2.1. *If $0 \leq \theta \leq 1$, E is a homogeneous Hilbertian operator space of dimension n and $E_\theta = (E, \overline{E^*})_\theta$ then*

$$d_{cb}(E_\theta, R) = d_{cb}(E, R)^{1-\theta} \cdot d_{cb}(E, C)^\theta.$$

Proposition 2.2. *If $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ then*

$$n^{|\beta-\alpha|} = d_{cb}(R_\alpha, R_\beta).$$

Proposition 2.3. *If $0 \leq \theta \leq 1$ then*

$$d_{cb}(R_\theta, R \cap C) = d_{cb}(R_\theta, R + C) = n^{\left(1+|2\theta-1|\right)/4}.$$

Proposition 2.4. *There exists a positive constant A such that for ech n and $\theta \in [0,1]$ we have*

$$A\sqrt{n} \leq d_{cb}(\min(\ell_2^n), R_\theta) \leq \sqrt{n}$$

e

$$A\sqrt{n} \leq d_{cb}(\max(\ell_2^n), R_\theta) \leq \sqrt{n}.$$

References

[1] Dineen S., Radu C., Distances between operator spaces, submitted

[2] Pisier G.., The Operator Space OH, Complex Interpolation and Tensor Norms, Memoirs of the AMS, Vol. 122, Nr. 585, 1996.

[3] Pisier G., Introduction to Operator Space Theory, London Math. Soc. Lecture Note Series, 294, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[4] Radu C., Geodesics between Hilbertian operator spaces, submitted

[5] Zhang C., Completely bounded Banach-Mazur distance, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 40 (1997), no. 2, 247–260.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

On the polynomial Bohnenblust–Hille inequality

Daniel Núñez Alarcón*

Abstract

Recently, in a paper published in the *Annals of Mathematics*, it was shown that the Bohnenblust–Hille inequality for (complex) homogeneous polynomials is hypercontractive. However, and to the best of our knowledge, there is no result providing (nontrivial) lower bounds for the optimal constants for n-homogeneous polynomials ($n > 2$). In this work we provide lower bounds for these famous constants.

1 Introduction

The Bohnenblust–Hille inequality for complex homogeneous polynomials ([2], 1931) asserts that there is a function $D : \mathbb{N} \to [1, \infty)$ such that for every m-homogeneous polynomial P on $\mathbb{C}^N$, the $\ell_{\frac{2m}{m+1}}$-norm of the set of coefficients of P is bounded above by $D(m)$ times the supremum norm of P on the unit polydisc. In ([4], 2011) it was proved that

$$D(m) \leq \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m-1} \sqrt{m} \left(\sqrt{2}\right)^{m-1}$$

which yields the hypercontractivity of the inequality.

The last few years experienced the rising of several works dedicated to estimating the Bohnenblust–Hille constants ([3, 4, 5, 7, 8]) and also unexpected connections with Quantum Information Theory appeared (see, e.g., [6]). There are in fact four cases to be investigated: polynomial (real and complex cases) and multilinear (real and complex cases). We can summarize in a sentence the main information from the recent preprints: the Bohnenblust–Hille constants are, in general, extraordinarily smaller than the first estimates predicted.

For example, now it is known that the Bohnenblust–Hille constants for the multilinear case behave in a subpolynomial way. In view of this, the investigation of lower bounds for the Bohnenblust–Hille constants seems to be an important task. The existing results for multilinear mappings and real scalars are highly nontrivial. For instance, in [5] it is shown that for multilinear mappings and real scalars one has that

$$C(m) \geq 2^{1-\frac{1}{m}}$$

and it is still open whether these estimates are sharp or not. Thus, the possibility of the boundedness of the multilinear Bohnenblust–Hille constants is open. In this work we shall show that, if $m \geq 2$, then

$$D(m) \geq \left(1 + 2^{1-m}\right)^{\frac{1}{2m}}.$$

2 Mathematical Results

To the best of our knowledge, the only nontrivial lower bound for the constants of the (complex) polynomial Bohnenblust–Hille inequality is

$$D(2) \geq 1.1066,$$

proved in [3]. The lack of known estimates for the norms of complex polynomials of higher degrees was a barrier to obtain nontrivial lower estimates for $D(m)$ with $m > 2$. Our result provides nontrivial constants:

*Departamento de Matemática , UFPB, PB, Brasil, danielnunezal@gmail.com

Theorem 2.1. *For every $m \geq 2$,*

$$D(m) \geq \left(1 + 2^{1-m}\right)^{\frac{1}{2m}} > 1.$$

Proof The theorem's proof is a application of Aron-Klimek estimates of supremum norms for quadratic polynomials ([1]), by generalizing the idea of the case $m = 2$ given in ([3]).

Acknowledgement. The author thank to professor D.M. Pellegrino by the suggestion of the problem and his important remarks.

References

[1] R. M. Aron and M. Klimek, Supremum norms for quadratic polynomials, Arch. Math. (Basel) **76** (2001), no. 1, 73–80.

[2] H.F. Bohnenblust and E. Hille, On the absolute convergence of Dirichlet series, Ann. of Math. (2) **32** (1931), 600–622.

[3] J. R. Campos, P. Jiménez-Rodríguez, G. A. Muñoz-Fernández, D. Pellegrino, J. B. Seoane-Sepúlveda, The optimal asymptotic hypercontractivity constant of the real polynomial Bohnenblust-Hille inequality is 2, arXiv:1209.4632.

[4] A. Defant, L. Frerick, J. Ortega-Cerdá, M. Ounaïes and K. Seip, The polynomial Bohnenblust–Hille inequality is hypercontractive, Ann. of Math. (2) **174** (2011), 485–497.

[5] D. Diniz, G.A. Muñoz-Fernández, D. Pellegrino and J.B. Seoane-Sepúlveda, Lower bounds for the constants in the Bohnenblust–Hille inequality: the case of real scalars, Proc. Amer. Math. Soc., in press.

[6] A. Montanaro, Some applications of hypercontractive inequalities in quantum information theory, J. Math. Phys. 53, 122206 (2012); doi: 10.1063/1.4769269.

[7] D. Núñez-Alarcón, D. Pellegrino, J. B. Seoane-Sepúlveda and D. M. Serrano-Rodríguez, There exist multilinear Bohnenblust–Hille constants $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ such that $\lim_{n\to\infty} C_{n+1} - C_n = 0$, J. Funct. Anal. **264** (2013), 429–463.

[8] D. Pellegrino and J.B. Seoane-Sepúlveda, New upper bounds for the constants in the Bohnenblust Hille inequality, J. Math. Anal. Appl. **386** (2012), 300–307.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

Absolutely γ-summing multilinear operators

Diana Marcela Serrano Rodríguez *

In this work we introduce an abstract approach to the notion of absolutely summing multilinear operators. We show that several previous results on different contexts (absolutely summability, almost summability, Cohen summability) are particular cases of our general results.

1 Introduction

A linear operator $u : E \to F$ is absolutely summing if $\sum u(x_j)$ is absolutely convergent whenever $\sum x_j$ is unconditionally convergent. The more general notion of absolutely $(p;q)$-summing operators was introduced in the 1960's by B. Mitiagin and A. Pełczyński [6] and A. Pietsch [9].

The multilinear approach to absolutely summing operators was initiated by Pietsch and followed by several authors (see [5, 8] and the references therein). The following concept was introduced by M.C. Matos ([5]):

Definition 1.1. *If $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q_1}+...+\frac{1}{q_m}$ a multilinear operator $T \in \mathcal{L}(E_1,...,E_m;F)$ is absolutely $(p;q_1,...,q_m)$-summing at the point $a=(a_1,...,a_m) \in E_1 \times ... \times E_m$ when $\left(T\left(a_1+x_j^1,...,a_m+x_j^m\right)-T(a_1,...,a_m)\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F)$ for all $\left(x_j^k\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q_k}^w(E_k)$, $k=1,...,m$.*

In this work we consider a quite general version of this concept. We work with quite arbitrary sequence spaces instead of $\ell_{q_r}^w(E_r)$ and $\ell_p(F)$. We show that various known multilinear results are particular cases of our approach.

2 Mathematical Results

Definition 2.1. *Let E be a Banach space. A sequence space in E is a vector space $\gamma(E) \subset E^{\mathbb{N}}$ with a complete norm $\|\cdot\|_{\gamma(E)}$. The following properties on $\gamma(E)$ are tacitly assumed to hold:*
(P1) $\|(x_k)_{k=1}^{\infty}\|_{\gamma(E)} = \sup_n \|(x_k)_{k=1}^{n}\|_{\gamma(E)}$.
(P2) $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\gamma(E)} = \|x_k\|_E$, for all $(x_n)_{n=1}^{\infty} = (0,...,0,x_k,0,...)$.

Definition 2.2. *Let $m \in \mathbb{N}$ and $E_1,...,E_m$,F be Banach spaces. An operator $T \in \mathcal{L}(E_1,...,E_m;F)$ is $\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}$-summing at $(a_1,...,a_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$ when*

$$\left(T\left(a_1+x_j^{(1)},...,a_m+x_j^{(m)}\right)-T(a_1,...,a_m)\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_s(F)$$

whenever $\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_r}(E_r)$, $r=1,...,m$.

We denote the space of the m-linear operators from $E_1 \times \cdots \times E_m$ to F which are $\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}$-summing at $(a_1,...,a_m)$ by $\Pi^a_{\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}}(E_1,...,E_m;F)$. It is plain that $\Pi^a_{\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}}(E_1,...,E_m;F)$ is a linear subspace of $\mathcal{L}(E_1,...,E_m;F)$. When $a=(0,...,0)$ we write $\Pi_{\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}}(E_1,...,E_m;F)$ and when T is $\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}$-summing at all $(a_1,...,a_m)$ we write $\Pi^{ev}_{\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}}(E_1,...,E_m;F)$.

Proposition 2.1. *$T \in \Pi_{\gamma_{(s;s_1,...,s_m)}}(E_1,...,E_m;F)$ if and only if there exists a constant $C>0$, such that*

$$\left\|\left(T\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(m)}\right)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_s(F)} \leq C\prod_{r=1}^{m}\left\|\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\gamma_{s_r}(E_r)}$$

*Departamento de Matemática , UFPB, PB, Brasil, dmserrano0@gmail.com

for all $\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_r}(E_r)$, $r = 1, ..., m$. *Moreover, the smallest* C *such that (2.1) is satisfied, denoted by* $\pi(\cdot)$, *defines a norm on* $\Pi_{\gamma(s;s_1,...,s_m)}(E_1, ..., E_m; F)$.

Theorem 2.1. *For* $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_m; F)$, *the following statements are equivalent*:

(*i*) $T \in \Pi^{ev}_{\gamma(s;s_1,...,s_m)}(E_1, ..., E_m; F)$;

(*ii*) *There is a constant* $C > 0$ *such that*

$$\left\| \left(T\left(b_1 + x_j^{(1)}, ..., b_m + x_j^{(m)}\right) - T(b_1, ..., b_m) \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_s(F)}$$
$$\leq C \left(\|b_1\| + \left\| \left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_{s_1}(E_1)} \right) \cdots \left(\|b_m\| + \left\| \left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\gamma_{s_m}(E_m)} \right),$$

for all $(b_1, ..., b_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$ *and* $\left(x_j^{(r)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \gamma_{s_r}(E_r), r = 1, ..., m$.

In addition, the smallest of the constants C satisfying the above inequality, denoted by $\pi^{ev}(\cdot)$, defines a norm on $\Pi^{ev}_{\gamma(s;s_1,...,s_m)}(E_1, ..., E_m; F)$. Moreover $\left(\Pi^{ev}_{\gamma(s;s_1,...,s_m)}(E_1, ..., E_m; F), \pi^{ev}\right)$ is a Banach space, and considering the notion of ideals of multilinear mappings in the sense of [4], $\left(\Pi^{ev}_{\gamma(s;s_1,...,s_m)}(E_1, ..., E_m; F), \pi^{ev}\right)$ is a Banach ideal of m-linear mappings.

Remark 2.1. *The above results recover the following particular cases:*

Absolutely summing multilinear operators. *See [1, Theorem 4.1] and [2, Proposition 9.4].*

Almost summing multilinear operators*. See [7, Theorem 3.7 and Theorem 4.4].*

Cohen strongly summing multilinear operators. *See [3, Proposition 6.1.10 and Proposition 6.2].*

Acknowledgement. The author thank to professor D.M. Pellegrino by the suggestion of the problem and his important remarks.

References

[1] J.A. Barbosa, G. Botelho, D. Diniz, D. Pellegrino, *Spaces of absolutely polynomials*. Math. Scand. **101** (2007), 219–237.

[2] G. Botelho, H.-A. Braunss, H. Junek, D. Pellegrino, *Holomorphy types and ideals of multilinear mappings*. Studia Math. **177** (1) (2006), 43–65.

[3] J.R. Campos, *Contribuições à teoria dos operadores Cohen fortemente somantes*. PhD Thesis, Universidade Federal da Paraíba. (2013).

[4] K. Floret, D. García, *On ideals of polynomials and multilinear mappings between Banach spaces*. Arch. Math. (Basel) **81** (2003), 300–308.

[5] M.C. Matos, *Nonlinear absolutely summing mappings*. Math. Nachr. **258** (2003), 71–89.

[6] B. Mitiagin, A. Pełczyński, *Nuclear operators and approximative dimension.* Proc. of ICM, Moscow. (1966), 366–372.

[7] D. Pellegrino, J. Ribeiro, *On almost summing polynomials and multilinear mappings*. Linear and Multilinear Algebra. **60**, No. 4, (2012), 397–413.

[8] D. Pérez-García, *Operadores multilineales absolutamente sumantes*. PhD Thesis, Univ. Complut. de Madrid, (2003).

[9] A. Pietsch, *Absolut p-summierende Abbildungen in normieten Raumen*. Studia Math. **27** (1967), 333–353.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

EQUAÇÕES LINEARES EM ESPAÇOS LINEARMENTE TOPOLOGIZADOS

DINAMÉRICO P. POMBO JR. *

1 Introdução

Como Dieudonné mencionou em seu artigo fundamental [3], uma das principais motivações para o estudo da dualidade em espaços localmente convexos é a discussão da solubilidade de equações da forma $u(x) = y_0$, onde u é uma aplicação linear fracamente contínua. Nesta nota anunciamos uma versão de um teorema obtido no artigo citado, válida no contexto dos espaços linearmente topologizados.

2 O resultado

Seja $\mathbb{K}$ um anel de divisão discreto arbitrário. Uma topologia τ em um espaço vetorial à esquerda (respectivamente à direita) E sobre $\mathbb{K}$ é *linear*, e (E, τ) é um *espaço linearmente topologizado* à esquerda (respectivamente à direita) sobre $\mathbb{K}$ [4], se τ é uma topologia de Hausdorff invariante por translação e a origem de E admite um sistema fundamental de τ-vizinhanças formado por subespaços vetoriais de E; neste caso, (E, τ) é um espaço vetorial topológico à esquerda (respectivamente à direita) sobre $\mathbb{K}$.

Sejam E um espaço vetorial à esquerda sobre $\mathbb{K}$ e E_1 um espaço vetorial à direita sobre $\mathbb{K}$. Uma aplicação $B\colon E \times E_1 \to \mathbb{K}$ é uma *forma* $\mathbb{K}$-*bilinear* em $E \times E_1$ se as seguintes condições são satisfeitas para quaisquer $x, y \in E$, $x_1, y_1 \in E_1$ e $\lambda \in \mathbb{K}$: $B(x+y, x_1) = B(x, x_1)+B(y, x_1)$; $B(\lambda x, x_1) = \lambda B(x, x_1)$; $B(x, x_1+y_1) = B(x, x_1)+B(x, y_1)$; $B(x, x_1\lambda) = B(x, x_1)\lambda$. (E, E_1) é um *sistema dual* relativamente a B [2] se B é uma forma $\mathbb{K}$-bilinear em $E \times E_1$ satisfazendo as seguintes condições: para $x \in E$, a relação $B(x, x_1) = 0$ para todo $x_1 \in E_1$ implica $x = 0$; para $x_1 \in E_1$, a relação $B(x, x_1) = 0$ para todo $x \in E$ implica $x_1 = 0$. Se E é um espaço vetorial à esquerda sobre $\mathbb{K}$ e E^* é o espaço vetorial à direita sobre $\mathbb{K}$ das formas $\mathbb{K}$-lineares em E, (E, E^*) é um sistema dual relativamente à forma $\mathbb{K}$-bilinear $B(x, \varphi) = \varphi(x)$ em $E \times E^*$. Se E é um espaço linearmente topologizado à esquerda sobre $\mathbb{K}$ e E' é o espaço vetorial à direita sobre $\mathbb{K}$ das formas $\mathbb{K}$-lineares contínuas em E, (E, E') é um sistema dual relativamente à forma $\mathbb{K}$-bilinear $B(x, \varphi) = \varphi(x)$ em $E \times E'$.

Seja (E, E_1) um sistema dual relativamente a B. *A topologia fraca* $\sigma(E, E_1)$ em E (respectivamente $\sigma(E_1, E)$ em E_1) é a topologia menos fina que torna as formas $\mathbb{K}$-lineares $x \in E \mapsto B(x, x_1) \in \mathbb{K}$ contínuas, para x_1 variando em E_1 (respectivamente $x_1 \in E_1 \mapsto B(x, x_1) \in \mathbb{K}$ contínuas, para x variando em E); $\sigma(E, E_1)$ e $\sigma(E_1, E)$ são lineares. Se (F, F_1) é um sistema dual relativamente a C e $u\colon E \to F$ é uma aplicação $\mathbb{K}$-linear $\sigma(E, E_1) - \sigma(F, F_1)$-contínua, existe uma única aplicação $\mathbb{K}$-linear $v\colon F_1 \to E_1$ tal que, para quaisquer $x \in E$ e $y_1 \in F_1$, tem-se

$$C\big(u(x), y_1\big) = B\big(x, v(y_1)\big);$$

v é dita a *transposta* de u e denotada por u^t.

Seja (E, E_1) um sistema dual relativamente a B. O *perpendicular* de um subconjunto não vazio X de E é o subespaço vetorial

$$X^{\perp} = \big\{x_1 \in E_1\,;\, B(x, x_1) = 0 \,\text{para todo}\, x \in X\big\}$$

*Instituto de Matemática , UFRJ, RJ, Brasil, dpombo@terra.com.br

de E_1 ; analogamente, define-se o perpendicular de um subconjunto não vazio de E_1 .

Podemos então enunciar o resultado prometido, do qual resulta um fato conhecido de Álgebra Linear ([1], §2, nº 8):

Teorema 2.1. *Sejam (E, E_1) e (F, F_1) dois sistemas duais, $u: E \to F$ uma aplicação $\mathbb{K}$-linear $\sigma(E, E_1) - \sigma(F, F_1)$-contínua cuja imagem é $\sigma(F, F_1)$-fechada e $y_0 \in F$. Para que a equação $u(x) = y_0$ admita pelo menos uma solução em E, é necessário e suficiente que $y_0 \in \big(\mathrm{Ker}(u^t)\big)^{\perp}$.*

Referências

[1] BOURBAKI, N. - *Algèbre*, Chapitre 2, Troisième édition, Actualités Scientifiques et Industrielles 1236, Hermann, 1967.

[2] DIEUDONNÉ, J. - Sur le socle d'un anneau et les anneaux simples infinis, *Bull. Soc. Math. France* **70**, 46-75, 1942.

[3] DIEUDONNÉ, J. - La dualité dans les espaces vectoriels topologiques, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **59**, 107-139, 1942.

[4] LEFSCHETZ, S. - *Algebraic Topology*, American Mathematical Society Colloquium Publications XXVII, 1942.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

SHARP ESTIMATES FOR EIGENVALUES OF DOT PRODUCT KERNELS ON THE SPHERE

DOUGLAS AZEVEDO* & VALDIR A. MENEGATTO †

We obtain an explicit formula to compute the eigenvalues of integral operators generated by continuous dot product kernels defined on the sphere. It depends upon certain numerical series involving the usual gamma function. Using the formula, we describe a procedure to deduce sharp bounds for the eigenvalues and their asymptotic behavior near 0. We illustrate our results with an application involving a Gaussian kernel.

1 Introduction

Let S^m $(m \geq 2)$ be the unit sphere in $\mathbb{R}^{m+1}$ endowed with its induced Lebesgue measure σ_m and write $L^2(S^m) := L^2(S^m, \sigma_m)$. This work is aligned with [2], but here we will deal with compact integral operators $\mathcal{K} : L^2(S^m) \to L^2(S^m)$ of the form

$$\mathcal{K}(f)(x) = \int_{S^m} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x \cdot y)^n \right) f(y)\, d\sigma_m(y), \quad x \in S^m, \quad f \in L^2(S^m), \tag{1.1}$$

in which $\{b_n\}$ is an absolutely summable sequence of complex numbers. The symbol $\cdot$ stands for the usual inner product of $\mathbb{R}^{m+1}$. Kernels of the form

$$K(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x \cdot y)^n, \quad x, y \in S^m,$$

with $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$, are called *dot product kernels* on S^m. They are bi-zonal in the sense that

$$K(x, y) = K'(x \cdot y), \quad x, y \in S^m,$$

for some convenient function $K' : [0, 1] \to \mathbb{C}$. An eminent example in this category is the Gaussian kernel

$$\exp(-d\|x - y\|^2) = e^{-2d} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2d)^n}{n!} (x \cdot y)^n, \quad x, y \in S^m, \quad d > 0,$$

a common entity in many branches of mathematics.

2 Mathematical Results

The focus in the present work is to deduce sharp bounds for the eigenvalues of the integral operator (1.1). If we write

$$\{Y_{k,j}; k = 0, 1, 2, ...; \ j = 1, ..., N(k, m)\},$$

to denote the $L^2(S^m, \sigma_m)$-orthonomal basis of $\mathcal{H}_k^{m+1}$, the space of all spherical harmonics of degree k in $m + 1$ variables with respect to the inner product of $L^2(S^m, \sigma_m)$, the eigenvalues can be computed as described in the theorem below.

*Departamento de Economia, UFJF-GV, MG, Brasil, douglas.azevedo@ufjf.edu.br
†ICMC-USP, SP, Brasil, menegatt@icmc.usp.br

Theorem 2.1. *Let $\mathcal{K}$ be as in (1.1). Then each $Y_{k,j}$ is an eigenfunction of $\mathcal{K}$ with associated eigenvalues given by the formula*

$$\lambda_k(\mathcal{K}) = \frac{\sigma_{m-1}\Gamma(m/2)}{2^{k+1}} \sum_{s=0}^{\infty} b_{2s+k} \frac{(2s+k)!}{(2s)!} \frac{\Gamma\left(s+1/2\right)}{\Gamma\left(s+k+(m+1)/2\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

To proceed, we introduce notation. For sequences of positive real numbers $\{a_n\}$ and $\{c_n\}$, we write $a_n = O(c_n)$ as $n \to \infty$, to indicate that $\{a_n c_n^{-1}\}$ is bounded. On the other hand, $a_n \asymp c_n$, as $n \to \infty$, will mean that $a_n = O(c_n)$ and $c_n = O(a_n)$, as $n \to \infty$.

Corollary 2.1. *Let $\mathcal{K}$ be as in (1.1). Assume $\{b_n\}$ is a sequence of nonnegative numbers. If $2b_{n+1} \leq b_n$, $n = 0, 1, \ldots$, then $\{\lambda_k(\mathcal{K})\}$ decreases to 0.*

Corollary 2.2. *Let $\mathcal{K}$ be as in (1.1). If $\{b_k\}$ is a sequence of nonnegative numbers, then there exists a positive constant C, depending upon m only, so that*

$$\lambda_k(\mathcal{K}) \geq C \frac{b_k}{2^{k+1}} \frac{k!}{\Gamma(k+(m+1)/2)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Next, suppose the sequence $\{b_n\}$ is such that

$$\frac{|b_n|}{|b_{n-1}|} = O(n^{-\delta}), \quad (n \to \infty), \tag{2.2}$$

for some $\delta > 1/2$.

Proposition 2.1. *Let $\mathcal{K}$ be as in (1.1). If (2.2) holds, then*

$$|\lambda_k(\mathcal{K})| \leq \sigma_{m-1} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(m/2)}{\Gamma(k+(m+1)/2)} \frac{k!}{2^{k+1}} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\gamma^{2s}}{4^{\delta s}(s!)^{2\delta}} \right) |b_k|, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

The main result of this work reads like this ([1]).

Theorem 2.2. *Let $\mathcal{K}$ be as in (1.1). If $\{b_n\}$ is a sequence of nonnegative numbers for which (2.2) holds, then*

$$\lambda_k(\mathcal{K}) \asymp \frac{b_k}{2^{k+1} k^{(m-1)/2}}, \quad (k \to \infty).$$

As an application, let us look at the eigenvalues of the integral operator generated by the Gaussian kernel previously introduced. If $r \in (0, \infty)$ is fixed and

$$K(x,y) = e^{r/2} \exp\left(-\frac{||x-y||^2}{r} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n! r^n} (x \cdot y)^n, \quad x, y \in S^m,$$

then by Theorem 2.2

$$\lambda_k(\mathcal{K}) \asymp \frac{(e/r)^k}{k^{k+m/2}}, \quad (k \to \infty).$$

This behavior agrees with results previously derived in [3].

References

[1] AZEVEDO, D.; MENEGATTO, V. A, *Sharp estimates for eigenvalues of integral operators generated by dot product kernels on the sphere*. Preprint.

[2] AZEVEDO, D.; MENEGATTO, V. A, *Eigenvalue decay of integral operators generated by power series-like kernels. Math. Inequal. Appl.*, in press.

[3] MINH, HA QUANG; NIYOGI, P.; YAO, YUAN, *Mercer's theorem, feature maps, and smoothing*. In: Proceedings of 19th Annual Conference on Learning Theory, Pittsburg, June 2006. Springer, Berlin.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

Comportamento Assintótico via Método de Nakao de um Sistema Acoplado de Equações Diferenciais Parciais Fracamente Amortecido

Ducival C. Pereira [*] Mauro de L.Santos [†] Renato Fabrício C. Lobato [‡]

Nas últimas décadas, utilizou-se os mais variados tipos de equações como modelos matemáticos, que descrevem sistemas: físicos, químicos, biológicos e de engenharia. Entre tais modelos, os de vibração em estruturas flexíveis, foram consideravelmente estimulados por um número crescente de questões de interesse público. Pesquisas estão focadas na estabilização de modelos dinâmicos individuais, tais como: cordas, membranas e vigas.

1 Introdução

No que se segue, será feita a Existência e Unicidade de Solução Global Fraca, bem como o Decaimento Exponencial para o Sistema Evolutivo de Equações Diferenciais Degenerado de Vigas com Amortecimento Fraco (abaixo), cujo acoplamento ocorre na Não-Linearidade.

$$K_1(x,t)u_{tt} + \Delta^2 u - M(\|u\|^2 + \|v\|^2)\Delta u + u_t = 0 \quad \text{em} \quad Q = \Omega \times (0,T), \tag{1.1}$$

$$K_2(x,t)v_{tt} + \Delta^2 v - M(\|u\|^2 + \|v\|^2)\Delta v + v_t = 0 \quad \text{em} \quad Q = \Omega \times (0,T), \tag{1.2}$$

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0, v_0), \quad (v_t(x,0), v_t(x,0)) = (u_1, v_1) \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{1.3}$$

$$u = v = \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma \times]0, \infty[, \tag{1.4}$$

2 Hipóteses

$\mathcal{H}_1)$ $K_i \in C^1([0,T]; H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$, com $K_i(x,t) \geq 0$, $\forall \quad (x,t)$ em $\Omega \times (0,T)$, $i = 1,2$. Existe $\gamma > 0$, tal que $K_i(x,0) \geq \gamma > 0$, $i = 1,2$.

$\mathcal{H}_2)$ $\left|\dfrac{\partial K_i}{\partial t}\right|_{\mathbb{R}} \leq \delta + C(\delta)K_i$, $i = 1,2$, para todo $\delta > 0$.

$\mathcal{H}_3)$ $M \in C^1([0,\infty[)$, com $M(\lambda) \geq -\beta$, para todo $\lambda \geq 0$; $0 < \beta < \lambda_1$, sendo λ_1 o primeiro autovalor associado ao problema estacionário: $\Delta^2 w - \lambda(-\Delta w) = 0$.

3 Teorema de Existência e Unicidade

Nas hipóteses $\mathcal{H}_1$ - $\mathcal{H}_3$, se $(u_0, v_0) \in (H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega))^2$ e $(u_1, v_1) \in (H_0^2(\Omega))^2$, então existe um único par de funções $(u,v) : [0,T] \longrightarrow L^2(\Omega)$ solução de (1.1)-(1.4) tais que:

$$(u,v) \in \left[L^\infty_{loc}(0,\infty; H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega))\right]^2, \quad (u_t, v_t) \in \left[L^\infty_{loc}(0,\infty; H_0^2(\Omega))\right]^2 \quad \text{e} \quad (u_{tt}, v_{tt}) \in \left[L^2_{loc}(0,\infty; L^2(\Omega))\right]^2$$

[*]Universidade do Estado do Pará, ducival@oi.com.br
[†]Universidade Federal do Pará e-mail: ls@ufpa.br
[‡]Universidade Federal do Pará e-mail: renatolobato@ufpa.br

4 Comportamento Assintótico

Sejam $(u_0, v_0) \in (H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega))^2$ e $(u_1, v_1) \in (H_0^2(\Omega))^2$, K_i $i = 1, 2$ e M na hipóteses do Teorema de Existência e Unicidade, então a solução (u, v) do problema (1.1)-(1.4), satisfaz:

$$\left|K_1^{1/2} u_t(t)\right|^2 + \left|K_2^{1/2} v_t(t)\right|^2 + |\Delta u_t(t)|^2 + |\Delta v_t(t)|^2 + \int_t^{t+1} (|u_t(s)|^2 + |v_t(s)|^2) ds \leq \alpha_1 e^{-\alpha_2 t} \tag{4.1}$$

para todo $t \geq 1$, onde α_1 e α_2 são constantes positivas.

Referências

[1] D. Burgreen, "Free vibrations of a pin-ended column with constant distance between pin ends,"Journal of Applied Mechanics, vol. 18, pp. 135-139, 1951.

[2] D. C. Pereira, "Existence, uniqueness and asymptotic behavior for solutions of the nonlinear beam equation,"Nonlinear Analysis, vol. 14, no. 8, pp. 613-623, 1990.

[3] D.C. Pereira, R.F.C. Lobato, and C.A. Raposo, "Energy decay to an abstract coupled system of extensible beams models,"Applied Mathematics & Information Sciences, vol. 6 No 3, pp 447-452 (2012).

[4] D. C. Pereira, S. D. B. Menezes, J. Ferreira, and E. A. Oliveira, "Existence, uniqueness and uniform decay for the nonlinear beam degenerate equation with weak damping,"Applied Mathematics and Computation, vol. 154, no. 2, pp. 555-565, 2004.

[5] G. P. Menzala, "On classical solutions of a quasilinear hyperbolic equation,"Nonlinear Analysis, vol. 3, no. 5, pp. 613-627, 1978.

[6] J. G. Eisley, "Nonlinear vibration of beams and rectangular plates,"Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, vol.15, pp. 167-175, 1964.

[7] J. M. Ball, "Initial-boundary value problems for an extensible beam,"Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 42, pp. 61-90, 1973.

[8] L. A. Medeiros, "On a new class of nonlinear wave equations,"Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 69, no. 1, pp. 252-262, 1979.

[9] M. Nakao, "Decay of solutions of some nonlinear evolution equations,"Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 60, no. 2, pp. 542-549, 1977.

[10] O. C. Ramos, "Regularity property for the nonlinear beam operator,"Anais da Academia Brasileira de Ciências, vol. 61, no. 1, pp. 15-25, 1989.

[11] R.F.C. Lobato, D.C. Pereira and M.L. Santos, "Exponential Decay to the Degenerate Nonlinear Coupled Beams System with Weak Damping,"Mathematical Physics, doi:10.5402/2012/659289

[12] R.F.C. Lobato, Dissertação de Mestrado, "Solvabilidade e Decaimento Exponencial para Um Sistema de Equações Diferenciais Parciais Não-Linear com Acoplamento na Fonte", 2006.

[13] R. W. Dickey, "Free vibrations and dynamic buckling of the extensible beam,"Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 29, pp. 443-454, 1970.

[14] S. G. Miklin, Variational Methods in Mathematical Physics, Pergamon Press, Oxford, 1964.

[15] S.Woinowsky-Krieger, "The effect of an axial force on the vibration of hinged bars,"Journal of Applied Mechanics, vol. 17, pp. 35-36, 1950.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

POSITIVE SOLUTION FOR A CLASS OF (p, q)-LAPLACIAN NONLINEAR SYSTEMS

Eder Marinho Martins * & Wenderson Marques Ferreira †

In this work, we prove the existence of a nontrivial nonnegative solution for the elliptic system

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \omega(x) f(v) & \text{in } \Omega, \\ -\Delta_q v &= \rho(x) g(u) & \text{in } \Omega, \\ (u, v) &= (0, 0) & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

where Δ_p denotes the p-Laplacian operator, $p, q > 1$ and Ω denotes a smooth bounded domain in R^N $(N \geq 2)$. The *weight* functions ω and ρ are continuous, nonnegative and not identically null in Ω and the non-linearities f and g are continuous and satisfy simple hypotheses of *local* behavior, without envolving monotonicity hypotheses or conditions at ∞. We apply Fixed Point Theorem in Cone to obtain our result.

1 Introduction

Coupled systems involving quasilinear operators as the p-Laplacian have been studied for researchers of partial differential equations. In this paper we prove the existence of a nontrivial nonnegative solution for the elliptic system

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \omega(x) f(v) & \text{in } \Omega, \\ -\Delta_q v &= \rho(x) g(u) & \text{in } \Omega, \\ (u, v) &= (0, 0) & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

where Δ_p denotes the p-Laplacian operator defined by $\Delta_p u := \text{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$, $p, q > 1$ and Ω denotes a smooth bounded domain in R^N $(N \geq 2)$. (In other words, we will prove the existence of a pair $(u, v) \in C^{1,\alpha}(\Omega) \times C^{1,\alpha}(\Omega)$ such that (u, v) satisfies (1.1), with $u \not\equiv 0$ and $v \not\equiv 0$ in Ω). The *weight* functions $\omega, \rho : \overline{\Omega} \to R$ are continuous, nonnegative and not identically null in Ω. The non-linearities $f, g : [0, \infty) \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ are continuous, $g \not\equiv 0$ in $[0, \varepsilon)$ for some $\varepsilon > 0$ and both satisfy simple hypotheses of *local* behavior.

We suppose that the nonlinearity f is superlinear at origem and f, g are allowed to be sub or superlinear at ∞. Moreover, there is no monotonicity hypotheses on these nonlinearities. We suppose the existence of positive constants $0 < \delta < M$ such that

(H1) $0 \leq f(v) \leq k_1 M^{p-1}$, $0 \leq g(u) \leq k_1 M^{q-1}$ if $0 \leq u, v \leq M$,

(H2) $f(v) \geq k_2 v^{p-1}$ if $0 \leq v \leq \delta$,

where the constants k_1 and k_2 depend only on ω, ρ and Ω. These constants will be defined later on in this paper and, as proved in [1], $k_1 < \lambda_p < k_2$, where λ_p is the first eigenvalue of the p-Laplacian operator.

We also consider examples of coupled systems for which is possible to apply our main theorem to guarantee the existence of at least one positive solution.

*DEMAT, UFOP, MG, Brasil, eder@iceb.ufop.br
†DEMAT, UFOP, MG, Brasil, e-mail: wmf@iceb.ufop.br

2 Mathematical Results

Theorem 2.1. *If (H1) and (H2) are valid the problem (1.1) has at least one nontrivial, nonnegative solution. Moreover, if (u, v) is such a solution for (1.1), then*

$$\delta \leq \|(u,v)\|_\infty = \max\{\|u\|_\infty, \|v\|_\infty\} \leq M.$$

Proof Our strategy is: at first, we show an existence result for the radial case when $\Omega = B_1 := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = 1\}$, applying a Fixed Point Theorem in a cone (see, for example, [3] or [4]). Afterwards, we utilize this result to prove our main existence result for (1.1), when $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded smooth domain. In this case, we do a symmetrization of *weigh* functions and combine the comparison principle with a new application of a Fixed Point Theorem. □

References

[1] BUENO, H. ERCOLE, G. AND ZUMPANO, A. - Positive Solutions for the p-Laplacian and Bounds for its First Eigevalue. *Advanced Nonlinear Studies*, **9**, 313-338, 2009.

[2] BUENO, H. ERCOLE, G. FERREIRA, W. AND ZUMPANO, A. - Existence and Multiplicity of Positive Solutions for the p-Laplacian with Nonlocal Coefficient. *J. Math. Anal. Appl.*, **343**, 151-158, 2008.

[3] K. DEIMILING - *Nonlinear Funcional Analysis*, Springer, Berlin, 1985.

[4] O'REGAN, D. AND WANG, H. - Positive Radial Solutions for p-Laplacian systems. *Aequationes Mathematicae*, **75**, 43-50, 2008.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

Quasiperiodic Collision Solutions in the Spatial Isosceles Three-Body Problem with Rotating Axis of Symmetry

Eder Mateus [*], Andrea Venturelli [†] & Claudio Vidal [‡]

1 Introduction

In this work we prove the existence of a one parameter family of collision solutions for the system called *spatial isosceles three body problem with rotating axis of symmetry*. In this problem, at all time one body is in a fixed plane, and two bodies with equal masses are symmetric with respect to the same plane. If initial velocities are chosen symmetrically, the symmetry of the configuration is preserved. Note that solutions of this isosceles problem are in fact solutions of the general three body problem. In order to describe the result, let $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ denotes the position of the three body system in a three dimension euclidean space, with respective masses $m_1 = m_2 = m$ and $m_3 = \mu$. Introducing a cartesian coordinate system (x, y, z) in the euclidean space, such that $\mathbf{q}_1$ and $\mathbf{q}_2$ are symmetric with respect to the plane $z = 0$, the body $\mathbf{q}_3$ is on the same plane $z = 0$ and the center of mass is at the origin the coordinates of each body can be written

$$\mathbf{q}_1 = (x, y, z), \quad \mathbf{q}_2 = (x, y, -z), \quad \mathbf{q}_3 = (-\frac{2m}{\mu}x, -\frac{2m}{\mu}y, 0). \tag{1.1}$$

Therefore the configuration is completely determined by the position of one body. The equations of motion for the first particle is given by

$$\begin{cases} \ddot{x} = & -(2m+\mu)\frac{x}{r_{13}^3} \\ \ddot{y} = & -(2m+\mu)\frac{y}{r_{13}^3} \\ \ddot{z} = & -\left(\frac{2m}{r_{12}^3} + \frac{\mu}{r_{13}^3}\right) z, \end{cases} \tag{1.2}$$

where

$$r_{12} = |\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2| = 2|z|, \quad r_{13} = |\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3| = \sqrt{\left(\frac{2m+\mu}{\mu}\right)^2 (x^2 + y^2) + z^2}. \tag{1.3}$$

Considering a re-scaling appropriate and introducing the complex variable $w = \xi + i\eta$, system (1.2) can be rewritten as

$$\begin{cases} \ddot{w} = & -(2m+\mu)\frac{w}{(k|w|^2+\zeta^2)^{3/2}} = 2\frac{\partial U}{\partial \overline{w}} \\ \ddot{\zeta} = & -\left(\frac{m}{4|\zeta|^3} + \frac{\mu}{(k|w|^2+\zeta^2)^{3/2}}\right)\zeta = \frac{\partial U}{\partial \zeta}, \end{cases} \tag{1.4}$$

where the potential U is defined by

$$U = U(w, \zeta) = \frac{m}{4|\zeta|} + \frac{\mu}{\sqrt{k|w|^2 + \zeta^2}} \tag{1.5}$$

[*]Departamento de Matemtica - DMAI , UFS, SE, Brasil, edermateus@ufs.br
[†]Laboratoire d'Analyse non linéaire et gémétrie, Université d'Avignon, Avignon, France, e-mail: andrea.venturelli@univ-avignon.fr
[‡]Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias , Universidad del Bío-Bío, Concepcin, Chile, clvidal@ubiobio.cl

2 Mathematical Results

Equations of motion (1.2) are in fact Euler-Lagrange equations for the following Lagrangian

$$L(w,\zeta,\dot{w},\dot{\zeta}) = \frac{1}{2}(|\dot{w}|^2 + \dot{\zeta}^2) + U(w,\zeta),$$

hence it is natural to search solutions of (1.2) as critical points of the *Lagrangian Action functional*, which is defined by

$$\mathcal{A} : \mathcal{C}^{ac}([0,\tau],\mathbb{C}\times\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\},$$
$$\mathcal{A}(w,\zeta) = \int_0^\tau L(w(t),\zeta(t),\dot{w}(t),\dot{\zeta}(t))dt,$$

where $\mathcal{C}^{ac}([0,\tau],\mathbb{C}\times\mathbb{R})$ is the space of absolutely continuous curve with value in $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$.
Let Ω_α denotes the space of absolutely continuous curves $(w,\zeta):[0,\tau]\to\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ satisfying the following conditions

$$w(0)\in\mathbb{R}, \quad \zeta(0)=0, \quad w(\tau)\in\mathbb{R}e^{i\alpha}, \quad \zeta(t)\geq 0.$$

Our first result concerns the existence of a minimizer.

Proposition 2.1. *Let $\alpha\in(0,2\pi)\setminus\{\pi\}$ and let $\tau>0$. The functional $\mathcal{A}|_{\Omega_\alpha}$ has a minimizer. If $t\mapsto(w,\zeta)(t)$ is such a minimizer, the unique collision occurs at time $t=0$, and for $t\in(0,\tau]$ it is a real solution of the isosceles three-body problem. The component $t\mapsto\zeta(t)$ is strictly increasing and $\dot{\zeta}(\tau)=0$, moreover $\dot{w}(\tau)$ is a real multiple of $ie^{i\alpha}$.*

Proposition 2.2. *Given $\alpha\in(0,\pi/2)$, and $\tau>0$, if $\gamma=(w,\zeta)=(re^{i\theta},\zeta)$ is a minimizer of $\mathcal{A}|_{\Omega_\alpha}$, then the angular momentum $\mathcal{C}=Im(\dot{w}\overline{w})$ does not vanish, therefore the configuration is not all the time on a fixed plane. Moreover $w(t)\neq 0$ for all $t\in[0,\tau]$, and the total variation of the polar angle θ is equal to α, that is to say $|\theta(\tau)-\theta(0)|=\alpha$.*

We can now state the main result of the paper.

Theorem 2.1. *Given $0<\alpha<\pi/2$ and $\tau>0$, there exists a collision solution of (1.4) satisfying the following conditions*

$$\begin{array}{lllllllll} w(0) & \in & \mathbb{R}_+, & w(t+2\tau) & = & e^{2i\alpha}w(t), & w(2\tau-t) & = & e^{2i\alpha}\overline{w}(t), \\ \zeta(0) & = & 0, & \zeta(t+2\tau) & = & \zeta(t), & \zeta(2\tau-t) & = & \zeta(t) \end{array} \tag{2.6}$$

Moreover the solution is not all the time in a fixed plane, and $w(t)\neq 0$ for all t. Collisions are regularized and occurs only if t is an integer multiple of 2τ. If θ denotes the argument of w, the total variation of θ from $t=0$ to $t=\tau$ is equal to α.

References

[1] ALBOUY, A. AND CHENCINER, A. - *Le probléme des n corps et les distances mutuelles,* Inventiones mathematicae, **131** , pp. 151-184, 1998

[2] GORDON, W.B - *A Minimizing Property of Keplerian Orbits*, American Journal of Math.,Vol **99**, n^0 15,961-971, 1977.

[3] FERRARIO, D.L. AND TERRACINI, S. - *On the existence of collisionless equivariant minimizers for the classical n- body problem*, Inventiones mathematicae, 2003.

[4] MATEUS, EDER; VENTURELLI, ANDREA; VIDAL, CLAUDIO -*Quasiperiodic Collision Solutions in the Spatial Isosceles Three-Body Problem with Rotating Axis of Symmetry*, Archive for Rational Mechanics and Analysis 210, no. 1, 165-176, 2013

[5] OFFIN, D. AND CABRAL, H. - Hyperbolicity for symmetric periodic orbits in the isosceles three body problem. *Discrete and Continuous Dynamical Systems S*, **2**, 2, 379-392, 2009.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

A EQUAÇÃO DE DAUGAVET PARA POLINÔMIOS EM JB*-TRIPLAS E C*-ÁLGEBRAS

ELISA R. SANTOS *

Neste trabalho estudamos a equação de Daugavet e a equação alternativa de Daugavet para polinômios em JB*-triplas e C*-algebras. Apresentamos condições necessárias e suficientes sobre tais espaços de forma que determinadas classes de polinômios satisfaçam a equação de Daugavet e a equação alternativa de Daugavet.

1 Introdução

Seja X um espaço de Banach. Dizemos que um operador linear limitado $T : X \to X$ satisfaz a *equação de Daugavet* se

$$\|\mathrm{Id} + T\| = 1 + \|T\|, \tag{DE}$$

e dizemos que T satisfaz a *equação alternativa de Daugavet* se

$$\max_{|w|=1} \|\mathrm{Id} + wT\| = 1 + \|T\|. \tag{ADE}$$

Estas definições foram apresentadas por I. K. Daugavet [3] e por J. Duncan et al. [4], respectivamente. Desde seu surgimento, a validade destas equações tem sido verificada por diversos autores para várias classes de operadores em diferentes espaços de Banach. Em particular, mencionamos os seguintes resultados de M. Martín & T. Oikhberg [6].

Teorema 1.1. *Seja U uma JB*-tripla.*

(i) Todo operador fracamente compacto em U satisfaz (DE) *se, e somente se, U não possui tripotentes minimais.*

(ii) Todo operador fracamente compacto em U satisfaz (ADE) *se, e somente se, todos os tripotentes minimais de U são diagonalizantes.*

Teorema 1.2. *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra.*

(i) Todo operador fracamente compacto em $\mathcal{A}$ satisfaz (DE) *se, e somente se, $\mathcal{A}$ é não-atômica.*

(ii) Todo operador fracamente compacto em $\mathcal{A}$ satisfaz (ADE) *se, e somente se, todas as projeções atômicas de $\mathcal{A}$ são centrais.*

Recentemente Y. S. Choi et al. [1] generalizaram as definições da equação de Daugavet e da equação alternativa de Daugavet para funções limitadas em um espaço de Banach X da seguinte forma: se $\ell_\infty(B_X, X)$ é o espaço de Banach de todas funções limitadas de B_X para X, munido com a norma do supremo, dizemos que uma função $\Phi \in \ell_\infty(B_X, X)$ satisfaz a *equação de Daugavet* se

$$\|\mathrm{Id} + \Phi\| = 1 + \|\Phi\|, \tag{DE}$$

e dizemos que Φ satisfaz a *equação alternativa de Daugavet* se

$$\max_{|w|=1} \|I + w\Phi\| = 1 + \|\Phi\|. \tag{ADE}$$

Estas equações tem sido estudadas em particular para polinômios. Para mais detalhes, consulte [1], [2] e [5].

O objetivo deste trabalho é generalizar os Teoremas 1.1 e 1.2 para polinômios aproximáveis.

*Faculdade de Matemática , UFU, MG, Brasil, e-mail: elisa@famat.ufu.br

2 Resultados

Motivados pelo Teorema 1.1, estabelecemos o seguinte resultado sobre a equação de Daugavet e a equação alternativa de Daugavet para polinômios.

Teorema 2.1. *Seja U uma JB*-tripla.*

(i) Todo polinômio aproximável $P : U \to U$ satisfaz (DE) *se, e somente se, U não possui tripotentes minimais.*

(ii) Todo polinômio aproximável $P : U \to U$ satisfaz (ADE) *se, e somente se, todos os tripotentes minimais de U são diagonalizantes.*

A partir do Teorema 2.1 é possível obter um resultado correspondente para C*-álgebras. Para tanto, consideremos uma proposição preparatória que nos permitirá constatar tal resultado.

Proposição 2.1. *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra. Então:*

(a) $\mathcal{A}$ é uma JB-tripla;*

(b) $\mathcal{A}$ possui projeções atômicas se, e somente se, possui tripotentes minimais;

(c) Todas as projeções atômicas de $\mathcal{A}$ são centrais se, e somente se, todos os tripotentes minimais de $\mathcal{A}$ são diagonalizantes.

O seguinte resultado segue claramente do Teorema 2.1 e da Proposição 2.1.

Teorema 2.2. *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra.*

(i) Todo polinômio aproximável $P : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ satisfaz (DE) *se, e somente se, $\mathcal{A}$ é não-atômica.*

(ii) Todo polinômio aproximável $P : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ satisfaz (ADE) *se, e somente se, todas as projeções atômicas de $\mathcal{A}$ são centrais.*

Referências

[1] CHOI, Y. S., GRACÍA, D., MAESTRE, M., MARTÍN, M. - The Daugavet equation for polynomials. *Studia Math.*, **178**, 63-82, 2007.

[2] CHOI, Y. S., GRACÍA, D., MAESTRE, M., MARTÍN, M. - The polynomial numerical index for some complex vector-valued function spaces. *Quart. J. Math.*, **59**, 455-474, 2008.

[3] DAUGAVET, I. K. - On a property of completely continuous operators in the space C. *Uspekhi Mat. Nauk*, **18**, 157-158, 1963(em russo).

[4] DUNCAN, J., MCGREGOR, C. M., PRYCE, J. D., WHITE, A. J. - The numerical index of a normed space. *J. London Math. Soc.*, **2**, 481-488, 1970.

[5] MARTÍN, M., MERÍ, J., POPOV, M. - The polynomial Daugavet property for atomless $L_1(\mu)$-spaces. *Arch. Math.*, **94**, 383-389, 2010.

[6] MARTÍN, M. & OIKHBERG, T. - An alternative Daugavet property. *J. Math. Anal. Appl.*, **294**, 158-180, 2004.

[7] SANTOS, E. R. - The Daugavet equation for polynomials on C*-algebras. *J. Math. Anal. Appl.* (2013), http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.07.027.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

SISTEMAS GLOBALMENTE LIPSCHITZ GOVERNADOS PELO $p-$LAPLACIANO EM DOMÍNIO ILIMITADO

ÉRIKA CAPELATO * & CLÁUDIA B. GENTILE †

1 Introdução

Neste trabalho vamos provar, a patir da teoria de atrator pullback [3] e [4], a existência do atrator e de trajetórias completas extremas para o sistema não-autônomo globalmente Lipschitz envolvendo o p-Laplaciano:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u - \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) + a(x)\,|u|^{p-2}\,u = C(t,x)u + D(t,x), t \geq \tau \\ u(\tau) = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{1.1}$$

com $2 < p < n$, $C(t) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $D(t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para cada $t \geq \tau$; $t \mapsto \|C(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, t \mapsto \|C(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ e $t \mapsto \|D(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ são funções limitadas em limitados do tempo, absolutamente contínuas, não decrescentes e diferenciáveis com derivada positiva. Assumimos que a função contínua $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é não-negativa, $a(x) \geq 1$ q.t.p. em $\mathbb{R}^n$ e satisfaz a seguinte condição:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{a(x)^{2/(p-2)}}dx < +\infty \tag{1.2}$$

A maior dificuldade quando trabalhamos com domínios ilimitados é estabelecer as imersões compactas de Sobolev dos espaços de funções. Neste trabalho vamos obter estes resultados em um espaço com peso, E, também considerado nos trabalhos de [1] e [8], e definido por:

$$E = \left\{ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n); \int_{\mathbb{R}^n} a(x)\,|u(x)|^p\,dx < \infty \right\}$$

com norma dada por $\|u\|_E = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p + a(x)\,|u(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$, o qual é um espaço de Banach reflexivo.

2 Resultados

Podemos mostrar que o operador da parte principal do sistema (1.1) é maximal monótono então, como a perturbação é globalmente Lipschitz teremos pela Proposição 3.13 em [2] que existe uma única solução para (1.1) que vamos denotar por $u(t) = u(t,\tau)u_0$. A próxima proposição é uma adaptação de um resultado similar encontrado em [8]:

Proposição 1: Assuma verdadeira a condição (1.2). Então $E \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^n)$ para $2 \leq s \leq p^* = \frac{pn}{n-p}$. Além disso, E está compactamente imerso em $L^s(\mathbb{R}^n)$ para $2 \leq s < p^*$.

Considerando o resultado acima e as mesmas técnicas usadas em [7] podemos obter as seguintes estimativas para a solução do problema (1.1):

*Departamento de Economia, UNESP, SP, Brasil, erika@fclar.unesp.br
†Departamento de Matemática, UFSCAR, SP, Brasil, e-mail: gentile@dm.ufscar.br

Lema 1: Se u é solução de (1.1) existem uma função $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ crescente e limitada em limitados e $T_0 > 0$ tal que para todo $\tau \in \mathbb{R}$ temos $max\left\{\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \|u(t)\|^p_E\right\} \leq \alpha(t)$, para todo $t \geq \tau + T_0$ e para todo $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Considerando a definição de Processo, ver [4], e usando o Lema 1, para cada $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$; $t, \tau \in \mathbb{R}$ com $t \geq \tau$ podemos mostrar que $U(t,\tau)v = u(t,\tau)v$ define um Processo. Com isto podemos enunciar os resultados principais do nosso trabalho:

Teorema 1: O processo associado ao problema (1.1) possui um atrator pullback.

Prova: Pela Proposição 1 e pelo Lema 1, para cada $t \in \mathbb{R}$, o fecho da bola de centro zero e raio $\beta(t)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$ forma uma família de conjuntos compactos que atrai (pullback) todos os subconjuntos limitados de $L^2(\mathbb{R}^n)$ pelo Processo. Logo, pelo Teorema 2.2 em [4], o Processo associado ao problema (1.1) possui um atrator pullback.

Teorema 2: Seja $\{U(t,\tau)\}_{t\geq\tau}$ um processo monótono e seja $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ seu atrator pullback com $\cup_{\tau\leq t}\mathcal{A}(\tau)$ limitado para cada $t \in \mathbb{R}$. Então existem $T_0 > 0$ e $x_*(t)$, $x^*(t) \in \mathcal{A}$ tal que:

1. $x_*(t)$ (respectivamente $x^*(t)$) é a trajetória completa minimal (respectivamente maximal) no sentido que para qualquer $a(t) \in \mathcal{A}$ temos $x_*(t) \leq a(t) \leq x^*(t)$, para todo $t \geq \tau + T_0$;
2. $U(t,s)x_*(s) = x_*(t)$, para todo $t \geq s \geq \tau + T_0$ e $U(t,s)x^*(s) = x^*(t)$, para todo $t \geq s \geq \tau + T_0$. Ou seja, x_* e x^* são trajetórias completas extremas.

Prova: Adaptação do Teorema 2 em [5].

Observamos que se $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é o atrator pullback para o processo associado ao problema (1.1) então $\bigcup_{\tau\leq t}\mathcal{A}(\tau)$ é limitado para cada $t \in \mathbb{R}$. Logo, pela hipótese imposta na perturbação do problema (1.1) e pelo Teorema de Comparação 3.5 em [6] temos que o processo é monótono, ver definição em [5]. Logo, as hipóteses do Teorema 1 são satisfeitas garantindo a existência das trajetórias completas extremas para o atrator pullback associado ao problema (1.1).

Referências

[1] BABIN, A. V. AND VISHIK, M. I. - Attractors of differential evolution equation in unbounded domain. *Proceeding Royal Society Edinburgh.*, **A 116**, 221-243, 1990.

[2] BRÉZIS, H. - *Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert.*, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[3] CARABALLO, T., LUKASZEWICZ, G. AND REAL, L. - Pullback attractors for asymptotically compact nonautonomous dynamical systems. *Nonlinear Anal.*, **64**, 484-498, 2006.

[4] CARABALLO, T., CARVALHO, A.N. LANGA, J. A. AND RIVERO, F. - Existence of pullback attractors for pullback asymptotically processes. *Nonlinear Anal.*, **72**, 1967-1976, 2010.

[5] CARABALLO, T., LANGA, J. A. AND VALERO, J. - Asymptotic behavior of monotone multi-valued dynamical systems. *Dynamical Systems.*, vol 20 **3**, 301-321, 2005.

[6] CARVALHO, A. N. AND GENTILE, C. B. - Comparison results for nonlinear parabolic equations with monotone principal part. *J. Math. Anl. Appl.*, **280**, 319-337, 2001.

[7] CARVALHO, A. N. AND GENTILE, C. B. - Asymptotic behavior of non-linear parabolic equations with monotone principal part . *J. Math. Anl. Appl.*, **259**, 252-272, 2003.

[8] SINSEM, J. - An note on $p-$laplacian parabolic problem in R^n *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **75)**, 6620-6624, 2012.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

BLOW-UP OF SOLUTIONS FOR THE KIRCHHOFF EQUATION OF R-LAPLACIAN TYPE WITH BOUNDARY DAMPING AND SOURCE TERM

E. C. LAPA * & B. G.TORRES † & J. B. BARROS ‡ & F. L. BARBOZA §

Abstract

In this article we consider the Kirchhoff equation of r-Laplacian type with nonlinear boundary damping and source term.We shall show that ,for suitable condition on the initial data and positive initial energy ,the solution blows up whenever L ,the length of the string, is large enough.So this length makes an impact on the blow up time.

1 Introduction

In this study we are concerned with the following initial boundary problem

$$\begin{aligned}
&\left(|u_t|^{l-2}u_t\right)_t - M\left(\int_0^L e^{\phi(x)}|u_x|^r dx\right) e^{-\phi(x)}\left(e^{\phi(x)}|u_x|^{r-2}u_x\right)_x = |u|^{p-1}u \quad \text{in} \quad]0,L[\times\mathbb{R}^+ \\
&u(0,t) = 0 \\
&M\left(\int_0^L e^{\phi(x)}|u_x|^r dx\right)|u_x(L,t)|^{r-2}u_x(L,t) = -|u_t(L,t)|^{m-1}u_t(L,t) \\
&u(x,0) = u^0(x), \quad u_t(x,0) = u^1(x),
\end{aligned} \tag{1.1}$$

where $l, r \geq 2$, $m > 1$, $p > 1$ are constants, M is a non-negative locally Lipschitz function , $]0, L[$ is a bounded open interval in $\mathbb{R}$ and $\phi \in W^{1,\infty}(0, L)$.
When $M \equiv 1$, $\phi \equiv 0$ and $r = l = 2$ the system (1.1) has been extensively studied. Fen et al [2] considered (1.1) and obtained the blow up results with negative initial energy and one of the following conditions A) $2m < p + 1$ B) $2m \geq p + 1$ and $L > \frac{4p}{(p-1)(p+1)}$. Recently, Liu W. et al [3] extended the blow up results of [2] to solutions with nonnegative initial energy .
When $\phi \equiv 0$ and $r = l = 2$, M is not a constant function and (1.1) has only Dirichlet boundary condition , without the source term , is often called the wave equation of Kirchhoff-type (in the case $l = 2$ and $r \neq 2$, the equation is called The Kirchhoff equation of r- Laplacian type).
When $\phi \equiv 0$, $M = M(t)$ and $r = l = 2$, Ha T.G [4] considered the semilinear wave equation with boundary damping and source terms. He proved blow up of solutions with positive initial energy by using potential well theory. In [1] , the first author proved the global existence of the solutions .
In the present article, we investigate the blowing up of solutions of the initial boundary value problem for the Kirchhoff equation of r- Laplacian type with nonlinear boundary damping and source term. We will extend to the problem (1.1) the argument introduced in [3] to prove our result.

*Universidad Nacional Mayor de San Marcos, FCM, Lima, PERU, cleugenio@yahoo.com
†Universidad Nacional Mayor de San Marcos, FCM, Lima, PERU,
‡Universidad Nacional del Callao, FCNM, Callao,PERU
§Universidad Nacional del Callao, FCNM, Callao,PERU

2 Mathematical Results

In order to state our main result,we make the following hypothesis

(M) M is a nonnegative locally Lipschitz function satisfying $M(s) \geq m_0$ for all $s \in [0, +\infty[$ and there exists $m_1 \geq 1$ such that $m_1 \widehat{M}(s) \geq M(s)s$ for all $s \in [0, +\infty[$, $\widehat{M}(s) = \int_0^s M(\lambda)d\lambda$

By V we denote the Banach space

$$V = \left\{ w \in W^{1,r}(0, L) : w(0) = 0 \right\}$$

We denote $|.|_p$ to be $L^p - norm$, $p \geq 2$. let u be a solution of (1.1) we define the energy by

$$E(t) = \frac{l-1}{l} \int_0^L e^{\phi(x)} |u_t|^l dx + \frac{1}{r} \widehat{M} \left(\int_0^L e^{\phi(x)} |u_x|^r dx \right) - \frac{1}{p+1} \int_0^L e^{\phi(x)} |u|^{p+1} dx$$

and the partial energy function

$$I(t) = m_0 |u_x|^r - A|u|^{p+1}$$

where $a \leq e^{\phi(x)} \leq A$, $\forall x \in]0, L[$

Let B_1 be the best constant of the sobolev embedding $V \hookrightarrow L^{p+1}(0, L)$ given by

$$B_1^{-1} = \inf \{ |u_x|_r : u \in V;\ |u|_{p+1} = 1 \}$$

We set $\alpha_0 = \left(\frac{m_0}{AB_1} \right)^{r/(p+1-r)}$ and $E_1 = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p+1} \right) a^{(p+1)/(p+1-r)} m_0 \alpha_0$
Our main result reads as follows

Teorema 2.1. *let $u(x,t)$ be a solution of system (1.1).Assume that $2m \geq p+1$, $I(0) < 0$ and for any $0 < \theta < 1$, $0 \leq E(0) < \theta E_1$. Moreover, assume that $L > C_{r,p,\theta}$,for some $C_{r,p,\theta} > 0$ (to be specificated in the proof).Then the solution blows up in finite time.*

Proof We define suitable functionals and prove the inequality

$$\frac{d}{dt} L(t) \geq \Gamma_1 L^{\frac{1}{(1-\sigma)}}(t) , \qquad \forall t \geq 0$$

where Γ_1 , σ are positive constants. This completes the proof. □

References

[1] Cabanillas L.E.,Carrera V. E.,Leon B.F.AND Huaringa S.Z. Global Existence for the Kirchhoff Equation with nonlinear boundary Dissipation and souce term , *Int.J.Nonl.Sc.* **11**(2011)No 4 ,464-475.

[2] Fen H., Li S. AND Zhi X. ;Blow-up solutions for a nonlinear wave equations with boundary damping and interior source , *Nonlinear Anal.* **75**(2012)No 4 ,2273-2280.

[3] Liu W. AND Li G., Blow-up of solutions for a nonlinear wave equation with nonegative initial energy, *Electron. J. Diff. Eq.* **213**(2013)115, 1-8.

[4] Ha T.G ;Blow-up for semilinear wave equation with boundary damping and source terms, *J. math. Anal Appl.* **390**(2012) 328-334.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

Propriedades de ideal do operador de integração de Dunford

F. J. Bertoloto * & G. Botelho † & A. M. Jatobá ‡

1 Introdução

Em [2] são estudadas as propriedades de ideais de operadores gozadas pelo operador de integração em relação a uma medida vetorial. Seguindo esta linha, neste trabalho investigamos as propriedades de ideais de operadores gozadas pelo operador de integração de Dunford.

Ao longo do trabalho F será um espaço de Banach real ou complexo, F' denotará seu dual topológico, (Ω, Σ, μ) denotará um espaço de medida finita, $Id_F: F \longrightarrow F$ o operador identidade em F e $J_F: F \longrightarrow F''$ o mergulho canônico.

Definição 1.1. Definimos o espaço das funções fracamente Lebesgue integráveis por:

$$L^1(\mu, F)_w = \{f: \Omega \longrightarrow F;\ \ \varphi \circ f \in L_1(\mu),\ \forall\, \varphi \in F'\}.$$

Lema 1.1. (Diestel e Uhl [1, Lema II.3.1], Ryan [4, p. 52]) Sejam $f \in L^1(\mu, F)_w$ e $X \subseteq \Omega$ um conjunto mensurável. Então existe um elemento de F'', denotado por $\int_X f d\mu$, satisfazendo

$$\left\langle \varphi, \int_X f d\mu \right\rangle = \int_X \varphi \circ f d\mu,$$

para todo $\varphi \in F'$.

Definição 1.2. O vetor $\int_X f d\mu$ do Lema 1.1 é denominado *integral de Dunford* de f sobre X. Quando $\int_X f d\mu \in F$ para todo conjunto mensurável $X \subseteq \Omega$, dizemos que f é integrável segundo Pettis, e neste caso $\int_X f d\mu$ é chamado de *integral de Pettis* de f sobre X.

Denotaremos por $D(\mu, F)$ e $P(\mu, F)$ os completamentos dos espaços de todas as funções Dunford e Pettis integráveis, respectivamente, segundo a norma conhecida por norma de Pettis:

$$|f|_1 = \sup_{\varphi \in B_{F'}} \int_\Omega |\varphi \circ f| d\mu.$$

Agora estamos em condições de definir o operador de integração de Dunford:

Definição 1.3. (i) O *operador de integração de Dunford* é definido por

$$\begin{array}{rccc} I_D: & D(\mu, F) & \longrightarrow & F'' \\ & f & \longmapsto & \int_\Omega f d\mu. \end{array}$$

(ii) O *operador de integração de Pettis* é definido por

$$\begin{array}{rccc} I_P: & P(\mu, F) & \longrightarrow & F \\ & f & \longmapsto & \int_\Omega f d\mu. \end{array}$$

*Universidade Federal de Uberlândia , MG, Brasil, bertoloto@famat.ufu.br.
†Universidade Federal de Uberlândia , MG, Brasil, botelho@.ufu.br.
‡Universidade Federal de Uberlândia , MG, Brasil, marques@famat.ufu.br.

É claro que os operadores são primeiramente definidos sobre $L^1(\mu,F)_w$, no caso de I_D, e sobre o espaço das funções Pettis-integráveis, no caso de I_P, e depois estendidos aos respectivos completamentos. É fácil verificar que I_D e I_P são operadores lineares contínuos de norma 1. O objetivo deste trabalho é determinar quando I_D pertence a um dado ideal de operadores $\mathfrak{A}$ (estamos sempre considerando ideais de operadores no sentido de Pietsch [3]). O caso do operador I_P é trivial.

2 Resultados

Proposição 2.1. Seja $\mathfrak{A}$ um ideal de operadores. Considere as seguintes afirmações:
(a)$I_D \in \mathfrak{A}(D(\mu,F);F'')$.
(b)$I_P \in \mathfrak{A}(P(\mu,F);F)$.
(c)$Id_F \in \mathfrak{A}(F;F)$.
(d)$J_F \in \mathfrak{A}(F;F'')$.
(e)$Id_{F''} \in \mathfrak{A}(F;F'')$.
As seguintes implicações são verdadeiras para todo espaço de Banach F e todo espaço de medida finita: (a)$\Rightarrow$ (b)$\Leftrightarrow$ (c)$\Rightarrow$ (d)$\Leftarrow$ (e) $\Rightarrow$ (a).

É óbvio que todas as afirmações são equivalentes para um espaço reflexivo F. O próximo resultado exibe um outro caso em que todas elas equivalentes:

Teorema 2.1. Se o ideal $\mathfrak{A}$ é simétrico (cf. Pietsch [3, p. 68]), então as afirmações da Proposição 2.1 são equivalentes para todo espaço de Banach F.

Temos também o seguinte:

Teorema 2.2. Se F não contém cópia de c_0 e $\mathfrak{A}$ é um ideal de operadores regular (cf. Pietsch [3, p. 70]), então as afirmações (a)-(d) da Proposição 2.1 são equivalentes.

Terminamos este trabalho exibindo exemplos que comprovam que as afirmações nem sempre são equivalentes, o que justifica a busca de condições sob as quais valem as equivalências. No primeiro exemplo temos um ideal não simétrico em que (d)$\not\Rightarrow$ (a) e (c) $\not\Rightarrow$ (a).

Exemplo 2.1. Considere $I_D\colon D(\mu,c_0) \longrightarrow \ell_\infty(=(c_0)'')$, em que μ é a medida de Lebesgue em $\Omega=[0,1]$. Vejamos I_D é sobrejetor: dado $y=(a_n)_n \in \ell_\infty$, considere $f\colon [0,1] \longrightarrow c_0$ dada por

$$f(t) = (a_1\chi_{[0,1]}(t), 2a_2\chi_{[0,\frac{1}{2}]}(t), \ldots, na_n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(t), \ldots).$$

Prova-se que $f \in L^1(\mu,c_0)_w$ e que $\int_{[0,1]} f d\mu = y$. Chamando de $\mathcal{S}$ o ideal dos operadores de imagem separável temos $Id_{c_0} \in \mathcal{S}$ mas $I_D \notin \mathcal{S}$.

No próximo exemplo temos um caso de um ideal regular em que (a)$\not\Rightarrow$ (e).

Exemplo 2.2. O ideal $\mathcal{S}$ é regular [3, Prop. 4.5.8]. Seja F um espaço separável que não contém cópia de c_0, com F' não separável. Então $I_D \in \mathcal{S}$ mas $Id_{F''} \notin \mathcal{S}$. Um exemplo de espaço de Banach que satisfaz essas hipóteses é ℓ_1.

Referências

[1] Diestel, J. and Uhl, J. J. - *Vector Measures*, Amer. Math. Soc., 1977.
[2] S. Okada, W. J. Ricker and L. Rodriguez-Piazza, *Operator ideal properties of the integration map of a vector measure*, Indag. Math., in press.
[3] Pietsch, A. - *Operator Ideals*, North-Holland, Amsterdam, 1980.
[4] Ryan, R. A. - *Introduction to Tensor Products of Banach spaces*, Springer, London, 2010.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

CONVERGENCE ESTIMATES OF THE DYNAMICS OF A HYPERBOLIC SYSTEM WITH VARIABLE COEFFICIENTS

FLANK D. M. BEZERRA * & MARCELO J. D. NASCIMENTO †

A damped hyperbolic equation with a dissipative nonlinearity posed in the energy space $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ is considered. The differential operator involved is not the Laplace operator but rather the operator $-\text{div}(a_\epsilon(x)\nabla)$ that has its coefficient depending on a parameter ϵ. We analyze the behavior of the global attractors as the parameter ϵ tends to 0.

1 Introduction

In this paper we will study the damped wave hyperbolic equation with variable coefficients subject to zero Dirichlet boundary condition

$$u_{tt} + au_t + \Lambda_\epsilon u = f(u),\ t > 0, \quad \text{and} \quad u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1, \tag{1.1}$$

where $a > 0$, and $\Lambda_\epsilon = -div(a_\epsilon \nabla),\ \epsilon \in [0,1]$, with $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 1)$ is a bounded connected domain with a sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$, and a_ϵ are functions in $L^\infty(\Omega)$ such that there are constants m_0 and M_0 for which the ellipticity (or "accretivity") condition holds

$$0 < m_0 \leqslant a_\epsilon(x) \leqslant M_0,\ x \in \Omega. \tag{1.2}$$

The nonlinearity $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a twice continuously differentiable function, bounded with bounded derivatives up to second order and satisfies the dissipative condition

$$\limsup_{|s| \to +\infty} \frac{f(s)}{s} < \mu_{0,1} \tag{1.3}$$

where $\mu_{0,1} > 0$ is the first eigenvalue of Λ_0 with zero Dirichlet boundary condition.

Now, we assume some growth condition on the nonlinearity f. Suppose that there is $c = c_\rho > 0$ such that

$$|f'(s)| \leqslant c(1 + |s|^\rho),\ s \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

where $0 \leqslant \rho \leqslant \frac{2}{N-2}$ if $N \geqslant 3$ and $\rho \in [0, \infty)$ if $N = 1, 2$.

The hyperbolic equation (1.1) is related to the problem of the modeling of wave propagation in inhomogeneous media. The real parameter ϵ represents the fact that, as ϵ goes to zero, a_ϵ converges to a_0 uniformly in Ω. The problem (1.1) have hyperbolic structure, but not type parabolic structure, see [4]. Since we are concerned with the asymptotic behavior of solutions of the problem (1.1) this gave us an extra difficulty, because we will not have some estimates inherent in the analytic C^0-semigroups associated with parabolic problems.

When the differential operator involved is not the operator Λ_ϵ but rather the Laplace operator, issues such as analyticity, differentiability and asymptotic stability of the C^0-semigroups associated with the initial-value problem in (1.1) have been considered in the literature.

The attractors associated with damped wave equations have been considered by many authors and much progress has been achieved; see [3] and references therein. In general, to treat the problem of robustness (i.e. lower and upper semicontinuous) of attractors of wave equations, the authors consider a class of perturbed wave problems

*Departamento de Matemática , UFPB, PB, Brasil, flank@mat.ufpb.br
†Departamento de Matemática , UFSCar, SP, Brasil, marcelo@dm.ufscar.br

possessing parabolic structure. But, little information on the rate of approach is given, under our point of view (see [1]). We will use these arguments here to prove a result of convergence with rate of the attractors associated with hyperbolic problem. In this direction, we completed the works cited above.

2 Mathematical Results

The motivation for considering the problem (1.1) lies in the fact that the assumptions (1.3) and (1.4) are enough to prove that family of attractors behaves upper semicontinously at $\epsilon = 0$. To prove that the further that the family of global attractors behaves lower semicontinuously at ϵ we will assume that the hyperbolicity condition holds at $\epsilon = 0$.

Aim of this work is to use the difference $\|a_\epsilon - a_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ to compare the proximity between the perturbed and limit attractor (cf. [2]), in this sense, we obtain

$$\max\{\text{dist}(\mathcal{A}_\epsilon, \mathcal{A}_0), \text{dist}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\epsilon)\} \leqslant C\|a_\epsilon - a_0\|^p_{L^\infty(\Omega)}, \text{ for some } p \in (0,1)$$

where $\text{dist}(\cdot,\cdot)$ denotes the Hausdorff semi-distance $\text{dist}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \sup_{a\in\mathcal{X}} \inf_{b\in\mathcal{Y}} |a-b|$. For this purpose, the key point of our analysis is to obtain first good estimates on the distance of the resolvent operators of the perturbed wave operator, which in turn they are based on good estimates on the distance of the resolvent operators associated to the elliptic operators. Once this is done, estimates on the linear semigroup and the nonlinear semigroup are analyzed. Then after a detailed analysis of the convergence of the equilibria and of its unstable manifolds, and with an estimate on how the nonlinear semigroups approach each other one can obtain a measure on the distance of attractors. Moreover, to characterization of eigenvalues, we will use the arguments used in the Proposition 2.1 in [4] and we will see that this eigenvalues accumulate at $\pm i\infty$.

References

[1] ARRIETA, J. M. A., BEZERRA, F. D. M. AND CARVALHO, A. N. - *Rate of convergence of global attractors of some perturbed reaction-diffusion problems*, Meth. Topol. in Nonlinear Analysis, **41** (2), 2013, 229-253.

[2] BEZERRA, F. D. M. AND NASCIMENTO, M. J. D. - *Convergence estimates of the dynamics of a hyperbolic system with variable coefficients.*, To apper in Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2013.

[3] BRUSCHI, S. M., CARVALHO, A. N., CHOLEWA, J. W. AND DLOTKO, T. - *Uniform Exponential Dichotomy and Continuity of Attractors for Singularly Perturbed Damped Wave Equations*, J. Dynam. Differential Equations, **18** (3), 2006, 767-814.

[4] CHEN, S. AND TRIGGIANI, R. - Proof of extension of two conjectures on structural damping for elastic systems. *Pacific J. Math.*, **136**, 15-55, 1989.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

NOVOS RESULTADOS SOBRE FUNÇÕES CONTÍNUAS QUE ATINGEM MÁXIMO EM UM ÚNICO PONTO

G. BOTELHO, [*] & D. CARIELLO [†] & V. FÁVARO [‡] & D. PELLEGRINO, [§] & J. SEOANE [¶]

Este trabalho visa generalizar resultados de Gurariy e Quarta [1] sobre a existência de espaços vetoriais, exceto pela origem, de funções reais contínuas que atingem máximo num único ponto do domínio. Utilizando alguns conceitos topológicos, provaremos que resultados já conhecidos para funções definidas em certos subconjuntos de $\mathbb{R}$, também são válidos para funções definidas em domínios bem mais gerais. Na mesma linha de Gurariy e Quarta, provaremos que, dependendo da dimensão requerida, tais subespaços podem existir ou não.

Mais precisamente, dado um espaço topológico D, denotamos por $C(D)$ o espaço vetorial de todas as funções reais definidas em D e por $\widehat{C}(D)$ o subconjunto de $C(D)$ de todas as funções que atingem máximo exatamente uma vez em D. Os principais resultados provados por Gurariy e Quarta nesta linha são os seguintes:

(A) $\widehat{C}[a,b)$ contém, exceto pela origem, um subespaço vetorial de $C[a,b)$ com dimensão 2.

(B) $\widehat{C}(\mathbb{R})$ contém, exceto pela origem, um subespaço vetorial de $C(\mathbb{R})$ com dimensão 2.

(C) Não existe subespaço de $C\left[a,b\right]$ com dimensão 2 contido em $\widehat{C}\left[a,b\right]\cup\{0\}$.

Neste trabalho, estendemos os resultados de (A) para espaços de funções definidas em espaços topológicos que podem ser incluídos continuamente em alguma esfera euclidiana S^n.

Também estendemos os resultados de (B) para espaços de funções definidas em domínios mais gerais e que inclui $\mathbb{R}$.

O caso mais interessante é a generalização de (C) para espaços de funções definidas em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^m$. Nesse caso, provamos o seguinte resultado:

Teorema 0.1. *Seja K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$. Então $\widehat{C}(K)\cup\{0\}$ não contém subespaço de $C(K)$ com dimensão $m+1$.*

Por outro lado, exibiremos um compacto $K\subset\mathbb{R}^m$ tal que $\widehat{C}(K)\cup\{0\}$ contém subespaço de $C(K)$ com dimensão m.

Referências

[1] V. I. GURARIY AND L. QUARTA, - *On lineability of sets of continuous functions.* J. Math. Anal. App. **294** (2004) 62–72.

[*] Faculdade de Matemática , UFU, MG, Brasil, botelho@ufu.br
[†] Faculdade de Matemática , UFU, MG, Brasil, dcariello@famat.ufu.br
[‡] Faculdade de Matemática , UFU, MG, Brasil, vvfavaro@gmail.com. Agradeço à FAPEMIG, pelo apoio financeiro no projeto CEX-APQ- 01409/12
[§] DM,UFPB, PB, Brasil, dmpellegrino@gmail.com
[¶] UCM, Madrid, Espanha, jseoane@mat.ucm.es

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

New examples of π_1-holomorphy types

Geraldo Botelho *, Erhan Çaliskan † & Giselle Moraes ‡

The concept of holomorphy types (Definition 0.1), which goes back to Nachbin [10], has been refined by Fávaro and Jatobá [6, 7] and this new concept, called π_1-holomorphy types (Definition 0.2), has recently found interesting applications in [2] to the hypercyclicity of convolution operators on spaces of holomorphic functions of bounded type in infintely many complex variables. One problem is that only a few examples of π_1-holomorphy types are known, essentially classes of nuclear-related homogeneous polynomials. The aim of this work is to show how composition polynomial ideals (Definition 0.3) can be used to provide new examples of π_1-holomorphy types.

Let us fix the notation and give the basic definitions. Henceforth E, F and G shall be real or complex Banach spaces and $\mathcal{P}(^nE;F)$ denotes the Banach space of all continuous n-homogeneous polynomials from E to F endowed with the usual sup norm. When F is the scalar field we simply write $\mathcal{P}(^nE)$. For $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$, $a \in E$ and $k \leq n$, $\hat{d}^k P(a)$ stands for the k-th derivative of P at a. Details can be found in [9]. Operator ideals are always considered in the sense of Pietsch [11].

Definition 0.1. (Nachbin [10]) A *holomorphy type* Θ from the Banach space E to the Banach space F is a sequence of Banach spaces $(\mathcal{P}_\Theta(^nE;F))_{n=0}^\infty$, the norm on each of them being denoted by $\|\cdot\|_\Theta$, such that the following conditions hold:
(i) Each $\mathcal{P}_\Theta(^nE;F)$ is a linear subspace of $\mathcal{P}(^nE;F)$.
(ii) $\mathcal{P}_\Theta(^0E;F)$ coincides with $\mathcal{P}(^0E;F) = F$ as a normed vector space.
(iii) There is a real number $\sigma \geq 1$ for which the following is true: given any $k \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$, $a \in E$ and $P \in \mathcal{P}_\Theta(^nE;F)$, we have

$$\hat{d}^k P(a) \in \mathcal{P}_\Theta(^kE;F) \text{ and } \left\| \frac{1}{k!} \hat{d}^k P(a) \right\|_\Theta \leq \sigma^n \|P\|_\Theta \cdot \|a\|^{n-k}.$$

Definition 0.2. [2, Definition 2.5(a)] A holomorphy type $(\mathcal{P}_\Theta(^nE;F))_{n=0}^\infty$ from E to F is said to be a π_1-*holomorphy type* if the following conditions hold:
(i) Polynomials of finite type belong to $(\mathcal{P}_\Theta(^nE;F))_{n=0}^\infty$ and there exists $K > 0$ such that $\|\phi^n \otimes b\|_\Theta \leq K^n \|\phi\|^n \cdot \|b\|$ for all $\phi \in E^*$, $b \in F$ and $n \in \mathbb{N}$;
(ii) For each $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_f(^nE;F)$ is dense in $(\mathcal{P}_\Theta(^nE;F), \|\cdot\|_\Theta)$.

Definition 0.3. [5] Given an operator ideal $\mathcal{I}$, a polynomial $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ belongs to the *composition polynomial ideal* $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$, denoted $P \in \mathcal{I} \circ \mathcal{P}(^nE;F)$, if there are a Banach space G, a polynomial $Q \in \mathcal{P}(^nE;G)$ and an operator $u \in \mathcal{I}(G;F)$ such that $P = u \circ Q$. If $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_\mathcal{I})$ is a quasinormed operator ideal, the expression

$$\|P\|_{\mathcal{I}\circ\mathcal{P}} = \inf\{\|u\|_\mathcal{I} \cdot \|Q\| : P = u \circ Q,\ u \in \mathcal{I}(G;F),\ Q \in \mathcal{P}(^nE;G)\}.$$

makes $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$ a quasinormed polynomial ideal.

1 Main results

In the scalar-valued case it is well known that $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}(^nE) = \mathcal{P}(^nE)$ isometrically [5, 3.2], so it is obvious that

*Universidade Federal de Uberlândia, supported by CNPq Grant 302177/2011-6 and Fapemig Grant PPM-00295-11, e-mail: botelho@ufu.br.
†Yıldız Teknik Üniversitesi, Istanbul, Turkey, supported by TÜBİTAK - The Scientific and Technological Research Council of Turkey, e-mail:ercalis@yahoo.com.tr.
‡Universidade Federal de Uberlândia, supported by PROPP-UFU, e-mail: giselle_mrp@yahoo.com.br.

$(\mathcal{I} \circ \mathcal{P}(^nE))_{n=0}^{\infty}$ is a π_1-holomorphy type if and only if $\mathcal{P}_f(^nE)$ is norm dense in $\mathcal{P}(^nE)$ for every $n \in \mathbb{N}$.

As to the density condition above, according to Vieira [12], a Banach space E is said to be a *Tsirelson-like space* if E is reflexive and $\mathcal{P}_f(^nE)$ is norm dense in $\mathcal{P}(^nE)$ for every $n \in \mathbb{N}$. The reason for this terminology is that Tsirelson's original space, the first example of a Banach space not containing c_0 or ℓ_p for $1 \leq p < \infty$, enjoys this property (see [1]). Tsirelson-like spaces (not necessarily with this terminology) have found applications in several contexts. As we have seen above, we shall not need the reflexivity of the space, so we define the following:

Definition 1.1. A Banach space E is said to be *semi-Tsirelson* if $\mathcal{P}_f(^nE)$ is norm dense in $\mathcal{P}(^nE)$ for every $n \in \mathbb{N}$.

Of course every Tsirelson-like space is semi-Tsirelson. For nonreflexive spaces, c_0 and the Tsirelson-James space T_J^* are semi-Tsirelson (see [4, Remark 23(b)]). In contrast to the scalar-valued case, in the vector-valued case the domain space being semi-Tsirelson is no longer a sufficient condition:

Example 1.1. Let $\mathcal{K}$ and $\mathcal{W}$ be the closed ideals of compact and weakly compact operators, respectively. Let E be an infinite-dimensional Tsirelson-like space and $0 \neq \varphi \in E^*$. By [3] we know that the mapping $P\colon E \longrightarrow E$, $P(x) = \varphi(x)^{n-1} \cdot x$, is a non-compact weakly compact n-homogeneous polynomial. Using [5, Proposition 3.2(b)] we can prove that $P \notin \mathcal{K} \circ \mathcal{P}(^nE;E)$ and $P \in \mathcal{W} \circ \mathcal{P}(^nE;E)$. Since $\overline{\mathcal{P}_f(^nE;E)} \subseteq \mathcal{K} \circ \mathcal{P}(^nE;E)$, it follows that, although E is a semi-Tsirelson space, $(\mathcal{W} \circ \mathcal{P}(^nE;E))_{n=0}^{\infty}$ fails to be a π_1-holomorphy type.

In view of the example above, in addition to the domain space being semi-Tsirelson, some condition should be imposed on the target space to obtain a π_1-holomorphy type. We have found such a condition in [8]:

Definition 1.2. [8, Definition 4.3] Let $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ be a normed operator ideal. A Banach space E has the $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$-*approximation property* if $\overline{\mathcal{F}(F;E)}^{\|\cdot\|_{\mathcal{I}}} = \mathcal{I}(F;E)$ for all Banach spaces F, where $\mathcal{F}$ is the ideal of finite rank operators.

Here are the new examples of π_1-holomorphy types we provide in this work:

Theorem 1.1. *Let $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ be a Banach operator ideal, let E be a semi-Tsirelson Banach space and let F be a Banach space with the $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$-approximation property. Then $(\mathcal{I} \circ \mathcal{P}(^nE;F))_{n=0}^{\infty}$ is a π_1-holomorphy type.*

Referências

[1] R. Alencar, R. Aron and S. Dineen, *A reflexive space of holomorphic functions in infintely many variables*, Proc. Amer. Math. Soc. **90** (1984), 407–411.

[2] F. Bertoloto, G. Botelho, V. V. Fávaro and A. M. Jatobá, *Hypercyclicity of convolution operators on spaces of entire functions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), In press.

[3] G. Botelho, *Weakly compact and absolutely summing polynomials*, J. Math. Anal. Appl. **265** (2002), 458-463.

[4] G. Botelho, *Ideals of polynomials generated by weakly compact operators*, Note Mat. **25** (2005/2006), 69-102.

[5] G. Botelho, D. Pellegrino and P. Rueda, *On composition ideals of multilinear mappings and homogeneous polynomials*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **43** (2007), 1139–1155.

[6] V. V. Fávaro and A. M. Jatobá, *Holomorphy types and spaces of entire functions of bounded type on Banach spaces*, Czechoslovak Math. J. **59**(134) (2009), 909–927.

[7] V. V. Fávaro and A. M. Jatobá, *Holomorphy types and the Fourier–Borel transform between spaces of entire functions of a given type and order defined on Banach spaces*, Math. Scand. **110** (2012), 111–139.

[8] S. Lassalle and P. Turco, *On p-compact mappings and the p-approximation property*, J. Math. Anal. Appl. **389** (2012), 1204–1221.

[9] J. Mujica, *Complex Analysis in Banach Spaces*, Dover Publ., 2010.

[10] L. Nachbin, *Topology on Spaces of Holomorphic Mappings*, Springer, New York, 1969.

[11] A. Pietsch, *Operator Ideals*, North-Holland, 1980.

[12] D. M. Vieira, *Theorems of Banach–Stone type for algebras of holomorphic functions on infinite dimensional spaces*, Math. Proc. R. Ir. Acad. **106A** (2006) 97–113.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

Extensões compactas de operadores multilineares

GERALDO BOTELHO * & KUO PO LING †

O objetivo deste trabalho é provar que, sob certas condições, as extensões de Nicodemi de operadores multilineares compactos são compactas também. Uma aplicação deste resultado para a teoria isométrica/isomorfa de espaços de operadores multilineares compactos é fornecida.

Começamos por descrever as extensões de Nicodemi, que foram introduzidas por P. Galindo, D. García, M. Maestre e J. Mujica [6] seguindo uma idéia original de Nicodemi [10] (veja também [5] e [8]). Neste trabalho, E, F e G são espaços de Banach (reais ou complexos), m é um número inteiro positivo e $\mathcal{L}(^mE;G)$ denota o espaço de Banach de operadores m-lineares contínuos de E^m em G munido com a norma do supremo. Quando $m=1$, simplesmente escrevemos $\mathcal{L}(E,G)$ para o espaço dos operadores lineares, e quando G é o corpo dos escalares $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, escrevemos $\mathcal{L}(^mE) := \mathcal{L}(^mE;\mathbb{K})$ e $E' := \mathcal{L}(E;\mathbb{K})$. Dados inteiros positivos m e n, consideramos os isomorfismos isométricos canônicos

$$I_{m,n}\colon \mathcal{L}(^{m+n}E;G) \longrightarrow \mathcal{L}(^mE;\mathcal{L}(^nE;G)) \ , \ I_{m,n}(A)(x)(y) = A(x,y);$$

$$T_{m,n}\colon \mathcal{L}(^mE;\mathcal{L}(^nF;G)) \longrightarrow \mathcal{L}(^nF;\mathcal{L}(^mE;G)) \ , \ T_{m,n}(A)(x)(y) = A(y)(x).$$

Escrevemos $I_{m,1}=I_m$ e $T_{m,1}=T_m$. Dado um operador linear e contínuo $R_1\colon \mathcal{L}(E;G) \longrightarrow \mathcal{L}(F;G)$, definimos um operador linear e contínuo

$$R_m\colon \mathcal{L}(^mE;G) \longrightarrow \mathcal{L}(^mF;G),$$

para todo m, por indução, colocando

$$R_{m+1}(A) := I_m^{-1}(T_m^{-1}(R_m \circ T_m(R_1 \circ I_m(A)))).$$

A sequência $(R_m)_{m=1}^{\infty}$ é chamada de *sequência de Nicodemi começando com* R_1. Se E é um subespaço de F e, para cada $u \in \mathcal{L}(E;G)$, $R_1(u)$ é uma extensão de u para F, então para cada m e cada $A \in \mathcal{L}(^mE;G)$, $R_m(A)$ é uma extensão de A para F^m. Por $\mathcal{L}_f(^mE;G)$, denotamos o subespaço de $\mathcal{L}(^mE;G)$ de todos os operadores m-lineares de tipo finito. Por $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}(^mE;G)$, denotamos o subespaço fechado de $\mathcal{L}(^mE;G)$ de operadores m-lineares compactos. O espaço de operadores lineares compactos ($m=1$) é denotado por $\mathcal{K}(E;G)$.

1 Resultados Principais

De acordo com a notação estabelecida acima, o objetivo deste trabalho então é determinar condições sobre os espaços de Banach E e G tais que se a extensão de um operador linear compacto por R_1 também é um operador linear compacto, então a extensão de um operador m-linear compacto por R_m também é um operador m-linear compacto, isto é,

$$R_1(\mathcal{K}(E;G)) \subseteq \mathcal{K}(F;G) \Longrightarrow R_m(\mathcal{L}_{\mathcal{K}}(^mE;G)) \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{K}}(^mF;G).$$

Nosso resultado principal decorrerá da seguinte série de lemas:

Lema 1.1. *Sejam E um espaço de Banach tal que $\overline{\mathcal{L}_f(^mE)} = \mathcal{L}(^mE)$ e G um espaço de Banach com a propriedade de aproximação. Então $\overline{\mathcal{L}_f(^mE;G)} = \mathcal{L}_{\mathcal{K}}(^mE;G)$.*

*Universidade Federal de Uberlândia, o autor é apoiado pelo CNPq Grant 302177/2011-6 and Fapemig Grant PPM-00295-11, e-mail: botelho@ufu.br

†Universidade Federal de Uberlândia, a co - autora agradece o apoio financeiro dado por FAPEMIG - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais, e-mail: kuo@famat.ufu.br

A demonstração do lema acima é uma adaptação da demonstração de [4, Theorem 3.6].

Lema 1.2. *Seja $A \in \mathcal{L}(^mE;\mathcal{L}(^nF;G))$. Então $A \in \mathcal{L}_{\mathcal{K}}(^mE;\mathcal{L}_{\mathcal{K}}(^nF;G))$ se, e somente se, $T_{m,n}(A) \in \mathcal{L}_{\mathcal{K}}(^nF;\mathcal{L}_{\mathcal{K}}(^mE;G))$.*

A demonstração do lema acima é uma aplicação do refinamento do Lema da Precompacidade de Kakutani obtida por Mujica [9].

Lema 1.3. *Para todo $m,n \in \mathbb{N}$, $I_{m,n}^{-1}\left(\mathcal{L}_{\mathcal{K}}(^mE;\mathcal{L}_{\mathcal{K}}(^nE;G))\right) \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{K}}(^{m+n}E;G)$.*

Lema 1.4. *Para todo $m,n \in \mathbb{N}$, $I_{m,n}\left(\mathcal{L}_{\mathcal{K}}(^{m+n}E;G)\right) \subseteq \mathcal{L}(^mE;\mathcal{L}_{\mathcal{K}}(^nE;G))$.*

O resultado principal do trabalho é o seguinte:

Teorema 1.1. *Se $R_1\left(\mathcal{K}(E;G)\right) \subseteq \mathcal{K}(F;G)$, $\overline{\mathcal{L}_f(^mE)} = \mathcal{L}(^mE)$ para $m = 1,\dots,k$, e G um espaço de Banach com a propriedade de aproximação, então $R_m\left(\mathcal{L}_{\mathcal{K}}(^mE;G)\right) \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{K}}(^mF;G)$ para $m = 1,\dots,k$.*

Como aplicação do teorema principal obtemos o

Teorema 1.2. *Sejam E um espaço de Banach tal que $\overline{\mathcal{L}_f(^mE)} = \mathcal{L}(^mE)$ para $m = 1,\dots,k$, e G um espaço de Banach com a propriedade de aproximação. Se $\mathcal{K}(E;G)$ e $\mathcal{K}(F;G)$ são (isometricamente) isomorfos, então $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}(^mE;G)$ e $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}(^mF;G)$ são (isometricamente) isomorfos para cada $m \in \{1,\dots,k\}$.*

Como exemplos de espaços E satisfazendo a condição $\overline{\mathcal{L}_f(^mE)} = \mathcal{L}(^mE)$ dos dois teoremas acima temos:
• $\overline{\mathcal{L}_f(^m\ell_p)} = \mathcal{L}(^m\ell_p)$ para $m < p$ (relembre que ℓ_p é um espaço reflexivo com a propriedade da aproximação e então combine [2, Proposition 4.1 e Proposition 3.5].
• $\overline{\mathcal{L}_f(^mc_0)} = \mathcal{L}(^mc_0)$ para todo m (veja, por exemplo, [7, Theorem 3.4.1].
• Se T^* denota o espaço de Tsirelson original, então $\overline{\mathcal{L}_f(^mT^*)} = \mathcal{L}(^mT^*)$ para todo m (relembre que T^* é um espaço reflexivo com a propriedade da aproximação - pois tem base de Schauder - e então combine [1, Theorem 6] com [2, Proposition 3.5].
• Se T_J^* denota o espaço de Tsirelson-James, então $\overline{\mathcal{L}_f(^mT_J^*)} = \mathcal{L}(^mT_J^*)$ para todo m (veja [3, Remark 23(b)].

Referências

[1] R. Alencar, R. M. Aron e G. Fricke, *Tensor products of Tsirelson's space*, Illinois J. Math. **31** (1987), 17–23.

[2] R. Alencar e K. Floret, *Weak-strong continuity of multilinear operators and the Pełczyński–Pitt theorem*, J. Math. Anal. Appl. **206** (1997), 532–546.

[3] G. Botelho, *Ideals of polynomials generated by weakly compact operators*, Note Mat. **25** (2005/2006), 69-102.

[4] G. Botelho, E. Çaliskan and G. Moraes, *The polynomial dual of an operator ideal*, preprint.

[5] G. Botelho and Kuo Po Ling, *Nicodemi sequences of operators between spaces of multilinear operators*, Arch. Math. (Basel) **98** (2012), 241–251.

[6] P. Galindo, D. García, M. Maestre and J. Mujica, *Extension of multilinear operators on Banach spaces*, Studia Math. **108** (1994), 55–76.

[7] T. W. Gamelin, *Analytic functions on Banach spaces*, Complex Potential Theory, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994, 187–233.

[8] Kuo Po Ling, *Isomorphisms between spaces of multilinear mappings or homogeneous polynomials*, Note Mat. **29** (2009), 55–76.

[9] J. Mujica, *The Kakutani's precompactness lemma*, J. Math. Anal. Appl. **297** (2004), 477–489.

[10] O. Nicodemi, *Homomorphisms of algebras of germs of holomorphic functions*, in: Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory, S. Machado (ed.), Lecture Notes in Math. 843, Springer, 1981, 534–546.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

ON A SYSTEM OF A NON-NEWTONIAN MICROPOLAR FLUID

GERALDO M. DE ARAÚJO [*], MARCOS A. F. DE ARAÚJO [†] & ELIZARDO F. L. LUCENA [‡]

1 Introduction

Let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^3$ with smooth boundary $\partial\Omega$, and let $T > 0$. We denote by Q_T the time space cylinder $I \times \Omega$, with lateral boundary $\Sigma = I \times \partial\Omega$, where $I = (0, T)$ is a time interval. In this work we study the problem described by the equation

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot [(\nu + \nu_0 |e(u)|^2) e(u)] + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = \nabla \times w + f \ \text{ in } Q_T, \\ \nabla \cdot u = 0 \quad \text{in} \quad Q_T \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} - \nu_1 \nabla \cdot [|e(u)|^2 e(w)] + (u \cdot \nabla)w + a\, w = b \nabla \times u + g \quad \text{in} \quad Q_T, \\ u = 0, \quad w = 0 \quad \text{on} \ \ \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad w(x,0) = w_0(x) \ \text{ in } \ \Omega, \end{array}\right. \tag{1.1}$$

where $u(x,t) \in \mathbb{R}^3$, $w(x,t) \in \mathbb{R}^3$ and $p(x,t) \in \mathbb{R}$, denotes for $(x,t) \in Q_T$, respectively, the unknown velocity, the microrotational velocity and the hidrostatic pressure of the fluid. The functions $f = (f_1, f_2, f_3)$ and $g = (g_1, g_2, g_3)$ stand given external body forces, $e = e(u) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{3^2}_{sym}$ denote the symmetric part of the velocity gradient, i. e.,

$$e(u) = \frac{1}{2}\left[\nabla u + (\nabla u)^T\right] \tag{1.2}$$

whose components are defined as in [7] by

$$2e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \ i, j = 1, 2, 3 \tag{1.3}$$

and $\mathbb{R}^{3^2}_{sym}$ represents the set of all symmetric 3×3 matrices, i. e.,

$$\mathbb{R}^{3^2}_{sym} = \{D \in \mathbb{R}^{3^2}; N_{ij} = N_{ji}, \ i, j = 1, 2, 3\}.$$

Fluids described by (1.1) are sometimes named fluids with shear-dependent viscosity. Models belonging to this class of non-Newtonian fluid mechanics are frequently used in several fields of chemistry, glaciology, biology and geology, as discussed in Málek, Rajagopal, Růžička [5].

Notice that, using the notation

$$\langle \mathcal{K}u, \varphi \rangle = \langle -\nu_0 \nabla.(|e(u)|^2 e(u)), \varphi \rangle = \nu_0 \int_\Omega |e(u)|^2 e_{ij}(u) e_{ij}(\varphi) dx \text{ for all } \varphi \in V_4 \cap V, \tag{1.4}$$

we have

$$\langle \mathcal{K}u_1 - \mathcal{K}u_2, u_1 - u_2 \rangle = \nu_0 \int_\Omega \left[|e(u_1)|^2 e_{ij}(u_1) - |e(u_2)|^2 e_{ij}(u_2)\right] \left[e_{ij}(u_1) - e_{ij}(u_2)\right] dx > 0, \tag{1.5}$$

because $M = |e(u)|^2$ is monotonous. Is not difficult to show that $\mathcal{K} : V_4 \cap V \to (V_4 \cap V)'$ is monotonous, hemicontinuous and bounded.

We remember that $V_4 = V_4(\Omega)$ is usually defined as the closure of $\mathcal{V}$ in the space $W^{1,4}(\Omega)$-norm of gradient, that is, $||\nabla u||_4 \equiv \left\{ \int_\Omega |\nabla u(x)|^4 \right\}^{1/4}$. For details about the other functional spaces, see for instance, Lions [3].

[*]Faculdade de Matemática , UFPA, PA, Brasil, gera@ufpa.br
[†]Departamento de Matemtica, UFMA, MA, Brasil, e-mail: marcosttte@gmail.com
[‡]Faculdade de Matemática , UFPA-Bragança, PA, Brasil, elizardo@ufpa.br

2 Mathematical Results

Definição 2.1. *We consider $u_0 \in H, w_0 \in L^2(\Omega)^3, f, g \in L^2(I; L^2(\Omega)^3)$. A weak solution to (1.1) is a pair of functions $\{u, w\}$ such that $u \in L^4(I; V_4) \cap L^2(I; V) \cap L^\infty(I; H)$, $w \in L^\infty(I; L^2(\Omega)^3) \cap L^2(I; H_0^1(\Omega)^3)$, satisfying the identity*

$$\left|\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^T \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \varphi \right\rangle dt + \nu \int_0^T a(u, \varphi) dt + \int_0^T b(u, u, \varphi) dt + \nu_0 \int_0^T \int_\Omega |e(u)|^2 e_{ij}(u) e_{ij}(\varphi) dx dt \\ \displaystyle = \int_0^T (\nabla \times w, \varphi) dt + \int_0^T (f, \varphi) dt, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(I; \mathcal{V}), \\ \displaystyle\int_0^T \left\langle \frac{\partial w}{\partial t}, \phi \right\rangle dt + \int_0^T b(u, w, \phi) dt + a \int_0^T (w, \phi) dt + \nu_1 \int_0^T \int_\Omega |e(u)|^2 e_{ij}(w) e_{ij}(\varphi) dx dt \\ \displaystyle = b \int_0^T (\nabla \times u, \phi) dt + \int_0^T (g, \phi) dt, \ \forall \phi \in \mathcal{D}(I; \mathcal{D}(\Omega)), \\ u(0) = u_0, \quad w(0) = w_0. \end{array}\right. \tag{2.6}$$

Teorema 2.1. *Let $u_0 \in H$, $w_0 \in L^2(\Omega)^3, f, g \in L^2(I; L^2(\Omega)^3)$. Then there exists a weak solution to Problem (1.1).*

Teorema 2.2. *The weak solution of the problem (1.1) is unique if $n = 2$.*

Teorema 2.3. *If $u_0 \in V \cap V_4$, $w_0 \in H_0^1(\Omega)^3$, $f, g \in L^2(L^2(\Omega)^3)$, then there exists a pair of functions $\{u, w\}$ defined for $(x, t) \in Q_T$, solution to the boundary value problem (1.1) satisfying the following regularity properties $u \in C(I; H)$, $u \in L^\infty(I; V_4)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(I; H)$, $w \in C(I; L^2(\Omega))$, $w \in L^\infty(I; H_0^1(\Omega)^3)$, $\dfrac{\partial w}{\partial t} \in L^2(I; L^2(\Omega)^3)$.*

In the proof of Theorem 2.1 the key point is the passage to the limit in nonlinear elliptic term involving $|e(u)|^2 e(u)$ and $|e(u)|^2 e(w)$. For this we use Faedo-Galerkin's method, Lemma de Korn's (see [1]), an argument of compactness and standard monotone operator method (see [2] and [3]). In the proof of Theorem 2.2 we use the method of energy and in Theorem 2.3 we obtain regularity taking $\varphi_r = u'_m, \phi_r = w'_m$ in the Galerkin's approximation.

References

[1] *Dunford, N. and Schwartz, J. - (1958) Linear Operators*, Vol. 1-3. Interscience, New York.

[2] Frehse, J. and Málek, J. - *Problems duo to the no-slip boundary in incompressible fluids dynamics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2003 .

[3] Lions, J. L. - *Quelques Méthodes de Resolution des Problémes Aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[4] Lukaszewicz, G. - *Micropolar Fluids, Theory and applications*, Modeling and simulations in Science, Engineering and Technology, Birkhäuser Boston, Inc.,Boston, MA, 1999.

[5] Málek, J., Rajagopal, K. R. and R*ů*žička, M. - *Existence and regularity of solution and stability of the rest state for fluids with shear dependent viscosity*, Math. Models Methods Appl. Sci. Vol. 5 (6) (1995), 789-812.

[6] Málek, J., Nečas, J., and R*ů*žička, M. - *On weak solutions to a class of non-Newtonian incompressible fluids in bounded three-dimensional domains: the case $p \geq 2$*, Advances in Differential Equations, Vol. 6, N. 3, March 2001, pp. 257-302

[7] Málek, J., Nečas, J., Rokyta, M. and R*ů*žička, M. - *Weak and Measure-valued Solutions to Evolutionary PDEs*, Chapman & Hall, First Edition 1996.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

ON FRACTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH STATE-DEPENDENT DELAY

GIOVANA SIRACUSA [*], RAVI AGARWAL [†] & BRUNO DE ANDRADE [‡]

1 Introduction

In the last decades, the theory of fractional calculus has gained importance and popularity, due mainly to its demonstrated applications in the most varied fields of sciences and engineering. Likewise, it is well known that functional differential equations with state-dependent delay appear frequently in applications as model of equations and for this reason the study of this type of equations has received great attention in the last years.

However, research in these equations is very limited to ordinary differential equations. The main subject of this work is to obtain sufficient conditions for the existence of mild solutions for a class of fractional integro-differential equations with state-dependent delay described in the form

$$u'(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Au(s)ds + f(t, u_{\rho(t,u_t)}), \quad t \in [0,b], \tag{1.1}$$

$$u(0) = \varphi \in \mathcal{B}, \tag{1.2}$$

where $1 < \alpha < 2$, $A : D(A) \subset X \to X$ is a linear densely defined operator of sectorial type on a complex Banach space X, the history $x_t : (-\infty, 0] \to X$ given by $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ belongs to some abstract phase space $\mathcal{B}$ defined axiomatically and $f : [0,b] \times \mathcal{B} \to X$ and $\rho : [0,b] \times \mathcal{B} \to (-\infty, b]$ are appropriated functions. Notice that the convolution integral in (1.1) is known as the Riemann-Liouville fractional integral.

Equation (1.1)-(1.2) is the abstract version of the following fractional integro-differential equation which has many physical applications, e.g., in the theory of heat conduction in materials with memory (see [6]):

$$u'(t,\xi) = \int_0^t \left(\frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \right) u_{\xi\xi}(s,\xi)ds + \left[m(t) \left(\int_0^t u(t - \sigma(\| u(t) \|), \xi')d\xi' \right)^{\beta} \right], \tag{1.3}$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \ t \geq 0, \tag{1.4}$$

$$u(\tau,\xi) = \varphi(\tau,\xi), \ \tau \leq 0, \ 0 \leq \xi \leq \pi, \tag{1.5}$$

where $t \in [0,b], \xi \in [0,\pi]$, $0 < \beta < 1 < \alpha < 2$ and $\varphi \in C_0 \times L^2(g,X)$. In the literature problem (1.1)-(1.2) has been studied by several authors in the case without delay or with delay depending only on time. In [5] the authors investigated existence and uniqueness of S-asymptotically ω-periodic mild solutions of (1.1)-(1.2) with infinite delay, while the case without delay has been considered in [1], [3] and [4] for existence of asymptotically almost periodic mild solutions, asymptotically behavior of solutions and existence of S-asymptotically ω-periodic mild solutions, respectively.

The existence of mild solutions for the class of fractional integro-differential equations with state-dependent described in the form (1.1)-(1.2) constitute an untreated topic and this fact is the main motivation of this paper (see [2]).

[*]Departamento de Matemática, UFS, SE, Brasil, gisiracusa@gmail.com
[†]Department of Mathematical Sciences, Florida Institute of Technology , Florida, USA, agarwal@fit.edu
[‡]IMECC,São Carlos, USP, SP, Brasil, e-mail: bruno00luis@gmail.com

2 Mathematical Results

In the sequel we introduce the following conditions:

($\mathbf{H_1}$) The function $f : [0,b] \times \mathcal{B} \to X$ verifies the following conditions.

(i) The function $f(t,\cdot) : \mathcal{B} \to X$ is continuous for almost everywhere $t \in [0,b]$, and for every $\psi \in \mathcal{B}$, the function $f(\cdot,\psi) : [0,b] \to X$ is strongly measurable.

(ii) There exist $m \in C([0,b],[0,\infty))$ and a continuous non-decreasing function $\Omega : [0,\infty) \to (0,\infty)$ such that $\| f(t,\psi) \| \leq m(t)\Omega(\| \psi \|_{\mathcal{B}})$, for all $(t,\psi) \in [0,b] \times \mathcal{B}$.

($\mathbf{H_2}$) For all $t,s \in [0,b]$, $t \geq s$ and $r > 0$, the set $\{f(s,\psi) : s \in [0,t], \| \psi \|_{\mathcal{B}} \leq r\}$ is relativelly compact in X.

($\mathbf{H}_\varphi$) The function $t \to \varphi_t$ is well defined and continuous from the set

$$\mathcal{R}(\rho^-) = \{\rho(s,\psi) : (s,\psi) \in [0,b] \times \mathcal{B},\ \rho(s,\psi) \leq 0\}$$

into $\mathcal{B}$ and there exists a continuous and bounded function $J^\varphi : \mathcal{R}(\rho^-) \to (0,\infty)$ such that $\| \varphi_t \|_{\mathcal{B}} \leq J^\varphi(t) \| \varphi \|_{\mathcal{B}}$ for every $t \in \mathcal{R}(\rho)$.

Remark 2.1. The condition ($\mathbf{H}_\varphi$) is frequently verified by continuous and bounded functions.

The main results are as follows:

Theorem 2.1. *Let conditions* ($\mathbf{H_1}$), ($\mathbf{H_2}$) *and* ($\mathbf{H}_\varphi$) *be hold. If*

$$K_b M \liminf_{\xi \to \infty} \frac{\Omega(\xi)}{\xi} \int_0^b m(s)ds < 1,$$

then the problem (1.1)-(1.2) has at least one mild solution.

Theorem 2.2. *Let conditions* ($\mathbf{H_1}$), ($\mathbf{H_2}$), ($\mathbf{H}_\varphi$) *be hold. If* $\rho(t,\psi) \leq t$ *for every* $(t,\psi) \in I \times \mathcal{B}$ *and*

$$K_b M \int_0^b m(s)ds < \int_C^\infty \frac{1}{\Omega(s)}ds,$$

where $C = (M_b + K_b M H + J^\varphi) \| \varphi \|_{\mathcal{B}}$, *then the problem (1.1)-(1.2) has at least one mild solution.*

References

[1] AGARWAL, R. AND DE ANDRADE, B. AND CUEVAS, C., *On type of periodicity and ergodicity to a class of fractional order differential equations*, Advances in Difference Equations, 2010, Article ID 179750, p.1-25.

[2] AGARWAL, R. AND DE ANDRADE, B. AND SIRACUSA G., *On fractional integro-differential equations with state-dependent delay.*, Comput. Math. Appl., **62**, 2011, 1143-1149.

[3] CUESTA, E., *Asymptotically behavior of the solutions of fractional integro-differential equations and some discretizations,* Discrete Contin. Dyn. Syst. (Supplement) (2007), 277-285.

[4] CUEVAS, C. AND DE SOUZA, J.P., *S-asymptotically ω-periodic solutions of semilinear fractional integro-differential equations*, Appl. Math. Lett., **22** (2009), 865-870.

[5] CUEVAS, C. AND DE SOUZA, J.P., *Existence of S-asymptotically ω-periodic solutions for fractional order functional integro-differential equations with infinite delay*, Nonlinear Analysis (2009), doi: 10.1016/j.na.2009.09.007.

[6] PRÜSS, J., *Evolutionary Integral Equations and Applications.*, Monographs Math., Vol 87, Birkhäuser-Verlag, 1993.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

MULTIPLICITY AND CONCENTRATION BEHAVIOR OF POSITIVE SOLUTIONS FOR A SCHRÖDINGER-KIRCHHOFF TYPE PROBLEM VIA PENALIZATION METHOD

GIOVANY M. FIGUEIREDO * & JOÃO R. SANTOS JÚNIOR †

1 Introduction

In this work we look positive solutions of the elliptic problem

$$(P_\varepsilon) \qquad \mathcal{L}_\varepsilon u = f(u) \text{ in } \mathbb{R}^3 \text{ and } u \in H^1(\mathbb{R}^3).$$

Here ε is a small positive parameter, $\mathcal{L}_\varepsilon$ is a nonlocal operator defined by

$$\mathcal{L}_\varepsilon u = M\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon^3}\int_{\mathbb{R}^3} V(x)u^2\right)\left[-\varepsilon^2\Delta u + V(x)u\right],$$

$M : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ and $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are continuous functions which satisfy hypotheses that we will now briefly describe.

We assume f has a 3-superlinear subcritical growth, satisfies a condition of type Ambrosetti-Rabinowitz, $t \mapsto f(t)/t^3$ is non-decreasing in $(0, +\infty)$ and f is null in $(-\infty, 0]$. The potential V satisfies hypotheses which were first introduced in [3] for laplacian case (for p-laplacian case, see [2]). The function M is assumed to be increasing and there is $m_0 > 0$ such that

$$\frac{M(t_1)}{t_1} - \frac{M(t_2)}{t_2} \leq m_0\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right)$$

for all $t_1 > t_2 > 0$.

By considering the change of variable $x = \varepsilon z$ in (P_ε) we obtain the equivalent problem

$$(\widetilde{P}_\varepsilon) \qquad \widetilde{\mathcal{L}}_\varepsilon u = f(u) \text{ in } \mathbb{R}^3 \text{ and } u \in H^1(\mathbb{R}^3),$$

where

$$\widetilde{\mathcal{L}}_\varepsilon u = M\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} V(\varepsilon x)u^2\right)\left[-\Delta u + V(\varepsilon x)u\right].$$

Problem $(\widetilde{P}_\varepsilon)$ is a natural extension of two classes of very important problems in applications, namely, Kirchhoff problems (when $V \equiv 0$) and Schrödinger problems (when $M \equiv 1$). Recently, many authors have studied problems of that nature, see for instance [1], [4], [6] and references there in. We emphasize that, at least in our knowledge, there is not in the literature actually available results involving problems Schrödinger-Kirchhoff type, where the potential is like that introduced in [3].

Motivated by results found in [1], [3], [4] and [6], we study existence of multiple positive solutions of (P_ε) via Lusternik-Schnirelmann theory, as well as the concentration behavior of maximum points of these positive solutions.

To obtain our main result we use the same type of truncation explored in [3], however, we make a new approach. In fact, since the functions M and f are only continuous, we can not use standard arguments on the Nehari manifold as in [2] and [3]. To overcome this difficulty we use a method introduced in [5].

*Faculdade de Matemática , UFPA, Pa, Brasil, giovany@ufpa.br, supported by CNPq/PQ 301242/2011-9 and 200237/2012-8
†Faculdade de Matemática , UFPA, Pa, Brasil, joaojunior@ufpa.br, supported by CAPES - Brazil - 7155123/2012-9

On the other hand, due to presence of function M and the fact that domain is unbounded, we have some additional difficulty. For example, in general, the weak limit of the Palais-Smale sequences is not weak solution of the autonomous problem and therefore becomes more delicate to show that truncated functional satisfies the Palais-Smale condition.

2 Mathematical Results

Before to claim our main result we introduce some definitions.

Let X be a topological space and A a closed subset of X. We say A is contractible in X if there exists $h \in C([0,1] \times A, X)$ such that, for every $u, v \in A$,

$$h(t,u) = u \text{ and } h(1,u) = h(1,v).$$

We call category of A in X and denote by $cat_X A$ to the least integer k such that there exists k closed subsets and contractibles in X, $A_1, \ldots, A_n$ satisfying

$$A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i.$$

Now, we are ready to claim our main result about (P_ε) problem.

Theorem 2.1. *Suppose that the functions M, V and f are as above. Then, given $\delta > 0$ there is $\overline{\varepsilon} = \overline{\varepsilon}(\delta) > 0$ such that the problem (P_ε) has at least $cat_{\Pi_\delta}(\Pi)$ positive solutions, for all $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon})$. Moreover, if u_ε denotes one of these positive solutions and $\eta_\varepsilon \in R^3$ its global maximum, then*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} V(\eta_\varepsilon) = V_0 := \inf_{x \in \mathbb{R}^3} V(x),$$

where

$$\Pi = \{x \in \Omega : V(x) = V_0\} \neq \emptyset$$

and

$$\Pi_\delta = \{x \in \mathbb{R}^3 : dist(x, \Pi) \leq \delta\}.$$

References

[1] Alves, C. O. and Figueiredo, G. M. - *Nonlinear perturbations of a periodic Kirchhoff equation in $\mathbb{R}^N$*, Non. Anal., 75(2012)2750-2759.

[2] Alves, C. O. and Figueiredo, G. M. - *Multiplicity of positive solutions for a quasilinear problem in $\mathbb{R}^N$ via penalization method.*, adv. Non. studies, v. 5, n. 4, (2005)551-572.

[3] Del Pino, M. and Feler, P. - *Local Mountain Pass for semilinear elliptic problems in unbounded domains.*, Calc. Var. 4(1996)121-137.

[4] He, X. and Zou, W. - *Existence and concentration of positive solutions for a Kirchhoff equation in $\mathbb{R}^3$*. JDE, 252(2012)1813-1834.

[5] Szulkin, A. and Weth, T. - *The method of Nehari manifold, Handbook of Nonconvex Analysis and Applications,* D.Y. Gao and D. Montreanu eds., International Press, Boston, (2010)597-632.

[6] Wang, J. , Tian, L. , Xu, J. and Zhang, F. - *Multiplicity and concentration of positive solutions for a Kirchhoff type problem with critical growth,* JDE, 253(2012)2314-2351.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

REMARKS ON A NONLINEAR WAVE EQUATION IN A NONCYLINDRICAL DOMAIN

G. O. ANTUNES * L. A. MEDEIROS † I. F. LOPEZ ‡ & M. D. DA SILVA §

1 Introduction

We consider a nonlinear wave equation in a domain whose boundary is moving in time. Let T be a positive real number and let $\{\Omega_t\}_{t\in[0,T]}$ be a family of bounded open sets of $\mathbb{R}^n$, with regular boundary Γ_t. We denote by $\widehat{Q}$ the noncylindrical domain of $\mathbb{R}^{n+1}$ defined by $\widehat{Q} = \bigcup_{0<t<T} \{\Omega_t \times \{t\}\}$ with regular lateral boundary $\widehat{\Sigma} = \bigcup_{0<t<T} \{\Gamma_t \times \{t\}\}$. We shall investigate the existence of solutions to the following problem:

$$\left|\begin{array}{l} u'' - \Delta u + |u|^\rho = f \quad \text{in} \quad \widehat{Q} \\ u = 0 \quad \text{on} \quad \widehat{\Sigma} \\ u(x,0) = u_0(x), u'(x,0) = u_1(x) \quad \text{in} \quad \Omega_0, \end{array}\right. \tag{1.1}$$

where the derivatives are in the sense of the theory of distributions, Δ represents the usual Laplace operator in $\mathbb{R}^n$ and ρ is a postive real number satisfying some conditions.

The methodology, cf. Lions [1], consists of transforming (1.1) by means of a perturbation depending of a parameter $\varepsilon > 0$, into a problem defined in a cylindrical domain Q. Then we have to solve the cylindrical problem and get estimates to take the limit when $\varepsilon \to 0$.

2 Notations, Assumptions and Main Result

As usual we represent by $L^2(\Omega)$ the Lebesgue space of square integrable functions on Ω. We denote by $L^p\left(0,T;L^2(\Omega_t)\right)$ and $L^p\left(0,T;H_0^1(\Omega_t)\right)$ the following spaces

$$L^p\left(0,T;L^2(\Omega_t)\right) = \left\{v \in L^p\left(0,T;L^2(\Omega)\right);\quad v(t) \in L^2(\Omega_t)\right\}, 1 \le p \le \infty$$

and

$$L^p\left(0,T;H_0^1(\Omega_t)\right) = \left\{v \in L^p\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right);\quad v(t) \in H_0^1(\Omega_t)\right\}, 1 \le p \le \infty.$$

We develop our work under the following assumptions:

(H1) *(Geometric condition)* The family $\{\Omega_t\}_{t\in[0,T]}$ is increasing in the following sense, if $t_1 \le t_2$ then $\Omega_{t_1} \subseteq \Omega_{t_2}$.

(H2) *(Regularity condition)* If $v \in H_0^1(\Omega)$ and $v = 0$ a.e. in $\Omega - \Omega_t$ then $v \in H_0^1(\Omega_t)$;

(H3) *(Immersion condition)* $1 < \rho \le \frac{n}{n-2}$, for $n \ge 3$ and $\rho > 1$, for $n = 2$.

We observe that, as $\widehat{Q}$ is limited, there exists a cylinder $Q = \Omega \times (0,T)$ such that $\widehat{Q} \subset Q$.

For each $\varepsilon > 0$ we are looking for $u_\varepsilon : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ solution of the problem:

*Departamento de Matemática e Estatística , UNIRIO, RJ, Brasil, gladson.antunes@uniriotec.br
†Instituto de Matemática, UFRJ, RJ, Brasil, e-mail: luizadauto@gmail.com
‡Instituto de Matemática, UFRJ, RJ, Brasil, e-mail: ivolopez@ufrj.br
§Instituto de Matemática, UFRJ, RJ, Brasil, e-mail: darci@im.ufrj.br

$$\left|\begin{array}{l} u_{\varepsilon}^{''}-\Delta u_{\varepsilon}+\left|u_{\varepsilon}\right|^{\rho}+\frac{1}{\varepsilon}Mu_{\varepsilon}=\widetilde{f} \quad \text{in} \quad Q \\ u_{\varepsilon}=0 \quad \text{in} \quad \Sigma \\ u_{\varepsilon}\left(x,0\right)=\widetilde{u_0}\left(x\right), u_{\varepsilon}^{'}\left(x,0\right)=\widetilde{u_1}\left(x\right) \quad \text{in} \quad \Omega, \end{array}\right. \tag{2.2}$$

where M is defined by

$$M\left(x,t\right)=\left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{if} \quad (x,t)\in Q-\left(\widehat{Q}\cup\left\{\Omega_0\times\left\{0\right\}\right\}\right) \\ 0 & \text{if} \quad (x,t)\in \widehat{Q}\cup\left\{\Omega_0\times\left\{0\right\}\right\}, \end{array}\right.$$

$\widetilde{f}$ is a extension for f, null out of $\widehat{Q}$, $\widetilde{u_0}\left(x\right)$ and $\widetilde{u_1}\left(x\right)$ are extensions for $u_o\left(x\right)$ and $u_1\left(x\right)$ respectively, null out of Ω_0.

We call attention to the fact that the nonlinearity $\left|u_{\varepsilon}\right|^{\rho}$ causes troubles in the process of calculus of a priori estimate for the problem (2.2), by energy method, because we get in certain point of our proof a term of the type

$$\int_{\Omega}\left|\nabla u_{\varepsilon}\left(t\right)\right|^2 dx+\frac{1}{\rho+1}\int_{\Omega}\left|u_{\varepsilon}\left(t\right)\right|^{\rho}u_{\epsilon}\left(t\right)dx$$

which one cannot control the sign. At this point of the proof we employ an argument contained in Tartar [2] plus contradiction process.

The symbols $\left|\cdot\right|$ and $\left\|\cdot\right\|$ denote the norms of the Hilbert spaces $L^2\left(\Omega\right)$ and $H_0^1\left(\Omega\right)$ respectively.

The main result is contained in the following Theorem:

Theorem 2.1. *Given $u_0\in H_0^1\left(\Omega_0\right)$, $u_1\in L^2\left(\Omega_0\right)$ and $f\in L^1\left(0,\infty;L^2\left(\Omega_t\right)\right)$. Set*

$$\gamma=\left(\left|\widetilde{u}_1\right|^2+\left\|\widetilde{u}_0\right\|+1\rho+1\int_{\Omega}\left|\widetilde{u}_0\right|^{\rho}\widetilde{u}_0 dx+\left\|\widetilde{f}\right\|_{L^1\left(0,\infty;L^2\left(\Omega_t\right)\right)}\right)$$
$$\left(1+\left\|\widetilde{f}\right\|_{L^1\left(0,\infty;L^2\left(\Omega_t\right)\right)}\right)e^{\left\|\widetilde{f}\right\|_{L^1\left(0,\infty;L^2\left(\Omega_t\right)\right)}},$$

where $\widetilde{u}_0$, $\widetilde{u}_1$and $\widetilde{f}$ are extensions of u_0, u_1 and f, respectively, and were defined above. Suppose, in addition to the hypotheses (H1)-(H3), that

$$\left\|\widetilde{u}_0\right\|<\left(\frac{1}{2C_0^{\rho+1}}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} \tag{2.3}$$

and

$$\gamma<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2C_0^{\rho+1}}\right)^{\frac{2}{\rho-1}}, \tag{2.4}$$

where C_0 is the constant of the embedding of $H_0^1\left(\Omega\right)$ into $L^{\rho+1}\left(\Omega\right)$. Then, there exists a global solution for the problem (1.1), satisfying $u\in L^{\infty}\left(0,T;H_0^1\left(\Omega_t\right)\right)$ and $u'\in L^{\infty}\left(0,T;L^2\left(\Omega_t\right)\right)$.

References

[1] LIONS, J. L. - *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéares*, Dunod-Gauthier Villars, Paris, First edition, 1969.

[2] TARTAR, L. - *Topics in Nonlinear Analysis*, Univ. Paris Sud. Dep. Math., Orsay, France, 1978.

[3] MEDEIROS, L. A., LÍMACO, J. AND FROTA, C. L. - *On wave equations without global a priori estimates*, Bol. Soc. Paranaense de Matemática, v. 30-2, pp. 12-32, 2012.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

STABILIZABILITY AND CRITICAL SET RESTRICTIONS FOR THE ZAKHAROV-KUZNETSOV EQUATION

Gleb G. Doronin * & Nikolai A. Larkin †

We are concerned with initial-boundary value problems (IBVPs) posed on bounded rectangles and on a strip located at the right half-plane $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0\}$ for the Zakharov-Kuznetsov (ZK) equation

$$u_t + (1 + u)u_x + u_{xxx} + u_{xyy} = 0, \tag{0.1}$$

that is a two-dimensional analog of the well-known Korteweg-de Vries (KdV) equation

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{0.2}$$

with clear plasma physics applications [18].

Equations (0.1) and (0.2) are typical examples of so-called dispersive equations which attract considerable attention of both pure and applied mathematicians in the past decades. The KdV equation is probably more studied in this context. The theory of the initial-value problem (IVP) for (0.2) is considerably advanced today [1, 3, 8, 9, 15, 17].

Recently, due to physics and numerics needs, publications on initial-boundary value problems in both bounded and unbounded domains for dispersive equations have been appeared [2, 4, 5, 10, 19]. In particular, it has been discovered that the KdV equation posed on a bounded interval possesses an implicit internal dissipation. This allowed to prove the exponential decay rate of small solutions for (0.2) posed on bounded intervals without adding of any artificial damping term [10]. Similar results were proved for a wide class of dispersive equations of any odd order with one space variable [7].

However, (0.2) is a satisfactory approximation for real waves phenomena while the equation is posed on the whole line ($x \in \mathbb{R}$); if cutting-off domains are taken into account, (0.2) is no longer expected to mirror an accurate rendition of reality. The correct equation in this case (see, for instance, [1, 19]) should be written as

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{0.3}$$

Once bounded domains are considered as a spatial region of waves propagation, their sizes appear to be restricted by certain critical conditions. An important result regarding these conditions is the explicit description of a spectrum-related countable critical set

$$\mathcal{N} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{k^2 + kl + l^2}\,; \quad k, l \in \mathbb{N}.$$

While studying the controllability and stabilization of solutions for (0.3), the set $\mathcal{N}$ provides qualitative difficulties when the length of a spatial interval coincides with some of its elements [14]. In fact, it suffices to see that function $u(x) = 1 - \cos x$ is a stationary (not decaying) solution for linearized (0.3) posed on $(0, 2\pi)$, and $2\pi \in \mathcal{N}$.

Quite recently, the interest on dispersive equations became to be extended to multi-dimensional models such as Kadomtsev-Petviashvili (KP) and ZK equations. As far as the ZK equation is concerned, the results on both IVP and IBVP can be found in [6, 12, 13]. Our work has been inspired by [16] where (0.1) posed on a strip bounded in x variable was concerned with. Studying this paper, we have found that the term u_{xyy} in (0.1) delivers additional

*Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, 87020-900, Maringá - PR, Brazil; ggdoronin@uem.br
†Supported by Araucária Foundation; e-mail: nlarkine@uem.br

dissipation which may ensure decay of small solutions. For instance, the term u_{xyy} provides the exponential decay of small solutions in a channel-type domain; namely, in a half-strip unbounded in x direction [11]. However, there are restrictions on a width of a channel. The following questions arise:

- Whether width limitations for these strip-like domains are somewhat technical?
- Are there some critical rectangles or strips in which solutions of ZK do not decay likewise in the KdV case?

In the present communication we put forward the hypotheses that there are critical restrictions on the size of both bounded and unbounded domains (like $\mathcal{N}$ for (0.3)). Our main results are:

1. the existence and uniqueness of global solutions of (0.1) posed both on bounded rectangles and on a strip;
2. the exponential decay rate of these solutions for sufficiently small initial data;
3. explicit description of critical size conditions for linear (0.1);
4. comparison between size restrictions for linear and nonlinear models.

References

[1] J. L. Bona and R. W. Smith, The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation, Phil. Trans. Royal Soc. London Series A 278 (1975), 555–601.

[2] J. L. Bona, S. M. Sun and B.-Y. Zhang, A nonhomogeneous boundary-value problem for the Korteweg-de Vries equation posed on a finite domain, Comm. Partial Differential Equations 28 (2003), 1391–1436.

[3] J. Bourgain, On the compactness of the support of solutions of dispersive equations, Int. Math. Res. Notices 9 (1997), 437–447.

[4] B. A. Bubnov, Solvability in the large of nonlinear boundary-value problems for the Kortewegde Vries equation in a bounded domain (Russian), Differentsialnye uravneniya 16 (1980), 34–41. Engl. transl. in: Diff. Equations 16 (1980), 24–30.

[5] T. Colin and J.-M. Ghidaglia, An initial-boundary-value problem for the Korteweg-de Vries Equation posed on a finite interval, Adv. Differential Equations 6 (2001), 1463–1492.

[6] A. V. Faminskii, Well-posed initial-boundary value problems for the Zakharov-Kuznetsov equation, Electronic Journal of Differential equations 127 (2008), 1–23.

[7] A. V. Faminskii and N. A. Larkin, Initial-boundary value problems for quasilinear dispersive equations posed on a bounded interval, Elec. J. Diff. Equations 2010 (2010), 1–20.

[8] T. Kato, On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de- Vries equations, Advances in Mathematics Suplementary Studies, Stud. Appl. Math. 8 (1983), 93–128.

[9] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation and the contraction principle, Commun. Pure Appl. Math. 46 (1993), 527–620.

[10] N. A. Larkin, Korteweg-de Vries and Kuramoto-Sivashinsky Equations in Bounded Domains, J. Math. Anal. Appl. 297 (2004), 169–185.

[11] N. A. Larkin and E. Tronco, Decay of small solutions for the Zakharov-Kuznetsov equation posed on a half-strip, Bol. Soc. Paran. Mat. 31 (2013), 57–64. http://www.spm.uem.br/bspm/pdf/next/Art6.pdf doi:10.5269/bspm.v31i1.15303

[12] F. Linares, A. Pastor and J.-C. Saut, Well-posedness for the ZK equation in a cylinder and on the background of a KdV Soliton, Comm. Part. Diff. Equations 35 (2010), 1674–1689.

[13] F. Linares and J.-C. Saut, The Cauchy problem for the 3D Zakharov-Kuznetsov equation, Disc. Cont. Dynamical Systems A 24 (2009), 547–565.

[14] L. Rosier, Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 2 (1997), 33–55.

[15] J. C. Saut, Sur quelques généralisations de l'équation de Korteweg-de Vries (French), J. Math. Pures Appl. 58 (1979), 21–61.

[16] J.-C. Saut and R. Temam, An initial boundary-value problem for the Zakharov-Kuznetsov equation, Advances in Differential Equations 15 (2010), 1001–1031.

[17] R. Temam, Sur un problème non linéaire (French), J. Math. Pures Appl. 48 (1969), 159–172.

[18] V. E. Zakharov and E. A. Kuznetsov, On three-dimensional solitons, Sov. Phys. JETP 39 (1974), 285–286.

[19] B.-Y. Zhang, Exact boundary controllability of the Korteweg-de Vries equation, SIAM J. Control Optim. 37 (1999), 543–565.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

NONLINEAR BOUNDARY DAMPING FOR NONLINEAR KIRCHHOFF PLATES

H. R. CLARK [*], M. R. CLARK [†], A. T. LOURÊDO [‡], & A. M. OLIVEIRA [§]

1 Introduction

Let Ω be a bounded and set of $\mathbb{R}^2$ with its boundary Γ a C^4- class. Suppose that Γ is made up of two parts Γ_0 and Γ_1, both with positive measure and $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1$ is a empty set.

Let $u : \Omega \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ be a function which represents an approach for small transverse vibrations of a bar. This kind of phenomenon can be described by a nonlinear biharmonic equation with variable coefficients. Our goal here will be developed a study on these kind of equations. Precisely, we consider the equation

$$u'' + \Delta^2 u - \eta(t)\Delta u + \theta(u) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \times (0, +\infty), \tag{1.1}$$

subjected to the initial and boundary conditions

$$\begin{aligned}
&u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x) \quad \text{in} \quad \Omega,\\
&u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_0 \times (0, +\infty),\\
&\frac{\partial \triangle u}{\partial \nu} + (1-\mu)\frac{\partial B_1 u}{\partial \tau} - \eta(t)\frac{\partial u}{\partial \nu} = \delta(x, u') \quad \text{on} \quad \Gamma_1 \times (0, +\infty),\\
&\Delta u + (1-\mu)B_2 u = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_1 \times (0, +\infty).
\end{aligned} \tag{1.2}$$

The objects of initial-boundary value problem (1.1)-(1.2) are defined as follow: $\eta : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $\delta : \Gamma_1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are given functions. The exterior unit normal vector at each point $x \in \Gamma$ directed to the outwards of Ω is denoted by $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ and $\tau = (-\nu_2, \nu_1)$ is the unit tangential vector defined at each point $x \in \Gamma$ and oriented in the positive direction of Γ. As $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ then the vector $\mathbf{x} := (x, y)$ and thus the operators B_1 and B_2 are defined by

$$\begin{aligned}
B_1 u(\mathbf{x}, t) &= \nu_1\nu_2[u_{yy}(\mathbf{x}, t) - u_{xx}(\mathbf{x}, t)] + (\nu_1^2 - \nu_2^2)u_{xy}(\mathbf{x}, t),\\
B_2 u(\mathbf{x}, t) &= 2\nu_1\nu_2 u_{xy}(\mathbf{x}, t) - \nu_1^2 u_{yy}(\mathbf{x}, t) - \nu_2^2 u_{xx}(\mathbf{x}, t),
\end{aligned}$$

and $0 < \mu < 1/2$ is a constant known as coefficient of Poisson. Finally, $\frac{\partial B_1}{\partial \tau}$ means the tangential derivative of the operator B_1 in the direction of τ. The other elements of (1.1)-(1.2) are usual.

2 Mathematical Results

The main results of this work related to problem (1.1)-(1.2) are: existence and uniqueness of solutions, and exponential decay rate associated with the energy. Thus, we have the following results.

[*]Instituto de Matemática e Estatística, UFF, RJ, Brasil, hclark@vm.uff.br
[†]Departamento de Matemática, UFPI, PI, Brasil, mclark@ufpi.edu.br
[‡]Instituto de Matemática, UEPB, PB, Brasil, aldotl@cct.uepb.edu.br
[§]Departamento de Matemática, UFPI, PI, Brasil, marinho@ufpi.edu.br

Theorem 2.1. *Suppose, for $T > 0$ arbitrary, that*

(1) $\eta \in Lips([0,T);\mathbb{R})$, $\eta(t) \geq \eta_0 > 0$ *and* $\eta(t)t \geq 0$;
(2) $\delta \in Lips(\overline{\Gamma}_1 \times \mathbb{R};\mathbb{R})$ *such that* $[\delta(x,s) - \delta(x,r)](s-r) \geq \delta_0(s-r)^2$, $\delta(x,0) = 0$, $\delta_0 > 0$;
(3) $\theta \in Lips(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *with* $\theta(0) = 0$ *and* $\theta(s)s \geq 0$.

Then for each set of initial data $(u_0,\, u_1) \in V \cap H^4(\Omega) \times V$ *such that*

$$\frac{\partial \Delta u_0}{\partial \nu} - \eta(0)\frac{\partial u_0}{\partial \nu} + (1-\mu)\frac{\partial B_1 u_0}{\partial \tau} = \delta(u_1) \quad \textit{and} \quad \Delta u_0 + (1-\mu)B_2 u_0 = 0 \ \textit{ on } \ \Gamma_1,$$

there exists a unique function $u : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ *solution of problem* (1.1)-(1.2) *in the class*

$$u \in L^\infty(0,T;V \cap H^4(\Omega)), \quad u' \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)), \quad u'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

and moreover u *satisfies* (1.1)-(1.2) *in the following sense*

$$\begin{aligned}
&u'' + \Delta^2 u - \eta\Delta u + \theta(u) = 0 \ \textit{ in } \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\\
&\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} - \eta\frac{\partial u}{\partial \nu} + (1-\mu)\frac{\partial B_1 u}{\partial \tau} = \delta(u') \ \textit{ in } \ L^\infty(0,T;H^{3/2}(\Gamma_1)),\\
&\Delta u + (1-\mu)B_2 u = 0 \ \textit{ in } \ L^\infty(0,T;H^{1/2}(\Gamma_1)),
\end{aligned}$$

where $V = \left\{u \in H^2(\Omega) : u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \Gamma_0\right\}$.

Let $x \in \mathbb{R}^2 \mapsto m(x) := x - x^0 \in \mathbb{R}^2$ be a function for fixed $x^0 \in \mathbb{R}^2$ and $\Gamma_0 = \{x \in \Gamma;\ m(x)\cdot\nu(x) \leq 0\}$ and $\Gamma_1 = \{x \in \Gamma;\ m(x)\cdot\nu(x) > 0\}$, where " $\cdot$ " is the usual scalar product in $\mathbb{R}^2$. We also will assume that

$$\begin{aligned}
&\eta(x,s) = [m(x)\cdot\nu(x)]\eta_1(s) \ \text{ for all } \ x \in \Gamma_1,\\
&[\eta_1(s) - \eta_1(r)]\,(s-r) \geq \overline{\eta}_1(s-r)^2 \ \text{ for all } \ s,r \in \mathbb{R} \ \text{ and } \ \overline{\eta}_1 > 0,\\
&|\eta_1(s)|_{\mathbb{R}} \leq \widehat{\eta}_1|s|_{\mathbb{R}} \ \text{ for all } \ s \in \mathbb{R}, \ \textit{where } \eta_1 \in C^0(\overline{\Gamma}_1;\mathbb{R}).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

In these conditions we can state the following result.

Theorem 2.2. *Suppose the hypotheses of Theorem 2.1 and* (2.1) *hold. Then there exist positive real constants* α *and* β *such that the energy*

$$E(t) = |u'(t)|^2 + \|u(t)\|^2 + \eta(t)|\nabla u(t)|^2 + \int_\Omega \Theta(u(s))ds$$

satisfies

$$E(t) \leq \alpha E(0)\exp(-\beta\, t) \quad \textit{for all} \quad t \geq 0,$$

where $\Theta(t) = \int_0^t \theta(s)ds$.

References

[1] KANG, J-P., - *General decay for Kirchhoff plates with a boundary condition of memory type,* Boundary Value Problems, (2012) 1-11.

[2] KOMORNIK, V., - *Exact Controllability and Stabilization,The Multiplier Method,* John Wiley & Sons and Masson, 1994.

[3] LAGNESE, J. E., - *Modelling Analysis and Control of Plates,* Masson Springer Verlay, Paris, 1989.

[4] LAGNESE, J. E., - *Some problems related boundary stabilization fo Plates,* Lectures notes in control and Infor. Scie. 97, (1986) 274-281.

[5] PINEDO, C. J. Q. & MILLA MIRANDA, M., - *Estabilização na fronteira para a equação de ondas com operador biharmônico,* IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1998.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

ASYMPTOTICALLY PERIODIC SOLUTION OF NEUTRAL PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INFINITE DELAY

HERNÁN R. HENRÍQUEZ *
&
CLAUDIO CUEVAS AND ALEJANDRO CAICEDO †

In this work we discuss the existence and uniqueness of asymptotically almost automorphic mild solutions to some abstract nonlinear integro-differential equation of neutral type with infinite delay.

1 Introduction

The study of the existence of periodic solutions is one of the most interesting and important topics in the qualitative theory of differential equations due to both its mathematical interest and ist applications in different field, such that as physics, economy, mathematical biology, control theory, engineering among others.

Motivated by the fact that abstract neutral functional differential equations (abbreviated, ANFDE) arise in many areas of applied mathematics, this type of equations has received much attention in the last decades. In particular, the existence of almost periodic solutions of ANFDE has been considered by many authors. We refer the reader to [1, 2, 3, 4, 5, 6] and the references therein.

2 Existence Results

Our objective in this work is to establish existence of asymptotically almost automorphic mild solutions for a class of semi-linear ANFDE of first order, which includes the abstract differential equation and the abstract Volterra integro-differential equation. Throughout this work, X is a Banach space endowed with a norm $\|\cdot\|$. We denote by $A, B(t) : Dom(A) \subset X \to X$, $t \geq 0$, closed linear operators defined on the subspace $Dom(A)$, which is independent of t. This work is devoted to study of the existence and uniqueness of asymptotically almost automorphic and mild solutions for the integro- differential equation of neutral type with infinite delay

$$\frac{d}{dt}D(t, x_t) = AD(t, x_t) + \int_0^t B(t-s)D(s, x_s)ds + g(t, x_t), \quad t \geq 0, \tag{2.1}$$

$$x_0 = \phi \in \mathcal{B} \tag{2.2}$$

where $x(t) \in X$, the function $x_t : (-\infty, 0] \to X$, that denotes the segment of $x(\cdot)$ at t, is given by $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $D(t, \Psi) = \Psi(0) + f(t, \Psi)$, and $f, g : [0, \infty) \times \mathcal{B} \to X$ are appropriate functions. We assume that x_t for $t \geq 0$ belong to a phase space $\mathcal{B}$ defined axiomatically.

In this section we study the existence of asymptotically almost automorphic mild solutions of problem (2.1)-(2.2). We assume that $f, g : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B} \to X$ are continuous functions. We begin by studying the existence of compact asymptotically almost automorphic mild solutions. We introduce the followings conditions: Lipschitz condition for a function $f : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B} \to X$.

*Departamento de Matemática, USACH, Universidad de Santiago, Chile , hernan.henriquez@usach.cl
†Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, UFPE, PE, Brasil, e-mail: cch@dmat.ufpe.br, alejocro@gmail.com

(H) There is constant $L_f \geq 0$ such that

$$\|f(t,\Psi_1) - f(t,\Psi_2)\| \leq L_f \|\Psi_1 - \Psi_2\|_{\mathcal{B}}$$

for all $(t,\Psi) \in R \times \mathcal{B}, i = 1,2$, and the condition

(R4) There is a positive function $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^+)$ such that $\|R(t)\| \leq \varphi(t)$for all $t \geq 0$.

Theorem 2.1. *Let $\mathcal{B}$ a fading memory space. Assume that the resolvent operator $R(\cdot)$ satisfies condition (R4), $R(\cdot)\phi(0)$, $R(\cdot)f(0,\phi(0)) \in AAA_c\ (X)$. Let $f, g \in AAA_c(\mathbb{R}^+ \times \mathcal{B}, X)$ be functions that satisfy (H). If $K(L_f + \|\phi\|_1 L_g) < 1$, then the problem (2.1)-(2.2) has a unique mild solution $x \in AAA_c(X)$.*

When f and g satisfy a local Lipschitz condition, modifying slightly the argument used in the proof of Theorem 2.1 we can establish a result of existence of local type.

Theorem 2.2. *Let $\mathcal{B}$ be a fading memory space. Assume that the resolvent operator $R(\cdot)$ satisfies condition (R4), $R(t) \leq \widetilde{M}$ for $t \geq 0$, $R(t)\phi(0) \to 0$ and $R(t)f(0,\phi(0)) \to 0$ as $t \to \infty$. Let $f, g \in AAA_c(\mathbb{R}^+ \times \mathcal{B}, X)$ be functions that satisfy the Lipschitz conditions*

$$\begin{aligned} \|f(t,\Psi_1) - f(t,\Psi_2)\| &\leq L_f(r)\|\Psi_1 - \Psi_2\|_{\mathcal{B}}, \\ \|g(t,\Psi_1) - g(t,\Psi_2)\| &\leq L_g(r)\|\Psi_1 - \Psi_2\|_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

for each $t \geq 0$ and $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{B}$ such that $\|\Psi_1\|_{\mathcal{B}} \geq r$, $\|\Psi_2\|_{\mathcal{B}} \geq r$, where $L_f, L_g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ are nondecreasing continuous functions such that $L_f(0) = L_g(0) = 0$ and $f(t,0) = g(t,0) = 0$ for all $t \geq 0$. Then there exists $\epsilon > 0$ such that for each $\phi \in \mathcal{B}$ satisfying $\|\phi\|_{\mathcal{B}} \leq \epsilon$, there is a unique compact asymptotically almost automorphic mild solution of problem (2.1)-(2.2).

References

[1] ABBAS, S. AND BAHUGUNA, D. - Almost periodic solutions of neutral functional differential equations *Comp. Math. Appl.*, **55**,(2008), 2593-2601.

[2] CAICEDO, A. AND CUEVAS, C. AND HENRÍQUEZ, H. - *Asymptotic periodicity for a class of partial integro-differential equations*, ISRN Mathematical Analysis, 2011.

[3] HALE, J. AND VERDUYN LUNEL, S.M. - *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[4] HENRÍQUEZ, H.R. AND HERNÁNDEZ, E. AND DOS SANTOS, J.C. - *Asymptotically almost periodic and almost periodic solutions for partial neutral integro-differential equations.*- Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, 26 (2007), 363-375.

[5] HERNANDEZ, E. AND HENRÍQUEZ, H.R. - *Existence of periodic solutions of partial neutral functional-differential equations with unbounded delay*, J. Math. Anal. Appl., 221 (1998), 499-522.

[6] WU, J. - *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*- Springer-Verlag, New York, 1996.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

Dynamical properties of explicit LL-Runge Kutta methods for ODEs

hugo de la cruz * & Juan c. jimenez †

1 Introduction

For investigating the dynamics of continuos-time systems described by Ordinary Differential Equations (ODEs), one first step is to integrate to obtain trajectories. Since most ordinary differential equations are not soluble analytically, numerical integration is an important way to obtain information about the system. For this, the dynamics of the map produced by the discretization (viewed as a discrete dynamical system) should correspond closely to the dynamics of the differential equation. Is well known that conventional numerical methods used universally (e.g., Runge-Kutta, predictor-corrector, Taylor-based and others) produce misleading dynamic in the integration of ODEs. Therefore is desirable to construct numerical integrators computationally feasible and able to preserve, as much as possible, the dynamic of the underlined original system.

In this work, motivated by recent progress in efficient algorithms and the stable procedures now available for computing matrix exponentials (see, e.g., [3], [4]), an alternative approach to construct exponential-based methods based on the Local Linearization approach is presented and dynamical properties of the discrete map resulting of the discretization are studied. This class of methods are derived by combining the LL method with conventional explicit Runge Kutta methods in a stable way (see [2]).

As a main result of this work it is obtained that the LLRK integrators have a number of convenient dynamical properties: A-stability, regularity under quite general conditions, preservation of the dynamics of the exact solution around hyperbolic equilibrium points and periodic orbits and unlike the majority of the exponential integrators, the convergence, stability and the above mentioned dynamical properties are satisfied not only for the discretizations but also for the numerical schemes that implement them in practice.

2 LLRK methods

Consider the initial-value problem

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.1}$$

Let us suppose that $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d\right)$, $\mathbf{f}_\mathbf{x}$ the Jacobian of the function $\mathbf{f}$. Starting from the initial value $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_{t_0}$, approximations $\{\mathbf{X}_i\}$ to $\{\mathbf{X}(t_i)\}$, $(i = 1, 2, \ldots, N)$ can be obtained recursively as follows:

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n + \mathbf{\Phi}(t; t_n, \mathbf{X}_n) = [\mathbf{I}_{d-1\times d-1} \quad \mathbf{0}_{d-1\times 1}] \exp\left(\begin{bmatrix} \mathbf{f}_\mathbf{x}(\mathbf{X}_n) & \mathbf{f}(\mathbf{X}_n) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}(t - t_n)\right)[\mathbf{0}_{1\times d-1} \quad \mathbf{1}]^T + \mathbf{Z}_n(t_{n+1}),$$

where $\mathbf{Z}_n(t_{n+1})$ is an approximation in $t = t_{n+1}$ to the solution $\mathbf{R}(t)$ of the equation

$$d\mathbf{R}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{R}(t))\, dt, \qquad t \in [t_n, t_{n+1}], \qquad \mathbf{R}(t_n) = \mathbf{0}, \tag{2.2}$$

with $\mathbf{g}(t, \mathbf{R}) = \mathbf{f}(\mathbf{X}_n + \mathbf{\Phi}(t; t_n, \mathbf{X}_n) + \mathbf{R}) - \mathbf{f}_\mathbf{x}(\mathbf{X}_n)\mathbf{\Phi}(t; t_n, \mathbf{X}_n) - \mathbf{f}(\mathbf{X}_n)$.

*Escola de Matemática Aplicada , EMAp-FGV, RJ, Brasil, hugo.delacruz@fgv.br
†Instituto de Cibernetica, Matematica y Fisica, ICIMAF, Havana, Cuba, e-mail: jcarlos@icmf.inf.cu

The idea is to approximate $\mathbf{R}(t_{n+1})$ from the initial condition $\mathbf{R}(t_n) = \mathbf{0}$ in (2.2), by one step of an explicit Runge-Kutta method. The resulting integrator will be called LLRK scheme. Hence, when the classic RK order p is used, the corresponding resultant method ($\mathbf{LL_RK}_p$):

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n + \mathbf{\Phi}(t_{n+1}; t_n, \mathbf{X}_n) + h \sum_{j=1}^{s} \mathbf{b}_j k_j, \tag{2.3}$$

where $k_i = \mathbf{g}(t_n + \mathbf{c}_i h, h \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{a}_{ij} k_j), \quad i = 1, .., s$, with coefficients: $c = [\mathbf{c}_i]$, $A = [\mathbf{a}_{ij}]$, $b = [\mathbf{b}_j]$ (see [1]).

3 Dynamical properties

From the dynamical point of view, for the map resulting of the LLRK discretization we have the properties:

Theorem 3.1. *The numerical schemes obtained from (2.3) are A-stable*

Theorem 3.2. *Suppose that the vector field* $\mathbf{f}$ *and its derivatives up to order* p *are defined and bounded on* $\mathbb{R}^d$. *Then*

i) All equilibrium points of the given ODE (2.1) are fixed points of any LLRK$_p$ *discretization.*

ii) If $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1$, *then any LLRK discretization is regular for step-sizes* h *small enough.*

The next two theorems deal with the dynamical behavior of the LLRK discretizations in the neighborhood of steady states:

Theorem 3.3. *The phase portrait of (2.1) near a hyperbolic equilibrium point is correctly reproduced by LLRK discretizations for sufficiently small step-sizes. Also, any trajectory of equation (2.1) can be correctly approximated by a trajectory of the LLRK discretization if the discrete initial value is conveniently adjusted. Furthermore, any trajectory of a LLRK discretization approximates some trajectory of the continuous system with a suitably selection of the starting point.*

Theorem 3.4. *Suppose that the equation (2.1) has a hyperbolic closed orbit* $\Gamma = \{\overline{\mathbf{x}}(t) : t \in [0, T]\}$ *of period* T *in an open bounded set* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. *Let* $\overline{\Omega}$ *be the closure of* Ω, *then: For* h *sufficiently small, the LLRK discretizations have a closed invariant curve* Γ_h , *i.e.,* $(1 + h\varphi(.; h))(\Gamma_h) = \Gamma_h$, *which converges to the periodic orbit* Γ *of the continuous system.*

References

[1] Butcher, J. C. (1987). *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations. Runge-Kutta and General Linear Methods.*John Wiley & Sons: Chichester.

[2] de la Cruz H., Biscay R.J., Carbonell F., Jimenez J.C., Ozaki T. Local Linearization-Runge Kutta (LLRK) Methods for Solving Ordinary Differential Equations, Lectures Notes in Computer Science, (2007) 132-139.

[3] Golub, G. H. and Van Loan, C. F. (1996, 3th edition). *Matrix Computations.*The Johns Hopkins University Press: Baltimore and London.

[4] Higham, N. J. (2004). The scaling and squaring method for the matrix exponential revisited. Numerical Analysis Report 452, Manchester Centre for Computational Mathematics.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

AN ABSTRACT RESULT ON COHEN STRONGLY SUMMING LINEAR OPERATORS

JAMILSON R. CAMPOS *

We present an abstract result that characterizes the coincidence of certain classes of linear operators with the class of Cohen strongly summing linear operators. As a consequence, we establish a few alternative characterizations for the class of Cohen strongly summing linear operators.

1 Introduction

It is a folklore that in infinite dimensional spaces always exists unconditionally convergent series which does not converge absolutely. So, A. Grothendieck [5] introduces the concept of absolutely summing operators as those that improve the convergence of series, towards transforming an unconditionally convergent series in an absolutely convergent one. Motivated by the fact that the class of absolutely summing operators is not closed under conjugation, J. S. Cohen [4] introduces the class of strongly p-summing linear operators which characterizes the conjugate of the class of absolutely p^*-summing linear operators, with $1/p + 1/p^* = 1$.

The concept of Cohen strongly summing multilinear operator was introduced and studied by D. Achour and L. Mezrag [1] and related concepts and new generalizations of concept of Cohen strongly summing multilinear operators have been recently studied, such as the class of multiple Cohen strongly summing multilinear operators [2].

We prove an abstract result derived from the Full General Pietsch Domination Theorem [6, Theorem 4.6] which has an immediate application regarding the class of Cohen strongly summing linear operators. Although it is not present in this paper, this result can be extended to the class of Cohen strongly summing multilinear operators from where similar results are obtained (see [3]).

2 Mathematical Results

Let us denote by $l_p(E)$ the space of absolutely p-summing sequences in a Banach space E, that is, sequences which $\sum_{i=1}^{\infty} ||x_i||^p < \infty$ and by $l_p^w(E)$ the space of sequences in E which $(\varphi(x_i))_{i=1}^{\infty} \in l_p$ for all $\varphi \in E^{'}$. We also denote by $l_p\langle E\rangle$ the space of sequences Cohen strongly p-summing in E, that is, sequences which $\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(x_i)| < \infty$, for all $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in l_{p^*}^w(E^{'})$, with $1/p + 1/p^* = 1$.

Definition 2.1 (Cohen, [4])**.** *Let $1 < p \leq \infty$. An operator $T \in \mathcal{L}(E;F)$ is Cohen strongly p-summing if there exists a constant $C > 0$ such that for all $m \in \mathbb{N}$, $x_i \in E$ and $\varphi_i \in F^{'}$, $i = 1, ..., m$,*

$$\sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(T(x_i))| \leq C \, ||(x_i)_{i=1}^m||_p ||(\varphi_i)_{i=1}^m||_{w,p^*}. \tag{2.1}$$

We denote by $\mathcal{D}_p(E;F)$ the space of Cohen strongly p-summing linear operators. The smallest C such that (2.1) is satisfied defines a norm on $\mathcal{D}_p(E;F)$, with which this space is complete.

Let $p^* \in (1, \infty)$, with $1 = 1/p + 1/p^*$, and

$$\Gamma = \{(q_0, q_1) \in [1, \infty) \times (1, \infty) : 1/q_0 = 1/q_1 + 1/p^*\}.$$

*Departamento de Ciências Exatas , UFPB, PB, Brasil, jamilson@dce.ufpb.br

We will denote by $\mathcal{C}_{(q_0,q_1;p)}(E;F)$ the class of all operators $T \in \mathcal{L}(E;F)$ such that exists a constant $C > 0$ satisfying

$$\left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi_i(T(x_i))|^{q_0}\right)^{1/q_0} \leq C \left\|(x_i)_{i=1}^m\right\|_{q_1} \left\|(\varphi_i)_{i=1}^m\right\|_{w,p^*}, \tag{2.2}$$

for all positive integers m and all $x_i \in E$, $\varphi_i \in F^{'}$, $i = 1, ..., m$.

It follows immediately from Definition 2.1 that $\mathcal{D}_p(E;F) \subset \mathcal{C}_{(q_0,q_1;p)}(E;F)$, for all $(q_0,q_1) \in \Gamma$. Another noteworthy fact is that the class $\mathcal{C}_{(q_0,q_1;p)}(E;F)$ is trivial if $p < q_1$.

Under all conditions of Theorem [6, Theorem 4.6] and notations given above we will establish the following theorem:

Theorem 2.1. *Let $f : X \to Y$ be an application belonging to $\mathcal{H}$ and let $0 < q_0, q_1, p_0, p_1, p^* < \infty$, such that*

$$1/q_0 = 1/q_1 + 1/p^* \quad \text{e} \quad 1/p_0 = 1/p_1 + 1/p^*.$$

If $(R_1)_{(x,b)}(\cdot)$ is constant, for each x and for each b, then the following statements are equivalent:
(i) f is R_1, R_2-S-abstract (q_1, p^*)-summing;
(ii) f is R_1, R_2-S-abstract (p_1, p^*)-summing.

The consequence of the above theorem is the coincidence $\mathcal{D}_p(E;F) = \mathcal{C}_{(q_0,q_1;p)}(E;F)$, which implies several ways to characterize the class of Cohen strongly summing linear operators, by means of inequalities like that (2.2). This is shown by the following corollary:

Corollary 2.1. *For all $(q_0,q_1), (p_0.p_1) \in \Gamma$, $\mathcal{C}_{(q_0,q_1;p)}(E;F) = \mathcal{C}_{(p_0,p_1;p)}(E;F)$. In particular,*

$$\mathcal{C}_{(q_0,q_1;p)}(E;F) = \mathcal{C}_{(1,p;p)}(E;F) = \mathcal{D}_p(E;F), \quad \text{for all} \quad (q_0,q_1) \in \Gamma.$$

References

[1] ACHOUR, D. AND MEZRAG, L. *On the Cohen strongly p-summing multilinear operators*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **327** (2007), 550–563.

[2] CAMPOS, J. R. *Cohen and Multiple Cohen strongly summing multilinear operators*, Linear and Multilinear Algebra, On-line version (2013), doi:10.1080/03081087.2013.779270.

[3] CAMPOS, J. R. *An abstract result on Cohen strongly summing operators*, Preprint (2013), arXiv:1305.7276 [math.FA].

[4] COHEN, J. S. *Absolutely p-summing, p-nuclear operators and their conjugates*, Mathematische Annalen, **201** (1973), 177–200.

[5] GROTHENDIECK, A. *Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach et le théorème de Dvoretzky-Rogers*, Boletim da Sociedade Matemática de São Paulo **8** (1956), 81–110.

[6] PELLEGRINO, D., SANTOS, J. AND SEOANE-SEPÚLVEDA, J. B. *Some techniques on nonlinear analysis and applications*, Advances in Mathematics, **229** (2012), 1235–1265.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

Espaços de Hilbert torcidos e interpolação complexa

JESUS CASTILLO * & VALENTIN FERENCZI † & MANUEL GONZALEZ ‡

1 Introdução

Dados Y e Z espaços de Banach, uma soma **torcida** X de Y e Z é um espaço que contém uma cópia isomorfa de Y de tal maneira que o quociente associado seja isomorfo a Z. Em outros termos temos uma sequência exata

$$0 \to Y \to X \to Z \to 0.$$

Quando X é simplesmente a soma direta de $Y \oplus Z$, diz-se que a soma torcida é trivial.

Quando $Y \simeq Z \simeq \ell_2$, somas torcidas de Y com Z são chamadas de **Hilbert torcidos**. O primeiro exemplo de Hilbert torcido não-trivial foi construido em 1975 por Enflo, Lindenstrauss and Pisier [1]. Um exemplo mais simples apareceu em 1979: o espaço Z_2 de Kalton e Peck [4]. O espaço Z_2 é extremo entre os Hilbert torcidos no seguinte sentido: na sequência exata

$$0 \to \ell_2 \to Z_2 \to \ell_2 \to 0,$$

o mapa quociente $q : Z_2 \to \ell_2$ é estritamente singular. Diremos nesse caso que a soma torcida é **singular**. Isso equivale a dizer que Z_2 não contém cópia complementada de ℓ_2.

A importância de Z_2 vem também da relação que ele tem com a teoria clássica de interpolação. Dos trabalhos de Rochberg e Weiss [5] segue que a cada esquema de interpolação complexo do tipo de Calderon-Zygmund, $X_\theta = (X_0, X_1)_\theta$, é sempre associado um jeito de definir uma soma torcida, em geral não trivial, de X_θ com X_θ. Por exemplo o espaço Z_2 de Kalton-Peck é o Hilbert torcido associado ao esquema de interpolação $\ell_2 = (c_0, \ell_1)_{1/2}$. Ver os trabalhos de Kalton [3] e o resumo de Godefroy [2] sobre esse assunto.

2 Resultados

Neste trabalho relacionamos propriedades do espaços X_0, X_1, e possivelmente X_θ, aparecendo num esquema de interpolação complexa, com as propriedades da soma torcida induzida. Mais especificamente encontramos condições suficientes sobre os espaços interpolados para afirmar que a soma torcida associada é singular. Assim por exemplo a singularidade da soma torcida definindo Z_2 poderá ser visto como consêquencias das propriedades de c_0 e ℓ_1 na fórmula $\ell_2 = (c_0, \ell_1)_{1/2}$.

Dado um espaço de Banach X com base de Schauder, definimos o seguinte índice "assintótico"em X:

$$\mathrm{Asymp}_X(n) = \lim_{m \to +\infty} \sup_{m < x_1 < \cdots < x_n, \|x_i\| \leq 1} \|x_1 + \cdots + x_n\|.$$

*Departamento de Matemática, Universidad de Extremadura, Espanha, e-mail: castillo@unex.es
†Instituto de Matemática e Estatística , USP, SP, Brasil, ferenczi@ime.usp.br
‡Departamento de Matemática, Universidad de Cantábria, Espanha, e-mail: manuel.gonzalez@unican.es

Teorema 2.1. *Considere um esquema de interpolação entre dois espaços X_0, X_1 com base incondicional, e suponha*

$$\mathrm{Asymp}_{X_i}(n) \leq f_i(n), i = 0, 1.$$

onde $f_0(n)$ e $f_1(n)$ são sequências não equivalentes.

Suponha que para todo subespaço de blocos W de X_θ, exista k tal que para todo n, exista uma sequência finita de blocos $\{y_1, ..., y_n\}$ na bola unitária de W tal que

$$\|y_1 + \cdots + y_n\| \geq k^{-1} f_0(n)^{1-\theta} f_1(n)^\theta.$$

Então a soma torcida induzida é singular.

Um exemplo de aplicação com hipóteses mais simples:

Teorema 2.2. *Considere um esquema de interpolação entre dois espaços X_0, X_1 com base incondicional, e suponha que X_i satisfaz uma ℓ_{p_i}-estimativa superior, onde $p_0 \neq p_1$. Seja $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, e seja $C \geq 1$. Suponha que todo subespaço de blocos W de X_θ contenha, para todo n, uma sequência finita de blocos $\{y_1, ..., y_n\}$ que é C-equivalente com a base de ℓ_p^n.*

Então a soma torcida induzida é singular.

Como consequência obtemos novas construções de Hilbert torcidos não-triviais.

Teorema 2.3. *A interpolação de um espaço reflexivo X com base incondicional e assintoticamente ℓ_p, $p \neq 2$, com o espaço dual X^*, induz um Hilbert torcido singular.*

Por exemplo, a interpolação do espaço de Tsirelson T com T^* induz um Hilbert torcido singular.

Referências

[1] ENFLO, P., LINDENSTRAUSS, J, E PISIER, G. - *On the three-space problem.*, Math. Scand. 36 (1975), 199-210.

[2] GODEFROY, G. - *The Kalton calculus*, In: Conférence en l'honneur de Hervé et Martine Quéffelec, 2012, Le Touquet. Topics in Functional and Harmonic Analysis, 57-68, Theta 2012.

[3] KALTON, N.J. - *Nonlinear commutators in interpolation theory*, Mem. Amer. Math. Soc. 73 (1988), 85 p.

[4] KALTON, N.J., E PECK, N.T. - *Twisted sums of sequence spaces and the three space problem*, Trans. Amer. Math. Soc. 255 (1979), 1-30.

[5] ROCHBERG, R. E WEISS, G. - *Derivatives of analytic families of Banach spaces*, Ann. of Math. (2) 118 (1983), 315-347.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

SOLUÇÕES RADIAIS PARA UMA CLASSE DE EQUAÇÕES ELÍPTICAS QUE MODELAM MEMS ELETROSTÁTICOS

JOÃO MARCOS B. DO Ó * & ESTEBAN P. SILVA †

1 Introdução

Neste trabalho estudamos uma classe de equações diferenciais quasilineares elípticas envolvendo uma não linearidade singular, que surge, em aplicações, na modelagem de MEMS eletrostáticos. MEMS são micro dispositivos compostos por componentes mecânicos e eletrônicos acoplados a um chip, formando um sistema em miniatura (medindo entre 1 e 100 micrometros - mais fino que um fio de cabelo). São componentes essenciais da tecnologia atual, reponsável por grandes avanços em telecomunicação, produtos comerciais, engenharia biomédica e exploração espacial. Como fonte de informação sobre as aplicações, desenvolvimento e modelagem desses dispositivos, sugerimos BERNSTEIN, D. e PELESKO J. [7], além de ESPOSITO P.*et al* [4].

Mais especificamente, tratamos do seguinte problema:

$$\begin{cases} -(r^\alpha |u'|^\beta u')' = \dfrac{\lambda r^\gamma f(r)}{(1-u)^2}, & r \in (0,1), \\ \quad 0 \le u(r) \le 1, & r \in (0,1), \\ u'(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{P_λ}$$

O operador $Lu := -r^\alpha |u'|^\beta u'$ em (P_λ) aparece, e tem sido estudado, em vários contextos. Ele corresponde à forma radial dos operadores p-laplaciano e k-hessiano para escolhas apropriadas dos parâmetros α, β e γ :

Operator	α	β	γ
Laplacian	$n-1$	0	$n-1$
p-Laplacian $(p>1)$	$n-1$	$p-2$	$n-1$
k-Hessian	$n-k$	$k-1$	$n-1$

JACOBSEN, J.; SCHIMITT, K. [5, 6] provam resultados de existência e multiplicidade de soluções radiais do problema de Liouville-Bratu-Gelfand, com respeito a este operador. Destacamos também o trabalho de CLEMENT *et al*, que aborda problemas do tipo Brezis-Niremberg. Como guia de problemas envolvendo tal operador, sugerimos [1, 2, 3] e suas referências.

2 Resultados

Nosso primeiro resultado garante a axistência de um valor cítico para o parâmetro λ, isto é, uma barreira que delimita a existência de solução para o problema. Provamos também a existência de um ramo de soluções minimais, isto é, qualquer outra solução deve estar por cima desta. Nossas soluções minimais são obtidas como limite de uma sequencia dada de forma recursiva, o que possibilita o cálculo de aproximações numéricas dessas soluções, informação muito relevenate em aplicações.

*Departamento de Matemática, UFPB, PB, Brasil, e-mail: jmbo@mat.ufpb.br
†Departamento de Matemática, UFPE, PE, Brasil, e-mail: esteban@dmat.ufpe.br

Teorema 2.1. *Existe $\lambda^* > 0$ tal que*

1. *Se $0 \leq \lambda \leq \lambda^*$, (P_λ) admite pelo menos uma solução;*

2. *Se $\lambda > \lambda^*$, (P_λ) não admite solução.*

Para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$, (P_λ) admite uma única solução minimal positiva clássica, que denotamos por u_λ, e que pode ser obtida através do limite da sequencia (u_n) dada recursivamente como segue: $u_0 = 0$ e u_n é a única solução de

$$\begin{cases} -r^{-\gamma}(r^\alpha |u'_{n+1}|^\beta u'_{n+1})' = \dfrac{\lambda f}{(1-u_n)^2}, & r \in (0,1), \\ u'_{n+1}(0) = u_{n+1}(1) = 0. \end{cases} \tag{$P_\lambda(n)$}$$

Além disso, a função $\lambda \mapsto u_\lambda$ é estritamente crescente em $(0, \lambda^*)$.

Proof: A prova é baseada em argumentos de comparação via método de sub e supersolução. ■

O Teorema seguinte caracteriza as soluções estáveis, isto é, as soluções que têm maior probabilidade de ocorrer.

Teorema 2.2. *Para $-1 \leq \beta \leq 0$, as soluções minimais são as soluções estáveis de (P_λ).*

Provamos ainda que (P_{λ^*}) tem solução única, a qual pode ser obtida como o limite pontual das soluções minimais, isto é:

$$u^* := \lim_{\lambda \nearrow \lambda^*} u_\lambda, \quad x \in (0,1).$$

Teorema 2.3. *A função u^* é uma solução minimal de (P_λ) com $\lambda = \lambda^*$. Além disso, para $-1 \leq \beta \leq 0$, u^* é única.*

Proof: Supondo, por contradição, que (P_λ) admite uma solução alternativa $v \geq u^*$, nós construímos uma solução para um problema dado por uma perturbação de (P_λ) e então uma solução para (P_λ) para $\lambda \geq \lambda^*$. Isto contradiz a maximalidade de λ^*. ■

Referências

[1] CLÉMENT, P.; FIGUEIREDO, D.; MITIDIERI, E. - *Quasilinear elliptic equations with critical exponents*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **7**, 133-170, 1996.

[2] CORRÊA, F. J; GONÇALVES, J. V.; MELO, A. L. - *On positive radial solutions of quasilinear elliptic equations*, Nonlinear Analysis **52** 681-701, 2003.

[3] DÁVILA, J. - *Singular solutions of semi-linear elliptic problems*. Handbook of differential equations: stationary partial differential equations. Vol. VI, 83-176, Handb. Differ. Equ., Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2008.

[4] ESPOSITO, P.; GHOUSSOUB, N.; GUO, Y. - *Analysis of Partial Differential Equations Modeling Electrostatic MEMS*, Courant Lecture Notes in Mathematics, 20. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[5] JACOBSEN, J.; SCHMITT, K. - *Radial Solutions of Quasilinear Elliptic Differential Equations* Handbook of differential equatios - Ordinary Diferential Equations, volume 1, Elsevier B.V., 2004.

[6] JACOBSEN, J.; SCHMITT, K. - *The Liouville-Bratu-Gelfand problem for radial operators*, J. Differential Equations **184** (2002), 283-298.

[7] PALESCO, J. A.; BERNSTEIN, D. H. - *Modeling MEMS and NEMS*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2003.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

UM PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO COM RESTRIÇÕES ENVOLVENDO A EQUAÇÃO DE TRANSPORTE COM RENOVAÇÃO

José L. Boldrini * & Cícero A. da S. Filho †

1 Introdução

Analisamos um problema de controle ótimo associado a um sistema de equações diferenciais (1.2) que modela as dinâmicas de certas populações de mosquitos levando em conta a população de indivíduos jovens, em fase aquática, a população de indivíduos adultos e a sua interação com os recursos do meio ambiente (alimentos disponíveis, por exemplo). Considera-se, além disso, que a população jovem sofre um processo de maturação de tal forma que é estruturada por idade.

Essas populações estão submetidas à atuação de um controle externo, um agente químico por exemplo, que afeta as taxas de mortalidade, modificando-as; no caso dos indivíduos jovens, tal atuação pode depender do nível de maturação (idade) do indivíduo. Temos assim, uma versão controlada de um modelo considerado por Calsina e Elidrissi em [1]. Quanto ao critério de otimização para a escolha do controle ótimo, consideramos a minimização de um funcional análogo ao considerado em Barbu e Iannelli [2], o qual não é necessariamente convexo.

Descrição matemática do modelo:

Dada a idade máxima (dada) de maturação dos indivíduos jovens (quando se convertem em adultos), $l > 0$, e também o tempo final de interesse $T > 0$, denotamos $Q = (0, l) \times (0, T)$. As variáveis de estado do sistema são as seguintes: $u(a, t)$, $a \in [0, l]$, $t \in [0, T]$, a população de indivíduos jovens (estruturada por idade), $v(t)$, $t \in [0, T]$, a população de adultos (considerada sem estrutura de idade) e $r(t)$, $t \in [0, T]$ a intensidade das fontes de alimentos.

Atua-se nestas populações através de um um controle externo (associado à ação do agente químico e que em princípio pode depender do tempo e da idade de maturação) que deve pertencer ao conjunto dos controles definido por:

$$U = \{v \in L^{\infty}(Q)\,;\gamma_1(a) \leq v(a,t) \leq \gamma_2(a)\},$$

onde γ_1, $\gamma_2 : (0, l) \to R$ são funções mensuráveis limitadas dadas tais que $0 \leq \gamma_1(a) \leq \gamma_2(a) \leq \lambda_2$, q.t.p. em $(0, l)$; as quais estão associadas aos valores mínimo e máximo da atuação do agente químico.

O nosso objetivo é o de mostrar a existência de um controle $c \in U$ que minimiza o funcional:

$$\min\left\{\int_0^T\int_0^l G(a,u(a,t))dadt + \frac{1}{2}\rho_1\int_0^T\int_0^l c^2(a,t)dadt + \frac{1}{2}\rho_2\int_0^T v^2dt + \frac{1}{2}\rho_3\int_0^T r^2dt\right\} \tag{1.1}$$

A primeira parcela em (1.1) está associada à busca de se minimizar uma ponderação da população jovem; $G : (0, l) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função dada; $G(a, y)$ é mensurável em a, de classe C^2 em y com $G \geq 0$ e G, G_y, G_{yy} limitadas; ela não é convexa pois pode-se ter maior ênfase na eliminação de certas "faixas de maturidade". A segunda parcela em (1.1) busca minimizar o custo de aplicação do agente químico (pode levar em conta tanto aspectos financeiros quanto ambientais); $\rho_1 > 0$, é um peso relativo que se atribui à esta parcela. A terceira parcela em (1.1) busca minimizar a população de adultos; $\rho_2 \geq 0$. A quarta parcela em (1.1) leva em conta a possibilidade de diminuir as fontes de alimentos das populações de mosquitos; $\rho_3 \geq 0$ é o peso relativo que se atribui à esta possibilidade

*IMECC, UNICAMP, SP, Brasil, e-mail: boldrini@ime.unicamp.br
†DCET, UESC, BA, Brasil, e-mail: cicero@uesc.br.

Além disso, as variáveis de estado devem ser restritas pelas equações da dinâmica, isto é, devem estar sujeitas ao sistema de populações seguinte:

$$\begin{cases} u_t(a,t) + u_a(a,t) + m_1(r(t))u(a,t) + \mu_1(c(a,t))u(a,t) = 0 & (a,t) \in Q, \\ v'(t) + m_2(r(t))v(t) + \mu_2(L_1(c)(t))v(t) = u(l,t) & t \in (0,T), \\ r'(t) - [g(r(t)) - h(L_2(u,v)(t))]r = 0 & t \in (0,T), \\ u(0,t) = bv(t) & t \in (0,T), \\ u(a,0) = u_0(a) & a \in (0,l), \\ v(0) = v_0, \\ r(0) = r_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Na primeira equação de (1.2), $m_1(r(t))$ é a taxa de mortalidade natural (que pode depender dos recursos do ambiente) dos indivíduos jovens; $\mu_1(c(a,t))$ é a taxa adicional de mortalidade dos jovens causada pela ação do agente químico (controle externo). Na segunda equação de (1.2), $m_2(r(t))$ é analogamente a taxa de mortalidade natural (que também pode depender da quantia de recursos do ambiente) dos adultos; $\mu_2(L_1(c)(t)$ é a taxa de mortalidade adicional dos adultos também eventualmente causada pela ação do agente químico (controle externo); tal ação é mediada por $L_1(c)(t) = \int_0^l c(a,t)H_0(a,t)da$, em que $H_0 \in L^\infty(Q)$ é uma dada função não negativa. Na terceira equação de (1.2), $g(\cdot)$ é uma função conhecida do tipo Verhurst, e está associada à taxa de recuperação do ambiente natural; $h(\cdot)$ é também uma funcção conhecida associada à possibilidade de degradação dos recursos do ambiente causada pela ação do agente químico e mediada por $L_2(u,v)(t) = \int_0^l u(a,t)H_1(a,t) + v(t)H_2(a,t)da$, com funções não negativas dada $H_1,\ H_2 \in L^\infty(Q)$. Na quarta equação de (1.2), $b > 0$ é a taxa de fertilidade dos adultos. Finalmente, temos $u_0 \in L^\infty(0,l)$, com $u_0 \geq 0$ e números reais não negativos v_0 e r_0 correspondendo, respectivamente, os dados iniciais de jovens, adultos e fontes de alimentos.

Hipóteses técnicas suplementares são as seguintes: m_1, m_2, μ_1, μ_2, $h : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ são funções de classe C^2 com m_1, m_2, μ_1, μ_2, h e suas derivadas até a segunda ordem limitadas; $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^2 com g, g', g'' limitadas e existe uma constante $d > 0$ com:$g(r) \geq 0$, se $0 \leq r \leq d$ e $g(r) < 0$, se $r > d$. Considere também que $0 \leq r_0 \leq d$.

2 Resultados

O principal resultado que obtivemos foi o seguinte:

Teorema 2.1 (Existência e Unicidade)**.** *Nas condições descritas, existe uma função $C(M,T)$, limitada para M e T limitados, tal que, para $\|u_0\|_{L^\infty(0,l)}, v_0 \leq M$ e $\rho_1^{-1}(\|u_0\|_{L^\infty(0,l)} + v_0)C(M,T)T < 1$, o problema (1.1)-(1.2) tem uma única solução $c^* \in U$.*

Para provar este resultado foram utilizados o Teorema do Ponto Fixo de Banach juntamente com o Princípio Variacional de Ekeland.

Referências

[1] Calsina, A., and Elidrissi. - Asymptotic Behaviour of a Semilinear Age-Structured Population Model with a Dynamics for the Resource. *Mathematical and Computer Modelling*, **35**, 403-427, 2002.

[2] Barbu, V. and Iannelli, M. - Optimal control of population dynamics.*Journal of Optimizaton Theory and Aplications*, **102**, 1-14, 1999.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

GLOBAL WELL-POSEDNESS AND EXPONENTIAL DECAY RATES FOR A KDV-BURGERS EQUATION WITH INDEFINITE DAMPING *

JOSÉ H. RODRIGUES † & VALÉRIA N. DOMINGOS CAVALCANTI ‡

Neste trabalho, os autores consideram o problema

$$u_t + u_{xxx} - u_{xx} + \lambda u + \alpha u u_x = 0, \quad \text{em } \mathbb{R} \times (0, \infty), \tag{0.1}$$

$$u(0) = u_0, \quad \text{em}\mathbb{R}, \tag{0.2}$$

onde $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$é uma função que pode assumir valores negativos em $\mathbb{R}$.

A boa colocação global do problema em $H^s(\mathbb{R})$, para $0 \leq s \leq 3$, bem como o comportamento assimptótico de suas soluções são estudados.

1 Principais Resultados

Apresentamos aqui os principais resultados descritos no trabalho.

Para cada $T > 0$ e $s \in [0, 3]$ definimos

$$\mathcal{B}_{s,T} := C([0, T]; L^2(\mathbb{R})) \cap L^2(0, T; H^{s+1}(\mathbb{R})),$$

munido da norma

$$\|u\|_{\mathcal{B}_{s,T}} = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} + \left\{ \int_0^T \|u(t)\|_{H^{s+1}(\mathbb{R})} dt \right\}^{\frac{1}{s+1}}.$$

Temos o seguinte resultado de existência e unicidade para o problema (0.1)-(0.2).

Teorema 1.1. *Sejam $T > 0$ e $\lambda \in H^1(\mathbb{R})$. Para cada $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $0 \leq s \leq 3$, o problema não linear (0.1)-(0.2) admite uma única solução u, que pertence a classe $\mathcal{B}_{s,T}$. Além disso, existe uma função contínua e não decrescente $\alpha : \mathbb{R}^+ \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ tal que*

$$\|u\|_{\mathcal{B}_{s,T}} \leq \alpha(\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}, T)\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})}.$$

No que concerne o comportamento assimptótico das soluções obtidas no resultado acima temos o seguinte.

Teorema 1.2. *Sejam $0 \leq s \leq 3$ e $\lambda \in H^1(\mathbb{R})$ tal que*

$$\lambda \geq \lambda_0 + \lambda_1, \quad \textit{quase sempre em } \mathbb{R},$$

$$\|\lambda_1\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{\lambda_0}{c_p}\right)^{1-\frac{1}{2p}},$$

*Este é um trabalho em colaboração com os professores Marcelo Moreira Cavalcanti (UEM) e Vilmos Kormornik (Université de Strasbourg - France).

†Departamento de Matemática, UEM, PR, Brasil, e-mail: jh.rodrigues@ymail.com
‡Departamento de Matemática, UEM, PR, Brasil, e-mail: vndcavalcanti@uem.br

para algum $\lambda_0 > 0$ *e* $\lambda_1 \in L^p(\mathbb{R})$*, com* $p \geq 1$ *e* c_p *uma constante positiva que depende somente de* p*. Então, exsitem* $\nu, T_0 > 0$ *e uma função contínua e não decrescente* $\beta : (0, +\infty) \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *tal que para cada* $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ *a correspondente solução* u *de (0.1)-(0.2) satisfaz*

$$\|u(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \beta(T_0, \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})})e^{-\nu t}, \quad t \geq T_0.$$

Referências

[1] ROSIER, L. AND ZHANG, B.-Y. - Global stabilization of the generalized Korteweg–de Vries equation posed on a finite domain. *SIAM J. Control Optim.* **45**, no.3, 927–956, 2006.

[2] BONA, J.L., SCOTT, L.R. - Solutions of Korteweg-de Vries equation in fractional order Sobolev spaces. *Duke Math. J.* **43**, 87–99, 1976.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

CONTROLABILIDADE NULA DE UM SISTEMA PARABÓLICO COM NÃO-LINEARIDADE NÃO-LOCAL

JUAN LÍMACO * & ANDRÉ R. LOPES †

1 Introdução

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2. Para $T > 0$ consideremos o cilindro $Q = \Omega \times (0, T)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ com fronteira lateral $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$. Consideremos também $\omega \Subset \Omega$ aberto não-vazio e 1_ω denota a função caracteristica de ω .

O resultado principal deste trabalho é estudar a controlabilidade nula do seguinte sistema parabólico não-linear

$$\begin{cases} u_t - \gamma\left(\int_\Omega u\ dx, \int_\Omega v\ dx\right)\Delta u + f(u,v) = h1_\omega \ \text{ em } Q \\ v_t - \beta\left(\int_\Omega u\ dx, \int_\Omega v\ dx\right)\Delta v + g(u,v) = 0 \ \text{ em } Q \\ u(x,t) = 0, \quad v(x,t) = 0 \text{ em } \Sigma \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x) \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Em (1.1), $u = u(x,t)$, $v = v(x,t)$ denotam o estado e $h = h(x,t)$ denota a função controle que atua sobre o sistema através de $\omega \times (0,T)$. Além disso, (u_t, v_t) representam as derivadas de (u, v) em relação ao tempo e (u_0, v_0) o estado inicial.

No sistema (1.1) consideramos $\gamma, \beta : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ globalmente Lipschitz-continuas satisfazendo

$$\begin{cases} 0 < \gamma_0 \le \gamma \le \gamma_1 < +\infty \\ 0 < \beta_0 \le \beta \le \beta_1 < +\infty \end{cases}$$

$f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e globalmente Lipschitz-continuas satisfazendo $f(0,0) = g(0,0) = 0$.

Definição 1.1. *Dizemos que (1.1) é localmente nulo controlável no tempo T se, existe $\epsilon > 0$ tal que, para cada $u_0, v_0 \in L^2(\Omega)$ com*

$$|(u_0, v_0)|_{L^2(\Omega)} \le \epsilon,$$

existe controle $h \in L^2(\omega \times (0,T))$ tal que o estado associado (u, v) satisfaz

$$u(x,T) = v(x,T) = 0 \text{ em } \Omega. \tag{1.2}$$

Definição 1.2. *Dizemos que (1.1) é nulo controlável no tempo T se, para cada $u_0, v_0 \in L^2(\Omega)$, existe controle $h \in L^2(\omega \times (0,T))$ tal que o estado associado (u, v) satisfaz (1.2).*

*IME, UFF, RJ, Brasil, e-mail: jlimaco@vm.uff.br
†IME, UFF, RJ, Brasil, e-mail: andreurco@gmail.com

2 Resultado

O resultado principal deste trabalho é o seguinte:

Teorema 2.1. *Sob as hipóteses sobre γ, β, f, g, o sistema não linear (1.1) é localmente nulo controlável no tempo T.*

O controle nulo do sistema (1.1) tem sido recentemente estudado usando Teorema de função inversa para dimensão infinita (Teorema de Liusternik, ver [1]).

Neste trabalho, faremos uma demonstração diferente para obter o controle nulo de (1.1). Usaremos uma formulação por meio de argumento de ponto fixo (Teorema de Kakutani) para o problema de controlabilidade nula que encontra-se desenvolvida com detalhes em [8].

Para o estudo da controlabilidade nula de sistemas parabólicos lineares e não-lineares pode ver-se [2],[3],[4],[5],[6],[7].

Referências

[1] E.Fernández-Cara, J.Limaco, H.Clark, L.A. Medeiros *Theoretical and numerical local null controllability for a parabolic system with local and nonlocal nonlinearities*, Preprint.

[2] E.Fernández-Cara, J.Limaco, S.B.Menezes *Null controllability for a parabolic equation with nonlocal nonlinearities*, Systems and Control Letters 61, (2012), 107-111.

[3] A.Doubova, E. Fernández-Cara, M. González-Burgos, E. Zuazua, *On the controllability of parabolic systems with a nonlinear term involving the state and the gradient*, SIAM J. Control Optim. 41 (3), (2002), 798-819.

[4] A. Fursikov and O. Imanuvilov, *Controllability of evolution equations*, Lecture Notes, Vol. **34**, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire 17, (2000), 583-616.

[5] O.Yu. Imanuvilov, *Controllability of parabolic equations*, Sb. Math. 186 (6), (1995), 879-900.

[6] E. Fernández-Cara, E. Zuazua, *Null and approximate controllability of weakly blowing up semilinear heat equations*, Mathematical Surveys and Monographs, 136. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[7] E. Fernández-Cara and S. Guerrero, *Global Carleman inequalities for parabolic systems and applications to controllability*, SIAM J. Control Optim., Vol. 45. No. 4, (2006), 1395-1446.

[8] A.R.Lopes, *Controlabilidade nula de sistemas parabólicos com não-linearidades não-locais*, Tese de Doutorado, Universidade Federal Fluminense, Julho 2013.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

CONTROLABILIDADE NULA DE UMA EQUAÇÃO PARABÓLICA COM NÃO-LINEARIDADE NÃO-LOCAL

JUAN LÍMACO * & ANDRÉ R. LOPES †

1 Introdução

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2. Para $T > 0$ consideremos o cilindro $Q = \Omega \times (0, T)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ com fronteira lateral $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$. Consideremos também $\omega \Subset \Omega$ aberto não-vazio e 1_ω denota a função caracteristica de ω .

O objetivo deste trabalho é estudar a controlabilidade nula da seguinte equação parabólica não-linear

$$\begin{cases} u_t - A(t)u + g(x,t,u) = h1_\omega \ \text{ em } Q \\ u(x,t) = 0 \ \text{ em } \Sigma \\ u(x,0) = u_0(x) \ \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $A(t)u = \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}(u(.,t),t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial_{x_i}\partial_{x_j}}$ e $B_{ij} : L^1(\Omega) \times [0,T] \mapsto \mathbb{R}$ é conhecida.

Em (1.1), $u = u(x,t)$ denota o estado e $h = h(x,t)$ denota a função controle que atua sobre o sistema através de $\omega \times (0,T)$. Além disso, u_t representa a derivada de u em relação ao tempo e u_0 é o estado inicial.

O problema (1.1) é dito não-local devido a presença do termo $B_{ij}(u(.,t),t)$.

No sistema (1.1) consideramos g globalmente Lipschitz-continua satisfazendo $g(x,t,0) = 0$.

Nosso trabalho é uma generalização do resultado de [1], onde o controle nulo foi estabelecido quando $g \equiv 0$.

Definição 1.1. *Dizemos que (1.1) é nulo controlável no tempo T se, para todo $u_0 \in L^2(\Omega)$ existe um controle $h \in L^2(\omega \times (0,T))$ tal que a solução fraca de (1) satisfaz $u(x,T) = 0$ em Ω com $|h|_{L^2(\omega\times(0,T))} \leq C|u_0|_{L^2(\Omega)}$.*

Definição 1.2. *Dizemos que (1.1) é localmente nulo controlável no tempo T se, existe $\delta = \delta(T)$ tal que para todo $u_0 \in B_{L^2(\Omega)}(0,\delta)$ existe um controle $h \in L^2(\omega \times (0,T))$ tal que a solução fraca de (1) satisfaz $u(x,T) = 0$ em Ω com $|h|_{L^2(\omega\times(0,T))} \leq C|u_0|_{L^2(\Omega)}$.*

*IME, UFF, RJ, Brasil, e-mail: jlimaco@vm.uff.br
†IME, UFF, RJ, Brasil, e-mail: andreurco@gmail.com

2 Resultado

O resultado principal deste trabalho é o seguinte:

Teorema 2.1. *Suponha que*

$$\begin{cases} B_{ij} = B_{ji} : L^1 \times [0,T] \mapsto \mathbb{R}\ , \ \ 0 < \beta_0 \leq B_{ij} \leq \beta_1 < +\infty \\ B_{ij} \text{ é globalmente Lipschitz-continua em } L^2(\Omega) \times [0,T] \text{ para todo i,j} \end{cases}$$

isto é, existe $M > 0$ *tal que*

$$\begin{cases} |B_{ij}(w,t) - B_{ij}(z,s)| \leq M(|w-z|_{L^2(\Omega)} + |t-s|_{L^2(\Omega)}) \\ \forall (w,t),(z,s) \in L^2(\Omega) \times [0,T] \end{cases}$$

para todo i, j. *Suponha também que existe uma constante* $K > 0$ *tal que*

$$\sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}(z,t)\xi_i\xi_j \geq K|\xi|^2{}_{\mathbb{R}^n}$$

$\forall \xi \in \mathbb{R}^n$; $(z,t)q.s$ *em* $L^1(\Omega) \times [0,T]$.

Então o sistema não-linear (1.1) é localmente nulo controlável no tempo $T > 0$.

A prova deste Teorema é feita utilizando uma formulação por meio de argumento de ponto fixo para o problema de contrololabilidade nula e encontra-se desenvolvida com detalhes em [8].

Para o estudo da controlabilidade nula de problemas parabólicos lineares e não-lineares pode ver-se [2],[3],[4],[5],[6],[7].

Referências

[1] E.Fernández-Cara, J.Limaco, S.B.Menezes *Null controllability for a parabolic equation with nonlocal nonlinearities*, Systems and Control Letters 61, (2012), 107-111.

[2] A.Doubova, E. Fernández-Cara, M. González-Burgos, E. Zuazua, *On the controllability of parabolic systems with a nonlinear term involving the state and the gradient*, SIAM J. Control Optim. 41 (3), (2002), 798-819.

[3] E. Fernández-Cara, E. Zuazua, *Null and approximate controllability of weakly blowing-up semilinear heat equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 17(5), (2000), 583-616.

[4] A. Fursikov and O. Imanuvilov, *Controllability of evolution equations*, Lecture Notes, Vol. **34**, Seoul National University, Korea, 1996.

[5] O.Yu. Imanuvilov, *Controllability of parabolic equations*, Sb. Math. 186 (6), (1995), 879-900.

[6] J.-M. Coron, *Control and nonlinearity*, Mathematical Surveys and Monographs, 136. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[7] E. Fernández-Cara and S. Guerrero, *Global Carleman inequalities for parabolic systems and applications to controllability*, SIAM J. Control Optim., Vol. 45. No. 4, (2006), 1395-1446.

[8] A.R.Lopes, *Controlabilidade nula de sistemas parabólicos com não-linearidades não-locais*, Tese de Doutorado, Universidade Federal Fluminense, Julho 2013.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

CONTROLABILIDADE NULA DE UM SISTEMA PARABÓLICO-ELÍPTICO LINEAR ACOPLADO

JUAN LÍMACO * & LAURENT PROUVÉE †

1 Introdução

Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$, cuja fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ é uma variedade de classe C^2. Fixe $T > 0$ e denote por Q o cilindro $Q = \Omega \times (0,T) \subset \mathbb{R}^{N+1}$, com fronteira lateral $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$. Considere também $\omega \subset\subset \Omega$ um (pequeno) subconjunto aberto não-vazio e 1_ω a função característica de ω.

O objetivo do nosso trabalho é estudar a controlabilidade nula do seguinte sistema parabólico-elíptico linear acoplado:

$$\begin{cases} y_t - \beta_1(t)\Delta y = a(x,t)y + b(x,t)z + v1_\omega & \text{em } Q, \\ -\beta_2(t)\Delta z = c(x,t)y + d(x,t)z & \text{em } Q, \\ y = z = 0 & \text{em } \Sigma, \\ y(x,0) = y_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $y = y(x,t)$ e $z = z(x,t)$ denotam o estado do sistema, $v = v(x,t)$ é a função controle que atua no sistema através do conjunto $\omega \times (0,T)$, $\beta_i(t) \in C^1([0,T])$ satisfaz $0 < c_0 \leq \beta_i(t) \leq c_1 < \infty$, para $i = 1, 2$, $a, b, c, d \in L^\infty(Q)$, com $|d|_{L^\infty(Q)} < c_0\mu_1$, onde μ_1 é o primeiro autovalor do operador $-\Delta$. Além disso, (y_t, z_t) representam as derivadas de (y,z) em relação ao tempo e y_0 o estado inicial.

O produto interno e a norma de $L^2(\Omega)$ serão representados por $(\cdot,\cdot)$ e $|\cdot|$, respectivamente.

O sistema (1.1) pode ser visto como a linearização de um sistema parabólico-elíptico com termos não-lineares locais e não-locais

$$\begin{cases} y_t - \beta_1\left(\int_\Omega y dx, \int_\Omega z dx\right)\Delta y = F(y,z) + v1_\omega & \text{em } Q, \\ -\beta_2\left(\int_\Omega y dx, \int_\Omega z dx\right)\Delta z = G(y,z) & \text{em } Q, \\ y = z = 0 & \text{em } \Sigma, \\ y(x,0) = y_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde as não-linearidades F e G são de classe C^1, globalmente Lipschitz, com $F(0,0) = G(0,0) = 0$.

Definição 1.1. *Diz-se que (1.1) é nulo controlável em $T > 0$ se dado $y_0 \in L^2(\Omega)$, existe um controle $v \in L^2(\omega \times (0,T))$ tal que a solução fraca (y,z) de (1.1) satisfaz:*

$$y(x,T) = 0 \text{ em } \Omega, \quad \limsup_{t \to T^-} |z(.,t)|_{L^2(\Omega)} = 0, \tag{1.3}$$

*IME, UFF, RJ, Brasil, e-mail: jlimaco@vm.uff.br
†IME, UFF, RJ, Brasil, e-mail: lmprouvee@gmail.com

2 Resultado Principal - Teorema do Controle Nulo

Teorema 2.1. *Em (1.1), suponha que*

$$a \in L^\infty(Q),\ c \in \mathbb{R},\ c \neq 0\ q.s.,\ b = b(x),\ d = d(x), b, d \in L^\infty(\Omega),\ |d|_{L^\infty(\Omega)} < c_0\mu_1. \tag{2.4}$$

Então, (1.1) é nulamente controlável em $T > 0$. Além disso,

$$|v|_{L^2(\omega\times(0,T))} \leq c|y_0|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.5}$$

Para demonstrar este teorema, basta obter uma Desigualdade de Observabilidade para o Estado Adjunto associado ao sistema (1.1). Para isto devemos também obter uma desigualdade do tipo Carleman para o mesmo Estado Adjunto.

Seguiremos as idéias dadas em [4] para provar o Teorema 2.1.

Para o estudo de controlabilidade nula de problemas parabólicos lineares e não-lineares pode-se ver [1], [2], [3], [5], [6].

Referências

[1] DOUBOVA,A., FERNÁNDEZ-CARA, E., GONZÁLEZ-BURGOS, M. AND ZUAZUA, E., - *On the controllability of parabolic systems with a nonlinear term involving the state and the gradient*, SIAM J. Control Optimiz., Vol. 41, No. 3 (2002), 798-819.

[2] FERNÁNDEZ-CARA, E. AND GUERRERO, S. - *Global Carleman inequalities for parabolic systems and applications to controllability*, SIAM J. Control Optim., Vol. 45. No. 4, (2006), 1395–1446.

[3] FERNÁNDEZ-CARA, E., LÍMACO, J., DE MENEZES, S. B. - *Null controllability for a parabolic equation with nonlocal nonlinearities*, Systems and Control Letters (Print), v. 61, p. 107-111, 2012

[4] FERNÁNDEZ-CARA, E., LÍMACO, J., DE MENEZES, S. B. - *Null Controllability for a parabolic-elliptic coupled system*, Bull Braz Math Soc., New Series 44(2), 1-24, 2013

[5] FERNÁNDEZ-CARA, E. AND ZUAZUA, E. - *Null and approximate controllability of weakly blowing-up semilinear heat equations*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire **17**, 5 (2000), 583–616.

[6] FURSIKOV, A. AND IMANUVILOV, O. - *Controllability of evolution equations*, Lecture Notes, Vol. **34**, Seoul National University, Korea, 1996.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

CONTROLABILIDADE EXATA PARA UM SISTEMA DE BRESSE COM COEFICIENTES VARIÁVEIS

JUAN A. SORIANO * & RODRIGO A. SCHULZ †

1 Introdução

Seja $L > 0$. Considere o sistema de Bresse

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - k(a(x)\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0 l[\omega_x - l\varphi] &= h_1\chi_q \quad \text{em} \quad Q, \\ \rho_2\psi_{tt} - (b(x)\psi_x)_x + k(\varphi_x + \psi + l\omega) &= h_2\chi_q \quad \text{em} \quad Q, \\ \rho_1\omega_{tt} - k_0[c(x)\omega_x - l\varphi]_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega) &= h_3\chi_q \quad \text{em} \quad Q, \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde $Q = (0, L) \times (0, T)$ e χ_q é a função característica de $q = (l_1, l_2) \times (0, T)$ com $(l_1, l_2) \subset\subset (0, L)$. Assuma condições de fronteira do tipo Dirichlet, isto é,

$$\varphi(0,t) = \varphi(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) = \omega(0,t) = \omega(L,t) = 0, \quad t \in (0,T),$$

e condições iniciais

$$\varphi(\cdot,0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(\cdot,0) = \varphi_1, \quad \psi(\cdot,0) = \psi_0, \quad \psi_t(\cdot,0) = \psi_1, \quad \omega(\cdot,0) = \omega_0, \quad \omega_t(\cdot,0) = \omega_0.$$

As constantes positivas $\rho_1, \rho_2, k, k_0, l$ e o termo $b(x)$ dependem da composição do material. Denotamos por φ, ψ e ω, respectivamente, os deslocamentos longitudinais, verticais e o ângulo de cisalhamento e por $\{\varphi, \psi, \omega\}$ a solução buscada.

Observação 1: Esse sistema é mais geral que o sistema de Bresse usual pois inclui uma generalização do laplaciano, ou seja, incluímos coeficientes variáveis $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ nos termos onde figuram duas derivadas em relação a variável x que, em particular, podem ser escolhidos iguais a 1, b_0 e 1, respectivamente, com $b_0 > 0$.

Observação 2: O sistema de Bresse se reduz ao sistema de Timoshenko quando $l \to 0$.

A energia do sistema é definida por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\phi_t^2 + \rho_1\omega_t^2 + k(a(x)-1)\varphi_x^2 + b(x)\psi_x^2 + k_0(c(x)-1)\omega_x^2 + k(\varphi_x + \psi + l\omega)^2 + k_0[\omega_x - l\varphi]^2 \, dx$$

de onde segue que $E(t) = E(0), \quad \forall t \geq 0$.

2 Resultados

Nosso principal resultado é a controlabilidade de 1.1. Para isso consideramos:

*Departamento de Matemática, UEM, PR, Brasil, e-mail: jaspalomino@uem.br
†Departamento de Matemática, UEM, PR, Brasil, e-mail: schulz.rodrigo@gmail.com

Hipótese 1: Sejam $a, b, c \in W^{1,\infty}(0, L)$ tais que

$$\left| \begin{array}{lll} a(x) \geq 1 & \text{em} & (0, L) \\ b(x) > 0 & \text{em} & (0, L) \\ c(x) \geq 1 & \text{em} & (0, L) \end{array} \right.$$

Hipótese 2: o aberto (l_1, l_2) é tal que $\overline{(l_1, l_2)} \subset (0, L)$

Teorema 2.1. *Sejam $\varphi_0, \psi_0, \omega_0 \in H_0^1(0, L)$ e $\varphi_1, \psi_1, \omega_1 \in L^2(0, L)$. Então existe $T_0 > 0$ tal que, para $T > T_0$, podemos obter controles $h_1 = h_1(x, t)$, $h_2 = h_2(x, t)$ e $h_3 = h_3(x, t)$ pertencentes a $L^2((l_1, l_2) \times (0, T))$ tais que a solução de* 1.1 *verifica*

$$\varphi(x, T) = \varphi_t(x, T) = \psi(x, T) = \psi_t(x, T) = \omega(x, T) = \omega_t(x, T) = 0.$$

A demonstração da controlabilidade é baseada no método HUM (Hilbert Uniqueness Method). Para isso faz se necessário demonstrar uma desigualdade de observabilidade dada por

$$\|\varphi_0\|^2_{H_0^1(0,L)} + \|\psi_0\|^2_{H_0^1(0,L)} + \|\omega_0\|^2_{H_0^1(0,L)} + \|\varphi_1\|^2_{L^2(0,L)} + \|\psi_1\|^2_{L^2(0,L)} + \|\omega_1\|^2_{L^2(0,L)} \leq C \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} \varphi_t^2 + \psi_t^2 + \omega_t^2 \, dx \, dt$$

onde C é uma constante positiva, $T > T_0$ e $\varphi = \varphi(x, t)$, $\psi = \psi(x, t)$, $\omega = \omega(x, t)$ é solução de 1.1 com $h_1 = h_2 = h_3 = 0$. Um agravante na demonstração de tal desigualdade é a existência de coeficientes variáveis nas equações do sistema 1.1, os quais nos impedem de usar princípios de continuação única decorrentes do teorema de Holmgren.

Referências

[1] BREZIS, H. - *Analyse fonctionnelle - Théorie et Applications*, Dunod, Paris, 2005.

[2] SHOWALTER, R. E. - *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, United State of America, 1991.

[3] SORIANO, J. A.; ET AL. - Asymptotic stability for bresse systems, submetido em outubro/2012 para *Journal of Math. Anal. Appl.*

[4] ZUAZUA, E. - *Lectures notes on exact control and stabilization*, Instituto de Matemática, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1990.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

ESTABILIZAÇÃO LOCAL PARA EQUAÇÕES DE TERMODIFUSSÃO

JUAN A. SORIANO * & JULIANO DE ANDRADE† & RODRIGO A. SCHULZ‡

1 Introdução

Neste trabalho investigamos taxas de decaimento para o modelo de termodifussão unidimensional dado por

$$\left|\begin{array}{ll} \rho u_{tt} - (\lambda+2\mu)u_{xx} + \gamma_1\theta_{1x} + \gamma_2\theta_{2x} = 0, & \text{em } (0,1)\times(0,\infty) \\ c\theta_{1t} + \sqrt{k}q_{1x} + \gamma_1 u_{tx} + d\theta_{2t} = 0, & \text{em } (0,1)\times(0,\infty) \\ n\theta_{2t} + \sqrt{D}q_{2x} + \gamma_2 u_{tx} + d\theta_{1t} = 0, & \text{em } (0,1)\times(0,\infty) \\ \tau_1 q_{1t} + a(x)q_1 + \sqrt{k}\theta_{1x} = 0, & \text{em } (0,1)\times(0,\infty) \\ \tau_2 q_{2t} + b(x)q_2 + \sqrt{D}\theta_{2x} = 0, & \text{em } (0,1)\times(0,\infty) \end{array}\right. \tag{1.1}$$

com dados iniciais

$$\left|\begin{array}{ll} u(x,0) = u_0(x), & u_t(x,0) = u_1(x), \\ \theta_1(x,0) = \theta_1^0(x), & \theta_2(x,0) = \theta_2^0(x), \\ q_1(x,0) = q_1^0(x), & q_2(x,0) = q_2^0(x), \end{array}\right. \tag{1.2}$$

e condições de fronteira dadas por

$$u(0,t) = u(1,t) = \theta_1(0,t) = \theta_1(1,t) = \theta_2(0,t) = \theta_2(1,t) = 0, \tag{1.3}$$

onde u, θ_1, q_1, θ_2 e q_2 são: o deslocamento, a temperatura, o fluxo de calor, o potencial químico e o fluxo associado, respectivamente.

Os coeficientes λ, μ, ρ, γ_1, γ_2, k, D, n, c, d, τ_1, τ_2 são constantes positivas e satisfazem

$$nc - d^2 > 0 \tag{1.4}$$

Assumiremos que $a, b \in L^\infty(0,1)$ são funções não negativas tais que

$$a(x) \geq a_0 > 0 \text{ em } I_1 \subset (0,1)$$
$$b(x) \geq b_0 > 0 \text{ em } I_2 \subset (0,1)$$

e $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$.

Definimos a energia do sistema como

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t)$$

onde

$$E_1(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\lambda+\mu)u_x^2 + \rho u_t^2 + c\theta_1^2 + n\theta_2^2 + \tau_1 q_1^2 + \tau_2 q_2^2 + 2d\theta_1\theta_2 \, dx$$

e

$$E_2(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\lambda+\mu)u_{xt}^2 + \rho u_{tt}^2 + c\theta_{1t}^2 + n\theta_{2t}^2 + \tau_1 q_{1t}^2 + \tau_2 q_{2t}^2 + 2d\theta_{1t}\theta_{2t} \, dx$$

*DMA , PMA, UEM, PR, Brasil, jaspalomino@uem.br
†DMA, PMA, UEM, PR, Brasil, e-mail:ja_voz@yahoo.com.br
‡DMA, PMA, UEM, PR, Brasil, e-mail:schulz.rodrigo@gmail.com

2 Resultado

Nosso principal resultado é dado por

Teorema 2.1. *sob as hipóteses acima, a energia $E(t)$ associada ao sistema* $(1.1) - (1.3)$ *decai exponencialmente, isto é, existem constates positivas c_1 e c_2 tais que*

$$E(t) \leq c_1 e^{-c_2 t} E(0), \quad \forall t > 0 \tag{2.5}$$

Usando o Método de Faedo Galerkin encontramos uma solução regular para o problema $(1.1) - (1.3)$ e para obtermos a estabilização local usamos a técnica dos multiplicadores junto com o método usado em Lasiecka, I. e Tataru, D. [1] ou Wenden, C., Soriano, J.A. , Falcão, F.A. and Rodrigues, J.H. [4]. A Teoria de Semigrupos também pode ser usada para a obtenção de uma solução regular do Problema $(1.1) - (1.3)$ (ver [2] e [3]).

Referências

[1] LASIECKA, I. AND TATARU, D. - Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary damping. *Differential and integral Equations* , **6**, 507-533, 1993.

[2] LIU, Z. AND ZHENG, S.- Semigroups associated with dissipative systems. Research Notes in Mathematics, **389**, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, (1999)

[3] QIN, Y., ZHANG, M., FENG, B. AND LI, H.- Global existence and asymptotic behavior of solutions for thermodifusion equations.*J. Math. Anal. Appl.* (2013). doi:10.1016/j.jmaa.2013.05.041

[4] WENDEN, C., SORIANO, J.A. , FALCÃO, F.A. AND RODRIGUES, J.H. - Decay rates for Bresse system with arbitrary nonlinear localized damping. *Journal of Differential Equations*, **8**, 2267-2290, 2013.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

On the local solvability in Morrey spaces of the Navier-Stokes equations in a rotating frame

Ferreira, Lucas Catao * & de Almeida, Marcelo †

1 Introduction

In this paper we consider the initial value problem (IVP) for the incompressible rotating Navier-Stokes equations

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \Omega \mathbb{J} u + \nabla p = 0, x \in \mathbb{R}^3, \ \ t > 0 \tag{1.1}$$

$$\nabla \cdot u = 0, x \in \mathbb{R}^3, \ \ t \geq 0 \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^3, \tag{1.3}$$

where u is the velocity field of fluid and the scalar function p denotes the pressure at the point $x \in \mathbb{R}^3$ and $t > 0$. The term $\Omega \in \mathbb{R}$ is the so-called Coriolis parameter which corresponds twice the speed of rotation around the vertical axis $e_3 = (0,0,1)$. The operator $\mathbb{J}$ is the skew-symmetric 3×3 matrix such that $\Omega \mathbb{J} u = \Omega e_3 \times u$ which is called Coriolis force. We prove local-in-time (non-uniform) solvability for the rotating Navier-Stokes equations in Morrey spaces $\mathcal{M}^{\sigma}_{p,\mu}(\mathbb{R}^3)$. Theses spaces contain singular and nondecaying functions which are of interest in statistical turbulence. We give an algebraic relation between the size of existence time and angular velocity Ω. The evolution of velocity u is analyzed in suitable Kato-Fujita spaces based in Morrey spaces. We show the asymptotic behavior $u_\Omega \to w$ in $L^\infty(0,T;\mathcal{M}^{\sigma}_{p,\mu}(\mathbb{R}^3))$ as $\Omega \to 0$, where w is the solution for the Navier-Stokes equations with the same data u_0. Particularly, for $\mu = 3 - p$, the solution is approximately self-similar for small $|\Omega|$, when u_0 is homogeneous of degree -1.

Let us review some works about local and global solvability for (1.1)-(1.3). Local-in-time existence of solutions in the Besov space $\dot{\mathcal{B}}^0_{\infty,1}$ was proved in [1] and [5] with existence time T depending on Coriolis parameter Ω (i.e. non-uniform). Indeed the paper [1] considered the equation (1.1) with a additional drift term $Mx \cdot \nabla u$ with M a real matrix. In the paper [2], the author showed local non-uniform solvability in L^∞_{av}, which is a subspace of L^∞ having vertical averaging property. Precisely, $L^\infty_{av}(\mathbb{R}^3) = \{u \in L^\infty(\mathbb{R}^3) : u - \overline{u} \in \dot{\mathcal{B}}^0_{\infty,1}(\mathbb{R}^3)\}$ where $\overline{u} = \lim_{L\to+\infty} \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} u(x_1,x_2,x_3)dx_3$. The motivation for introducing the space $L^\infty_{av}(\mathbb{R}^3)$ was that the Stokes-Coriolis semigroup is unbounded on $L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Afterwards the authors of [3] introduced the space FM_0 and showed a result of local-in-time solvability, uniformly on Ω, where $FM_0 = \{\hat{f} : f \in \mathcal{M}$ has no point mass at $x = 0\}$, and $\mathcal{M}$ is the space of finite Radon measures. We have the inclusions $FM_0 \subset \dot{\mathcal{B}}^0_{\infty,1} \subset BUC$. Concerning small global solvability for (1.1)-(1.3), uniformly on Ω, we have results on Sobolev space $H^{\frac{1}{2}}$, $FM_\delta = \{f \in FM; \text{supp}(\hat{f}) \subset F_\delta\}$, $(FM_0)^{-1} = div[(FM_0)^3]$, $F\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p,\infty}$ with $p > 3$ and $\dot{\mathcal{B}}^{1/2,s_p}_{2,p}$ with $s_p = -1 + \frac{3}{p}$ and $3 < p < \infty$. Here F_δ is a sum-closed frequency set, $FM = (\mathcal{M})^\wedge = \{\hat{f} : f \in \mathcal{M}\}$, $F\dot{B}^s_{p,\infty} = (\dot{B}^s_{p,\infty})^\vee$ denotes Fourier Besov spaces, and $\dot{\mathcal{B}}^{1/2,s_p}_{2,p}$ is a homogeneous hybrid-Besov space. The continuous inclusions $W^{\frac{1}{2},2}(\mathbb{R}^3) \subset L^3(\mathbb{R}^3) \subset L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3) \subset \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}^3)$ holds true, where the first one follows from Sobolev embedding. On the other hand, there is no any inclusion relation between $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}^3)$ and the spaces $FM_\delta \subset FM_0 \subset (FM_0)^{-1}$, $F\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p,\infty}$ and $\dot{\mathcal{B}}^{1/2,s_p}_{2,p}$. The same occurs between $\mathcal{M}_{p,\mu}(\mathbb{R}^3)$ and $\dot{\mathcal{B}}^0_{\infty,1}(\mathbb{R}^3), L^\infty_{av}(\mathbb{R}^3)$, for $1 \leq p < \infty$ and $0 \leq \mu < 3$. Then we are providing a new initial data class for IVP (1.1)-(1.3), which contains in particular nondecaying functions at infinity.

*Instituto de Matemática , IMECC, SP, Brasil. L. Ferreira, suporte FAPESP-SP e CNPQ. E-mail: lcff@ime.unicamp.br
†Departamento de Matemática, UFS, SE, Brasil. M. de Almeida, suporte FAPESP-SP 2011/00334-0. E-mail: nucaltiado@gmail.com

2 Mathematical Results

Teorema 2.1. *Let $1 < q' < p < q < \infty$, $\Omega \in \mathbb{R}$, $0 \le \mu < 3$ with $\mu \ge 3 - p$ and $u_0 \in \mathcal{M}^{\sigma}_{p,\mu}$.*

(i) Let $\mu > 3 - p$. There exists $C > 0$ independent of Ω and u_0, $T_\Omega := T(\Omega) > 0$, and a unique local-in-time mild solution $u \in H_{q,T_\Omega}$ for the IVP (1.1)-(1.3) satisfying $\|u\|_{H_{q,T_\Omega}} \le 2\gamma_\Omega$, where $\gamma_\Omega = C(1 + T_\Omega |\Omega|)^2 \|u_0\|_{p,\mu}$. The data-map solution is locally Lipschitz continuous from $\mathcal{M}^{\sigma}_{p,\mu}$ to H_{q,T_Ω}.

(ii) Let $\mu = 3 - p$ and $\gamma_\Omega = C(1 + T|\Omega|)^2 \|u_0\|_{p,\mu}$, where $T > 0$ is arbitrary and C is as in item (i). There exists $\delta := \delta(T, \Omega) > 0$ and a unique mild solution $u \in H_{q,T}$ satisfying $\|u\|_{H_{q,T}} \le 2\gamma_\Omega$ provided that $\|u_0\|_{p,\mu} < \delta$. For $\Omega = 0$, there is $\delta_0 > 0$, $\delta_0 \ge \delta$, such that if $\|u_0\|_{p,\mu} < \delta_0$ then we can take $T = \infty$ and u is the unique global solution verifying $\|u\|_{H_{q,\infty}} \le 2\gamma_0 = 2C\|u_0\|_{p,\mu}$. In the first conclusion of this item, we can replace δ by δ_0 provided that $T|\Omega|$ is small enough.

Observação 2.1. *Let $\phi \in C^\infty_0$, $\phi \ge 0$, $\phi(0) = 1$, $\int_{\mathbb{R}^3} \phi dx = 1$, and $\phi(x) = 0$ for $|x| \ge 1$. Let $\{\lambda_j\} \subset \mathbb{R}^n$ satisfy $|\lambda_j| = 4^j$ and define*

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} e^{i\lambda_j \cdot x} \phi(x - \lambda_j). \tag{2.4}$$

Then f is a nondecaying function and belongs to $\mathcal{M}_{p,\mu}(\mathbb{R}^3)$, for $1 \le p < \infty$ and $0 \le \mu < 3$, but not to FM_δ, FM_0, $(FM_0)^{-1}$, $\dot{\mathcal{B}}^{1/2,s_p}_{2,p}$ nor $F\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p,\infty}$.

Teorema 2.2. *Under the hypotheses of Theorem 2.1.*

(i) (Vanishing angular velocity limit) Let u_Ω be the solution corresponding to angular velocity Ω, and let w be the solution of the Navier-Stokes equations ($\Omega = 0$) both with the initial data u_0. Then

$$u_\Omega \to w \text{ in } L^\infty(0, T; \mathcal{M}_{p,\mu}) \text{ as } \Omega \to 0, \tag{2.5}$$

*where either $T > 0$ is arbitrary if $\mu = 3 - p$ or $T = T_0$ if $\mu > 3 - p$ (see Remark **??**).*

(ii) (Approximate self-similarity as $\Omega \to 0$) Assume $\mu = 3 - p$. Let $u_\Omega(x, t)$ be the solution with data u_0 homogeneous of degree -1 and with existence time T_Ω, where $\|u_0\|_{p,\mu} \le \delta_0$ and $T_\Omega \to \infty$ as $\Omega \to 0$. Then, for small values of $|\Omega|$, u_Ω is approximately self-similar in $L^\infty_{loc}(0, \infty; \mathcal{M}_{p,\mu})$, that is, $u_\Omega(x, t)$ converges in the sense of (2.5), for any fixed $T > 0$, to the self-similar solution w of the Navier-Stokes equations.

References

[1] M. Hieber, O. Sawada, The Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^n$ with linearly growing initial data. Arch. Ration. Mech. Anal. 175 (2005), no. 2, 269–285.

[2] Y. Giga, K. Inui, A. Mahalov and S.Matsui, Navier-Stokes Equations in a rotating frame in $\mathbb{R}^3$ with initial data nondecresing at infinity, Hokkaido Math. J., 35 (2006), p.321–364.

[3] Y. Giga, K. Inui, A. Mahalov, S. Matsui, Uniform local solvability for the Navier-Stokes equations with the Coriolis force, in *Kyoto Conference on the Navier-Stokes Equations and their Applications*, 187–198, RIMS Kôflex okyûroku Bessatsu, B1 Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2007.

[4] Y. Giga, K. Inui, A. Mahalov, J. Saal, Uniform global solvability of the rotating Navier-Stokes equations for nondecaying initial data, Indiana Univ. Math. J. **57** (2008), no. 6, 2775–2791.

[5] O. Sawada, The Navier-Stokes flow with linearly growing initial velocity in the whole space. Bol. Soc. Parana. Mat. (3) 22 (2004), no. 2, 75–96.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO PARA UM PROBLEMA PARABÓLICO COM DIFUSÃO GRANDE

LUIS A. F. DE OLIVEIRA * & RICARDO DE SÁ TELES †

Estamos interessados em examinar a questão da continuidade do atrator de trajetórias para um problema parabólico onde se garante existência de solução, mas não unicidade.

1 Introdução

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 3)$ um subconjunto aberto, limitado, conexo, com fronteira suave Γ e para cada ponto $x \in \Gamma$, $\nu = \nu(x)$ indica o vetor normal exterior unitário a Γ no ponto x. Além disso, sejam $d > 1$ e $d\lambda_1 > 2$ (λ_1 é o primeiro autovalor do Laplaciano com condição de Neumann homogênea), $\alpha \in (0,1)$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 satisfazendo as seguintes hipóteses: existem constantes positivas c_f, C, c_1, c_2, c_3 e $2 < p < \frac{2n}{n-2}$ tais que

$$f'(u) \geqslant c_f,$$

$$|f(u_1) - f(u_2)| \leqslant C|u_1 - u_2|(1 + |u_1|^{p-2} + |u_2|^{p-2}),$$

$$c_1|u|^p - c_3 \leqslant f(u) \cdot u,$$

$$|f(u)|^{\frac{p}{p-1}} \leqslant c_2(|u|^p + 1),$$

para quaisquer u, u_1, $u_2 \in \mathbb{R}$.

Vamos examinar a questão da continuidade do atrator de trajetórias para o problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u - f(u) + |u|^{\alpha-1}u \qquad & (t,x) \in (0,\infty) \times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \qquad & (t,x) \in (0,\infty) \times \Gamma, \end{aligned} \tag{1.1}$$

com relação ao coeficiente de difusão d.

A definição de solução fraca global para (1.1), o resultado de existência e a construção de uma família de atratores de trajetórias para cada d, nas condições acima, podem ser encontrados em Teles [1] e Chepyzhov [2]. Nessas referências também se define uma topologia adequada para trabalharmos, a qual é denotada por Θ^+_{loc}. É importante observar que a família de atratores obtida estará contida num conjunto absorvente que independe de d.

Consideremos a decomposição $L^2(\Omega) = [w_0] \oplus Y$, onde $w_0(x) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}$ e Y é o espaço das funções de $L^2(\Omega)$ com média nula. Com isso, se $u = u(t,x)$ é uma solução de (1.1), então vamos adotar a decomposição $u(t,x) = \beta(t)w_0(x) + v(t,x)$ escrita de maneira única, sendo $\beta(t) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \int_\Omega u(t,x)dx$ e $v(t,x) = u(t,x) - \beta(t)w_0(x)$. Essa decomposição nos permite reescrever a equação (1.1) como um sistema de equações.

Queremos demonstrar que se $u(t,x) = \beta(t)w_0(x) + v(t,x)$ é uma solução da equação (1.1), $d \to +\infty$ e $\mathfrak{A}_\infty$ é o atrator de trajetórias da equação diferencial ordinária

$$\begin{aligned} \gamma'(t) = -f(\gamma(t)) + |\gamma(t)|^{\alpha-1}\gamma(t), \quad t \geqslant 0 \\ \gamma(0) = \gamma_0 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

*IME, USP, SP, Brasil, e-mail: luizaug@ime.usp.br
†Instituto de Química, Unesp/Araraquara, SP, Brasil, ricardo.sa.teles@gmail.com

então

- a função componente v satisfaz $v \to 0$ na topologia Θ^+_{loc}; e
- a família $\{\mathfrak{A}_d\}_d \cup \{\widetilde{\mathfrak{A}_\infty}\}$ é semicontínua superiormente em $d = \infty$, onde $\widetilde{\mathfrak{A}_\infty}$ é a imersão de $\mathfrak{A}_\infty$ em $[w_0] \oplus Y$ através da aplicação $\gamma \in \mathbb{R} \mapsto \gamma w_0$.

2 Resultado

Teorema 2.1. *Se $\widetilde{\mathfrak{A}_\infty}$ é a imersão de $\mathfrak{A}_\infty$ em $L^2(\Omega) = [w_0] \oplus Y$, então a família de atratores de trajetórias $\{\mathfrak{A}_d\}_d \cup \{\widetilde{\mathfrak{A}_\infty}\}$ é semicontínua superiormente em $d = \infty$, isto é, para toda vizinhança $\mathcal{O}$ de $\widetilde{\mathfrak{A}_\infty}$ na topologia Θ^+_{loc} existe $d_0 > 0$ tal que se $d \geqslant d_0$, então $\mathfrak{A}_d \subset \mathcal{O}(\widetilde{\mathfrak{A}_\infty})$.*

Referências

[1] TELES, R. S. - *Atratores de trajetórias para algumas classes de equações diferenciais parciais.*, Tese de Doutorado do IME-USP, 2012.

[2] CHEPYZHOV, V. V. AND VISHIK, M. I. - *Attractors for equations of mathematical physics*, Colloquium publications, 49, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

Comparison and positive solutions for a class of dirichlet problem involving the (p, q)-laplacian

luiz fernando O. faria [*] [†], olímpio h. miyagaki [‡] & dumitru motreanu [§]

1 Introduction

In [4], we study the existence of (positive) solutions for the following quasi-linear elliptic equation with Dirichlet boundary condition

$$\begin{aligned} -\Delta_p u - \mu\Delta_q u = f(x,u,\nabla u) \quad &\text{in} \quad \Omega \\ u > 0 \quad &\text{in} \quad \Omega \\ u = 0 \quad &\text{on} \quad \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.1}$$

on a bounded domain Ω in $\mathbb{R}^N$ with a $C^{1,\alpha}$-boundary $\partial\Omega$, for some $0 < \alpha \leq 1$. In the left-hand side of the equation in (1.1) we have the p-Laplacian Δ_p and the q-Laplacian Δ_q with $1 < q < p < +\infty$, and a constant $\mu \geq 0$. The problem covers the corresponding statement with p-Laplacian in the principal part, for which it is sufficient to take $\mu = 0$. Here $-\Delta_p$ is regarded as the operator $-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$, where $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, defined by

$$\langle -\Delta_p u, v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx \text{ for all } u, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

The right-hand side of the equation in (1.1) is in the form of convection term, meaning a nonlinearity $f(x, u, \nabla u)$ which depends on the point x in the domain Ω, on the solution u and on its gradient ∇u. The essential feature of this paper is the dependence on the gradient ∇u, which prevents the use of variational methods.

We assume that $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ is a continuous function satisfying the growth condition:

(F) $b_0|t|^{r_0} \leq f(x,t,\xi) \leq b_1(1+|t|^{r_1}+|\xi|^{r_2})$ for all $(x,t,\xi) \in \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$, with constants $b_0, b_1 > 0$, $r_1, r_2 \in [0, p-1)$, $r_0 \in [0, p-1)$ if $\mu = 0$, and $r_0 \in [0, q-1]$ if $\mu > 0$.

Since we are looking for positive solutions of problem (1.1), without any loss of generality we will suppose in the sequel that $f(x,t,\xi) \equiv 0$ for all $t \leq 0$ and $(x,\xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N$.

The (p, q)-Laplacian problems have received much interest due to their rich mathematical substance and various applications in quantum physics, biophysics, plasma physics, chemical reaction design (see, e.g., [1], [5]).

The aim of this result is to prove the existence of a positive solution. The solution is constructed through an approximating process (see e.g. [2]) based on gradient bounds and regularity up to the boundary. The positivity of the solution is shown by applying a new comparison principle which is established here.

2 Mathematical Results

The Sobolev space $W_0^{1,p}(\Omega)$ with $1 < p < \infty$ is endowed with the norm

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

[*]Departamento de Matemática , UFJF, MG, Brasil, luiz.faria@ufjf.edu.br
[†]Partially supported by Fapemig CEX APQ 01960/10
[‡]Departamento de Matemática , UFJF, MG, Brasil, e-mail: ohmiyagaki@gmail.com
[§]Laboratoire de Modlisation, Analyse non Linaire et Optimisation, Universit de Perpignan, France, e-mail: motreanu@univ-perp.fr

Throughout the paper the solutions of the elliptic boundary value problems are in the weak sense.

The following result is a slightly extended version of [3, Lemma 2].

Lemma 2.1. *Let $w_1, w_2 \in L^\infty(\Omega)$ satisfy $w_i \geq 0$ a.e. in Ω, $w_i^{1/q} \in W^{1,p}(\Omega)$, $\Delta_p w_i^{1/q} \in L^\infty(\Omega)$ for $i = 1, 2$, and $w_1 = w_2$ on $\partial\Omega$, where $1 < q < p < +\infty$. If $w_1/w_2, w_2/w_1 \in L^\infty(\Omega)$, then there holds*

$$\int_\Omega \left(-\frac{\Delta_p w_1^{1/q} + \mu \Delta_q w_1^{1/q}}{w_1^{(q-1)/q}} + \frac{\Delta_p w_2^{1/q} + \mu \Delta_q w_2^{1/q}}{w_2^{(q-1)/q}} \right) (w_1 - w_2) dx \geq 0.$$

Lemma 2.1 enables us to establish a comparison principle for a subsolution and a supersolution of the Dirichlet problem

$$-\Delta_p u - \mu \Delta_q u = g(u) \quad \text{in} \quad \Omega \tag{2.2}$$

$$u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \tag{2.3}$$

where $1 < q \leq p < +\infty$, $\mu \geq 0$ and $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous function.

We recall that $u_1 \in W^{1,p}(\Omega)$ is a subsolution of problem $(2.2) - (2.3)$ if $u_1 \leq 0$ a.e. on $\partial\Omega$ and

$$\int_\Omega (|\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 \nabla \varphi + \mu |\nabla u_1|^{q-2} \nabla u_1 \nabla \varphi) dx \leq \int_\Omega g(u_1) \varphi dx$$

for all $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ with $\varphi \geq 0$ a.e. in Ω, while $u_2 \in W^{1,p}(\Omega)$ is a supersolution of $(2.2) - (2.3)$ if the reversed inequalities are satisfied with u_2 in place of u_1 for all $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ with $\varphi \geq 0$ a.e. in Ω.

Theorem 2.1. *Let $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a continuous function such that $t^{1-q} g(t)$ is nonincreasing for $t > 0$ if $\mu > 0$, and $t^{1-p} g(t)$ is nonincreasing for $t > 0$ if $\mu = 0$. Assume that $u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ and $u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ are a positive subsolution and a positive supersolution of problem $(2.2) - (2.3)$, respectively. If $u_i \in L^\infty(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\Omega)$, $\Delta_p u_i \in L^\infty(\Omega)$, $u_i/u_j \in L^\infty(\Omega)$ for $i, j = 1, 2$, then $u_2 \geq u_1$ in Ω.*

Our main result is the following existence theorem of positive solutions.

Theorem 2.2. *Under assumption (F), problem (1.1) admits a (positive) solution $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$.*

References

[1] BENCI, V., FORTUNATO, D. AND PISANI, L.- *Soliton like solutions of a Lorentz invariant equation in dimension 3,* Rev. Math. Phys., 1 (1998), pp. 315-344.

[2] CORRÊA, F.J.S.A. AND NASCIMENTO, R.G.- *On the Existence of Solutions of a Nonlocal Elliptic Equation with a p-Kirchhoff-Type Term,* International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, vol. 2008, Article ID 364085, 25 pages, 2008.

[3] DÍAZ, J. I. AND SAA, J. E.- *Existence et unicité de solutions positives pour certaines équations elliptiques quasilinéaires,* C. R. Acad. Sci. Paris, 305 (1978), pp. 521-524.

[4] FARIA, L. F. O., MIYAGAKI, O. H. AND MOTREANU, D.- *Comparison and positive solutions for problems with (p, q)-Laplacian and Convection term,* Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, to appear.

[5] FIGUEIREDO, G. M.- *Existence of positive solutions for a class of p&q elliptic problems with critical growth on $\mathbb{R}^N$,* J. Math. Anal. Appl., 378 (2011), pp. 507518.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

MEASURE NEUTRAL FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS AS GENERALIZED ODES

MÁRCIA FEDERSON * MIGUEL FRASSON † JAQUELINE G. MESQUITA ‡ & PATRICIA TACURI §

1 Introduction

In the paper [2], we introduce a class of equations called measure neutral functional differential equations, which we refer to simply as measure NFDEs and which encompasses classic classes of NFDEs. Our main results in [2] state that, similarly to other kinds of differential equations, measure NFDEs can also be regarded as abstract generalized ODEs. Then, using the relation between measure NFDEs and generalized ODEs, we prove results on the existence and uniqueness of solutions and continuous dependence of solutions on parameters for our class of measure NFDEs.

We focus our attention on equations of the form

$$\mathrm{D}\big[N(x_t,t)\big] = f(x_t,t)\mathrm{D}g,$$

where $\mathrm{D}[N(x_t,t)]$ and $\mathrm{D}g(t)$ are the distributional derivatives of $N(x_t,t)$ and $g(t)$ respectively in the sense of L. Schwartz (see the references [1] and [6]). We call the above equation a *measure neutral functional differential equation* or simply *measure NFDE*.

2 A glimpse of the main results

Let t_0, σ, r be given real numbers, with $\sigma, r > 0$. The theory of neutral functional differential equations is usually concerned with equations of type

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N(y_t,t) = f(y_t,t), \quad t \in [t_0, t_0+\sigma],$$

where $x_t(\theta) = y(t+\theta)$, for $\theta \in [-r, 0]$. Because we would like to model real-world problems undergoing jumps or discontinuities, we will consider the space of regulated functions from $[t_0 - r, t_0 + \sigma]$ to $\mathbb{R}^n$ as our phase space. We denote by $G([a,b],X)$ the space of all regulated functions $f : [a,b] \to X$. When endowed with the usual supremum norm, $G([a,b],X)$ is a Banach space.

Let $O \subset G([t_0 - r, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n)$ be open and consider the set

$$P = \{y_t : y \in O,\ t \in [t_0, t_0+\sigma]\} \subset G([-r,0],\mathbb{R}^n).$$

Assume that $f : P \times [t_0, t_0+\sigma] \to \mathbb{R}^n$ is a function such that, for each $y \in O$, the mapping $t \mapsto f(y_t,t)$ is integrable (in a sense that we will specify later) on $[t_0, t_0+\sigma]$ with respect to a nondecreasing function $g : [t_0, t_0+\sigma] \to \mathbb{R}$.

We assume that N is a linear and autonomous operator which means that $N(x_t,t) = N(t)x_t$. Therefore the previous equation can be rewritten as

$$\mathrm{D}[N(t)x_t] = f(x_t,t)\mathrm{D}g.$$

*ICMC, USP, São Carlos, Brazil, federson@icmc.usp.br
†ICMC, USP, São Carlos, Brazil, frasson@icmc.usp.br
‡ICMC, USP, São Carlos, Brazil, jaquebg@icmc.usp.br
§ICMC, USP, São Carlos, Brazil, ptacuri@icmc.usp.br

Using the Riesz-type Representation Theorem for bounded linear functionals on the space of regulated functions by M. Tvrdý, see [7, Th. 3.8], we have that the operator N is given by

$$N(t)\varphi = \varphi(0) - \int_{-r}^{0} \mathrm{d}_\theta[\mu(t,\theta)]\varphi(\theta),$$

where $\varphi \in G([-r,0],\mathbb{R}^n)$ and $\mu : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ is a mensurable and normalized function satisfying

$$\mu(t,\theta) = 0,\ \theta \geqslant 0; \quad \mu(t,\theta) = \mu(t,-r),\ \theta \leqslant -r.$$

Moreover, we assume that μ is a left-continuous function in $\theta \in (-r,0)$, of bounded variation on $\theta \in [-r,0]$, and the variation of the μ on $[s,0]$, $var_{[s,0]}\mu$, tends to zero as $s \to 0$. See [5].

Combining the above equations, we obtain

$$N(t)x_t - N(0)x_0 = \int_0^t f(x_s,s)\mathrm{d}g(s),$$

which implies

$$x(t) - \int_{-r}^{0} \mathrm{d}_\theta[\mu(t,\theta)]x(t+\theta) - x(0) + \int_{-r}^{0} \mathrm{d}_\theta[\mu(0,\theta)]\varphi(\theta) = \int_0^t f(x_s,s)\mathrm{d}g(s)$$

where the integral on the right-hand side can be understood is in the sense of Riemann-Stieltjes, Lebesgue-Stieltjes or even Kurzweil-Henstock-Stieltjes. Therefore, the integral form of equation

$$\mathrm{D}[N(t)x_t] = f(x_t,t)\mathrm{D}g.$$

can be written as

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(x_s,s)\mathrm{d}g(s) + \int_{-r}^{0} d[\mu(t,\theta)]x(t+\theta) - \int_{-r}^{0} d[\mu(0,\theta)]\varphi(\theta).$$

We establish a one-to-one correspondence between the solutions of the integral form of our measure NFDE and the solutions of a certain class generalized ODE introduced by Jaroslav Kurzweil. Then we obtain a result on the existence and uniqueness of solutions of measure NFDEs via the correspondence between these equations and generalized ODEs.

A very nice example is given as well.

References

[1] DAS, P.C. AND SHARMA, R.R. - Existence and stability of measure differential equations, *Czechoslovak Math. J.* 22(97) (1972) 145–158.

[2] FEDERSON, M.; FRASSON, M.; MESQUITA, J.G. AND TACURI, P. - Measure neutral functional differential equations as generalized ODEs, submitted.

[3] FEDERSON, M. AND SCHWABIK, Š. - Generalized ODE approach to impulsive retarded functional differential equations, *Differential Integral Equations* 19 (11) (2006) 1201–1234.

[4] FEDERSON, M.; MESQUITA, J.G. AND SLAVÍK, A. - Measure functional differential equations and functional dynamic equations on time scales, *J. Differential Equations* 252 (6) (2012) 3816–3847.

[5] HALE, J.K. AND VERDUYN LUNEL, S.M. - *Introduction to functional-differential equations*, Vol. 99 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1993.

[6] TALVILA, E. - Integrals and Banach spaces for finite order distributions, *Czechoslovak Math. J.* 62(137) (1) (2012) 77–104.

[7] TVRDÝ, M. - Regulated functions and the Perron-Stieltjes integral, *Časopis Pěst. Mat.* 114 (2) (1989) 187–209.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

EXISTENCE OF PERIODIC ORBITS IN AN ELECTROMECHANICAL SYSTEM UNDER PARAMETRIC AND EXTERNAL EXCITATIONS

MÁRCIO J.H. DANTAS * RUBENS SAMPAIO & ROBERTA LIMA †

1 Introduction

Consider the following O.D.E. system

$$\begin{aligned} p_1'(s) &= \frac{\epsilon\, z(s) - \epsilon\, k}{\epsilon\, k + \omega_0}, \\ w_1'(s) &= \frac{v_5 \sin(s) - z(s) - w_1(s)}{\epsilon\, k + \omega_0}, \\ z'(s) &= \frac{-(\epsilon\, z(s) + \omega_0)^2 \cos(p_1(s) + s)\, \sin(p_1(s) + s) - v_3\, z(s) + v_2\, w_1(s)}{(\epsilon\, k + \omega_0)\left(\epsilon \sin(p_1(s) + s)^2 + 1\right)}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

The equation (1.1) models a very simple system composed by a cart whose motion is driven by a DC motor. The coupling between the motor and the cart is made by a mechanism called *scotch yoke*. In this simple system, the coupling is a sort of master-slave condition: the motor drives, the cart is driven, and that is all. All parameters in (1.1) are dimensionless. For the physical meaning of the above system as well as its deduction from the first principles see [1]. In this note some modifications of the model in [1] were included in (1.1). In the above system w_1, z are oscillations around adequately chosen parameters. In (1.1) an external excitation, given by $v_5 \sin(s)$, and a detuning parameter k are introduced. With this last parameter a correction of the frequency ω_0 is performed. Note that (1.1) is subject to parametric and external excitations. As a final remark, one can observe that in the above system there is a $1:2$ resonance between the periods of parametric and external excitations.

The aim of this note is to give a proof of the existence of a 2π-periodic orbit of (1.1). Our main tool is the Regular Perturbation Theory.

2 An sketch of the proof

In (1.1), take the following initial conditions $(p_1(0), w_1(0), z(0)) = (0, B_0, C_0) + \epsilon\,(0, B, C)$. Let Φ be the flow of the above system. It is well known, see [2, Th. 3.3, pg.21], that Φ is a C^∞ mapping of the initial conditions as well as of the parameters. So

$$\Psi(s, B, C, k, \varepsilon) = \Phi(s, 0, B_0 + \epsilon B, C_0 + \epsilon C, k, \epsilon) \tag{2.2}$$

where B_0, C_0 are adequately chosen parameters, is a C^∞ mapping. Hence

$$\Psi(s, B, C, k, \epsilon) = \Psi_0(s, B_0, C_0, k) + \Psi_1(s, B, C, k)\,\epsilon + O\left(\epsilon^2\right), \tag{2.3}$$

*Faculdade de Matemática , UFU, MG, Brazil, marcio@ufu.br
†Mechanical Engineering Department, PUC-Rio, RJ, Brazil, e-mail:rsampaio@puc-rio.br

where Ψ_i, $i=0,1$ and the remainder $O\left(\epsilon^2\right)$ are C^∞ mappings. One has that $\Psi_0\left(s,B_0,C_0,k\right)=\left(p_{10}\left(s\right),\ w_{10}\left(s\right),\right.$ $\left.z_0\left(s\right)\right)$ satisfies the following system

$$\begin{aligned} p_{10}'\left(s\right)=0,\quad w_{10}'\left(s\right)&=-\frac{w_{10}\left(s\right)+z_{10}\left(s\right)}{\omega_0}+\frac{v_5\sin\left(s\right)}{\omega_0},\\ z_0'\left(s\right)&=\frac{v_2\,w_{10}\left(s\right)-v_3\,z_0\left(s\right)}{\omega_0}-\frac{\omega_0\sin\left(2\,s+2\,p_{10}\left(s\right)\right)}{2} \end{aligned} \tag{2.4}$$

with initial conditions given by $p_{10}\left(0\right)=0$, $w_{10}\left(0\right)=B_0$, $z_0\left(0\right)=C_0$. And $\Psi_1\left(s,B,C,k\right)=\left(p_{11}\left(s\right),\ w_{11}\left(s\right),\right.$ $\left.z_1\left(s\right)\right)$ with $p_{11}\left(0\right)=0$, $w_{11}\left(0\right)=B$, $z_1\left(0\right)=C$ satisfies

$$\begin{aligned} p_{11}'\left(s\right)=\frac{z_0\left(s\right)-k}{\omega_0},\quad w_{11}'\left(s\right)&=-\frac{w_{11}\left(s\right)+z_{11}\left(s\right)}{\omega_0}-\frac{k\,\left(v_5\sin\left(s\right)-z_0\left(s\right)-w_{10}\left(s\right)\right)}{\omega_0^2},\\ z_1'\left(s\right)&=-\omega_0\cos\left(2\,s+2\,p_{10}\left(s\right)\right)p_{11}\left(s\right)+\frac{v_2\,w_{11}\left(s\right)-v_3\,z_1\left(s\right)}{\omega_0}+F\left(s,p_{10}\left(s\right),w_{10}\left(s\right),z_0\left(s\right),k\right) \end{aligned} \tag{2.5}$$

where F is an $2\,\pi$ periodic function in the variable s. Such function is C^∞ and is directly obtained from the usual perturbation procedure. Since the matrix

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega_0} & -\frac{1}{\omega_0}\\ \frac{v_2}{\omega_0} & -\frac{v_3}{\omega_0}\end{pmatrix}$$

has all eigenvalues with negative real parts, it follows that there are B_0,C_0 such that $w_{10}\left(s\right)$, $z_{10}\left(s\right)$ are $2\,\pi$ periodic functions. Of course $p_{10}\left(s\right)=0$. And (1.1) has a $2\,\pi$ periodic solution if, and only if, $\Psi\left(2\,\pi,B,C,k,\epsilon\right)=\Psi\left(0,B,C,k,\epsilon\right)$. After some simplifications this last equation is equivalent to

$$\Psi_1\left(2\,\pi,B,C,k\right)-\left(0,B,C\right)+O\left(\epsilon\right)=\left(0,0,0\right). \tag{2.6}$$

Let us denote by $\Lambda\left(k,B,C,\epsilon\right)$ the left hand-side of (2.6). From the properties of the matrix $\mathbf{A}$ and after a long, but straightforward computation, one obtains that there are B_1, C_1 such that $\Lambda\left(0,B_1,C_1,0\right)=\left(0,0,0\right)$ and

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\left(k,B,C\right)}\left(0,B_1,C_1,0\right)=\begin{pmatrix} \frac{-2\pi}{\omega_0} & 0 & 0\\ T_1 & \mathbf{A}_{11}-1 & \mathbf{A}_{12}\\ T_2 & \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}-1\end{pmatrix}.$$

Hence, it follows from the Implicit Function Theorem that there are C^∞ functions $k\left(\epsilon\right),B\left(\epsilon\right),C\left(\epsilon\right)$ such that $\Lambda\left(k\left(\epsilon\right),\ B\left(\epsilon\right),\ C\left(\epsilon\right),\epsilon\right)=\left(0,0,0\right)$ for ϵ adequately small. Thus, one gets from (2.3) and (2.2) that (1.1) has $2\,\pi$ periodic solutions for the initial condition $\left(0,B\left(\epsilon\right),C\left(\epsilon\right)\right)$ and $k=k\left(\epsilon\right)$.

3 Acknowledgments

The first author acknowledges the support given by FAPEMIG and the second and third authors acknowledge the support given by FAPERJ, CNPq and CAPES.

References

[1] Lima, R. and Sampaio, R. *Analysis of an Electromechanical Coupled System with Embarked Mass,* Mecánica Computacional, XXXI (2012), pp. 2709–2733.

[2] Hale, J. *Ordinary Differential Equations.*, Dover Publications,Mineola, New York, 2009.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

ASYMPTOTIC BEHAVIOR FOR A CLASS OF EXTENSIBLE BEAMS AND PLATES

Marcio A. Jorge Silva *

1 Introduction

In the present work we establish new results about well-posedness and long-time behavior of solutions to the following nonlocal equation related to a class of extensible beams and plates with nonlinear fractional damping and source term

$$u_{tt} + \Delta^2 u - M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u + N\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)(-\Delta)^\theta u_t + f(u) = h \tag{1.1}$$

in $\Omega \times (0,\infty)$, where $\Omega \subset \mathbb{R}^q$ is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$, $0 \leq \theta \leq 1$, M and N are nonlinear scalar functions, $f(u)$ is a nonlinear source term and h is an external forcing term. With respect to the displacement $u = u(x,t)$ we consider simply supported boundary condition

$$u = \Delta u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times [0,\infty), \tag{1.2}$$

and initial conditions

$$u(\cdot,x) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \tag{1.3}$$

Our first result is concerned with existence, uniqueness, continuous dependence and continuity of weak solutions to the problem (1.1)-(1.3). Then we can study the long-time behavior of solutions through the dynamical system generated by (1.1)-(1.3). Our second (and main) result shows the existence of a compact global attractor to the corresponding dynamical system. It is worth noting that all results hold by taking $0 \leq \theta \leq 1$. However, the main range is when we consider $\theta \in [0, 1/2)$, emphasizing the case $\theta = 0$. Our results complement those ones given in [1, 2, 3, 4].

2 Results

The precise hypotheses on M, N, θ, f and h, are given below.

(**H1**) Let M and N be C^1-functions on $[0,\infty)$ such that

$$M(\tau) \geq 0 \quad \text{and} \quad N(\tau) > 0, \quad \forall\ \tau \geq 0, \tag{2.4}$$

$$2M(\tau)\tau - \int_0^\tau M(s)ds \geq -\frac{\lambda_1^{1/2}}{4}\tau - 2m_0, \quad \forall\ \tau \geq 0, \tag{2.5}$$

for some constant $m_0 > 0$.

(**H2**) Let f be a C^1-function on $\mathbb{R}$ such that $f(0) = 0$, and

$$|f'(u)| \leq k_1(1 + |u|^{\rho/2}), \quad \forall\ u \in \mathbb{R}, \tag{2.6}$$

*Departamento de Matemática, UEL, Londrina, PR, Brasil, marcioajs@uel.br

for some constants $k_1 > 0$, and ρ satisfying

$$\rho > 0 \ \text{ if } \ 1 \leq q \leq 4 \quad \text{ and } \quad 0 < \rho \leq \frac{8}{q-4} \ \text{ if } \ q \geq 5. \tag{2.7}$$

Also, let us assume that there exist constants $l_0, l_1 > 0$ such that

$$-\frac{\lambda_1}{8}|u|^2 - l_0 \leq \int_0^u f(s)ds \leq f(u)u + \frac{\lambda_1}{8}|u|^2 + l_1, \quad \forall\, u \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

(**H3**) Let $h \in H$ and $0 \leq \theta \leq 1$.

The well-posedness of problem (1.1)-(1.3) is the following.

Theorem 2.1. *Under assumptions* (**H1**)-(**H3**) *we have:*

(*i*) *If* $(u_0, u_1) \in \mathcal{H} := (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times L^2(\Omega)$, *then problem* (1.1)-(1.3) *has a weak solution in the class*

$$u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \quad u_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \tag{2.9}$$

satisfying

$$(u, u_t) \in C([0, T], \mathcal{H}), \quad \forall\, T > 0.$$

(*ii*) *If* $z^1 = (u, u_t)$, $z^2 = (v, v_t)$ *are two weak solutions corresponding to initial data* $z_0^1 = (u_0, u_1)$, $z_0^2 = (v_0, v_1)$, *respectively, then*

$$||z^1(t) - z^2(t)||_{\mathcal{H}} \ \leq \ e^{Ct}||z_0^1 - z_0^2||_{\mathcal{H}}, \quad \forall\, t \in [0, T], \tag{2.10}$$

for some positive constant $C = C(\|z_0^1\|_{\mathcal{H}}, \|z_0^2\|_{\mathcal{H}}, T)$. *In particular, problem* (1.1)-(1.3) *has uniqueness.*

Remark 2.1. *Theorem 2.1 implies that the family of evolution operators* $S(t) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *defined by*

$$S(t)(u_0, u_1) = (u(t), u_t(t)), \quad t \geq 0, \tag{2.11}$$

where (u, u_t) *is the unique weak solution of* (1.1)-(1.3), *defines a nonlinear* C_0*-semigroup. Then we can study the asymptotic behavior of solutions through the dynamical system* $(\mathcal{H}, S(t))$.

Our main result is the following.

Theorem 2.2. *Under assumptions of Theorem 2.1 we have:*

(*i*) *The dynamical system* $(\mathcal{H}, S(t))$ *given by* (2.11) *has a compact global attractor* $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$, *which is characterized by unstable manifold* $\mathcal{A} = \mathbb{M}_+(\mathcal{N})$, *emanating from the set* $\mathcal{N}$ *consisting of stationary solutions of* $S(t)$.

(*ii*) *The dynamical system* $(\mathcal{H}, S(t))$ *given by* (2.11) *has a global minimal attractor* $\mathcal{A}_{\min} = \mathcal{N}$.

References

[1] BIAZUTTI A.C. AND CRIPPA H.R. - *Global attractor and inertial set for the beam equation*, Appl. Anal. 55 (1994), no. 1-2, 61-78.

[2] CAVALCANTI M.M., DOMINGOS CAVALCANTI V.N. AND SORIANO J.A. - *Global existence and asymptotic stability for the nonlinear and generalized damped extensible plate equation,* Commun. Contemp. Math. 6 (2004), no. 5, 705-731.

[3] EDEN A. AND MILANI A.J. - *Exponential attractor for extensible beam equations*, Nonlinearity 6 (1993), no. 3, 457-479.

[4] MA AND NARCISO V. - *Global attractor for a model of extensible beam with nonlinear damping and source terms*, Nonlinear Anal. 73 (2010), no. 10, 3402-3412.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

EIGENVALUE DECAY OF POSITIVE INTEGRAL OPERATORS ON COMPACT TWO-POINT HOMOGENEOUS SPACES

MARIO H. DE CASTRO * & ANA C. PIANTELLA †

1 Introduction

Let $\mathbb{M}$ be a compact two-point homogeneous space of dimension m. Such space is both a riemannian m-manifold and a compact symmetric space of rank 1. In this work, we will always consider $m \geq 2$. Let dx be the usual volume element on $\mathbb{M}$ and $L^2(\mathbb{M})$ the Hilbert space of all square-integrable complex functions on $\mathbb{M}$ endowed with the inner product

$$\langle f, g\rangle_2 := \frac{1}{\sigma}\int_{\mathbb{M}} f(x)\overline{g(x)}\,dx, \quad f, g \in L^2(\mathbb{M}), \tag{1.1}$$

and the derived norm $||\cdot||_2$, the normalization constant being defined by $\sigma := \int_{\mathbb{M}} dx$.

We will deal with integral operators defined by

$$\mathcal{K}(f) = \int_{\mathbb{M}} K(\cdot, y)f(y)\,dy, \tag{1.2}$$

in which the generating kernel $K\colon \mathbb{M}\times\mathbb{M} \to \mathbb{C}$ is an element of $L^2(\mathbb{M}\times\mathbb{M})$. In this case, (1.2) defines a compact operator on $L^2(\mathbb{M})$.

If K is L^2-*positive definite* in the sense that

$$\int_{\mathbb{M}}\int_{\mathbb{M}} K(x, y)f(x)\overline{f(y)}\,dxdy \geq 0, \quad f \in L^2(\mathbb{M}), \tag{1.3}$$

then $\mathcal{K}$ becomes a self-adjoint operator and the standard spectral theorem for compact and self-adjoint operators is applicable and we can write

$$\mathcal{K}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})\langle f, f_n\rangle_2 f_n, \quad f \in L^2(\mathbb{M}), \tag{1.4}$$

in which $\{\lambda_n(\mathcal{K})\}$ is a sequence of nonnegative reals (possibly finite) decreasing to 0 and $\{f_n\}$ is an $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$-orthonormal basis of $L^2(\mathbb{M})$. The numbers $\lambda_n(\mathcal{K})$ are the eigenvalues of $\mathcal{K}$ and the sequence $\{\lambda_n(\mathcal{K})\}$ takes into account possible repetitions implied by the algebraic multiplicity of each eigenvalue.

We observe that the addition of continuity to K implies that $\mathcal{K}$ is also *trace-class* (nuclear) ([2]), that is,

$$\sum_{f\in B}\langle \mathcal{K}^*\mathcal{K}(f), f\rangle_2^{1/2} < \infty, \tag{1.5}$$

whenever B is an orthonormal basis of $L^2(\mathbb{M})$. In particular,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(\mathcal{K}) = \int_{\mathbb{M}} K(x, x)\,dx < \infty, \tag{1.6}$$

and we can extract the most elementary result on decay rates for the eigenvalues of such operators, namely,

$$\lambda_n(\mathcal{K}) = o(n^{-1}). \tag{1.7}$$

The object of study in this paper is the analysis of decay rates for the sequence $\{\lambda_n(\mathcal{K})\}$ under additional assumptions on the kernel K.

*Faculdade de Matemática , UFU, MG, Brasil, mariocastro@famat.ufu.br
†Faculdade de Matemática , UFU, MG, Brasil, anacarla@famat.ufu.br

2 Mathematical Results

Two-point homogeneous spaces can be considered as the orbit of some compact subgroup $\mathfrak{H}$ of the orthogonal group $\mathfrak{G}$, i.e., $\mathbb{M} = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$. If e is the identity of $\mathfrak{G}$ and $\pi\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ is the natural mapping then $o = \pi(e)$ is called the *pole of* $\mathbb{M}$. Clearly, the point o is invariant under all motions of $\mathfrak{H}$. Each $\mathbb{M}$ has an invariant Riemannian metric $d(\cdot,\cdot)$ and admits essentially one invariant second order differential operator, *the Laplace-Beltrami operator* Δ.

Let θ be the distance of a point from the pole. We can choose a geodesic polar coordinate system (θ, u), where u is an angular parameter, in which the radial part of Δ can be written, up to a multiplicative constant, as

$$\Delta_\theta = \frac{1}{(\sin\lambda\theta)^\sigma (\sin 2\lambda\theta)^\rho} \frac{d}{d\theta} (\sin\lambda\theta)^\sigma (\sin 2\lambda\theta)^\rho \frac{d}{d\theta}, \tag{2.8}$$

where the values of σ, ρ and λ depend on $\mathbb{M}$. Furthermore, the change of variables $x = \cos 2\lambda\theta$ gives us

$$\Delta_x = (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} \frac{d}{dx} (1-x)^{1+\alpha}(1+x)^{1+\beta} \frac{d}{dx}, \tag{2.9}$$

with $\alpha = (\sigma+\rho-1)/2 = (d-2)/2$ and $\beta = (\rho-1)/2$.

We will write $\mathcal{B} = -\Delta_x$ and denote $\mathcal{B}^r$ the r-th power of $\mathcal{B}$, $r = 0, 1, 2, \ldots$. The *Sobolev space of order* r constructed from $\mathcal{B}$ is defined as in [3, p.37] and [4] by $W_2^r(\mathbb{M}) := \{f \in L^2(\mathbb{M})\colon \mathcal{B}^j f \in L^2(\mathbb{M}),\ j = 1, 2, \ldots, r\}$.

The action of $\mathcal{B}$ on kernels is done separately: we keep one variable fixed and differentiate with respect to the other. The symbol $\mathcal{B}_y^r K$ will indicate the r-th order of $\mathcal{B}$ acting on the kernel K with respect to the variable y (we will never differentiate with respect to the first variable x). For $r \in \mathbb{Z}_+$, we find convenient to introduce the following notation $K_{0,r}(x,y) := \mathcal{B}_y^r K(x,y), \quad x, y \in \mathbb{M}$, to abandon the operator symbol. The integral operator associated with $K_{0,r}$ will be written as $\mathcal{K}_{0,r}$.

We are ready to describe the results. We emphasize that all the results take for granted the ordering on the eigenvalues mentioned before and do not include the case when $\mathbb{M}$ is the real projective space.

Theorem 2.1. *Let $K \in L^2(\mathbb{M}\times\mathbb{M})$ be a L^2-positive definite kernel satisfying $K(x,\cdot) \in W_2^r(\mathbb{M})$, $x \in \mathbb{M}$ a.e.. If $K_{0,r}$ belongs to $L^2(\mathbb{M}\times\mathbb{M})$ then*

$$\lambda_n(\mathcal{K}) = o(n^{-1/2-2r/m}). \tag{2.10}$$

If we replace the basic assumption in Theorem 2.1 with the nuclearity of $\mathcal{K}_{0,r}$ then we can obtain an improvement on the previous decay rate.

Theorem 2.2. *Let $K \in L^2(\mathbb{M}\times\mathbb{M})$ be a L^2-positive definite kernel satisfying $K(x,\cdot) \in W_2^r(\mathbb{M})$, $x \in \mathbb{M}$ a.e.. If $\mathcal{K}_{0,r}$ is trace-class then*

$$\lambda_n(\mathcal{K}) = o(n^{-1-2r/m}). \tag{2.11}$$

References

[1] CASTRO, M. H.; MENEGATTO, V. A., *Eigenvalue decay of positive integral operators on the sphere.* Math. Comp. 81 (2012), no. 280, 2303-2317.

[2] GOHBERG, I. C.; KREIN, M. G. - *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators.* Translations of Mathematical Monographs, Vol. 18 American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969.

[3] LIONS, J-L.; MAGENES, E., *Non-homogeneous boundary value problems and applications.* Vol. I. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 181. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972.

[4] PLATONOV, S. S., *On some problems in the theory of the approximation of functions on compact homogeneous manifolds.* (Russian) Mat. Sb. 200 (2009), no. 6, 67-108; translation in Sb. Math. 200 (2009), no. 5-6, 845-885.

[5] WANG, H-C., *Two point homogeneous spaces.* Ann. Math. **(2)** 55, (1952), 177-191.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

l^p-boundedness properties for Volterra difference equations

Mario Choquehuanca [*], Claudio Cuevas [†], Filipe Dantas [‡] & Herme Soto [§]

1 Introduction

Let X be an arbitrary Banach space. In this work, we study l^p-boundedness properties for Volterra functional difference equation given by

$$u(n+1) = \lambda \sum_{j=-\infty}^{n} a(n-j)u(j) + f(n, u_n),\ n \in \mathbb{Z}, \tag{1.1}$$

where λ is a complex number, $a(n)$ is a summable $\mathbb{C}$-valued function, f is an appropriate function and $u_n : \mathbb{Z}_- \to X$ is the history function, which is defined by $u_n(\theta) = u(n+\theta)$ for all $\theta \in \mathbb{Z}_-$.

2 Mathematical Results

2.1 Linear Volterra difference equations

In this section we are concerned with the study of the existence of l^p-solutions for linear Volterra difference equations described by

$$u(n+1) = \lambda \sum_{j=-\infty}^{n} a(n-j)u(j) + f(n),\ n \in \mathbb{Z}, \tag{2.2}$$

where λ is a complex number, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ is a summable function and f is in $l^p(\mathbb{Z}, X)$.

For a given $\lambda \in \mathbb{C}$, let $s(\lambda, k) \in \mathbb{C}$ be the solution of the difference equation

$$s(\lambda, k+1) = \lambda \sum_{j=0}^{k} a(k-j)s(\lambda, j),\ k = 0, 1, 2, \ldots,\ s(\lambda, 0) = 1. \tag{2.3}$$

In this case, $s(\lambda, k)$ is called the fundamental solution to the equation (2.2) generated by $a(\cdot)$. We define the set $\Omega_s := \{\lambda \in \mathbb{C} : ||s(\lambda, \cdot)||_1 := \sum_{k=0}^{\infty} |s(\lambda, k)| < +\infty\}$.

Theorem 2.1. *Let λ be in Ω_s. Then for any $f \in l^p(\mathbb{Z}, X)$ the equation (2.2) has a unique solution $u(n)$ in $l^p(\mathbb{Z}, X)$ which is given by*

$$u(n+1) = \sum_{j=-\infty}^{n} s(\lambda, n-j)f(j). \tag{2.4}$$

The solution $u(n)$ satisfies $u \in l^{p'}(\mathbb{Z}, X)$ for all $1 \le p \le p' \le \infty$, and the following estimate holds:

$$||u||_{l^{p'}(\mathbb{Z},X)} \le ||s(\lambda, \cdot)||_1^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}} ||s(\lambda, \cdot)||_\infty^{\frac{1}{p'}} ||f||_{l^p(\mathbb{Z},X)}. \tag{2.5}$$

In particular, if $p = \infty$, we get

$$||u||_\infty \le ||s(\lambda, \cdot)||_1 ||f||_\infty. \tag{2.6}$$

[*]Departamento de Matemática y Estadística, Universidad de la Frontera, Temuco, Chile, mario.choquehuanca@ufrontera.cl
[†]Departamento de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, Recife-PE, Brasil, cch@dmat.ufpe.br
[‡]Departamento de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, Recife-PE, Brasil, filipeddsmat@gmail.com
[§]Departamento de Matemática y Estadística, Universidad de la Frontera, Temuco, Chile, herme.soto@ufrontera.cl

2.2 l^p-boundedness properties

To establish the main result, we need introduce the following:

We will define the phase space $\mathcal{B}$ axiomatically.

Specifically, $\mathcal{B}$ will denote a vector space of functions defined from $\mathbb{Z}_-$ into X endowed with a norm denoted $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ so that $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ is a Banach space and the following axiom holds:

(A) There are a positive constant J and nonnegative functions $K(\cdot), M(\cdot)$ defined on $\mathbb{Z}_+$ having the following property: If $x : \mathbb{Z} \to X$ is a function such that $x_0 \in \mathcal{B}$, then for all $n \in \mathbb{Z}_+$ the following conditions are fulfilled:

(i) $x_n \in \mathcal{B}$,

(ii) $J\|x(n)\| \leq \|x_n\|_{\mathcal{B}} \leq K(n) \max_{0\leq i\leq n} ||x(i)|| + M(n)\|x_0\|_{\mathcal{B}}$.

To obtain our results, we consider also the following axiom:

(B) If $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a uniformly bounded sequence in $\mathcal{B}$ which converges pointwise to φ, then $\varphi \in \mathcal{B}$ and $\|\varphi^n - \varphi\|_{\mathcal{B}} \to 0$ as $n \to \infty$.

Theorem 2.2. *Assume that $\mathcal{B}$ is a phase space that satisfies axiom* **(B)**. *Let λ be in Ω_s and let $f : \mathbb{Z} \times \mathcal{B} \to X$ be a function that satisfies the following Lipschitz condition:*

$$||f(k, \varphi) - f(k, \psi)|| \leq L_f(k)||\varphi(0) - \psi(0)||, \tag{2.7}$$

for all $\varphi, \psi \in \mathcal{B}$ and each $k \in \mathbb{Z}$, where $L_f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$ is l^p-summable and $f(\cdot, 0) \in l^p(\mathbb{Z}, X)$. Then there is a unique bounded solution $u(n)$ of equation (1.1) such that $u \in l^p(\mathbb{Z}, X)$.

References

[1] Agarwal, R. P., Cuevas, C., and Frasson, M. Semilinear functional difference equations with infinite delay. *Math. Comput. Modelling*, v. 55, No 3-4, 1083-1105, 2012.

[2] Cuevas, C., Henríquez, H. R., and Lizama, C. On the existence of almost automorphic solutions of Volterra difference equations. *J. Difference Equ. Appl.* (2011), 1-16.

[3] Cuevas, C., and Vidal, C. A note on discrete maximal regularity for functional difference equations with infinite delay. *Adv. Difference Equ. 2006*, (2006), Art. 97614, 1–11.

[4] Ionescu, A., Wainger, S. L^p boundedness of discrete singular radon transforms. *Journal of the Americam Mathematical Society 19*, 2 (2005), 357-383.

[5] Kolmanovskii, V., and Shaikhet, L. Some conditions for boundedness of solutions of difference Volterra equations. *Appl. Math. Lett. 16*, 6 (2003), 857–862.

[6] Murakami, S. Representation of solutions of linear functional difference equations in phase space. In *Nonlinear Analysis 30,* (2) (1997), 1153–1164.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

Boundaries for Algebras of Analytic Functions

M. Lilian Lourenço *

1 Introduction

Throughout the paper X will be a complex Banach space. As usual, S_X, B_X and X^* will denote the unit sphere, the closed unit ball, and the (topological) dual of X, respectively.

A result of Šilov asserts that if $\mathfrak{A}$ is a unital separating subalgebra of $C(K)$ (K a compact Hausdorff topological space), there is a smallest closed subset $S \subset K$ such that every function in $\mathfrak{A}$ attains its norm at some point of S [8, Theorem I.4.2]. Globevnik introduced the corresponding concept for a subalgebra of $C_b(\Omega)$, the space of bounded continuous functions on a topological space Ω not necessarily compact [9]. In fact, he considered the case of $\Omega = B_X$, the unit ball of a Banach space X.

If $\mathfrak{A}$ is a subspace of $C_b(\Omega)$, we will say that a subset $B \subset \Omega$ is a *boundary* for $\mathfrak{A}$ if

$$\|f\| = \sup_{b \in B} |f(b)|, \quad \forall f \in \mathfrak{A} \ .$$

The algebra of continuous and bounded functions on B_X that are analytic on the interior endowed with the sup-norm is denoted by $A_\infty(B_X)$. By $A_u(B_X)$ we mean the subalgebra of $A_\infty(B_X)$ of the uniformly continuous functions. Recall that a function is analytic if it Fréchet differentiable in its domain. For background on analytic functions we refer to [12].

Globevnik [9] described the boundaries for $A_\infty(B_{c_0})$. As a consequence of the description, he showed that this algebra has no minimal closed boundary. Aron, Choi, Lourenço and Paques [5] gave examples of boundaries for $A_\infty(B_{\ell_\infty})$ and they also showed that the unit sphere of ℓ_1 is the intersection of all closed boundaries for $A_\infty(B_{\ell_1})$. The first author showed in [1] that for every infinite compact Hausdorff topological space K the subset of extreme points of the unit ball of $C(K)$ is a boundary for $A_\infty(B_{C(K)})$. It is also known that for either $X = C(K)$, K or X a non-reflexive Banach space which is an M-ideal in its bidual, there is no minimal boundary for $A_u(B_X)$ ([1] and [2]). Research on the theme of describing boundaries in the sense of Globevnik has been carried on in recent years, see among many others [3], [4], [6], [7], [10] and [11].

In this note we prove that if X is a Banach space with infinite-dimensional centralizer and its unit ball has an extreme point, then for both algebras $A_\infty(B_X)$ and $A_u(B_X)$, the generalized torus is a boundary and the intersection of all closed boundaries is empty.

2 Mathematical Results

Proposition 2.1. *Let X be a complex function module and K its base space. Given a discrete sequence (t_n) in K, the set*

$$N = \{x \in B_X : \ x(t_n) = 0 \text{ for some } n\}$$

is a boundary for $A_\infty(B_X)$ and also for $A_u(B_X)$.

Corollary 2.1. *Let X be a complex function module whose base space K is infinite. Then there is a discrete sequence $(t_n) \subset K$ such that the set*

$$\mathcal{N} = \{x \in B_X : \ x(t_n) = 0 \ \text{ for some } n\}$$

*It is a joint work with M. ACOSTA and P. GALINDO Instituto de Matemática ,USP,, Brasil, mllouren@ime.usp.br

is a boundary for $A_\infty(B_X)$ and for $A_u(B_X)$. If moreover there is an extreme point in B_X, then the intersection of all closed boundaries is empty.

Proposition 2.2. *Let X be a complex function module and K its base space. Assume that the function $t \in K \mapsto \|x(t)\|$ is continuous for all $x \in X$. If the set*

$$\Lambda := \{x \in B_X : x(t) \neq 0, \forall t \in K\}$$

is a boundary for $A_\infty(B_X)$ or $A_u(B_X)$, then the set

$$\mathbb{T} := \{x \in B_X : \|x(t)\| = 1, \forall t \in K\}$$

is also a boundary for the corresponding algebra. This is the case if B_X has an extreme point and K is zero-dimensional.

Corollary 2.2. *Let X be a dual complex Banach space whose centralizer is infinite-dimensional and K_X its base space. The torus $\mathbb{T} := \{x \in B_X : \|x(t)\| = 1, \forall t \in K_X\}$ is a closed boundary for $A_\infty(B_X)$ or $A_u(B_X)$ and the intersection of all closed boundaries is empty.*

References

[1] M.D. Acosta, *Boundaries for spaces of holomorphic functions on $C(K)$*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **42** (2006), 27–44.

[2] M.D. Acosta, R.M. Aron and L.A. Moraes, *Boundaries for spaces of holomorphic functions on M-ideals in their biduals,* Indiana Univ. Math. J. **58** (2009), 2575–2595.

[3] M.D. Acosta and M.L. Lourenço, *Šilov boundary for holomorphic functions on some classical Banach spaces*, Studia Math. **179** (2007), 27–39.

[4] M.D. Acosta, L.A. Moraes, and L. Romero Grados, *On boundaries on the predual of the Lorentz sequence space*, J. Math. Anal. Appl. Math. **336** (2007), 470–479

[5] R.M. Aron, Y.S. Choi, M.L. Lourenço, and O.W. Paques, *Boundaries for algebras of analytic functions on infinite dimensional Banach spaces*. Banach Spaces (B.L. Lin and W.B. Johnson, eds.), Contemporary Mathematics **144**, 15–22. American Mathematical Society, 1993.

[6] Y.S. Choi and K.H. Han, *Boundaries for algebras of holomorphic functions on Marcinkiewicz sequence spaces*, J. Math. Anal. Appl. **323** (2006), pp. 1116–1133.

[7] Y.S. Choi, K.H. Han and H.J. Lee, *Boundaries for algebras of holomorphic functions on Banach spaces*, Illinois J. Math. **51** (2007), 883–896

[8] T.W. Gamelin, *Uniform Algebras*, Chelsea, New York, 1984.

[9] J. Globevnik, *Boundaries for polydisc algebras in infinite dimensions*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **85** (1979), 291–303.

[10] L.A. Moraes and L. Romero Grados, *Boundaries for algebras of holomorphic functions*, J. Math. Anal. Appl. **281** (2003), 575–586.

[11] L.A. Moraes and L. Romero Grados, *Boundaries for an algebra of bounded holomorphic functions*, J. Korean Math. Soc. **41** (2004), 231–242.

[12] J. Mujica *Complex Analysis in Banach Spaces*, North-Holland Mathematics Studies, 120, North-Holland, Amsterdam, 1986.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

Optimally results to Timoshenko system with Second Sound and past history

Mauro de L.Santos * D. S. Almeida Júnior †

In this paper we consider the Timoshenko system with second sound and past history acting in the shear angle displacement. We show the exponential decay of the solution if only if $\chi_2 := \chi_0 - \frac{\varrho_1^2 \delta b_0}{\varrho_3 k^2} = 0$. Here $\chi_0 = \left[\left(\tau - \frac{\varrho_1}{\varrho_3 k}\right)\left(\varrho_2 - \frac{b\varrho_1}{k}\right) - \frac{\tau \varrho_1 \delta^2}{\varrho_3 k}\right]$ is a new number to stablity of Timoshenko system with second sound introduced by Santos et al in [1]. On the contrary, we show that in general the Timoshenko system with second sound and past history is polynomially stable with an optimal decay rate.

1 Introdution

A heat flux equation of the Jeffreys type can be expressed as

$$\tau \mathbf{q}_t + \mathbf{q} = -k_0 \nabla\theta - \tau k_1 \nabla\theta_t \tag{1.1}$$

where $\mathbf{q}$ is the heat flux, which is the heat per unit area, and it is a vector. θ is the difference of temperature, τ is the relaxation time, k_0 is thermal conductivity and k_1 is the effective thermal conductivity. The physical ideas leading to Equation (1.1) can be seen in [2]. If $k_1 = 0$, then equation (1.1) reduces to

$$\tau \mathbf{q}_t + \mathbf{q} = -k_0 \nabla\theta. \tag{1.2}$$

We shall call equation (1.2) Cattaneo's equation (see [2]). When $\tau = 0$, then equation (1.2) reduces to the Fourier's law given by

$$\mathbf{q} = -k_0 \nabla\theta \tag{1.3}$$

and, if $de = \gamma d\theta$, as for a solid, then

$$e_t = -div\mathbf{q} \tag{1.4}$$

leads to diffusion equation,

$$\theta_t - \kappa\Delta\theta = 0, \tag{1.5}$$

where e is the internal energy, γ is the heat capacity and $\kappa = \frac{k_0}{\gamma}$ is the thermal diffusivity. Considering initial conditions (for example Dirichlet boundary conditions) for θ, we obtain the exponential decay to (1.5), that is, the associated one parameter semigroup is exponentially stable. The diffusion equation (1.5) has the un-physical property (paradox physical) that if a sudden change of temperature is made at some point on the body, it will be felt instantly everywhere, though with exponentially small amplitudes at distant points. In a loose manner of speaking, we may say that diffusion gives rise to infinite speeds of propagation. The temperature of a body is the macroscopic consequence of certain kinds of vibratory motions, the motions of molecules of gas or the vibrations of a lattice in a solid on microscopic scales. Heat is transported by near-neighbor excitation in which changes of momentum and energy on a microscopic scale are propagated as waves.

*Universidade Federal do Pará e-mail: ls@ufpa.br
†Universidade Federal do Pará e-mail: dilberto@ufpa.br

In some applications like laser cleaning computer chips with very short laser pulses, see reference [1], it is worth while thinking of another model removing this paradox, but still keeping the essentials of a heat conduction process. One such model is given by the simplest Cattaneo law (1.2) replacing the Fourier law. Combining the equations (1.2) and (1.4) we obtain the equation

$$\theta_{tt} - c\Delta\theta + \frac{1}{\tau}\theta_t = 0. \tag{1.6}$$

The equation (1.6) is a hyperbolic differential equation, free form of the paradox of instantaneous propagation and it transmits waves of temperature with a speed $c = \sqrt{\frac{k_0}{\tau\gamma}}$. The waves are attenuated as a result of relaxation, and steady heat flow may be induced by temperature gradients. It is obvious that Cattaneo's law has many desirable properties.

Following the main idea about deformation in elastic structures, we consider the Timoshenko system given by the equations of motion

$$\varrho A\varphi_{tt} = S_x \tag{1.7}$$

$$\varrho I\psi_{tt} = M_x - S \tag{1.8}$$

By t we denote the time variable, x is the space variable, φ is the transverse displacement, ψ is the rotation of the transversal section across of the neutral axes, ϱ is the mass density, M is the curvature moment, S is the stress, A is the area of the transversal section and I is the inertial moment of the transversal section. The corresponding constitutive laws are given by

$$M = EI\psi_x - \int_0^\infty g(s)\psi_x(x,t-s)\,ds - \delta\theta,\ S = \kappa AG(\varphi_x + \psi). \tag{1.9}$$

In these equations δ denotes the density, A is the cross-sectional area, I is the area moment of inertia, E and G are the elastic constants and κ is the shear coefficient. Therefore, from the constitutive laws (1.7) and the balance of the energy given by the Cattaneo law, we get the system

$$\varrho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{1.10}$$

$$\varrho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \int_0^\infty g(s)\psi_{xx}(x,t-s) + k(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{1.11}$$

$$\varrho_3\theta_t + \mathbf{q}_x + \delta\psi_{xt} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{1.12}$$

$$\tau\mathbf{q}_t + \beta\mathbf{q} + \theta_x = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \tag{1.13}$$

where $\Omega =]0,l[\times]0,\infty[$. Here we consider the following boundary conditions

$$\varphi(0,t) = \varphi(l,t) = \psi_x(0,t) = \psi_x(l,t) = \theta(0,t) = \theta(l,t) = 0 \tag{1.14}$$

and the following initial conditions:

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \quad \psi(x,0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x,0) = \psi_1(x),$$
$$\theta(x,0) = \theta_0(x), \quad \mathbf{q}(x,0) = \mathbf{q}_0(x). \tag{1.15}$$

We show that the above system is exponentially stable if only if $\chi_2 = 0$. On the contrary, we show that in general the Timoshenko system with second sound and past history is polynomially stable with an optimal decay rate.

Referências

[1] M. L. Santos, D. S. A. Júnior, Jaime E. Muñoz Rivera - The stability number of the Timoshenko system with second sound. *J. Differential Equations 253 (2012) 2715-2733.*

[2] C. Cattaneo - Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée. *C. R. Acad. Sci. Paris,* **247***, 431, (1958).*

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

SOBRE O COEFICIENTE DE FUJITA PARA ALGUNS SISTEMAS DE REAÇÃO-DIFUSÃO

M. LOAYZA *

Consideramos os sistemas parabólicos $u_t - \Delta u = h(t)v^p, v_t - \Delta v = h(t)u^q$ e $u_t - \Delta u = h(t)(u^r + u^s)$, $v_t - \Delta v = h(t)(u^q + v^s)$ em $\Omega \times (0,T)$ com a condição de Dirichlet na fronteira. Supomos $h \in C[0,\infty)$, $p,q,r,s \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado ou não limitado com fronteira regular e dados inicias não negativos. Mostramos uma relação entre a existência de solução global (ou explosão em tempo finito) do sistema e o comportamento assintótico da solução do problema linear $u_t - \Delta u = 0$.

1 Introdução

Seja Ω um domínio limitado ou não limitado com fronteira regular. Em [6], Meier considerou o seguinte problema parabólico semilinear

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= h(t)u^p \text{ em } \Omega \times (0,T) \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0,T) \\ u(0) &= u_0 \geq 0 \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $h \in C[0,\infty)$, $p > 1$ e $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Ele mostrou que

- se $\limsup_{t\to\infty} \|S(t)u_0\|_\infty^{p-1} \int_0^t h(\sigma)d\sigma = \infty$, para todo $u_0 \geq 0$, então qualquer solução não trivial de (1.1) explode num tempo finito.
- se existe $u_0 \geq 0, u_0 \neq 0$ tal que $\int_0^\infty h(\sigma)\|S(\sigma)u_0\|_\infty^{p-1}d\sigma < \infty$, então existem soluções globais para (1.1).

Destes resultados segue imediatamente que se $h(t) \sim t^q$ para t suficientemente grande, então o coeficiente de Fujita de (1.1) satisfaz $p^* = 1 + \frac{q+1}{s^*}$, onde $s^* = \sup\{s > 0;$ existe $u_0 \geq 0, \limsup_{t\to\infty} t^s\|S(t)u_0\|_\infty < \infty\}$ e $(S(t))_{t\geq 0}$ é o semigrupo do calor. Este valor é crítico pois: se $1 < p \leq p^*$, então qualquer solução não trivial de (1.1) explode num tempo finito. Se $p > p^*$, então o problema (1.1) admite soluções globais. Desde o trabalho Fujita [2], determinar o valor crítico para o problema (1.1) e problemas derivados tem sido objeto de intensa pesquisa, veja por exemplo [2], [5], [6] e [7].

Estamos interessados em estender os resultados de Meier para os sistemas

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= h(t)f(u,v) \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ v_t - \Delta v &= h(t)g(u,v) \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ u = v &= 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) = u_0 \geq 0 &, v(0) = v_0 \geq 0 \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $f(u,v) = v^p, g(u,v) = u^q$ e $f(u,v) = u^r + v^p, g(u,v) = u^q + v^s$, onde $p,q,r,s \geq 1$.

Quando $f(u,v) = v^p, g(u,v) = u^q$, $h(t) = 1$ e $\Omega = \mathcal{R}^N$ Escobedo e Herrero [3] mostraram que se $\gamma = \max\{p,q\}$, então

- se $1 < pq \leq 1 + \frac{2}{N}(\gamma + 1)$, então qualquer solução não trivial de (1.2) explode num tempo finito.
- se $pq > 1 + \frac{2}{N}(\gamma + 1)$, então o problema (1.2) admite soluções globais.

Podemos observar que é coeficiente crítico esta associado ao produto pq e é $(pq)^* = 1 + \frac{2}{N}(\gamma + 1)$. Quando Ω é um domínio limitado $(pq)^* = 1$, veja [4].

No caso em que $f(u,v) = u^r + v^p, g(u,v) = u^q + v^s$, $h = 1$ e $\Omega = \mathcal{R}^N$, S. Cui[1] mostrou que para $p \geq q$

*Departamento de Matemática , UFPE, PE, Brasil, miguel@dmat.ufpe.br

- se algumas das seguintes condições vale: a) $r \leq 1 + 2/N$, b) $s \leq 1 + 2/N$, c) $N(pq-1)/2(p+1) \leq 1$ d) $N(pq-1)/(p+1) > 1$, $q \leq 1 + 2/N$ e $s < Nq(Nq-2)$, então toda solução não trivial de (1.2) explode num tempo finito.
- se $r > 1 + 2/N$, $s > 1 + 2/N$, $N(pq-1)/2(p+1) > 1$ e ($q > 1 + 2/N$ ou $q \leq 1 = 2/N$ e $s > Nq/(Nq-2)$, então o problema (1.2) admite soluções globais.

2 Resultados

Teorema 2.1. *Sejam $f(u,v) = v^p, g(u,v) = u^q$ com $p \geq q \geq 1$ e $pq > 1$.*

- *Se $\limsup_{t\to\infty} \|S(t)u_0\|_\infty^{\frac{pq-1}{p+1}} \int_0^t h(\sigma)d\sigma = \infty$, para todo $u_0 \in C_0(\Omega), u_0 \geq 0$, então toda solução não trivial de (1.2) explode num tempo finito.*
- *Se existe $u_0 \in C_0(\Omega), u_0 \geq 0, u_0 \neq 0$ tal que $\int_0^\infty h(\sigma)\|S(\sigma)u_0\|_\infty^{\frac{pq-1}{p+1}} d\sigma < \infty$, então existe $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \in [C_0(\Omega)]^2$ com $\tilde{u}_0, \tilde{v}_0 \geq 0$ tal que a correspondente solução do problema (1.2) é global.*

Observação 2.1. *(i) Note que quando $p = q$, o resultado anterior reduz-se ao resultado de Meier.*

(ii) No caso em que $h(t) \sim t^a$ com $a > -1$ para t suficientemente grande, podemos concluir que a) if $1 < pq < 1 + \frac{(p+1)(a+1)}{s^*}$, então cada solução não trivial de (1.2) explode num tempo finito e, b) se $pq > 1 + \frac{(p+1)(a+1)}{s^*}$, então o problema (1.2) possui soluções globais. De [3], vemos que $s^* = N/2$ e de [4] que $s^* = +\infty$.

A situação é bem mais delicada no caso em que $f(u,v) = u^r + v^p$ e $g(u,v) = u^q + v^s$.

Teorema 2.2. *Suponha que $f(u,v) = u^r + v^p$ e $g(u,v) = u^q + v^s$, com $r, s > 1$, $p \geq q \geq 1$ and $pq > 1$.*

- *Suponha que alguma das seguintes condições vale: a) $\limsup_{t\to\infty} \|S(t)u_0\|_\infty^{r-1} \int_0^t h(\sigma)d\sigma = \infty$,*
b) $\limsup_{t\to\infty} \|S(t)u_0\|_\infty^{s-1} \int_0^t h(\sigma)d\sigma = \infty$, c) $\limsup_{t\to\infty} \|S(t)u_0\|_\infty^{\frac{pq-1}{p+1}} \int_0^t h(\sigma)d\sigma = \infty$,
d) $\limsup_{t\to\infty} \|S(t)u_0\|_\infty^{q(\frac{s-1}{s})} (\int_0^{t/2} h(\sigma)d\sigma) \int_{t/2}^t h(\sigma)d\sigma = \infty$, para todo $u_0 \in C_0(\Omega)$, $u_0 \geq 0$ então toda solução não trivial de (1.2) explode num tempo finito.
- *Se existe $u_0 \in C_0(\Omega), u_0 \geq 0, u_0 \neq 0$ verificando $\int_0^\infty h(\sigma)\|S(\sigma)u_0\|_\infty^{r-1} d\sigma < \infty$, $\int_0^\infty h(\sigma)\|S(\sigma)u_0\|_\infty^{s-1} d\sigma < \infty$, $\int_0^\infty h(\sigma)\|S(\sigma)u_0\|_\infty^{\frac{pq-1}{p+1}} d\sigma < \infty$ e $\int_0^\infty h(\sigma)\|S(\sigma)u_0\|_\infty^{q\frac{s-1}{s}} d\sigma < \infty$, então o problema (1.2) possui uma solução global.*

Referências

[1]CUI S., Global behavior of solutions to a reaction-diffusion system, Nonlinear Anal., **42**, 351-379, 2000.

[2]FUJITA H., On the blowing up of solutions of the Cauchy problem $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, *J. Fac. Sci. Tokyo*, 109-124, 1966.

[3]ESCOBEDO M. AND HERRERO M. A., Boundedness and blow up for a semilinear reaction-diffusion system, *J. Differential Equations* **89**, 176-202, 1989.

[4]ESCOBEDO M. AND HERRERO M. A., A semilinear parabolic system in a bounded domain, *Ann. Mat. Pura Appl*, **4** 315-336, 1993.

[5] LEVINE H. A. E MEIER P., The value of the critical exponet for reactions difussion equations in cones, *Arch. Rational Mech. and Analysis*, **109**, 73-80, 1990.

[6] MEIER, P., On the critical exponent for reaction-difussion equations, *Arch. Rational Mech. and Analysis*, **109**, 63-71, 1990.

[7]WEISSLER F., Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in L^p. Indiana Univ. Math. J. **29**, 79-102, 1980.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

SIGNORINI'S PROBLEM FOR THE MINDLIN-TIMOSHENKO SYSTEM

MILTON L. OLIVEIRA * & FAGNER D. ARARUNA †

1 Introduction

In this work we are interested in study the following Mindlin-Timoshenko system:

$$\left|\begin{array}{ll} \frac{\rho h^3}{12}\phi'' - \lambda\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{(1-\mu)}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} + \frac{(1+\mu)}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}\right) & \\ +k\left(\phi + \frac{\partial w}{\partial x_1}\right) = 0 & \text{in} \quad Q, \\ \frac{\rho h^3}{12}\psi'' - \lambda\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} + \frac{(1-\mu)}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{(1+\mu)}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2}\right) & \\ +k\left(\psi + \frac{\partial w}{\partial x_2}\right) = 0 & \text{in} \quad Q, \\ \rho h w'' - k\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \phi\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + \psi\right)\right] = 0 & \text{in} \quad Q, \end{array}\right. \tag{1.1}$$

let T be a positive real number and $Q = \Omega \times (0,T)$ where Ω is a bounded open set of $\mathbb{R}^n$ with smooth boundary Γ. Here we suppose that $\Gamma = \Gamma_0 \bigcup \Gamma_1$ satisfying $\Gamma_0 \bigcap \Gamma_1 = \varnothing$.

We impose the following boundary conditions at the left end

$$\phi = \psi = w = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma_0. \tag{1.2}$$

where $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0,T)$. The conditions (1.2) assures the beam remains clamped at $x = 0$. At the right end, we impose

$$\left|\begin{array}{ll} \lambda\left[\nu_1\frac{\partial\phi}{\partial x_1} + \mu\nu_1\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \frac{(1-\mu)}{2}\nu_2\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2} + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)\right] = -\gamma_1\phi' & \text{on} \quad \Sigma_1, \\ \lambda\left[\nu_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \mu\nu_2\frac{\partial\phi}{\partial x_1} + \frac{(1-\mu)}{2}\nu_1\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2} + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)\right] = -\gamma_2\psi' & \text{on} \quad \Sigma_1, \\ \frac{\partial w}{\partial\nu} + \nu_1\phi + \nu_2\psi \geq 0, \quad w \geq g & \text{on} \quad \Sigma_1, \\ \left(\frac{\partial w}{\partial\nu} + \nu_1\phi + \nu_2\psi\right)(w-g) = 0 & \text{on} \quad \Sigma_1, \end{array}\right. \tag{1.3}$$

where $\Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0,T)$. The conditions $(1.3)_1$ and $(1.3)_2$ represent a dissipative boundary feedback. The conditions $(1.3)_3$ and $(1.3)_4$ are known as contact conditions. The expression $\sigma = \dfrac{\partial w}{\partial\nu} + \nu_1\phi + \nu_2\psi$ is the stress tensor on the boundary and g is the obstacle. In this way, $d = w - g$ is the distance of the body to obstacle. Thus, when the distance d is positive there is not contact $(\sigma = 0)$. When there is not distance $(d = 0)$, the stress tensor σ is positive. Anyway we have $\sigma d = 0$, for all time t. To complete the system, let us include the initial conditions

$$\phi(\cdot,0) = \phi_0,\ \phi'(\cdot,0) = \phi_1,\ \psi(\cdot,0) = \psi_0,\ \psi'(\cdot,0) = \psi_1,\ w(\cdot,0) = w_0,\ w'(\cdot,0) = w_1 \quad \text{in} \quad \Omega. \tag{1.4}$$

*Departamento de Matemática , UFPB, PB, Brasil, milton@mat.ufpb.br
†Departamento de Matemática, UFPB, PB, Brasil, e-mail: fararuna@mat.ufpb.br

2 Contact Problem

The main result that give us the solution of the contact problem is as follows.

Theorem 2.1. *Given data* $(\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1) \in V \times L^2(\Omega) \times V \times L^2(\Omega) \times \mathbb{K} \times L^2(\Omega)$ *there exists at least a solution* (ϕ, ψ, w) *of (1.1)-(1.4).*

Proof To prove this theorem we penalize our problem, then we show that the penalized problem has solutions using Galerkin's method and we make the passage to the limit in the penalized problem to obtain the solution of the contact problem. □

References

[1] M. I. M. Coppeti and C. M. Elliot, A One-Dimensional Quasi-Static Contact Problem in Linear Thermoelasticity, Euro. J. Appl. Math., 4, (1993), 151-174.

[2] B. Dacorogna, Weak Continuity and Weak Lower Semicontinuity of Non-Linear Functionals, Lectures Notes in Mathematics, Springer Verlag (1982), 922.

[3] C. M. Elliot and T. Qi, A Dynamic Contact Problem in Thermoelasticity, Nonlin. Anal. Theor. Meth. Applic. 23, 7(1994), 883-898.

[4] J. U. Kim, A Boundary Thin Obstacle Problem for a Wave Equation, Commun. In Partial Diff. Equations, 14, (1989), 1011-1026.

[5] J. E. Lagnese and J. L. Lions, Modelling Analysis and Control of Thin Plates, RMA 6, Masson, Paris, (1988).

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

MAXIMAL LINEABILITY OF CONTINUOUS SURJECTIONS IN EUCLIDEAN SPACES

NACIB GURGEL ALBUQUERQUE *

1 Introduction

Lately the study of the linear structure of certain subsets of surjective functions in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (such as everywhere surjective functions, perfectly everywhere surjective functions, or Jones functions) has attracted the attention of several authors working on Real Analysis and Set Theory (see, e.g. [1, 2, 6, 7, 4]). The previously mentioned functions are, indeed, very "exotic" and all the previous classes are nowhere continuous, thus, it is natural to ask about the set of continuous surjections. In this work we prove, in a more general framework than that of $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, that the set of all continuous and surjective functions between arbitrary euclidean spaces $\mathbb{R}^m$ and $\mathbb{R}^n$, with m, n arbitrary positive integers, is $\mathfrak{c}$-lineable [1] (that is, it contains a $\mathfrak{c}$-dimensional vector space such that every non-zero element of which is a continuous surjective function from $\mathbb{R}^m$ onto $\mathbb{R}^n$, where $\mathfrak{c}$ stands the cardinality of the real line). Since the set of all continuous functions from $\mathbb{R}^m$ to $\mathbb{R}^n$ is $\mathfrak{c}$-dimensional, this result is optimal in terms of dimension [3].

2 Mathematical Results

Let m and n be positive integers. Throughout this we shall denote

$$\mathcal{S}_{m,n} = \{f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \ ; \ f \text{ is continuous and surjective}\}.$$

The following result guarantees that $\mathcal{S}_{m,n} \neq \varnothing$. It uses the fact that $\mathcal{S}_{1,2} \neq \varnothing$ (see [8, p.42], [9, p.272] or [10]).

Lemma 2.1. *There exists a continuous surjection from $\mathbb{R}^m$ onto $\mathbb{R}^n$.*

Working on each coordinate we have the following.

Lemma 2.2. *The set $\mathfrak{B} = \{\varphi_r\}_{r\in(\mathbb{R}^+)^n}$ of $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ is linearly independent, has cardinality $\mathfrak{c}$, and every nonzero element of span$(\mathfrak{B})$ is continuous and surjective.*

Now our main result.

Theorem 2.1. *$\mathcal{S}_{m,n}$ is $\mathfrak{c}$-lineable.*

Proof. Fix $f \in \mathcal{S}_{m,n}$. We will prove that the set $\mathfrak{C} = \{F \circ f\}_{F\in\mathfrak{B}}$ is so that span$(\mathfrak{C})$ is the space we are looking for. The surjectivity of f assures that $G \circ f = 0$ implies $G = 0$, for every function G from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$. Thus, if $G_i \in \mathfrak{B}$, $i = 1, \ldots, k$ and

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot (G_i \circ f) = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i G_i\right) \circ f,$$

*Departamento de Matemática, UFPB, PB, Brasil, ngalbqrq@gmail.br

then $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i G_i = 0$; so, since $\mathfrak{B}$ is linearly independent, we conclude that $\alpha_i = 0,\ i = 1, \ldots, k$ and thus, $\mathfrak{C}$ is linearly independent. Thus, clearly it has cardinality $\mathfrak{c}$. Furthermore, any nonzero function

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \cdot (F_i \circ f) = \left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i F_i \right) \circ f$$

of span($\mathfrak{C}$) is continuous and surjective, since it is the composition of continuous surjective functions (recall that, from Lemma 2.2, $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i F_i$ is a continuous surjective function). Therefore, span($\mathfrak{C}$) only contains, except for the zero function, continuous surjective functions.

□

References

[1] ARON, R., GURARIY, V. I., SEOANE-SEPÚLVEDA, J. B. - *Lineability and spaceability of sets of functions on* $\mathbb{R}$, Proc. Amer. Math. Soc., **133**, no.3, pp. 795-803, 2005.

[2] ARON, R. M., SEOANE-SEPÚLVEDA, J. B. - *Algebrability of the set of everywhere surjective functions on* $\mathbb{C}$, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, **14**, no.1, pp. 25-31, 2007.

[3] BERNAL-GONZÁLEZ, L. - *Algebraic genericity of strict-order integrability*, Studia Math., **199**, no.3, pp. 279-293, 2010.

[4] BERNAL-GONZÁLEZ, L., PELLEGRINO, D. M., SEOANE-SEPÚLVEDA, J. B., *Linear subsets of nonlinear sets in topological vector spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), in press, 2013.

[5] GÁMEZ-MERINO, J. L., *Large algebraic structures inside the set of surjective functions*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, **18**, no.2, pp. 297-300, 2011.

[6] GÁMEZ-MERINO, J. L., MUÑOZ-FERNÁNDEZ, G. A., SÁNCHEZ, V. M., SEOANE-SEPÚLVEDA, J. B., *Sierpiński-Zygmund functions and other problems on lineability*, Proc. Amer. Math. Soc., **138**, no.11, pp. 3863-3876, 2010.

[7] GÁMEZ-MERINO, J. L., MUÑOZ-FERNÁNDEZ, G. A., SEOANE-SEPÚLVEDA, J. B., *Lineability and additivity in* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, J. Math. Anal. Appl., **369**, no.1, pp. 265-272, 2010.

[8] KHARAZISHVILI, A. B., *Strange functions in real analysis*, Pure and Applied Mathematics (Boca Raton), Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2nd ed., vol.272, 2006.

[9] MUNKRES, J. R., *Topology*, Pure and Applied Mathematics (Boca Raton), Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2nd ed., 2000.

[10] PEANO, G., *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*, Math. Ann., **36**, no.1, pp 157-160, 1890.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

The multidimensional Muskat problem

Nikolai Chemetov * & Wladimir Neves †

1 Introduction

We consider a generalized Muskat Problem posed in bounded domains, which seems more realistic from the physical point of view. The original Muskat problem was proposed by Morris Muskat [7] to study the encroachment of water into an oil sand. Due to applications to oil reservoir, this problem is of great practical interest, and also in view of the mathematical difficulties to show solvability of the system, the Muskat Problem takes attention of many mathematicians.

In fact, many important results concerning the Muskat Problem have been obtained, we address for instance: Ambrose [1], Constantin, Córdoba, Gancedo, Strain [4], Córdoba A., Córdoba D., Gancedo [5], Escher, Matioc [6], Siegel, Caflisch, Howison [9], Székelyhidi Jr. [10]. Albeit, most of these mentioned existence results are related to almost small perturbations of planar interfaces, which separate two fluids. The existence, of weak solutions for general data, is not known. The literature concerning the Muskat Problem is really huge nowadays, we do not pretend here to cover all of them. We address the reader to the references there in the above cited works, which seems to us very good to have an up to date scenario of the Muskat Problem.

One observes that, in the original formulation of the Muskat problem given by the standard Darcy's law equation, the fluids are assumed to behave ideally with itself, that is to say, the viscosity of the fluids only takes place in the constitutive relation of the interaction forces, and do not in the Cauchy stress tensor.

Here, we follow our original idea established in [3], which is to perturb the Darcy's law equation with a positive (small as needed) viscosity term. Then we formulate an initial boundary value problem assuming Dirichlet boundary data, and in this way, it is shown the solvability of a generalized multidimensional Muskat problem. Despite the introduced new term in the original Darcy's law could have just a mathematical aspect, the model proposed to study the Muskat Problem, which relies in a more general Darcy's law equation, is presented with details in this talk under physical arguments. Moreover, as in any fluid flow problem, the range of validity of Darcy's law may be expressed in terms of the Reynolds number Re, which is generally defined in terms of a characteristic length. In particular, for consolidated porous media Re is expressed in terms of mean porous size, on the other hand for unconsolidated porous media, it is in terms of grain size. In any case, it is claimed that Darcy's law is applicable for Re less than 10, where the viscous forces are predominant. Darcy's law may breakdown for many reasons, for instance when the Re number is bigger than 100, or applying for gases at low pressure, or if the mean porous diameter of the medium is comparable with the mean free path of the gas, etc. The reader is addressed to some empirical or almost-empirical modifications of Darcy's law studied by Scheidegger, see [8].

2 Mathematical Results

Let $T > 0$ be any fixed real number and $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (with $d = 2$ or 3) is an open and bounded domain having a C^2- smooth boundary Γ. We define by $\Omega_T := (0,T) \times \Omega, \quad \Gamma_T := (0,T) \times \Gamma$. Moreover, the outside unitary normal to Ω

*CMAF, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal, chemetov@ptmat.fc.ul.pt
†Departamento de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brasil, wladimir@im.ufrj.br

at $\mathbf{x} \in \Gamma$ is denoted by $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$. Then, we formulate a generalized Muskat initial-boundary value problem, denoted **GMP**: For all $(t, \mathbf{x}) \in \Omega_T$, find $(\rho(t,\mathbf{x}), \nu(t,\mathbf{x}), \mathbf{v}(t,\mathbf{x}))$ solution of

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0, \qquad \partial_t \nu + \mathbf{v} \cdot \nabla \nu = 0, \\ h(t,\mathbf{x},\rho\nu)\ \mathbf{v} - \operatorname{div}\big(\rho\nu\ \mathbf{Dv}\big) = -\nabla p + \rho\,\mathbf{G}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \\ \rho|_{t=0} = \rho_0, \quad \rho|_{\Gamma_T^-} = \rho_b, \quad \nu|_{t=0} = \nu_0, \quad \nu|_{\Gamma_T^-} = \nu_b, \quad \mathbf{v}|_{\Gamma_T} = \mathbf{b}, \end{cases} \tag{2.1}$$

where $\mathbf{G}$ is a given vector function, also ρ_0, ρ_b, ν_0, ν_b are given initial-boundary data for the density and effective viscosity respectively, $\mathbf{b}$ is the boundary data for the velocity field $\mathbf{v}$ and

$$\begin{aligned} \Gamma_T^- &: = \{(t,\mathbf{r}) \in \Gamma_T : (\mathbf{b}\cdot\mathbf{n})(t,\mathbf{r}) < 0\}, \\ \Gamma_T^+ &: = \{(t,\mathbf{r}) \in \Gamma_T : (\mathbf{b}\cdot\mathbf{n})(t,\mathbf{r}) > 0\} \end{aligned} \tag{2.2}$$

called respectively the in-flux, and out-flux boundary zones of the "oil-water" mixture.

In this talk, we show that, the **GMP** is solvable and describes the motion of immiscible fluids. One of the main difficulties, to prove the solvability for **GMP**, is to show the strong convergence of an approximating sequence for the density function. Another important issue is the trace of the density function, once it is just assumed measurable and bounded, in fact, we follow the technical and important results proved by Boyer in [2]. Similar remarks are also posed for the kinematic viscosity.

References

[1] Ambrose D., *Well-posedness of two-phase Hele-Shaw Flow without surface tension.* Euro. Jnl. of Applied Mathematics, **15** (2004) 597-607.

[2] Boyer F., *Trace theorems and spatial continuity properties for the solutions of the transport equation.* Differential and integral equations, **18**, n. 8 (2005), 891–934.

[3] Chemetov N., Neves W., *The generalized Buckley-Leverett system. Solvability.* Arch. Ration. Mech. Analysis, **208** (2013), 1–24.

[4] Constantin P., Córdoba D., Gancedo F., Strain R.M., *On the global existence for the Muskat problem.* See pre-print: arXiv:1007.3744.

[5] Córdoba A., Córdoba D., Gancedo F., *Interface evolution: the Hele-Shaw and Muskat problems.* Ann. of Math. (2) **173,** n. 2 (2011), 477–542.

[6] Escher J., Matioc B.-V., *On the parabolicity of the Muskat Problem: Well-posedness, fingering, and stability results.* See pre-print: arXiv:1005.2512v2[math.AP] 21 Sep 2011.

[7] Muskat M., *Two fluid system in porous media. The encroachment of water into oil sand.* Physics, **5** (1934), 250–264.

[8] Scheidegger A.E., *The Physics of Flow Through Porous Media*, 3rd ed, University of Toronto Press, Toronto (1974).

[9] Siegel M., Caflisch R., Howison S., *Global existence, singular solutions, and ill-posedness for the Muskat problem.* Comm. Pure and Appl. Math., **57** (2004) 1374-1411.

[10] Székelyhidi Jr. L., *Relaxation of the incompressible porous media equation,* See pre-print: arxiv.org/pdf/1102.2597.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

CAOS DISTRIBUCIONAL PARA OPERADORES LINEARES

N.C. BERNARDES JR.[*], A. BONILLA[†], V. MÜLLER[‡] & A. PERIS[§]

1 Introdução

O estudo da dinâmica de operadores lineares em espaços de dimensão infinita tem atraído a atenção de muitos pesquisadores nos últimos 30 anos. Neste contexto, o conceito mais estudado é o de *hiperciclicidade*, ou seja, a existência de vetores com órbitas densas. Caos foi introduzido na dinâmica linear por Godefroy e Shapiro [3], que adotaram a definição de caos no sentido de Devaney. Assim, um operador linear T sobre um espaço de Fréchet X é dito *caótico* se é hipercíclico e tem um conjunto denso de pontos periódicos. Operadores caóticos têm sido intensamente estudados nos últimos 20 anos. Indicamos os excelentes livros [1] e [4] para um estudo bastante atualizado desta área.

Mais recentemente, muitos pesquisadores começaram a estudar outros conceitos importantes de caos no contexto da dinâmica linear, tais como caos no sentido de Li-Yorke, caos distribucional e propriedades de especificação.

No presente trabalho, estudamos caos distribucional para operadores lineares. Estabelecemos algumas caracterizações fundamentais e aplicamos nossos resultados a algumas classes importantes de operadores, como operadores de deslocamento com peso e operadores de composição.

No que se segue, X denotará um espaço de Fréchet arbitrário, ou seja, um espaço vetorial real ou complexo munido de uma sequência crescente $(\|\cdot\|_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de seminormas que define a métrica

$$d(x,y) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \min\{1, \|x-y\|_k\} \quad (x,y \in X),$$

com a qual X é completo. Além disso, $B(X)$ denotará o conjunto de todos os operadores lineares contínuos $T : X \to X$.

2 Resultados

Começemos lembrando o conceito de caos distribucional. Dado $A \subset \mathbb{N}$, a *densidade superior* de A é definida por

$$\overline{\text{dens}}(A) := \limsup_{n\to\infty} \frac{\text{card}([1,n] \cap A)}{n}.$$

Se M é um espaço métrico e $f : M \to M$ é uma aplicação contínua, um par $(x,y) \in M \times M$ é dito um *par distribucionalmente ε-caótico* para f $(\varepsilon > 0)$ se

$$\overline{\text{dens}}\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon\} = 1 \qquad \text{e} \qquad \overline{\text{dens}}\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \delta\} = 1 \text{ para todo } \delta > 0.$$

A aplicação f é dita (*uniformemente*) *distribucionalmente caótica* se existem $\varepsilon > 0$ e um subconjunto não-enumerável S de M tais que (x,y) é um par distribucionalmente ε-caótico para f sempre que x e y são elementos distintos em S. Este conceito de caos foi introduzido por Schweizer e Smítal [6] e é uma extensão natural do conceito de caos no sentido de Li e Yorke [5].

[*]Instituto de Matemática, UFRJ, RJ, Brazil, email: bernardes@im.ufrj.br
[†]Departamento de Análisis Matemático, Universidad de la Laguna, Tenerife, Spain, e-mail: abonilla@ull.es
[‡]Mathematical Institute, Czech Academy of Sciences, Prague, Czech Republic, e-mail: muller@math.cas.cz
[§]IUMPA, Universitat Politècnica de València, València, Spain, e-mail: aperis@mat.upv.es

No nosso trabalho consideramos o seguinte conceito: $x \in X$ é um *vetor distribucionalmente irregular* para $T \in B(X)$ se existem $m \in \mathbb{N}$ e $A, B \subset \mathbb{N}$ com $\overline{\text{udens}}(A) = \overline{\text{udens}}(B) = 1$ tais que

$$\lim_{n\in A} T^n x = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\in B} \|T^n x\|_m = \infty.$$

Estabelecemos, entre outras, a seguinte caracterização fundamental:

Teorema 2.1. *Um operador $T \in B(X)$ é distribucionalmente caótico se e somente se T admite um vetor distribucionalmente irregular.*

Também estabelecemos uma condição suficiente para caos distribucional denso, que é bastante útil.

Teorema 2.2. *Se X é separável, $T \in B(X)$ e existe um subconjunto denso X_0 de X tal que*

$$T^n x \to 0 \quad \text{para todo } x \in X_0,$$

então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) *T é distribucionalmente caótico;*

(ii) *T é densamente distribucionalmente caótico;*

(iii) *T admite uma variedade uniformemente distribucionalmente irregular e densa;*

(iv) *T admite uma órbita distribucionalmente ilimitada.*

Em seguida, estabelecemos diversas aplicações dos nossos resultados, incluindo caracterizações no caso de operadores deslocamento com peso e de operadores de composição.

Indicamos o nosso artigo [2] para mais detalhes.

Referências

[1] BAYART, F. AND MATHERON, É. - *Dynamics of Linear Operators*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[2] BERNARDES JR., N.C., BONILLA, A., MÜLLER, V. AND PERIS, A - Distributional chaos for linear operators. *J. Funct. Anal.*, aceito para publicação (http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2013.06.019).

[3] GODEFROY, G. AND SHAPIRO, J.H. - Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds. *J. Funct. Anal.*, **98**, 229–269, 1991.

[4] GROSSE-ERDMANN, K.-G. AND PERIS, A. - *Linear Chaos*. Springer-Verlag, London, 2011.

[5] LI, T.Y. AND YORKE, J.A. - Period three implies chaos. *Amer. Math. Monthly*, **82**, 985–992, 1975.

[6] SCHWEIZER, B. AND SMÍTAL, J. - Measures of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems on the interval. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **344**, 737–754, 1994.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

DINÂMICA TOPOLÓGICA COLETIVA DE APLICAÇÕES GENÉRICAS DO ESPAÇO DE CANTOR

NILSON C. BERNARDES JR. * & RÔMULO M. VERMERSCH †

1 Introdução

O estudo de propriedades genéricas é um tema clássico na área de sistemas dinâmicos. No contexto da dinâmica topológica, tal estudo tem sido desenvolvido nos últimos quarenta anos por diversos pesquisadores. Para o caso da dinâmica genérica de aplicações contínuas definidas sobre o intervalo unitário fechado, veja [1], por exemplo. Para o caso de aplicações contínuas e homeomorfismos em variedades compactas, veja [3] e [7], onde muitas outras referências podem ser encontradas. Finalmente, para dinâmica genérica de aplicações do espaço de Cantor, veja [2], [4], [5] e [6], por exemplo.

Por outro lado, o estudo da dinâmica coletiva também é um tema importante na área de sistemas dinâmicos. Enquanto a ação de um sistema dinâmico sobre pontos do espaço fase pode ser pensada como dinâmica individual, a ação do sistema sobre subconjuntos do espaço fase pode ser pensada como dinâmica coletiva, e é natural comparar a dinâmica individual com a dinâmica coletiva. O contexto mais usual para a dinâmica coletiva é o da aplicação induzida sobre o hiperespaço de todos os subconjuntos compactos não vazios munido da métrica de Hausdorff.

É natural combinarmos ambos os temas e estudarmos a dinâmica coletiva de aplicações genéricas. No presente trabalho desenvolvemos um tal estudo para aplicações contínuas e homeomorfismos do espaço de Cantor. Para tal, utilizamos os resultados de estrutura de grafos das aplicações contínuas genéricas e dos homeomorfismos genéricos do espaço de Cantor estabelecidos em [4].

2 Resultados

Dado um espaço métrico compacto (M, d), denotamos por $\mathcal{C}(M)$ (resp. $\mathcal{H}(M)$) o espaço de todas as aplicações contínuas de M em M (resp. de todos os homeomorfismos de M sobre M) munido da métrica do máximo:

$$\tilde{d}(f,g) := \max_{x\in M} d(f(x), g(x)).$$

Além disso, denotamos por $\mathcal{K}(M)$ o hiperespaço de todos os subconjuntos fechados e não-vazios de M munido da métrica de Hausdorff:

$$d_H(X,Y) := \max\big\{\max_{x\in X} d(x,Y), \max_{y\in Y} d(y,X)\big\}.$$

Dada $f \in \mathcal{C}(M)$, a aplicação induzida $\overline{f} : \mathcal{K}(M) \to \mathcal{K}(M)$ é definida por

$$\overline{f}(X) := f(X)\ (= \{f(x) : x \in X\}).$$

Note que $\overline{f} \in \mathcal{C}(\mathcal{K}(M))$ e, além disso, se f é um homeomorfismo, então $\overline{f}$ também o é. .

Conforme mencionado na introdução, o objetivo do nosso trabalho é estudar a dinâmica coletiva da aplicação contínua genérica e do homeomorfismo genérico do espaço de Cantor. Nosso modelo para o espaço de Cantor é

*Instituto de Matemática , UFRJ, RJ, Brasil, email: bernardes@im.ufrj.br
†Instituto Multidisciplinar, UFRRJ, RJ, Brasil, e-mail: romulo.vermersch@gmail.com

o espaço produto $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, onde $\{0,1\}$ é munido com a topologia discreta. Consideramos $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ munido com a métrica compatível d dada por $d(\sigma,\sigma) := 0$ e $d(\sigma,\tau) := \frac{1}{n}$, onde n é o menor inteiro positivo tal que $\sigma(n) \neq \tau(n)$ $(\sigma,\tau \in \{0,1\}^{\mathbb{N}},\ \sigma \neq \tau)$.

Como ilustração do tipo de resultado que obtemos, enunciaremos nossos resultados envolvendo caos Li-Yorke e caos distribucional. Para tal, vamos começar relembrando estes conceitos de caos.

Seja M um espaço métrico. Se $f : M \to M$ é uma aplicação contínua, um par $(x,y) \in M \times M$ é dito um par Li-Yorke para f se

$$\liminf_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \quad \text{e} \quad \limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0.$$

A aplicação f é dita Li-Yorke caótica se existe um subconjunto não-enumerável S de M tal que (x,y) é um par Li-Yorke para f sempre que x e y são elementos distintos em S. É conhecido que das noções de caos mais importantes, essa é a mais fraca.

Dado $A \subset \mathbb{N}$, a densidade superior de A é definida por

$$\overline{\text{dens}}(A) := \limsup_{n\to\infty} \frac{\text{card}([1,n] \cap A)}{n}.$$

Se $f : M \to M$ é uma aplicação contínua, um par $(x,y) \in M \times M$ é dito um par distribucionalmente ε-caótico para f $(\varepsilon > 0)$ se

$$\overline{\text{dens}}\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon\} = 1 \qquad \text{e} \qquad \overline{\text{dens}}\{n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) < \delta\} = 1 \text{ para todo } \delta > 0.$$

A aplicação f é dita uniformemente distribucionalmente caótica se existem $\varepsilon > 0$ e um subconjunto não-enumerável S de M tal que (x,y) é um par distribucionalmente ε-caótico para f sempre que x e y são elementos distintos em S.

Teorema 2.1. *Para $f \in \mathcal{C}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ genérica, $\overline{f}$ não possui par Li-Yorke.*

Em grande contraste com o resultado acima, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.2. *Para $h \in \mathcal{H}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ genérico, $\overline{h}$ é uniformemente distribucionalmente caótico.*

Apresentamos também, ainda dentro desse contexto, respostas completas para questões envolvendo caos topológico, conjuntos recorrentes, pontos periódicos, continuidade em cadeia de aplicações contínuas e homeomorfismos e, por fim, sombreamento de homeomorfismos.

Referências

[1] AGRONSKY, S.J., BRUCKNER, A.M. AND LACZKOVICH, M. - Dynamics of typical continuous functions. *J. London Math. Soc.*, **40**, no. 2, 227-243, 1989.

[2] AKIN, E., GLASNER, E. AND WEISS, B. - Generically there is but one self homeomorphism of the Cantor set. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **360**, no. 7, 3613-3630, 2008.

[3] AKIN, E., HURLEY, M. AND KENNEDY, J.A. - Dynamics of topologically generic homeomorphisms. *Mem. Amer. Math. Soc.*, **164**, no. 783, 3613-3630, 2003.

[4] BERNARDES JR., N.C. AND DARJI, U.B. - Graph theoretic structure of maps of the Cantor space. *Adv. Math.*, **231**, no. 3-4, 1655-1680, 2012.

[5] GLASNER, E. AND WEISS, B. - The topological Rohlin property and topological entropy. *Amer. J. Math.*, **123**, no. 6, 1055-1070, 2001.

[6] KECHRIS, A.S. AND ROSENDAL, C. - Turbulence, amalgamation, and generic automorphisms of homogeneous structures. *Proc. London Math. Soc. (3)*, **94**, no. 2, 302-350, 2007.

[7] PILYUGIN, S. YU. - The Space of Dynamical Systems with the C^0-Topology. *Lecture Notes in Mathematics, Vol.*, **1571**, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

SIMULTANEOUS RECONSTRUCTION OF COEFFICIENTS AND SOURCES PARAMETERS WITH LIPSCHITZ DISSECTION OF CAUCHY DATA AT BOUNDARY

NILSON C. ROBERTY *

1 Introduction

In this work we study the problem of reconstruction of coefficients and source parameters in second order strongly elliptic systems [1]. Let Ω be a Lipschitz domain. Let $F_\alpha = [f_\alpha, ..., f_\alpha] \in L^2(\Omega)^{m\times NP}$, $(H, H_\nu) \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^{m\times NP} \times H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^{m\times NP}$ be the source and the Cauchy data for NP problems. The inverse boundary value problem for parameter determination investigated is to find $(U, \alpha) \in H^1(\Omega)^{m\times NP} \times \mathbb{R}^{NA}$ satisfying

$$P^{\alpha}_{F_\alpha,H,H_\nu} \begin{cases} \mathcal{L}_\alpha U = F_\alpha & \text{if } x \in \Omega; \\ \gamma[U] = H & \text{if } x \in \partial\Omega; \\ \mathcal{B}_\nu[U] = H_\nu & \text{if } x \in \partial\Omega; \end{cases} \tag{1.1}$$

Here γ is the boundary trace, $\mathcal{B}_\nu$ is the conormal trace and NA is the number of parameters. The coefficients of the strongly elliptic operator $\mathcal{L}_\alpha$ and the source depend on the parameter α.

Auxiliary mixed problem

Let $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \Pi \cup \partial\Omega_N$ a Lipschitz dissection of the boundary. The auxiliary mixed boundary value problem for problem (1.1) is given by the well posed problem $P^{\alpha}_{f_\alpha,g^D,g_N}$: For Dirichlet and Neumann data $(g^D, g^N_\nu) \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^m \times H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^m$, to find $u \in H^1(\Omega)^m$ satisfying

$$P^{\alpha}_{f_\alpha,g_D,g_N} \begin{cases} \mathcal{L}_\alpha u = f_\alpha & \text{if } x \in \Omega; \\ \gamma[u] = g^D & \text{if } x \in \partial\Omega_D; \\ \mathcal{B}_\nu u = g^N_\nu & \text{if } x \in \partial\Omega_N; \end{cases} \tag{1.2}$$

Lipschitz Dissection for the Complementary Direct Problems

Consider the splitting of the superscribe Cauchy boundary data following the Lipschitz dissection

$$H^I = \gamma[U]|_{\Gamma_I} \; ; \; H^{II} = \gamma[U]|_{\Gamma_{II}} \; ; \; H^I_\nu = \mathcal{B}_\nu[U]|_{\Gamma_I} \text{ and } H^{II}_\nu = \mathcal{B}_\nu[U]|_{\Gamma_{II}} \; .$$

Under some guess of parameter values $\alpha^{(0)}$, consider $2NP$ mixed boundary values problems

$$P^{\alpha^{(0)}}_{F_{\alpha^{(0)}},H^I,H^{II}_\nu} \text{ and } P^{\alpha^{(0)}}_{F_{\alpha^{(0)}},H^{II},H^I_\nu} \; .$$

Let U^I_0 and U^{II}_0 be its respective solutions.

*PEN, COPPE, UFRJ, RJ, Brasil, nilson@con.ufrj.br

2 Mathematical Results

Complementary Problems on Lipschitz Domains

Definition 2.1. *Let us consider two mixed boundary value problems P_{f_I,g^I,g^I_ν} and $P_{f_{II},g^{II},g^{II}_\nu}$ defined on the same Lipschitz domain Ω. We say that these problems are complementary if $f_I = f_{II}$, $\Gamma^I_D = \Gamma^{II}_N$, $\Gamma^{II}_D = \Gamma^I_N$ and there exist a Cauchy data (g, g_ν) such that*

$$g^I = g\chi_{\Gamma^I_D} \text{ and } g^{II} = g\chi_{\Gamma^{II}_D}.$$
$$g^I_\nu = g_\nu\chi_{\Gamma^I_D} \text{ and } g^{II}_\nu = g_\nu\chi_{\Gamma^{II}_D}.$$

Theorem 2.1. *Suppose that two mixed boundary value problems P_{f_I,g^I,g^I_ν} and $P_{f_{II},g^{II},g^{II}_\nu}$ has solutions u_I and u_{II}, respectively. If they are complementary, then*

$$u_I = u_{II}.$$

Proof : It is based on the concept of Calderon Projector gap [1].

Lemma 2.1. *Suppose that in the model given by operator $\mathcal{L}_\alpha$ and source F_α the associated Cauchy boundary data are given by $(\gamma[U], \mathcal{B}_\nu[U]) = (H, H_\nu)$ as posed in problem (1.1). Suppose also that Cauchy data are dissected according the Lipschitz dissection and the respective mixed problems are solved.*

(i) If the parameter α value is the corrected, then $U^I_\alpha = U^{II}_\alpha$.

(ii) If the parameter value for $\alpha = \alpha^{(0)}$ presents a discrepancy in the mixed problems solutions $U^I_{\alpha^{(0)}} \neq U^{II}_{\alpha^{(0)}}$, then for any parameter α in a neighbourhood of $\alpha^{(0)}$,

$$\int \chi(x)(U^{II}_\alpha(x) - U^I_\alpha(x))dx = \mathcal{H}(v^I_0, v^{II}_0, H, H_\nu) + \int_\Omega (v^{II}_0(x) - v^I_0(x))F_0(x, \alpha^{(0)})dx +$$
$$\sum_{i=1}^{NA}(\alpha_i - \alpha^{(0)}_i)\int_\Omega (v^{II}_0(x)\mathcal{L}_\alpha \frac{\partial U^{II}_0}{\partial \alpha_i} - v^I_0(x)\mathcal{L}_\alpha \frac{\partial U^I_0}{\partial \alpha_i})dx + O(\|\alpha_i - \alpha^{(0)}_i\|^2)$$

where v^I_0 and v^{II}_0 are solutions of boundary complementary adjoint homogeneous auxiliary problems in the sense of the Lipschitz dissection with mass one source $\chi \in L^2(\Omega)$ and $\mathcal{H}$ depends on the Cauchy data.

Remark 2.1. *Based on Lemma (2.1) we create some discrepancy functional that measures observed differences for guess value of the parameters, i.e.,*

$$d_\alpha(U_I, U_{II}) = ||U^I_\alpha - U^{II}_\alpha||_V, \tag{2.3}$$

where V can be the norm of continuous functions solutions $\mathcal{C}(\Omega)$, or square integrable $L^2(\Omega)$ solutions, or even with some first derivative control $H^1(\Omega)$ solutions. Problem (1.1) can now be posed with the following optimization problem:

"In the guess set of parameters $\alpha \in \{[\alpha_1, \alpha_2] \subset \mathbb{R}^{NA}\}$, to find $\overline{\alpha}$ that minimizes the discrepancy (2.3) between Lipschitz dissected solutions."

Part (ii) of Lemma (2.1) is used in the search for a descend direction.

We presents some numerical experiments.

References

[1] ROBERTY, N. C. - *Simultaneous Reconstruction of Coefficients and Source Parameters in Elliptic Systems Modelled with Many Boundary Value Problems,* Mathematical Problems in Engineering, 2013, Article ID 631950.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

Soluções não-negativas para equações de Schrödinger envolvendo expoentes supercríticos

olimpio h. miyagaki [*†] & sandra i. moreira [‡§]

1 Introdução

Recentemente vários matemáticos tem estudado equações do tipo

$$-\Delta u + W(x)u - k\Delta(u^2)u = p(x,u), \tag{1.1}$$

em $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 3$, $W : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função chamada potencial e $p : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função contínua.

As soluções de (1.1) estão relacionadas com a existência de ondas estacionárias para equações de Schrödinger quase-lineares da forma

$$i\partial_t z = -\Delta z + W(x)z - f(|z^2|)z - k\Delta\left[g(|z^2|)\right] g'(|z^2|)z, \tag{1.2}$$

em que W é um potencial dado, k uma constante real, f, g são funções reais.

A fim de buscar solução para a equação (1.1) dois métodos variacionais vem sendo amplamente usados. O primeiro por meio de argumentos de minimização com vínculos, em [4] e estendidos em [2], onde os autores provaram a existência de soluções positivas usando um Multiplicador de Lagrange. O segundo, foi fornecido em [3], onde para superar o problema de que o funcional associado a esta equação pode não estar bem definido, foi introduzido uma mudança de variáveis, e assim, o problema quase-linear foi transformado em um semi-linear.

Inspirados pelo artigo [1], desejamos estudar as soluções do problema:

$$\begin{cases} -\Delta u - \Delta(u^2)u = \lambda u + k(x)\left|u\right|^{q-1}u - h(x)\left|u\right|^{r-1}u \\ \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 3$, um domínio limitado, $h, k \in L^\infty(\Omega)$ são funções não-negativas, $3 < q < r$, $\lambda \in \mathbb{R}$..

Ao longo do trabalho usaremos as seguintes hipóteses:

(H_1) *supp* $k \subset$ *supp* h.

(H_2) $h, k \in L^\infty(\Omega)$ são funções não-negativas e *supp* k and *supp* h tem medidas positivas.

(H_3) $0 < \overline{\lambda}(B) = \inf\limits_{0\neq u\in H_0^1(B)} \dfrac{\int_B |\nabla u|^2\,dx}{\int_B |f(u)|^2\,dx}$, onde f é definida por

$$f'(t) = \tfrac{1}{\sqrt{1+2f^2(t)}}, \quad \text{em} \quad [0,+\infty),$$

$$f(t) = -f(-t), \qquad \text{em} \quad (-\infty, 0].$$

*Departamento de matemática, UFJF, MG, Brasil, e-mail: ohmiyagaki@gmail.com
†Parcialmente suportado pelo CNPq.
‡Departamento de matemática e informática, UEMA, MA, Brasil, e-mail: ymaculada@gmail.com
§Aluna de doutorado da UFSCar desenvolvendo a tese na UFJF.

Neste trabalho, usamos as seguintes notações: $\Omega_2 = supp\ k$; $\quad \widetilde{\Omega} = \{x \in \Omega : h(x) = 0\}$; $\quad \overline{\lambda} = \overline{\lambda}(\Omega)$.

2 Resultado

Teorema 2.1. *Seja $3 < q < r$. Suponha que*

$$(*) \qquad \int_{\Omega_2} \left[\frac{k(x)^{\frac{r-1}{r-q}}}{h(x)^{\frac{q-1}{r-q}}} \right]^{\frac{N}{2}} dx < +\infty.$$

Então existe um número λ^* com $-\infty < \lambda^* < \overline{\lambda}$ tal que

1. *Se $\lambda^* \leq \lambda < \overline{\lambda}(\widetilde{\Omega})$ então o problema (1.3) admite uma solução não-negativa.*
2. *Se $\lambda^* < \lambda < \overline{\lambda}$, o problema (1.3) admite duas soluções não-negativas, $0 \leq w_\lambda < v_\lambda$.*

Ideia da Prova: Motivados pelo argumento encontrado em [3], usamos uma mudança de variável para reformular o problema e obtermos uma equação semilinear, cujo funcional associado é C^1. Depois disso, usamos métodos variacionais para encontar as soluções, a saber: a primeira solução é obtida via minimização e método de sub-supersolução e a segunda solução é encontrada via teoria de Ljusternik - Schnirelman sobre conjuntos convexos.

Referências

[1] ALAMA, S. AND TARANTELLO, G. - Elliptic problems with nonlinearities indefinite in sign. *J. Funct. Anal.*, **141**, 159-215, 1996.

[2] LIU, J. AND WANG, Z.-Q - Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations, I,. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **131** , 441-448, 2003.

[3] LIU, J., WANG, Y. AND WANG, Z.-Q - Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations, II,. *J. Differential Equations* , **187**, 473-493, 2003.

[4] POPPENBERG, M., SCHMITT, K. AND WANG, Z.-Q - On the existence of soliton solutions to quasilinear Schrödinger equations. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **14**, 329-344, 2002.

[5] STRUWE, M. -Variational Methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems *pringer-Verlag*, Berlin, 1990.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

SOBRE O LIMITE DE VISCOSIDADE NULA NO PROBLEMA DE CAUCHY PARA AS EQUAÇÕES DOS FLUIDOS ASSIMÉTRICOS NÃO-HOMOGÊNEOS EM $\mathbb{R}^3$

PABLO BRAZ E SILVA [*], MARKO ROJAS-MEDAR [†] & FELIPE WERGETE CRUZ [‡]

Estudamos o problema de Cauchy para as equações do movimento de um fluido assimétrico não-homogêneo, viscoso e incompressível em $\mathbb{R}^3$. Provamos que, quando as viscosidades tendem a zero, existe um pequeno intervalo de tempo onde as variáveis do fluido convergem uniformemente. No limite, encontramos um fluido assimétrico não-homogêneo, não-viscoso e incompressível.

1 Introdução

Consideraremos o sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho\mathbf{u}_t+\rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}-(\mu+\mu_r)\Delta\mathbf{u}+\nabla p &=& 2\mu_r\,\mathrm{rot}\,\mathbf{w}+\rho\mathbf{f},\\ \mathrm{div}\,\mathbf{u} &=& 0,\\ \rho\mathbf{w}_t+\rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{w}-(c_a+c_d)\Delta\mathbf{w} &-& (c_0+c_d-c_a)\nabla(\mathrm{div}\,\mathbf{w})+4\mu_r\mathbf{w}\\ &=& 2\mu_r\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}+\rho\mathbf{g},\\ \rho_t+\mathbf{u}\cdot\nabla\rho &=& 0, \end{array}\right. \tag{1.1}$$

em $\mathcal{Q}_T=\mathbb{R}^3\times[0,T]$, $T>0$, sujeito às condições iniciais

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbf{u}(\mathbf{x},0) &=& \mathbf{u}_0(\mathbf{x}),\\ \mathbf{w}(\mathbf{x},0) &=& \mathbf{w}_0(\mathbf{x}),\\ \rho(\mathbf{x},0) &=& \rho_0(\mathbf{x}), \end{array}\right. \tag{1.2}$$

onde as funções $\mathbf{u}_0,\mathbf{w}_0$ e ρ_0 são dadas. Os símbolos $\nabla\,,\Delta\,,\mathrm{div}$ e rot denotam, respectivamente, os operadores *gradiente, Laplaciano, divergente* e *rotacional*. Por outro lado, $\mathbf{u}_t,\mathbf{w}_t$ e ρ_t, denotam, respectivamente, as derivadas temporais de $\mathbf{u},\mathbf{w}$ e ρ.

Este sistema descreve o movimento de um fluido não-homogêneo, viscoso, incompressível e assimétrico (veja [1] e [2]). As equações no sistema (1.1) representam, respectivamente, a lei de conservação do momento linear, a incompressibilidade do fluido, a lei de conservação do momento angular e a lei de conservação da massa. Os parâmetros μ, μ_r, c_0, c_a, $c_d\geq 0$ são viscosidades que satisfazem $c_0+c_d>c_a$. Para simplificar a notação, escreveremos:

$$\bar{\mu}=\mu+\mu_r,\qquad \nu_1=c_a+c_d\qquad \text{e}\qquad \nu_2=c_0+c_d-c_a\,.$$

As funções, $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\in\mathbb{R}^3$, $\mathbf{w}(\mathbf{x},t)\in\mathbb{R}^3$, $\rho(\mathbf{x},t)\in\mathbb{R}$ e $p(\mathbf{x},t)\in\mathbb{R}$ são as incógnitas e representam, respectivamente, a velocidade linear, a velocidade angular de rotação das partículas do fluido, a densidade e a pressão do fluido em um ponto $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ no tempo $t\in[0,T]$. Por sua vez, são conhecidas as forças externas $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ do momento linear e angular das partículas, respectivamente. O sistema (1.1) inclui, como caso particular, o sistema usual de Navier-Stokes com

[*]Departamento de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, Brasil (pablo@dmat.ufpe.br)
[†]Departamento de Ciencias Básicas, Universidad del Bío-Bío, Campus Fernando May, Casilla, Chillán 447, Chile (marko@ueubiobio.cl)
[‡]Colegiado de Engenharia de Produção, Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro, BA, Brasil (felipe.wergete@univasf.edu.br)

densidade variável ($\mathbf{w} = 0$ e $\mu_r = 0$). No que segue, faremos menção a $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w})$ quando nos referirmos a solução do problema (1.1)-(1.2).

2 Resultados

Como de costume, trabalhamos no âmbito do espaço $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3) = \left(L^2(\mathbb{R}^3)\right)^3$. Quando m for um inteiro não-negativo, escrevemos $\mathbf{H}^m(\mathbb{R}^3) = \left(W^{m,2}(\mathbb{R}^3)\right)^3$. Adaptamos as técnicas usadas em [5], para as equações de Navier-Stokes com densidade variável, a fim de mostrar o seguinte resultado:

Teorema 2.1. *Assuma que*

(a) $0 \leq \bar{\mu}, \mu_r, \nu_1, \nu_2 \leq 1$, $\nu_1 > \nu_2$,

(b) $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^2\left(0, T; \mathbf{H}^3(\mathbb{R}^3)\right)$,

(c) $\rho_0 \in C^0(\mathbb{R}^3)$, $\nabla\rho_0 \in \mathbf{H}^2(\mathbb{R}^3)$ *e* $0 < m \leq \rho_0(\mathbf{x}) \leq M < \infty$,

(d) $\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0 \in \mathbf{H}^3(\mathbb{R}^3)$ *e* $\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0$.

Então existe $T_0 \in (0, T]$, *independente de* $\bar{\mu}, \nu_1$ *e* ν_2, *tal que o problema (1.1)-(1.2) tem uma única solução* $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w})$ *que satisfaz*

$$\rho \in C^0\left(\mathbb{R}^3 \times [0, T_0]\right), \quad \nabla\rho \in C^0\left([0, T_0]; \mathbf{H}^2(\mathbb{R}^3)\right), \quad m \leq \rho(\mathbf{x}, t) \leq M \quad e \quad \mathbf{u},\, \mathbf{w} \in C^0\left([0, T_0]; \mathbf{H}^3(\mathbb{R}^3)\right).$$

Além disso, seja $(\rho^0, \mathbf{u}^0, \mathbf{w}^0)$ *a solução do problema (1.1)-(1.2) com* $\bar{\mu} = \nu_1 = \nu_2 = 0$, *correspondendo aos mesmos dados iniciais de* $(\rho, \mathbf{u}, \mathbf{w})$. *Então temos que*

$$\sup_{0 \leq t \leq T_0} \left[\| \left(\rho - \rho^0\right)(\cdot, t)\|_{\mathbf{H}^2} + \| \left(\mathbf{u} - \mathbf{u}^0\right)(\cdot, t)\|_{\mathbf{H}^2} + \| \left(\mathbf{w} - \mathbf{w}^0\right)(\cdot, t)\|_{\mathbf{H}^2}\right] \longrightarrow 0 \quad \textit{quando} \quad \gamma \longrightarrow 0,$$

onde $\gamma := (\bar{\mu}, \nu_1, \nu_2)$.

Referências

[1] A. C. ERINGEN - Theory of micropolar fluids. *J. Math. Mech.*, **16** (1) (1966), 1-18.

[2] D. CONDIFF AND J. DAHLER - Fluid mechanical aspects of antisymmetric stress. *The Physics of Fluids*, **7** (6) (1964), 842-854.

[3] O. A. LADYZHENSKAYA - The mathematical theory of viscous incompressible flow. Gordon and Breach. Second revised edition. New York (1969).

[4] P. BRAZ E SILVA, E. FERNÁNDEZ-CARA AND M. A. ROJAS-MEDAR - Vanishing viscosity for non-homogeneous asymmetric fluids in $\mathbb{R}^3$. *J. math. analysis and appl.*, **332** (2007), 833-845.

[5] S. ITOH - On the vanishing viscosity in the Cauchy problem for equations of a nonhomogeneous incompressible fluid II. *Bull. Fac. Educ. Hirosaki Univ.*, **76** (1996), 33-40.

[6] S. N. ANTONTSEV, A. V. KAZHIKHOV AND V. N. MONAKHOV - Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids. Volume **22** of Studies in Mathematics and its Applications. North-Holland Co., Amsterdam (1990).

[7] Z. JIANWEN - The inviscid and non-resistive limit in the Cauchy problem for 3-D nonhomogeneous incompressible magneto-hydrodynamics. *Acta Mathematica Scientia*, **31** (2011), 882-896.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

A FORMULA TYPE ITÔ-KUNITA-VENTZEL FOR YOUNG INTEGRATION

PEDRO J. CATUOGNO * & RAFAEL A. CASTREQUINI †

We show a formula type Itô-Kunita-Ventzel for continuous paths with bounded p-variation and a substitution formula for the Young integral. We obtain a composition of two flows of Young systems.

1 Introduction

We give some preliminaires on p-variation paths and Young integration and prove a formula type Itô-Kunita-Ventzel and a substitution formula adapted to Young integral. We establish an adaptation of the H. Kunita result about composition of solutions of stochastic differential equations to Young systems, see [2].
It is clear that our results extend naturally to stochastic differential equations driven by a fractional Brownian motion with Hurst index $H > \frac{1}{2}$, where stochastic integrals are changed by Young integrals, see [1], [3], [4] and [5].

2 Mathematical Results

Let E and V be Banach spaces. We denote by $\mathcal{P}([a,b])$ the set of all partitions $D = \{a = t_0 < ... < t_{k-1} < t_k = b\}$ of an interval $[a,b]$. Let $C^k([0,T],E), k = 1,2,\ldots,$ denote the set of C^k-class paths of $[0,T]$ in E.

Definition 2.1. *Let $p \in (0,\infty)$. The* p-variation *of a path $X\colon [0,T] \to E$ on the subinterval $[a,b]$ of $[0,T]$ is defined by*

$$\|X\|_{p,[a,b]} = (\sup_{D\in\mathcal{P}([a,b])} \sum_{t_i\in D} (\|X_{t_{i+1}} - X_{t_i})\|^p)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.1}$$

We say that a path $X\colon [0,T] \to E$ is of finite p-variation *if $\|X\|_{p,[0,T]} < \infty$.*

We denote by $\mathcal{V}^p([0,T],E)$ the set of all continuous paths of finite p-variation from $[0,T]$ to E.

Let E and V be Banach spaces. Let $X\colon [0,T] \to E$ and $Z\colon [0,T] \to \mathcal{L}(E,V)$ be continuous paths. The Riemann-Stieltjes integral of Z with respect to X is defined as the limit

$$\lim_{|D|\to 0} \sum_{s_i\in D} Z_{s_i}(X_{s_{i+1}} - X_{s_i}) \tag{2.2}$$

and is denoted by $\int_0^t Z_s\, dX_s$. L. C. Young presented the sufficient conditions for the existence of Riemann-Stieltjes integrals. More precisely, he proved that the integral $\int_0^t Z_s\, dX_s$ exists when X has finite p-variation, Z has finite q-variation and is valid the condition $(1/p) + (1/q) > 1$. This result is known as Young's theorem. We also have that the path W given by $W(\cdot) = \int_0^{\cdot} Z_s\, dX_s$ has the same variation of the integrator X, that is, W has finite p-variation. We refer the reader to the paper [6] by L. C. Young and also [4]. Based on Young's Theorem, we say that a Riemann-Stieltjes integral $\int_0^t Z_s\, dX_s$ is an integral in the Young sense if there exist $p, q \in [1,\infty)$ such that $X \in \mathcal{V}^p([0,T],E)$, $Z \in \mathcal{V}^q([0,T],\mathcal{L}(E,V))$ and $\theta = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$. In this case holds the following Young-Loeve estimative,

$$\|\int_s^t Z_r dX_r - Z_s(X_t - X_s)\| \leq C_{p,q}\|Z\|_{q,[s,t]}\|X\|_{p,[s,t]} \tag{2.3}$$

*IMECC, UNICAMP , SP, Brasil, pedrojc@ime.unicamp.br
†IMECC, UNICAMP, SP, Brasil, e-mail: acdcvotu@gmail.com

where $C_{p,q} = \frac{1}{1-2^{1-\theta}}$.

Definition 2.2. *A path $F : [0,T] \to V$ is Holder continuous with exponent $\alpha \geq 0$, or simply α-Holder, if*

$$\|F\|_{\alpha;H} = \sup_{s \neq t} \frac{\|F(x) - F(y)\|}{|t-s|^{\alpha}} < \infty.$$

Let $C_H^{\alpha}([0,T];V)$ denote the set of α-Holder paths of V.

Now, we obtain a formula type Itô-Kunita-Ventzel in the context of Young integration.

Theorem 2.1. *Let $X \in \mathcal{V}^p([0,T],V)$ and $g : [0,T] \times V \to W$ be a continuous function twice continuously differentiable in relation to V ($1 \leq p \leq 2$). Let $h \in C(V, C_H^{\frac{1}{q}}([0,T], L(W,U))$ and $Z \in \mathcal{V}^p([0,T],W)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$) such that*

$$g_t(x) = g_0(x) + \int_0^t h_s(x) dZ_s$$

where the integral is in the Young sense. Then

$$g_t(X_t) = g_0(X_0) + \int_0^t h_s(X_s) dZ_s + \int_0^t D_x g_s(X_s) dX_s. \tag{2.4}$$

The following substitution formula holds.

Theorem 2.2. *Let $Z \in \mathcal{V}^p([0,T],V)$, $f \in \mathcal{V}^q([0,T], Hom(V,W))$ and $g \in \mathcal{V}^l([0,T], Hom(W,U))$ where $\frac{1}{q}, \frac{1}{l} > 1 - \frac{1}{p}$. Then for all $0 \leq s \leq t \leq T$,*

$$\int_s^t g_r dY_r = \int_s^t g_r \circ f_r dZ_r \tag{2.5}$$

where $Y_t = \int_0^t f(Z_r) dZ_r$.

The following Theorem is an adaptation of the H. Kunita results about composition of solutions of stochastic differential equations to Young systems, see [2].

Theorem 2.3. *Let $p \in [1,2)$, $p < \gamma$, $U \in \mathcal{V}^p([0,T],E_0)$, $X \in \mathcal{V}^p([0,T],E_1)$, $f \in \mathrm{Lip}^{\gamma}(E, L(E_0,E))$ and $g \in \mathrm{Lip}^{\gamma}(E, L(E_1,E))$. Let V and Y be solutions of $dV = f(V)dU$ and $dY = g(Y)dX$. Then $Z = Y \circ V$ satisfies*

$$dZ = g(Z)dX + Y_* f(Z) dU.$$

References

[1] FRIZ, P.; VICTOIR, N. *Multidimensional Stochastic Process as Rough Paths: Theory and Applications.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 120. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[2] KUNITA, H. *On decomposition of solutions of stochastic differential equations.* Stochastic integrals, pp. 213-255, Lecture Notes in Math., 851, Springer, Berlin, 1981.

[3] LEJAY, A. *Controlled differential equations as Young integrals: a simple approach.* J. Differential Equations 249, 8, pp. 1777-1798, 2010.

[4] LYONS, T. *Differential Equations Driven by Rough Paths.* Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXXIV, Springer, 2004.

[5] RUZMAIKINA, A. *Stieltjes integrals of Holder continuous functions with applications to fractional Brownian motion.* J. Statist. Phys. 100, 5-6, pp. 1049-1069, 2000.

[6] YOUNG, L., *An inequality of Holder type connected with Stieljes integration.* Acta Math., 67, pp. 251-258, 1936.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

ESPAÇOS LIPSCHITZ-LIVRES ASSOCIADOS A UNIÕES E QUOCIENTES DE ESPAÇOS MÉTRICOS

PEDRO L. KAUFMANN *

1 Introdução: os espaços Lipschitz-livres

A todo espaço métrico marcado $(M, d, 0)$, onde 0 é um elemento de M, está associado o espaço de Banach $Lip_0(M)$ de funções definidas em M a valores reais que se anulam em 0, munido da norma

$$\|f\| = sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} : x, y \in M, x \neq y\right\}.$$

$Lip_0(M)$ admite um pré-dual canônico, o fecho em $Lip_0(M)^*$ do espaço linearmente gerado pelos funcionais de avaliação $\delta(x)$, $x \in M$, onde

$$\delta(x)(f) = f(x).$$

Este espaço é chamado o *espaço Lipschitz-livre associado a* M, e denotado por $\mathcal{F}(M)$; foi definido e estudado em [5], onde era chamado *espaço de Arens-Eells*. Os espaços Lipschitz-livres possuem uma interpretação geométrica muito clara (veja a mesma referência), e permitem estudar certos aspectos da estrutura Lipschitz de espaços métricos através da estrutura *linear* de seus respectivos espaços Lipschitz-livres associados. Mais especificamente, a aplicação $\delta : M \mapsto \mathcal{F}(M)$ é uma isometria (não-linear), e temos o seguinte:

Teorema 1.1. *[2, Lemma 2.2]*

Sejam M e N, espaços métricos marcados e seja $L : M \to N$ uma aplicação Lipschitz satisfazendo $L(0_M) = 0_N$. Então existe uma única transformação linear $\overline{L} : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(N)$ tal que $\overline{L}\delta_M = \delta_N L$, que satisfaz ainda $\|\overline{L}\| = \|L\|_{Lip}$, onde $\|\cdot\|_{Lip}$ denota a norma Lipschitz.

Quando os espaços métricos considerados são eles mesmos espaços de Banach, este tipo de tradução linear de propriedades não lineares faz dos espaços Lipschitz-livres ferramentas para o estudo da geometria não-linear de espaços de Banach. Mencionamos [2], [3] e referências aí encontradas para algumas importantes aplicações.

2 Algumas diretrizes e resultados

Sob a simplicidade da definição dos espaços Lipschitz-livres se esconde uma complexidade estrutural que vem sido alvo de pesquisa recente: pouco se sabe ainda mesmo sobre as propriedades dos espaços Lipschitz-livres mais básicos. Naor e Schechtman [4] ilustraram essa complexidade mostrando que $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ não é (linearmente) isomorfo a um subespaço de L_1.

Em contrapartida, Godard [1] caracterizou todos os espaços métricos cujos espaços Lipschitz-livres associados são isometricamente isomorfos a L_1 como sendo aqueles que são subespaços de $\mathbb{R}$-árvores. Motivado por estudar espaços métricos cujos espaços Lipschitz-livres associados são (não necessariamente isometricamente) isomorfos a um subespaço de L_1, Godard no mesmo artigo iniciou um estudo sobre espaços Lipschitz-livres associados à uniões de espaços métricos, em função dos espaços Lipschitz-livres associados a cada um desses espaços métricos. Este estudo está restrito a uniões disjuntas de espaços métricos, que ainda devem satisfazer certas condições de disposição

*Institut de Mathématiques de Jussieu , Univ. Paris VI, Paris, França, pkaufmann@math.jussieu.fr

(grosseiramente colocando, os espaços devem estar "uniformemente longe" uns dos outros, mas "uniformemente não longe demais" para que o espaço Lipschitz livre da união seja isomorfo à ℓ_1-soma dos espaços Lipschitz-livres de cada espaço). Apresentaremos um desenvolvimento nesta direção, veja a Proposição 2.1 abaixo. Primeiro, lembramos que, dado um espaço métrico (M, d) e um subespaço fechado F, *o espaço métrico quociente* $M/F = M/\sim$ (onde $\sim$ colapsa F em um único ponto) é obtido definindo-se a métrica $\overline{d}$ em M/F por

$$\overline{d}(\overline{x}, \overline{y}) = min\{d(x, y), d(x, F) + d(y, F)\}.$$

Lembramos também que um *operador de extensão de* $Lip_0(F)$ *a* $Lip_0(M)$ é um operador $T : Lip_0(F) \to Lip_0(M)$ que satisfaz $T(f)|_F = f$, $f \in Lip_0(F)$.

Proposição 2.1. *Seja* $(W, d, 0)$ *e sejam* M *e* N *subespaços de* W *com intersecção fechada* $F = M \cap N$ *e* $0 \in F$, *satisfazendo:*

1. *existe um operador de extensão* T *de* $Lip_0(F)$ *em* $Lip_0(M \cup N)$ *linear,* $\|\cdot\|$*-contínuo e* w^**-*w^* *contínuo, e*
2. *existe* $C \geq 1$ *tal que, para cada* $x \in M$ *e cada* $y \in N$, $d(x, F) + d(y, F) \leq C\, d(x, y)$.

Então,

$$\mathcal{F}(M \cup N) \simeq \mathcal{F}(M/F) \oplus_1 \mathcal{F}(N/F) \oplus_1 \mathcal{F}(F)$$

com distorção linear $\leq C(\|T\| + 1)$.

Discutiremos generalizações deste resultado para uniões de maior ordem, problemas e resultados relacionados com a existência dos mencionados operadores de exensão, relações com os resultados de Godard e com o problema de incluir isomorficamente um espaço Lipschitz-livre em L_1, e problemas abertos relacionados.

Referências

[1] GODARD, A., *Tree metrics and their Lipschitz-free spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **138** (2010), 4311–4320.

[2] GODEFROY, G. E KALTON, N. J., *Lipschitz-free Banach spaces*, Studia Math., **159(1)** (2003), 121–141.

[3] KALTON, N. J., *The nonlinear geometry of Banach spaces*, Rev. Mat. Complut., **21(1)** (2008), 7–60.

[4] NAOR, A. E SCHECHTMAN, G., *Planar earthmover is not in L1*, SIAM J. Comput., **37(3)** (2007), 804–826.

[5] WEAVER, N., *Lipschitz Algebras*, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1999.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

RESULTADOS RECENTES SOBRE OS ESQUEMAS WENO PARA LEIS DE CONSERVAÇÃO HIPERBÓLICAS

RAFAEL B. R. BORGES * & BRUNO COSTA †

1 Introdução

Equações de leis de conservação hiperbólicas em geral possuem soluções fracas que são descontínuas mas que são de interesse físico. Um método numérico, quando aplicado a estas equações, precisa tomar um certo cuidado para conseguir aproximações qualitativamente corretas destas soluções descontínuas. Em especial, pelo teorema de Godunov, métodos lineares de ordem maior ou igual a 2 produzem soluções numéricas com oscilações próximas às descontinuidades, no caso geral. Estas oscilações, além de qualitativamente incorretas, podem ser amplificadas e gerar instabilidades no caso de equações não-lineares.

Os esquemas WENO (essencialmente não-oscilatórios com pesos, em inglês *weighted essentially non-oscillatory*) são atualmente uma classe de métodos bastante popular para a resolução numérica deste tipo de problema. Estes métodos não-lineares evitam realizar interpolações em regiões onde a solução é descontínua, através de uma fórmula que atribui pesos a estênceis de acordo com a suavidade da solução: quanto menos suave for a função em um dado estêncil, menor será a contribuição deste estêncil para a aproximação final. Desta forma, consegue-se gerar soluções numéricas com oscilações desprezíveis, isto é, com amplitude da ordem do comprimento da malha de pontos Δx [9].

Esquemas WENO podem ser construídos com ordem de precisão arbitrariamente alta; isto é vantajoso, pois em problemas onde descontinuidades vêm acompanhadas de regiões suaves mas com variações rápidas nas grandezas físicas envolvidas (por exemplo, ondas de alta frequência ou vórtices), é por vezes mais eficiente computacionalmente usar um esquema de ordem mais alta do que um esquema de ordem mais baixa que irá precisar de um número consideravelmente maior de pontos para conseguir uma solução de qualidade qualitativamente comparável [8].

Para mais detalhes, sugerimos o ótimo texto introdutório [9], bem como as referências [2, 3, 4] para o WENO-Z.

2 Resultados

Neste trabalho, apresentaremos alguns resultados recentes sobre duas variantes de esquemas WENO, a saber: o esquema WENO clássico, que é o WENO original de Liu et al. [6] com os indicadores de suavidade de Jiang e Shu [7] (também conhecido como WENO-JS); e o esquema WENO-Z, que é uma melhoria em relação ao esquema clássico, proposto pelos autores do presente trabalho em [2] e estendido em [3]. Os resultados são:

Ordem de precisão dos esquemas WENO. O WENO clássico sofre perda de ordem de precisão na vizinhança de pontos críticos. A precisão do WENO de 5a ordem pode cair até para 2a ordem, no pior caso [5]. O WENO-Z sofre do mesmo problema em pontos críticos especiais, onde 2 ou mais derivadas se anulam simultaneamente [2]. Porém, resultados recentes mostram que se o parâmetro de sensibilidade ε dos dois esquemas for escolhido adequadamente, então ambos os esquemas não sofrerão esta perda de ordem de precisão. Em [1], foi demonstrado que a condição $\varepsilon = \Omega(\Delta x^2)$ (isto é, $\varepsilon \geq C\Delta x^2$ quando $\Delta x \to 0$ para algum $C > 0$ independente de Δx) é necessária e suficiente para que o WENO clássico não perca a ordem de precisão em pontos críticos. Em [4], conseguimos

*Departamento de Matemática Aplicada, IM-UFRJ, RJ, Brasil, rborges@ufrj.br
†Departamento de Matemática Aplicada, IM-UFRJ, RJ, Brasil, bcosta@ufrj.br

uma demonstração mais simples deste resultado, e obtivemos uma condição análoga para o WENO-Z da forma $\varepsilon = \Omega(\Delta x^q)$, onde $q \geq 2$ é um número que cresce quanto maior for a ordem do WENO-Z. Este resultado mostra que ε pode assumir valores menores no WENO-Z do que no WENO clássico. Isto permite que WENO-Z detecte melhor as descontinuidades da solução e gere oscilações espúrias menores, ao mesmo tempo em que ele mantém o maior poder de resolução de estruturas finas — fato confirmado por experimentos numéricos com a equação do transporte linear e as equações de Euler. As demonstrações e os resultados numéricos podem ser vistos na referência [4].

Ordem de precisão nos pontos críticos × grau de dissipação: o que é mais importante para o poder de resolução do WENO? O WENO clássico tem um poder menor de resolução de estruturas finas do que o WENO-M [5] ou o WENO-Z (veja a referência [3] para comparações detalhadas). Na literatura, em geral se atribui como causa disto o fato de o WENO clássico sofrer com a perda de ordem de precisão na vizinhança de pontos críticos [5]. Neste trabalho, pretendemos mostrar que a ordem de precisão nos pontos críticos pouco influi no poder de resolução de um esquema WENO, e que o fator preponderante para o poder de resolução de um esquema WENO é o seu grau de dissipação. Este estudo ainda está em andamento.

Validade das equações de Euler em 2D como caso teste. Por fim, pretendemos mostrar que as equações de Euler da dinâmica de fluidos em duas dimensões, amplamente usadas na literatura como teste de performance do poder de resolução dos esquemas WENO [8], não são um bom parâmetro de comparação quando usadas sozinhas, pois alguns esquemas podem aparentar estar resolvendo mais estruturas finas quando na verdade estão gerando oscilações espúrias. Propomos que, em paralelo a estes testes, também sejam realizados testes lineares em 2D para verificarmos que os esquemas são de fato essencialmente-não oscilatórios. Este estudo também está em andamento.

Referências

[1] ARÀNDIGA, F., BAEZA, A., BELDA, A. M., MULET, P. - *Analysis of WENO Schemes for Full and Global Accuracy*, SIAM J. Numer. Anal., 49 (2) (2011), pp. 893-915.

[2] BORGES, R., CARMONA, M., COSTA, B., DON, W.-S. - *An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws*, J. Comput. Phys., 227 (6) (2008), pp. 3191-3211.

[3] CASTRO, M., COSTA, B., DON, W.-S. - *High order weighted essentially non-oscillatory WENO-Z schemes for hyperbolic conservation laws*, J. Comput. Phys., 230 (5) (2011), pp. 1766-1792.

[4] DON, W.-S., BORGES, R. - *Accuracy of the weighted essentially non-oscillatory conservative finite difference schemes*, J. Comput. Phys., 250 (2013), pp. 347-372.

[5] HENRICK, A. K., ASLAM, T. D., POWERS, J. M. - *Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: Achieving optimal order near critical points*, J. Comput. Phys., 207 (2) (2005), pp. 542-567.

[6] LIU, X.-D., OSHER, S., CHAN, T. - *Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes*, J. Comput. Phys., 115 (1) (1994), pp. 200-212.

[7] JIANG, G.-S., SHU, C.-W. - *Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes*, J. Comput. Phys., 126 (1) (1996), pp. 202-228.

[8] SHI, J., ZHANG, Y.-T., SHU, C.-W. - *Resolution of high order WENO schemes for complicated flow structures*, J. Comput. Phys., 186 (2) (2003), pp. 690-696.

[9] SHU, C.-W. - *Essentially Non-Oscillatory and Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes for Hyperbolic Conservation Laws*, NASA/CR-97-206253 ICASE Report, 97-65 (1997).

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

SOLUÇÕES POSITIVAS PARA EQUAÇÕES ASSINTOTICAMENTE LINEARES VIA VARIEDADE DE POHOZAEV

RAQUEL LEHRER * & LILIANE DE ALMEIDA MAIA †

1 Introdução

Apresentamos um novo método para encontrar soluções positivas para uma classe de equações elípticas assintoticamente lineares no infinito, considerando $\lambda > 0$:

$$-\Delta u + \lambda u = a(x)f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \quad N \geq 3. \tag{1.1}$$

Consideramos que

(A1) $a \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^+)$, com $\inf_{x\in\mathbb{R}^N} a(x) > 0$;

(A2) $\lim_{|x|\to\infty} a(x) = a_\infty > \lambda$;

(A3) $\nabla a(x) \cdot x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^N$, onde a desigualdade estrita é válida para um subconjunto de $\mathbb{R}^N$ com medida de Lebesgue não-nula;

(A4) $a(x) + \frac{\nabla a(x)\cdot x}{N} < a_\infty, \forall x \in \mathbb{R}^N$;

(A5) $\nabla a(x) \cdot x + \frac{x\cdot H(x)\cdot x}{N} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^N$, onde H representa a matriz Hessiana da função a.

Além disso, consideramos que $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ é assintoticamente linear no infinito. Usando argumentos de concentração de compacidade e uma variedade de Pohozaev geral, obtemos uma solução positiva via teorema de linking. Ainda, mostramos que um problema de minimização, associado à existência de uma solução 'ground state', não possui solução.

2 Desenvolvimento

Associado à equação (1.1), temos o funcional I, dado por $I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \lambda u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)F(u)dx$, onde $F(u) = \int_0^u f(s)ds$. Assim, soluções da equação (1.1) serão os pontos críticos do funcional I.

Generalizando para $\mathbb{R}^N$ as ideias apresentadas em [4] para conjuntos limitados, mostramos que toda solução da equação (1.1) satisfaz a identidade de Pohozaev

$$2N\int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)\ dx + 2\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N} x_i G_{x_i}(x,u)\ dx = (N-2)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, \tag{2.2}$$

onde $G(x,u) = \int_0^u f(s)a(x) - \lambda s ds$. Com esta identidade, definimos então a variedade de Pohozaev $\mathcal{P}$ como sendo $\mathcal{P} = \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}\,;\, u \quad \text{satisfaz} \quad (2.2)\right\}$.

*Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, UNIOESTE, PR, Brasil, rlehrer@gmail.com
†Departamento de Matemática, UnB, DF, Brasil, e-mail: lilimaia@unb.br

Consideramos também a variedade de Pohozaev $\mathcal{P}_\infty$, associada com o problema autônomo limite

$$-\Delta u + \lambda u = a_\infty f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \tag{2.3}$$

Temos que $\mathcal{P}_\infty = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \, ; \, \frac{(N-2)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx \right\}$, onde $G_\infty(u) := \int_0^u a_\infty f(s) - \lambda s ds$.

O funcional I_∞ associado à equação (2.3) é dado por $I_\infty(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \lambda u^2 - \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(u) dx$, e o conjunto de caminhos $\Gamma_\infty = \left\{ \gamma \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^N)) | \gamma(0) = 0, I_\infty(\gamma(1)) < 0 \right\}$, define o nível min-max do teorema do Passo da Montanha $c_\infty := \min\limits_{\gamma \in \Gamma_\infty} \max\limits_{0 \le t \le 1} I_\infty(\gamma(t))$.

Através de várias manipulações, trabalhando com as projeções de funções $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ sobre $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_\infty$, inspirados pelas ideias utilizadas por Azzollini e Pomponio em [2], mostramos nosso primeiro resultado:

Teorema 2.1. *Assuma que* $(A1 - A5)$ *são válidas. Então* $p := \inf\limits_{u \in \mathcal{P}} I(u) = c_\infty$, *não é um nível crítico para o funcional* I. *Em particular, o ínfimo não é atingido.*

Como mostramos ainda que $\mathcal{P}$ é uma restrição natural do funcional I, temos também que o ínfimo p de I sobre $H^1(\mathbb{R}^N)$ não é atingido.

Com este resultado, somos motivados a procurar por soluções em níveis mais altos de energia. Para encontrar tal solução, aplicamos ideias similares às utilizadas por Ambrosetti, Cerami e Ruiz em [1]. O argumento deles usa linking juntamente com a função baricentro, restrito à variedade de Nehari associada ao problema. No nosso caso, como o termo não-linear da equação é não-homogêneo, utilizamos a variedade de Pohozaev $\mathcal{P}$ para fazer a estrutura de linking, juntamente com a função baricentro apresentada em [1]. Temos então o seguinte resultado:

Teorema 2.2. *A equação* (1.1) *possui uma solução positiva* $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Observamos ainda que não fazemos uso da condição de que $\frac{f(s)}{s}$ é uma função crescente em s. Conforme observado por Costa e Tehrani em [3], se na equação (1.1) assumimos que $\frac{f(s)}{s}$ é não-decrescente, o caminho $\gamma(t) = I(tu)$ pode não interceptar a variedade de Nehari para um único t. De fato, pode acontecer deste caminho não interceptar a variedade de Nehari em nenhum ponto, ou interceptá-la para infinitos valores de t. Esta é a razão principal pela qual fomos motivados a utilizar a variedade de Pohozaev ao invés da variedade de Nehari. Ainda, como as condições $(A3)$ e $(A4)$ implicam que $I_\infty(u) \le I(u), \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, os argumentos utilizados por Costa e Tehrani em [3] não se aplicam.

Referências

[1] AMBROSETTI,A., CERAMI,G. AND RUIZ, D. - *Solitons of linearly coupled systems of semilinear non-autonomous equations on* $\mathbb{R}^N$, J. Func. Anal. **254**, 2816-2845, 2008.

[2] AZZOLLINI,A. AND POMPONIO, A. - *On the Schrödinger equation in* $\mathbb{R}^N$ *under the effect of a general nonlinear term*, Ind. Univ. Math. J **58**,no. 3,1361-1378, 2009.

[3] COSTA, D.G. AND TEHRANI, H.- *On a Class of Asymptotically Linear Elliptic Problems in* $\mathbb{R}^N$, J. Dif. Equ. **173**, 470-494, 2001.

[4] FIGUEIREDO, D. G. DE, LIONS, P.L. AND NUSSBAUM, R. D. - *A Priori Estimates and Existence of Positive Solutions of Semilinear Elliptic Equations*, J. Math. Pures Appl.(9) **61**, no.1, 41-63,1982.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

IMERSÕES EM ESPAÇOS DE SOBOLEV COM PESO E SOLUÇÕES RADIAIS DE EQUAÇÕES ELÍPTICAS DE QUARTA ORDEM COM EXPOENTES NÃO HOMOGÊNEOS

REGINALDO DEMARQUE * & OLÍMPIO H. MIYAGAKI †

1 Introdução

Neste trabalho consideramos o seguinte problema elíptico envolvendo o operador biharmônico Δ^2

$$(P) \qquad \begin{cases} \Delta^2 u + V(|x|)|u|^{q-2}u = Q(|x|)|f(u) \\ u \in D_0^{2,2}(\mathbb{R}^N), \quad N \geq 5 \end{cases}$$

onde $1 < q < N$, $q \neq 2$, os potenciais $V, Q : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$ e a não linearidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuos e satisfazem

(V) Existem números reais a e a_0 tais que $\liminf_{r\to+\infty} \frac{V(r)}{r^a} > 0$, $\liminf_{r\to 0} \frac{V(r)}{r^{a_0}} > 0$.

(Q) Existem números reais b e b_0 tais que $\limsup_{r\to+\infty} \frac{Q(r)}{r^b} < \infty$, $\limsup_{r\to 0} \frac{Q(r)}{r^{b_0}} < \infty$.

(f_s) Existem $M > 0$ e $s > \max\{2, q\}$ tais que $|f(t)| \leq M|t|^{s-1}$, $\forall t \in \mathbb{R}$

(f_1) Existe $\mu > \max\{2, q\}$ tal que $\mu F(t) \leq f(t)t$ $\forall t \in \mathbb{R}$, onde $F(t) = \int_0^t f(r)dr$.

(f_2) $F(t) > 0$ $\forall t \in (0, +\infty)$.

Nossos resultados estendem aqueles tratados em [1], no qual é estudado o mesmo problema com $q = 2$, isto é, o caso homogêneo. Quando $q \neq 2$, o caso não homogêneo, os argumentos são um pouco de diferentes daqueles do caso homogêneo, visto que as técnicas de minimização como o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange não nos fornecem solução.

Nós generalizamos o Lema Radial de [2] para nosso espaços de Sobolev e provamos estimativas a fim de obter resultados de imersão contínua. Obtivemos resultados de imersões para espaços de Sobolev de segunda ordem análogos aos obtidos em [3], os quais foram feitos para espaços de Sobolev de primeira ordem. Cabe ressaltar que os mesmos argumentos usados na demonstração de nossas estimativas podem ser usados a fim de melhor as estimativas em [3].

2 Resultados

Considere o espaço de Hilbert $D_0^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ como o fecho de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ sobre a norma $\|\Delta u\|_2$ e seja $D_{0,r}^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ o conjunto das funções radiais em $D_0^{2,2}(\mathbb{R}^N)$. Para $p \geq 1$ e a função $\nu : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ defina $L^p(\mathbb{R}^N; \nu)$ o espaço das funções mensuráveis $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tais $\int_{\mathbb{R}^N} \nu(x)|u|^p dx < \infty$, com a norma $\|u\|_{p,\nu} := \left(\int_{\mathbb{R}^N} \nu(x)|u|^p dx\right)^{1/p}$.

*Departamento de Física e Matemática, Campus de Rio das Ostras, UFF, RJ, Brasil, e-mail: reginaldodr@id.uff.br. Partially supported by FAPERJ E-26/111.039/2013.

†Departamento de Matemática, UFJF, MG, Brasil, e-mail: ohmiyagaki@gmail.com. Partially supported by CNPq e FAPEMIG.

Defina o espaço de Banach $X := D_0^{2,2}(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N; V)$, munido da norma $\|u\| = \|\Delta u\|_2 + \|u\|_{q,V}$, e X_r o conjunto das funções radiais em X.

Seja $\alpha^* := \frac{N-4}{2} + \frac{q-1}{q}(a+N)$ e $\alpha_0^* := \frac{N-4}{2} + \frac{q-1}{q}(a_0+N)$. Assim, para índices s_* e s^*, os quais serão definidos abaixo, nós obtivemos o seguinte resultado de imersão.

Teorema 2.1. *Sejam V e Q funções satisfazendo (V) e (Q). Se $s_* < s^*$, então a imersão*

$$X_r \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N; Q),$$

é contínua para todo $s_* \le s \le s^*$ quando $s^* < \infty$, $s_* \le s < \infty$ quando $s^* = \infty$ ou $\max\{s_*, s_{**}\} \le s < \infty$. Além disso, a imersão é compacta para todo $s_* < s < s^*$ ou $\max\{s_*, s_{**}\} < s < \infty$.

$$s_* = \begin{cases} q, & b \le a,\ b \le -N \text{ or } b \ge -N + \frac{q(N-4)}{2} - \varepsilon \\ \frac{2(N+b+\varepsilon)}{N-4}, & b \le a \text{ and } -N < b < -N + \frac{q(N-4)}{2} - \varepsilon \\ q + \frac{q(b-a)}{\alpha^*}, & b > a \ge -N + \frac{q(N-4)}{2} \\ q + \frac{2(b-a)}{N-4}, & b > a,\ b > -N \text{ and } -N + \frac{q(N-4)}{2} - \varepsilon < a < -N + \frac{q(N-4)}{2} \\ \frac{2(N+b+\varepsilon)}{N-4}, & b > a,\ b > -N \text{ and } a \le -N + \frac{q(N-4)}{2} - \varepsilon \\ q + \frac{2(b-a)}{N-4}, & a < b \le -N. \end{cases}$$

$$s^* = \begin{cases} \frac{2(N+b_0-\varepsilon)}{N-4}, & a_0 \ge b_0 > -N \text{ or } b_0 \ge a_0 \ge -N + \frac{q(N-4)}{2} + \varepsilon \\ q + \frac{2(b_0-a_0)}{N-4}, & b_0 \ge a_0 \text{ and } -N + \frac{q(N-4)}{2} \le a_0 < -N + \frac{q(N-4)}{2} + \varepsilon \\ q + \frac{q(b_0-a_0)}{\alpha_0^*}, & b_0 \ge a_0 \text{ and } -N - \frac{q(N-4)}{2(q-1)} < a_0 < -N + \frac{q(N-4)}{2} \\ +\infty, & b_0 \ge a_0 \text{ and } a \le -N - \frac{q(N-4)}{2(q-1)}. \end{cases}$$

$$s_{**} = q + \frac{q(b_0-a_0)}{\alpha_0^*}, \quad b_0 \le a_0 < -N - \frac{q(N-4)}{2(q-1)}.$$

Teorema 2.2. *Sejam V e Q funções satisfazendo (V) e (Q). Seja f uma função satisfazendo (f_s), (f_1) e (f_2). Se $s_* < s < s^*$, então o problema (P) tem uma solução não trivial $u \in X_r$. Mais ainda, se f é ímpar is odd e existe $\eta > 0$ tal que $F(t) \ge \eta |t|^s$, para todo $t \in \mathbb{R}$, então o problema (P) tem infinitas soluções radiais $u \in X_r$.*

Referências

[1] CARRIÃO, P. C. AND MIYAGAKI, O. H. AND DEMARQUE, R. - Nonlinear biharmonic problems with singular potentials., *Comm. on Pure and Appl.* Anal. (to appear).

[2] NOUSSAIR, E. S. AND SWANSON, C. A. AND YANG, J. - Transcritical biharmonic equations in $\mathbb{R}^n$. *Funkcialaj Ekvacioj*, **35**, 533 – 543, 1992.

[3] SU, J. AND TIAN, R. - Weighted sobolev embeddings and radial solutions of inhomogeneous quasilinear elliptic equaitons. *Comm. on Pure and Appl. Anal.*, **9**, 885 – 904, 2010.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

Estimativas para n-Larguras de Conjuntos de Funções Suaves sobre o Toro $\mathbb{T}^d$

RÉGIS L. B. STÁBILE * & SÉRGIO A. TOZONI †

Neste trabalho obtemos estimativas inferiores e superiores para n-larguras de conjuntos de funções finitamente e infinitamente diferenciáveis sobre o toro $\mathbb{T}^d$. Tais conjuntos são gerados por operadores multiplicadores específicos. É importante frisar que, em particular, algumas das estimativas obtidas são exatas em termos de ordem.

1 Introdução

Seja A um subconjunto compacto e centralmente simétrico (simétrico com relação à origem, ou seja, $-x \in A$, sempre que $x \in A$) de um espaço de Banach X. Definimos as n-larguras de Kolmogorov e de Gelfand de A em X, respectivamente pelos valores

$$d_n(A,X) = \inf_{X_n} \sup_{x\in A} \inf_{y\in X_n} \|x-y\|_X \quad \text{e} \quad d^n(A,X) = \inf_{L^n} \sup_{x\in A\cap L^n} \|x\|_X,$$

onde o ínfimo na primeira expressão é tomado sobre todos os espaços n-dimensionais X_n de X e na segunda sobre todos os subespaços L^n de codimensão no máximo n de X. Se Y é um outro espaço de Banach e $T : X \longrightarrow Y$ um operador limitado, definimos as n-larguras de Kolmogorov e de Gelfand de T por $d_n(T) = d_n(T(B_X), Y)$ e $d^n(T) = d^n(T(B_X), Y)$, respectivamente, onde B_X denota a bola unitária fechada do espaço X.

Dada $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$, definimos a série de Fourier da função f por

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \qquad \widehat{f}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\nu(\mathbf{x}),$$

onde $\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} = k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_dx_d$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{T}^d$ e $d\nu$ denota a medida de Lebesgue normalizada sobre $\mathbb{T}^d$. Para $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, denotamos também $|\mathbf{k}| = \left(k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_d^2\right)^{1/2}$.

Dados $l, N \in \mathbb{N}$, definimos $\mathcal{H}_l = \left[e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} : \mathbf{k} \in A_l \backslash A_{l-1}\right]$ e $\mathcal{T}_N = \bigoplus_{l=0}^{N} \mathcal{H}_l$, onde $A_l = \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : |\mathbf{k}| \le l\}$. Seja $\Lambda = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$, $\lambda_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C}$, e sejam $1 \le p, q \le \infty$. Se para todo $\varphi \in L^p(\mathbb{T}^d)$ existe uma função $f = \Lambda\varphi \in L^q(\mathbb{T}^d)$ com expansão formal em série de Fourier dada por

$$f \sim \sum_{\mathbf{k}\,\in\,\mathbb{Z}^d} \lambda_{\mathbf{k}}\, \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}},$$

tal que $\|\Lambda\|_{p,q} = \sup\{\|\Lambda\varphi\|_q : \varphi \in U_p\} < \infty$, dizemos que Λ é um operador multiplicador limitado de L^p em L^q, com norma $\|\Lambda\|_{p,q}$, onde U_p denota a bola unitária fechada do espaço $L^p(\mathbb{T}^d)$. Consideraremos operadores multiplicadores $\Lambda = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$, onde $\lambda_{\mathbf{k}}$ é da forma $\lambda(|\mathbf{k}|)$ para uma função real λ definida sobre $[0,\infty)$.

2 Resultados

Se $\Lambda^{(1)} = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$, onde a função $\lambda : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é definida por $\lambda(t) = t^{-\gamma}(\ln t)^{-\xi}$, $t > 1$ e $\lambda(t) = 0$ para $0 \le t \le 1$, $\gamma, \xi \in \mathbb{R}$, $\gamma > d/2$, $\xi \ge 0$, temos que $\Lambda^{(1)}U_p$ são conjuntos de funções finitamente diferenciáveis sobre $\mathbb{T}^d$, em particular, se $\xi = 0$ então $\Lambda^{(1)}U_p$ são classes de Sobolev.

*IMECC, UNICAMP, SP, Brasil, e-mail: ra069475@ime.unicamp.br
†IMECC, UNICAMP, SP, Brasil, e-mail: tozoni@ime.unicamp.br

Se $\Lambda^{(2)} = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$, onde a função $\lambda : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é definida por $\lambda(t) = e^{-\gamma t^r}$, $\gamma, r > 0$, temos que $\Lambda^{(2)}U_p$ são conjuntos de funções infinitamente diferenciáveis (analíticas para $r = 1$).

Para os resultados seguintes, usaremos as notações

$$\vartheta_n = \begin{cases} 1, & 1 \le p \le 2,\ 1 < q \le 2, \\ 1, & 2 \le p < \infty,\ 2 \le q \le \infty, \\ 1, & 1 \le p \le 2 \le q \le \infty, \\ (\ln n)^{-1/2}, & 1 \le p \le 2,\ q = 1, \\ (\ln n)^{-1/2}, & p = \infty,\ 2 \le q \le \infty. \end{cases} \quad , \quad (a)_+ = \begin{cases} a, & a > 0, \\ 0, & a \le 0, \end{cases}$$

$a_n \gg b_n$ e $a_n \ll b_n$, se existirem constantes positivas C_1 e C_2 tais que $a_n \ge C_1 b_n$ e $a_n \le C_2 b_n$, respectivamente, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se tivermos $a_n \gg b_n$ e $a_n \ll b_n$, escreveremos $a_n \asymp b_n$.

Teorema 2.1. *Seja $\Lambda^{(1)}$ o operador multiplicador definido acima. Então para $1 \le p \le \infty$, $2 \le q \le \infty$, temos*

$$d_n(\Lambda^{(1)}U_p; L^q) \ll n^{-\gamma/d+(1/p-1/2)_+}(\ln n)^{-\xi} \begin{cases} q^{1/2}, & q < \infty, \\ (\ln n)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases}$$

e para $1 \le p, q \le \infty$, temos

$$d_n(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \gg n^{-\gamma/d}(\ln n)^{-\xi}\vartheta_n.$$

Teorema 2.2. *Seja $\Lambda^{(2)}$ o operador multiplicador definido acima. Consideremos as sequências $\phi_k = \dim \mathcal{T}_k$ e $\psi_k = \phi_k - \phi_k^{1-r/d} - 1$. Então para $1 \le p, q \le \infty$, temos*

$$\begin{aligned} d_{[\psi_k]}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) &\gg e^{-\mathcal{R}\phi_k^{r/d}}\vartheta_k, \quad r > 0, k \in \mathbb{N}, \\ d_{[\psi_k]}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) &\gg e^{-\mathcal{R}\psi_k^{r/d}}\vartheta_k, \quad 0 < r \le d, k \in \mathbb{N}, \\ d_{\phi_k-1}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) &\gg e^{-\mathcal{R}\phi_k^{r/d}}\vartheta_k, \quad r \ge d, k \in \mathbb{N}, \\ d_k(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) &\gg e^{-\mathcal{R}k^{r/d}}\vartheta_k, \quad 0 < r \le 1, k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

para $0 < r \le 1$, $1 \le p \le \infty$, $2 \le q \le \infty$ e para todo $k \in \mathbb{N}$, temos

$$d_k(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \ll e^{-\mathcal{R}k^{r/d}}k^{(1-r/d)(1/p-1/2)_+} \begin{cases} 1, & 2 \le q < \infty, \\ (\ln k)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases}$$

e para todo $r > 1$ e todo $k \in \mathbb{N}$,

$$d_{\phi_k}(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \ll e^{-\gamma k^r} \begin{cases} k^{(d-1)(1/p-1/q)}, & 1 \le p \le 2 \le q \le \infty, \\ k^{(d-1)(1/2-1/q)}, & 2 \le p, q \le \infty, \end{cases}$$

onde $\mathcal{R} = \gamma\left(d\Gamma(d/2)/2\pi^{d/2}\right)^{r/d}$ e $[\psi_k]$ denota a parte inteira do número ψ_k.

Corolário 2.1. *Para $2 \le p, q < \infty$ e $0 < r \le 1$, temos que*

$$d_k(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \asymp k^{-\gamma/d}(\ln k)^{-\xi} \quad e \quad d_k(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \asymp e^{-\mathcal{R}k^{r/d}}.$$

Referências

[1] Grafakos, L, *Classical Fourier Analysis*, Springer, second edition, 2008.

[2] kushpel, A. and tozoni, S. A., Entropy and Widths of Multiplier Operators on Two-Point Homogeneous Spaces, *Constructive Aproximation*, **35** (2012) 137-180.

[3] Pinkus, A., *n-Widths in Approximation Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

NEW DECAY RATES FOR THE PLATE EQUATION WITH FRACTIONAL DAMPING

Ruy Coimbra Charão [*] , Ryo Ikehata [†] & Cleverson Roberto da Luz [‡]

Abstract

In this article we obtain decay rates for the total energy associated to the linear plate equation with effects of rotational inertia and a fractional damping term depending on a number $\theta \in [0,1]$. We observe that the dissipative structure of the plate equation with $\theta = 0$ is of the regularity-loss type. This decay structure still remains true for the plate equation with a power of fractional damping $\theta > 0$. This means that we can have an optimal decay estimate of solutions under an additional regularity assumption on the initial data. The structure of regularity-loss becomes more weak when θ increase and does not occur when θ arrive in $\theta = 1$. Our results generalize previous results by Luz-Charão and some of recent results due to Sugitani-Kawashima. We use a special method in the Fourier space which we developed in a previous work for the wave equation and it shows to be very effective to study decay properties for several problems in $\mathbf{R}^n$.

1 Introduction

In this work we study asymptotic behavior of the energy of the plate equation under effects of rotational inertia and a fractional damping in $\mathbf{R}^n$

$$u_{tt}(t,x) + Au_{tt}(t,x) + A^2u(t,x) + A^\theta u_t(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbf{R}^n \tag{1.1}$$

with initial data

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x) \qquad x \in \mathbf{R}^n, \tag{1.2}$$

where A is given by the Laplacian operator, that is, $A := -\Delta = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ and the fractional power damping θ satisfies $0 \leq \theta \leq 1$. The function $u = u(t,x)$ represents the transversal displacement of the plate. The term $A^\theta u_t$ represents a frictional dissipation in the plate, and the term Au_{tt} corresponds to the rotational inertia effects.

We use the usual notations on the Sobolev spaces. The fractional power operator $A^\theta : \mathcal{D}(A^\theta) \subset L^2(\mathbf{R}^n) \to L^2(\mathbf{R}^n)$ $(\theta \geq 0)$ with its domain $\mathcal{D}(A^\theta) = H^{2\theta}(\mathbf{R}^n)$ is defined by

$$A^\theta v(x) := \mathcal{F}^{-1}\big(|\xi|^{2\theta}\mathcal{F}(v)(\xi)\big)(x), \qquad v \in H^{2\theta}(\mathbf{R}^n), \qquad x \in \mathbf{R}^n,$$

where $\mathcal{F}$ denotes the usual Fourier transform in $L^2(\mathbf{R}^n)$. The operator A^θ is nonnegative and self-adjoint in $L^2(\mathbf{R}^n)$, and the Schwarz space $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ is dense in $H^{2\theta}(\mathbf{R}^n)$. Note that $A^1 = A$ and $A^0 = I$.

For the initial problem (1.1)–(1.2) we study explicit decay estimates for the associated total energy $E_u(t)$. We prove that in case of $\theta \in [0,1]$ and $n > 1$ or $\theta \in [0,1/2]$ and $n = 1$, the decay rate is

$$E_u(t) = O(t^{-\frac{n-4\theta+4}{4-2\theta}+\delta}) \quad (t \to +\infty),$$

[*]Dept. of Mathematics , UFSC, SC, Brazil, ruy.charao@ufsc.br
[†]Hiroshima University, Japan, ikehatar@hiroshima-u.ac.jp
[‡]Dept. of Mathematics , UFSC, SC, Brazil, cleverson.luz@ufsc.br

while, for $n = 1$ and $\theta \in (1/2, 1]$, the decay rate is given by

$$E_u(t) = O(t^{-\frac{1}{2\theta}+\delta}) \quad (t \to +\infty),$$

for any $\delta > 0$ (for these results, see Theorem 2.2 below).

2 Main Results

On the existence and uniqueness of solutions the following result holds.

Teorema 2.1. *Let $n \geq 1$, $0 \leq \theta \leq 1$ and $s \geq 2$. If $[u_0, u_1] \in H^s(\mathbf{R}^n) \times H^{s-1}(\mathbf{R}^n)$ then there exists a unique weak solution of the initial problem* (1.1)–(1.2) *in the class*

$$C([0,\infty); H^s(\mathbf{R}^n)) \cap C^1([0,\infty); H^{s-1}(\mathbf{R}^n)).$$

The proof of Theorem 2.1 is standard (see Luz and Charão [3] for the case $\theta = 0$). ■

The total energy $E_u(t)$ associated to the solution $u(t)$ of equation (1.1) is defined by

$$E_u(t) = \frac{1}{2}\left(\|u_t(t)\|^2 + \|\nabla u_t(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2\right),$$

and it is a non-increasing function of t because satisfies the following energy identity

$$E_u(t) + \int_0^t \|A^{\theta/2} u_t(s)\|^2 \, ds = E_u(0), \qquad t \geq 0.$$

Teorema 2.2. *Let $n \geq 1$, $0 \leq \theta \leq 1$ and β a positive fixed number satisfying*

$$\beta > \begin{cases} 2\theta, & \text{for } n = 1 \text{ and } \dfrac{1}{2} < \theta \leq 1; \\ \dfrac{4-2\theta}{n-4\theta+4}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

If $(u_0, u_1) \in \left[H^{2+\frac{1-\theta}{\beta}}(\mathbf{R}^n) \cap L^1(\mathbf{R}^n)\right] \times \left[H^{1+\frac{1-\theta}{\beta}}(\mathbf{R}^n) \cap L^1(\mathbf{R}^n)\right]$, then there exists a constant $C > 0$ and a constant $C_\beta > 0$ depending on β, such that the total energy associated to the solution $u(t,x)$ of (1.1)-(1.2) *satisfies*

$$E_u(t) \leq K_\beta \left\{C_\beta \|u_0\|_{L^1}^2 + C_\beta \|u_1\|_{L^1}^2 + \|u_0\|_{H^r}^2 + 2\|u_1\|_{H^{r-1}}^2\right\} t^{-1/\beta}, \quad \forall\, t \geq T_0$$

with $K_\beta = \left[2^{2+\beta} C(1 + 1/\beta)\right]^{\frac{1}{\beta}}$, $r = 2 + \frac{1-\theta}{\beta}$ and T_0 is a constant depending on the initial data.

Our method to prove Theorem 2.2 depends on the estimates in the regions of low and high frequencies in the Fourier space and the application of the Haraux-Komornik lemma. In the region of low frequencies the estimates also depending on the integrability of the singularity $|\xi|^{-p}$ for $p < n$. ■

Referências

[1] R. Coimbra Charão, C. R. da Luz and R. Ikehata, *Sharp decay rates for wave equations with a fractional damping via new method in the Fourier space*, J. Math. Anal. Appl. **408** (2013), 247–255.

[2] R. Coimbra Charão, C. R. da Luz and R. Ikehata, *New decay rates for a problem of plate dynamics with fractional damping* , J. Hiperbolic Diff. Eqs. **10**, No. 3 (2013), 1–13.

[3] C. R. da Luz and R. Coimbra Charão, *Asymptotic properties for a semilinear plate equation in unbounded domains*, J. Hyperbolic Diff. Eqs. **6** (2009), 269–294.

[4] Y. Sugitani and S. Kawashima, *Decay estimates of solutions to a semi-linear dissipative plate equation*, J. Hyperbolic Diff. Eqs. **7** (2010), 471–501.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

UMA ABORDAGEM NUMÉRICA DO PROBLEMA DE TORÇÃO ELASTO-PLÁSTICO VIA ALGORITMO DE COMPLEMENTARIDADE

SANDRO R. MAZORCHE*

1 Intrudução

Os problemas de complementaridade estão presentes em várias aplicações da Engenharia, Economia e outras ciências em geral. Podemos citar problemas de contacto, obstáculo, elasto-plástico e etc. Neste trabalho, apresentamos um algoritmo de ponto interior para problemas de complementaridade mista não-linear que chamaremos de FDA-MNCP. Este algoritmo é uma extensão do algoritmo FDA-NCP [1], um algoritmo para problemas de complementaridade. O FDA-MNCP começa em um ponto estritamente viável e gera uma sequência de pontos interiores que converge para uma solução do problema. Veremos resultados teóricos sobre convergência assintótica para o algoritmo FDA-MNCP. Resultados numéricos são apresentados para uma aplicação de torção elasto-plástico de um corpo cilíndrico ([2],[3]). Esta aplicação é descrita por uma inequação variacional que sob certas condições de regularidade podemos tratá-la como um problema de complementaridade.

2 Complementaridade Mista e Algoritmo - FDA-MNCP

Definição do Problema de Complementaridade Mista (MNCP):

$$\text{Encontrar } (x,y) \in \Omega \text{ tal que } \begin{cases} x \bullet F(x,y) = 0 \\ Q(x,y) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $F : R^n \times R^m \to R^n$ e $Q : R^n \times R^m \to R^m$, são aplicações e $\Omega = \{(x,y) \in R^n \times R^m \ / \ x \geq 0 \ \text{ e } \ F(x,y) \geq 0\}$ é chamado de conjunto de pontos viáveis. A ideia básica do algoritmo FDA-MNCP é encontrar uma direção d de busca, que seja viável na região Ω e de descida para a seguinte função potencial $f(x,y) = \phi(x,y) + \|Q(x,y)\|^2$, onde $\phi(x,y) = x^T F(x,y)$. Podemos determinar desta direção resolvendo o seguinte sistema

$$\nabla S(x^k, y^k) d^k \quad = \quad -S(x^k, y^k) + \rho^k E \tag{2.2}$$

onde $S(x,y) = \begin{pmatrix} x \bullet F(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$, $\rho^k \in (0,1)$ e $E = [1_n; 0_m]$ é um vetor coluna de R^{n+m}.

Logo, a seqüência de direção $\{d^k\}$ gerada pelo algoritmo FDA-MNCP, consiste em um campo uniforme de direções viáveis do problema de complementaridade em Ω. Uma iteração do algoritmo FDA-MNCP é dado por $(x^{k+1}, y^{k+1}) = (x^k, y^k) + t^k d^k$. Segue o teorema de convergência assintótica.

Teorema 2.1. *Considere a seqüência $\{(x^k, y^k)\}$ gerada pelo algoritmo FDA-MNCP, que converge para uma solução (x^*, y^*) do problema de complementaridade mista. Então,*
(i) Tomando $\beta \in (1,2)$, $t^k = 1$ para k suficientemente grande e a taxa de convergência do algoritmo é superlinear.
(ii) Se $t^k = 1$ para k suficientemente grande e $\beta = 2$, então a taxa de convergência é quadrática.

*Departamento de Matemática , UFJF, MG, Brasil, e-mail: sandro.mazorche@ufjf.edu.br

3 Aplicação

De uma forma bem simplificada, o problema de torção elasto-plástico de um corpo cilíndrico (sem buracos), corresponde a uma desigualdade variacional com restrição de gradiente:

$$u \in K_0 \quad \int_\Omega \nabla u \nabla (v-u) dx \geq -r \int_\Omega (v-u) dx, \quad \forall v \in K_0 \tag{3.3}$$

onde $x \in \Omega \subset R^2$, Ω é limitado, simplesmente conexo, com fronteira regular e $K_0 = \{u \in H_0^1(\Omega) \; |\nabla u| \leq 1\}$.

O problema (3.3) é equivalente ao problema da membrana com dois obstáculos ([2] e [4]), basta trocar o conjunto K_0 por $K_1 = \{u \in H_0^1(\Omega) \; |u| \leq d(x)\}$, onde $d(x) = d(x, \partial\Omega)$ é a menor distância de x à fronteira de Ω.

$$u \in K_1 \quad \int_\Omega \nabla u \nabla (v-u) dx \geq -r \int_\Omega (v-u) dx, \quad \forall v \in K_1 \tag{3.4}$$

Assim, além da equivalência dos problemas (3.3) e (3.4), o problema de torção elasto-plástico pode ser escrito sob a forma de complementaridade mista.
Encontrar u tal que

$$-d(x) < u < d(x) \;\Leftrightarrow\; -\Delta u + r = 0 \tag{3.5}$$

$$-d(x) = u \;\Leftrightarrow\; -\Delta u + r \geq 0 \tag{3.6}$$

$$d(x) = u \;\Leftrightarrow\; -\Delta u + r \leq 0 \tag{3.7}$$

isto é possível devido a resultados de regularidade da solução u ([2], [4]).

4 Resultados Numéricos

Usaremos o método de diferenças finitas, para o problema de torção elasto-plástico na forma de complementaridade mista. Com o algoritmo FDA-MNCP encontraremos a solução numérica do problema em questão. Também faremos uma comparação do nosso método com outros métodos [3].

5 Conclusão

Com os resultados numéricos obtidos podemos confirmar os nossos resultados teóricos, para o FDA-MNCP e a verificação da robustez do mesmo. A escolha da aplicação, foi motivada pelo fato que se trabalhássemos como o problema sob a forma de (3.3), restrições de gradiente, teríamos uma complementaridade na forma generalizada, ou seja, $F(x) \geq 0$, $H(x) \geq 0$ e $F(x) \bullet H(x) = 0$. Um algoritmo para este caso é um interessante trabalho para o futuro.

Referências

[1] Herskovits and Mazorche (2008), A feasible directions algorithm for nonlinear complementarity problems and applications in mechanics, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **36**, pp. 1615-1488

[2] Jose-Francisco Rodrigues - Obstacle Problems in Mathematical Physics. *Elsevier Science Ltd*, 1987.

[3] E. D. Dolan and J. J. Moré, Benchmarking Optimization Software with COPS 3.0, *Mathematics and Computer Science Division, Argonne National Laboratory, Technical Report ANL/MCS-273*, February 2004.

[4] Kinderlehrer D and Stampacchia G, An Introduction To Variational,*Oxford University Press*, **New York**, 1984.

(*) Agradecimentos a FAPEMIG pela suporte dado neste trabalho.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

BANACH SPACES OF HOMOGENEOUS POLYNOMIALS WITHOUT THE APPROXIMATION PROPERTY

SEÁN DINEEN * & JORGE MUJICA †

1 Introduction

The approximation property was introduced by Grothendieck [9]. Enflo [8] gave the first example of a Banach space without the approximation property. Enflo's counterexample is an artificially defined Banach space. The first naturally defined Banach space without the approximation property was given by Szankowski [13], who proved that the space $\mathcal{L}(\ell_2;\ell_2)$ of continuous linear operators on ℓ_2 does not have the approximation property. In this paper we show that the spaces of homogeneous polynomials on $L_p[0,1]$ and ℓ_p provide plenty of natural examples of Banach spaces without the approximation property.

Our proofs are based on important results of several authors. Among them we mention Szankowski's counterexample [13], the relationship between multilinear forms and symmetric multilinear forms on stable Banach spaces discovered by Diaz and Dineen [3], the complementation properties of spaces of homogeneous polynomials obtained by Aron and Schottenloher [2], the complementation properties of L_p spaces established by Pelczynski [12], the relationship between operators on L_p spaces and operators on ℓ_p spaces discovered by Arias and Farmer [1], and the complementation properties of tensor products of ℓ_p spaces, obtained also by Arias and Farmer [1]. These results play a key role in our proofs, and some of them are applied several times.

2 Spaces of homogeneous polynomials

Let E and F denote Banach spaces over $\mathbb{K}$, where $\mathbb{K}$ is $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. Let $\mathcal{L}({}^nE;F)$ denote the Banach space of all continuous n-linear mappings from E^n into F, and let $\mathcal{L}^s({}^nE;F)$ denote the subspace of all symmetric members of $\mathcal{L}({}^nE;F)$. Let $\mathcal{P}({}^nE;F)$ denote the Banach space of all continuous n-homogeneous polynomials from E into F. We omit F when $F=\mathbb{K}$. We have the canonical isomorphism $\mathcal{P}({}^nE;F)=\mathcal{L}^s({}^nE;F)$. We refer to [4] or [10] for background information on multilinear mappings and homogeneous polynomials on Banach spaces.

Teorema 2.1. *If $1<p<\infty$, then $\mathcal{P}({}^nL_p[0,1])$ contains a complemented subspace isomorphic to $\mathcal{L}(\ell_2;\ell_2)$ for every $n\geq 2$. In particular $\mathcal{P}({}^nL_p[0,1])$ does not have the approximation property for every $n\geq 2$.*

Teorema 2.2. *(a) If $1<p<\infty$, then $\mathcal{P}({}^n\ell_p)$ contains a complemented subspace isomorphic to $\mathcal{L}(\ell_2;\ell_2)$ for every $n\geq p$. In particular $\mathcal{P}({}^n\ell_p)$ does not have the approximation property for every $n\geq p$.*

(b) If $1<p<\infty$, then $\mathcal{P}({}^n\ell_p)$ has a Schauder basis for every $n<p$.

Theorem 2.2 (a) proves a conjecture of the second author in [11]. Theorem 2.2 (b) shows that the result in (a) is the best possible.

*School of Mathematical Sciences, University College Dublin, Dublin, Irlanda, e-mail: sean.dineen@ucd.ie
†IMECC, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil, e-mail: mujica@ime.unicamp.br

3 Spaces of holomorphic functions

Let $\mathcal{H}(U)$ denote the vector space of all complex-valued holomorphic functions on an open subset U of a Banach space E. Let τ_0, τ_ω and τ_δ respectively denote the compact-open topology, the compact-ported topology and the bornological topology on $\mathcal{H}(U)$. We refer to [4] for background information on these topologies. In the articles [5], [6] and [7] the authors have given sufficient conditions on E and U for $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$, $(\mathcal{H}(U), \tau_\omega)$ and $(\mathcal{H}(U), \tau_{\delta)}$ to have the approximation property. In this section we give some counterexamples to the approximation property in spaces of holomorphic functions, Indeed, since $\mathcal{P}(^nE)$ is a complemented subspace of $(\mathcal{H}(U), \tau_\omega)$ and $(H(U), \tau_\delta)$, Theorems 2.1 and 2.2 immediately imply the following theorem.

Teorema 3.1. *(a) If $U \subset L_p[0,1]$, where $1 < p < \infty$, then neither $(\mathcal{H}(U), \tau_\omega)$ nor $(\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ has the approximation property.*

(b) If $U \subset \ell_p$, where $1 < p < \infty$, then neither $(\mathcal{H}(U), \tau_\omega)$ nor $(\mathcal{H}(U), \tau_\delta)$ has the approximation property.

References

[1] ARIAS, A. AND FARMER, J. - *On the structure of tensor products of ℓ_p spaces, Pacific J. Math. 175 (1996), pp. 13-37.*

[2] ARON, R. AND SCHOTTENLOHER, M. - *Compact holomorphic mappings on Banach spaces and the approximation property, J. Funct. Anal. 21 (1976), pp. 7-30.*

[3] DIAZ, J. C. AND DINEEN, S. - *Polynomials on stable spaces, Ark. Mat. 36 (1998), pp. 87-96.*

[4] DINEEN, S. - *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces, Springer, London, 1999.*

[5] DINEEN, S. AND MUJICA, J. - *The approximation property for spaces of holomorphic functions on infinite dimensional spaces I, J. Approx. Theory 126 (2004), pp. 141-156.*

[6] DINEEN, S. AND MUJICA, J. - *The approximation property for spaces of holomorphic functions on infinite dimensional spaces II, J. Funct. Anal. 259 (2010), pp. 545-560.*

[7] DINEEN, S. AND MUJICA, J. - *The approximation property for spaces of holomorphic functions on infinite dimensional spaces III, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser A Math. RACSAM 106 (2012), pp. 457-469.*

[8] ENFLO, P. - *A counterexample to the approximation property in Banach spaces, Acta Math. 130 (1973), pp. 309-317.*

[9] GROTHENDIECK, A. - *Produits Tensoriels Topologiques et Espaces Nucléaires, Memoirs American Mathematical Society number 16, Providence, Rhode Island, 1955.*

[10] MUJICA, J. - *Complex Analysis in Banach Spaces, North-Holland, Amsterdam, 1986; reprinted by Dover, Mineola, New York, 2010.*

[11] MUJICA, J. - *Spaces of holomorphic functions and the approximation property, Lecture Notes, Universidad Complutense de Madrid, 2009.*

[12] PELCZYNSKI, A. - *Projections in certain Banach spaces, Studia Math. 19 (1960), pp. 209-228.*

[13] SZANKOWSKI, A. - *$B(H)$ does not have the approximation property, Acta Math. 147 (1981), 89-108.*

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

Ideal topologies and approximation properties

Sonia Berrios * & Geraldo Botelho †

In this work we propose, by introducing the notion of ideal topologies, a unifying approach to the study of approximation properties in Banach spaces. A method of generating ideal topologies is given and many examples are provided. The approximation property with respect to a pair of operator ideals and a given ideal topology is defined. We show that this concept recovers several approximation properties studied in the literature and that many known results can be regarded as particular cases of more general results that hold in this setting.

1 Results

Definition 1.1. An *ideal topology* τ is a correspondence that, for all Banach spaces E and F, assigns a linear topology, still denoted by τ, on the Banach space of all bounded linear from E to F, $\mathcal{L}(E;F)$, such that: for every operator ideal $\mathcal{I}$ (in the sense of Pietsch), if

$$\overline{\mathcal{I}}^{\tau}(E;F) := \overline{\mathcal{I}(E;F)}^{\tau}$$

for all Banach spaces E and F, then $\overline{\mathcal{I}}^{\tau}$ is an operator ideal.

The following gives a method to generate ideal topologies. By BAN we denote the class of all Banach spaces.

Proposition 1.1. *Suppose that for every Banach space E it has been assigned a collection $\mathcal{A}(E)$ of bounded subsets of E such that*

$$u(A) \in \mathcal{A}(F) \text{ for all } E, F \in \text{BAN}, A \in \mathcal{A}(E) \text{ and } u \in \mathcal{L}(E;F).$$

Then the topology $\tau_{\mathcal{A}}$ of uniform convergence on sets belonging to $\mathcal{A}(E)$, $E \in$ BAN, is an ideal topology.

Example 1.1. (a) The norm topology $\|\cdot\|$ and the topology of pointwise convergence τ_P, which are the topology of uniform convergence on bounded sets and finite sets, respectively, are ideal topologies.
(b) It is plain that bounded linear operators send compact sets to compact sets, so the compact-open topology τ_c, which is the topology of uniform convergence on compact sets, is an ideal topology.

We need the following terminology to give more useful examples of ideal topologies. Given an operator ideal $\mathcal{I}$ and a Banach space E, according to [4] we define $C_{\mathcal{I}}(E) = \{A \subseteq E : \exists F, \exists u \in \mathcal{I}(F;E) \text{ such that } A \subseteq u(B_F)\}$. The sets belonging to $C_{\mathcal{I}}(E)$ are called *$\mathcal{I}$-bounded sets*.

Example 1.2. Let $\mathcal{I}$ be an operator ideal. It is clear that $\mathcal{I}$-bounded sets are norm bounded. By the ideal property of $\mathcal{I}$ it follows that bounded linear operators send $\mathcal{I}$-bounded sets to $\mathcal{I}$-bounded sets, so the topology $\tau_{C_{\mathcal{I}}}$ of uniform convergence on $\mathcal{I}$-bounded sets is an ideal topology by Proposition 1.1.

By $\mathcal{L}$ we denote the ideal of all bounded operators between Banach spaces and by $\mathcal{F}$ and $\mathcal{K}$ the ideals of finite rank and compact operators, respectively.

Definition 1.2. Let $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ be operator ideals and τ be an ideal topology. We say that a Banach space E has the $(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \tau)$-approximation property, $(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \tau)$-AP for short, if $\mathcal{I}(F;E) \subseteq \overline{\mathcal{J}(F;E)}^{\tau}$ for every Banach space F.

Example 1.3. (a) The classical approximation property coincides with the $(\mathcal{K}, \mathcal{F}, \|\cdot\|)$-AP, with the $(\mathcal{L}, \mathcal{F}, \tau_c)$-AP.
(b) The compact approximation property coincides with the $(\mathcal{L}, \mathcal{K}, \tau_c)$-AP.
(c) Let $\mathcal{I}$ be an operator ideal. The $\mathcal{I}$-approximation property of [2] coincides with the $(\mathcal{L}, \mathcal{I}, \tau_c)$-AP.

*Universidade Federal de Uberlândia, Brasil, soniles@famat.ufu.br. Supported by Fapemig APQ-04687-10 .
†Universidade Federal de Uberlândia, Brasil, e-mail: botelho@ufu.br. Supported by CNPq 302177/2011-6 e Fapemig PPM-00326-13.

An important aspect of the approximation properties in Banach spaces is the fact that, sometimes, the approximation by two different classes of operators with respect to two different topologies coincide. The search for this kind of situation in our case can be rephrased as: When does the equality $(\mathcal{I}_1, \mathcal{J}_1, \tau_1)$-AP $= (\mathcal{I}_2, \mathcal{J}_2, \tau_2)$-AP hold?

Before stating our next result on this question we need some notation. Let E be a Banach space, let K be a closed absolutely convex subset of B_E and let $a > 1$. For each $n \in \mathbb{N}$ put $B_n = a^{n/2}K + a^{-n/2}B_E$. For $x \in E$ define $\|x\|_K = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x\|_n^2\right)^{1/2}$ where $\|\cdot\|_n$ is the gauge of B_n, and let the subspace $E_K = \{x \in E : \|x\|_K < \infty\}$ of E be endowed with the norm $\|\cdot\|_K$. Let J_K denote the identity embedding from E_K to E (for further details see [5]).

Theorem 1.1. (Lima-Nygaard-Oja Factorization Theorem [5, Theorem 2.2]) *Suppose $T \in \mathcal{L}(F;E)$. Let $K = \frac{1}{\|T\|}\overline{T(B_F)}$ and let $T_K \in \mathcal{L}(F;E_K)$ be defined by $T_K(y) = T(y), y \in F$. Then $T = J_K \circ T_K$.*

Henceforth the expression $T = J_K \circ T_K$ above shall be referred to as *the LNO factorization of T*.

Definition 1.3. An operator ideal $\mathcal{I}$ has the *Grothendieck property* if whenever A is a bounded subset of a Banach space E such that for every $\varepsilon > 0$ there is a set $A_\varepsilon \in C_{\mathcal{I}}(E)$ with $A \subseteq A_\varepsilon + \varepsilon B_E$, it holds that $A \in C_{\mathcal{I}}(E)$.

Example 1.4. González and Gutiérrez [4, Proposition 3(c)] proved that any closed surjective operator ideal has the Grothendieck property.

Let $\mathcal{I}$ be an operator ideal. By $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ we denote the ideal of all $\mathcal{I}$-bounded linear operators. An operator $T \in \mathcal{L}(E;F)$ is said to be *$\mathcal{I}$-bounded* if $T(B_E) \in C_{\mathcal{I}}(F)$ (see [1]). The following proposition is fundamental for the proof of our next result.

Proposition 1.2. *Let $T = J_K \circ T_K$ be the LNO factorization of the operator $T \in \mathcal{L}(F;E)$. If the operator ideal $\mathcal{I}$ has the Grothendieck property, then $T \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}(F;E)$ if and only if $J_K \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}(E_K;E)$.*

Corollary 1.1. *Let $T = J_K \circ T_K$ be the LNO factorization of the operator $T \in \mathcal{L}(F;E)$. If the operator ideal $\mathcal{I}$ is surjective and has the Grothendieck property (in particular, if $\mathcal{I}$ is closed and surjective), then $T \in \mathcal{I}(F;E)$ if and only if $J_K \in \mathcal{I}(E_K;E)$.*

The following Theorem recovers a result due to Choi, Kim and Lee [3] as a particular case.

Theorem 1.2. *Let $\mathcal{I}, \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ be operator ideals such that $\mathcal{J}_1$ has the Grothendieck property, $\mathcal{I} \supseteq \mathcal{L}_{\mathcal{J}_1} = \mathcal{L}_{\mathcal{J}_1} \circ \mathcal{L}_{\mathcal{J}_2}$ and such that operators belonging to $\mathcal{I}$ map $\mathcal{J}_2$-bounded sets to $\mathcal{J}_1$-bounded sets. The following statements are equivalent for a Banach space E:*
(a) $\mathrm{id}_E \in \overline{\mathcal{F}(E;E)}^{\tau_{C_{\mathcal{J}_1}}}$.
(b) *E has the $(\mathcal{L}_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{F}, \|\cdot\|)$-AP*
(c) *E has the $(\mathcal{L}_{\mathcal{J}_1}, \mathcal{F}, \tau_{C_{\mathcal{J}_2}})$-AP.*
(d) *E has the $(\mathcal{I}, \mathcal{F}, \tau_{C_{\mathcal{J}_2}})$-AP.*

References

[1] ARON, R. AND RUEDA, P. - *Ideals of homogeneous polynomials*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **46** (2012), 957–969.

[2] BERRIOS S. AND BOTELHO G. - *Approximation properties determined by operator ideals and approximability of homogeneous polynomials and holomorphic functions*, Studia Math. **208** (2012), 97–116.

[3] CHOI, C.; KIM, J. M AND LEE, K. Y. - *Right and left weak approximation properties in Banach spaces*, Canad. Math. Bull. **52** (2009), 28–38.

[4] GONZÁLEZ, M. AND GUTIÉRREZ, J. M. - *Surjective factorization of holomorphic mappings*, Comment. Math. Univ. Carolin. **41** (2000), 469–476.

[5] LIMA, A.; NYGAARD, O. AND OJA, E. - *Isometric factorization of weakly compact operators and the approximation property*, Israel J. Math. **119** (2000), 325–348.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

Estimates of Fourier coefficients on the sphere by moduli of smoothness

Thaís Jordão * & Valdir A. Menegatto † & Xingping Sun ‡

1 Introduction

Let S^m denote the m-dimensional unit sphere in the euclidian space $\mathbb{R}^{m+1}$ endowed with the usual Lebesgue measure σ_m. In this work we will deal with the usual spaces $L^p(S^m) := L^p(S^m, \sigma_m)$, the norm of which we denote by $\|\cdot\|_p$.

We can express $f \in L^p(S^m)$ in its series $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{d_k} c_{k,l}(f)Y_{k,l}(x)$, in which $\{Y_{k,l} : l = 1, 2, \ldots, d_k\}_{k\geq 0}$ are the usual spherical harmonics, $d_k := \dim \operatorname{span}\{Y_{k,l} : l = 1, 2, \ldots, d_k\}$ and $c_{k,l}(f)$ are defined by

$$c_{k,l}(f) := \int_{S^m} f(y)\overline{Y_{k,l}(y)}d\sigma_m(y), \quad l = 1, 2, \ldots, d_k, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

The title of this work refers to convenient estimations of the Fourier coefficients $c_{k,l}(f)$ via certain moduli of smoothness and its K-functional in order to provide decay rates for the sequence of eigenvalues of positive integral operators generated by kernels having fractional derivatives.

We are interested in a modulus of smoothness defined by the standard *shift* (translation) operator on $L^p(S^m)$ defined by the formula

$$S_t f(x) = \frac{1}{R_m(t)} \int_{R_x^t} f(y)d\sigma_r(y), \quad x \in S^m, \quad f \in L^p(S^m), \quad t \in (0, \pi).$$

Here, $d\sigma_r(y)$ denotes the volume element of the rim $R_x^t := \{y \in S^m : d_m(x, y) = t\}$, where d_m stands for the usual geodesic distance on S^m.

For a fixed positive real number r, the associated *rth-order finite difference operator* (with step t) is given by

$$\Delta_t^r(f) := (I - S_t)^{r/2}(f) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \binom{r/2}{k} S_t^k(f), \quad f \in L^p(S^m), \tag{1.1}$$

where I denotes the identity operator. The difference operators provide the following convenient *rth-order modulus of smoothness* of a function f

$$\omega_r(f, t)_p := \sup\{\|\Delta_s^r(f)\|_p : 0 < s \leq t\}, \quad f \in L^p(S^m). \tag{1.2}$$

As far as we know, it was introduced in [4] and, in the case in which r is an integer, it coincides with moduli of smoothness mentioned in [2, 3] and other references as well.

Next, we define the so called spaces of Bessel potentials on S^m. For $r > 0$, let Λ^r be the operator defined by the following spherical harmonics expansion: $\Lambda^r(f) \sim \sum_{k=0}^{\infty}(1 + k(k + m - 1))^r \mathcal{Y}_k(f)$ (it is the action of $(I - \delta)^r$ on f, in which δ is the Laplace-Beltrami operator on S^m). The space of Bessel potentials is then

$$W_p^r(S^m) := \{f \in L^p(S^m) : \|f\|_{W_p^r} := \|\Lambda^{r/2}(f)\|_p < \infty\}. \tag{1.3}$$

*ICMC - São Carlos , USP, SP, Brasil, thsjordao@gmail.com, Partially supported by FAPESP grant #2012/25097 – 4
†ICMC - São Carlos , USP, SP, Brasil, menegatt@icmc.usp.br
‡Department of Mathematics, Missouri State University, MO, United States, e-mail: xsun@missouristate.edu

The K-functional constructed from space W_p^r, also known as Peetre K-functional is

$$K_r(f,t)_p := \inf\{\|f-g\|_p + t^r\|g\|_{W_p^r} : g \in W_p^r(S^m)\}, \quad r>0. \tag{1.4}$$

The following equivalence between Peetre K-functionals and moduli of smoothness can be found in [4]: there exist positive constants m_r and M_r so that $m_r\omega_r(f,t)_p \le K_r(f,t)_p \le M_r\omega_r(f,t)_p$, $f \in W_p^r(S^m)$.

2 The result

Let us condense the Fourier coeffcients of a function f in the following form $s_k(f) = \sum_{j=1}^{d_k} |c_{k,j}(f)|^2, \quad k \ge 0$. The following estimate concerning such sums proved in [3] is the technical result we use to deduce our main result.

Lemma 2.1. *($m \ge 2$) Let r be a positive integer, $p \in (1,2]$ and q the conjugate exponent of p. If f belong to $L^p(S^m)$, then*

$$S_{t,r,q}(f) := \left(\sum_{k=1}^{\infty}(d_k^m)^{1/q-1/2}(min\{1,tk\})^{rq}s_k^{q/2}(f)\right)^{1/q} \le c_p\omega_r(f,t)_p, \quad t\in(0,\pi). \tag{2.5}$$

The proof of such result boils down to an inequality of the form $S_{t,r,q}(f) \le a_p\left(\|f-\eta_t(f)\|_p + t^r\|\Lambda^r(\eta_t(f))\|_p\right)$, in which $\eta_t(f) = \sum_{k=1}^{\infty}\eta(tk)\mathcal{Y}_k(f)$. Here, η is a $C^\infty[0,\infty)$ function satisfying: $\eta(s)\le 1$, $s\in[0,\infty)$; $\eta(s)=1$, $s\le 1$ and $\eta(s)=0$, $s\ge 2$. The final argument in the proof relies on a realization theorem (Corollary 2.5 in [2]).

Our result refers to linear integral operators $\mathcal{L}_K : L^2(S^m) \to L^2(S^m)$ of the form

$$\mathcal{L}_K(f)(x) = \int_{S^m} K(x,y)f(y)\,d\sigma_m(y), \quad x\in S^m, \quad f\in L^2(S^m),$$

in which $K : S^m\times S^m \to \mathbb{C}$ is a positive definite kernel belonging to $L^2(S^m\times S^m, \sigma_m\times\sigma_m)$. This operator has at most countably many nonnegative eigenvalues which can be ordered as

$$\alpha_1(\mathcal{L}_K) \ge \alpha_2(\mathcal{L}_K) \ge \cdots \ge 0,$$

repetitions being included in accordance with algebraic multiplicities. The square root $\mathcal{L}_K^{1/2}$ of $\mathcal{L}_K$ is likewise an integral operator generated by a kernel $K_{1/2}$, which appears in the statement below.

Theorem 2.1. *Let r be a positive real and $K : S^m\times S^m \to \mathbb{C}$ a positive definite kernel in $L^2(S^m\times S^m, \sigma_m\times\sigma_m)$. If $K_{1/2}(\cdot,x) \in W_2^r(S^m)$, for at least one $x\in S^m$, then*

$$\alpha_n(\mathcal{L}_K) = O(n^{-1-2r/m}), \quad as\ \ n\to\infty. \tag{2.6}$$

The proof of the theorem consists in an application of Lemma 2.1 to function $K_{1/2}(\cdot,x)$ coupled with some properties from harmonic analysis. The theorem resembles results that appeared in [1].

References

[1] CASTRO, M. H. AND MENEGATTO, V. A. - *Eigenvalue decay of positive integral operators on the sphere.* Math. Comp., **81** (2012), pp. 2303–2317.

[2] DAI, F. AND DITZIAN, Z. - *Combinations of multivariate averages.* J. Approx. Theory, **131** (2004), pp. 268–283.

[3] DITZIAN, Z. - *Smoothness of a function and the growth of its Fourier transform or its Fourier coefficients.* J. Approx. Theory, **162** (2010), pp. 980–986.

[4] RUSTAMOV, KH. P. - *On approximations of functions on the sphere.* Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **57** (1993), pp. 127–148; translation in Russian Acad. Sci. Izv. Math. **43** (1994), pp. 311–329.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

LINEABILITY AND ALGEBRABILITY OF THE SET OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS WITH A GIVEN DOMAIN OF EXISTENCE

THIAGO R. ALVES *

1 Introduction

Let U be an open subset of a complex Banach space E. Let $\mathcal{H}(U)$ denote the algebra of all holomorphic functions on U, and let $\mathcal{E}(U)$ denote the set of all $f \in \mathcal{H}(U)$ such that U is the domain of existence of f. Let $\mathfrak{c}$ denote the cardinality of the continuum.

In this work we first show that, if E is separable and U is a domain of existence in E, then $\mathcal{E}(U)$ is a *lineable set*, that is, there is an infinite dimensional subspace $\mathcal{F}$ of $\mathcal{H}(U)$ such that $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}(U) \cup \{0\}$. Next we show that, under the same hypotheses, $\mathcal{E}(U)$ is a $\mathfrak{c}$-*lineable set*, that is, there is a $\mathfrak{c}$-dimensional subspace $\mathcal{F}$ of $\mathcal{H}(U)$ such that $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}(U) \cup \{0\}$. Finally we show that, under the same hypotheses, $\mathcal{E}(U)$ is an *algebrable set*, that is, there is a subalgebra $\mathcal{A}$ of $\mathcal{H}(U)$, generated by an infinite algebraically independent set, such that $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}(U) \cup \{0\}$.

The notion of lineable set appeared for the first time in [1], and many authors have devoted their attention to the study of lineable sets and algebrable sets during the last decade. We refer the reader to [2] for a survey on this recent trend in functional analysis.

2 Lineability and $\mathfrak{c}$-lineability of $\mathcal{E}(U)$

Given $x \in U$, let $d_U(x)$ denote the distance from x to the boundary of U, and let $B(x)$ denote the ball $B(x) = B(x; d_U(x))$.

Next lemma is well known and can be found in [4, Theorem 11.4].

Lemma 2.1. *Let E be a Banach space, U be an open subset in E and D be a dense subset of U. If $f \in \mathcal{H}(U)$ is an unbounded function on $B(x)$ for each $x \in D$, then U is the domain of existence of f.*

The proofs of the next theorem and of Theorem 2.4 are based on [4, Theorem 11.4]. Moreover, we use a result which can be found in [5] to prove Theorem 2.4; namely, $\ell_2 \setminus \ell_1$ is $\mathfrak{c}$-lineable.

Theorem 2.2. *Let E be a separable Banach space and U be a domain of existence in E. If D is a countable dense subset of U, then the set*

$$\mathcal{F}(U) := \left\{ f \in \mathcal{H}(U) : \sup_{z \in B(x)} |f(z)| = \infty \text{ for all } x \in D \right\}$$

is lineable.

Next theorem follows easily from Theorem 2.2 and Lemma 2.1.

Theorem 2.3. *Let E be a separable Banach space and U be a domain of existence in E. Then the set $\mathcal{E}(U)$ is lineable.*

*IMEEC , UNICAMP, Campinas, SP, Brasil, e-mail: tralves.math@gmail.com

Theorem 2.4. *Let E be a separable Banach space and U be a domain of existence in E. If $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ is a dense sequence of U, then the set*

$$\mathcal{F}(U) := \left\{ g \in \mathcal{H}(U) : \sup_{z \in B(x_j)} |g(z)| = \infty \text{ for all } j \in \mathbb{N} \right\}$$

is $\mathfrak{c}$*-lineable.*

Next theorem follows easily from Theorem 2.4 and Lemma 2.1.

Theorem 2.5. *Let E be a separable Banach space and U be a domain of existence in E. Then the set $\mathcal{E}(U)$ is* $\mathfrak{c}$*-lineable.*

It is clear that Theorem 2.2 follows from Theorem 2.4, and we could have omitted Theorem 2.2. However, we have decided to display both theorems because the proof of Theorem 2.2 is much simpler and the ideas involved help to understand better the proof of Theorem 2.4.

3 Algebrability of $\mathcal{E}(U)$

Theorem 3.1. *Let E be a separable Banach space, and let U be a domain of existence in E. If D is a countable dense subset of U, then*

$$\mathcal{F}(U) := \left\{ f \in \mathcal{H}(U) : \sup_{z \in B(x)} |f(z)| = \infty \text{ for all } x \in D \right\}$$

is algebrable. In particular, the set $\mathcal{F}(U)$ is lineable.

By Theorem 3.1 and Lemma 2.1 we can readily obtain the following theorem.

Theorem 3.2. *Let E be a separable Banach space and U be a domain of existence in E. Then the set $\mathcal{E}(U)$ is algebrable. In particular, the set $\mathcal{E}(U)$ is lineable.*

In Theorem 3.1 we have shown that the functions in $\mathcal{H}(U)$ which are unbounded on each of the balls $B(x)$, with $x \in D$, is algebrable. This reminds us of a result of J. López-Salazar [3], which asserts that $\mathcal{H}(E) \setminus \mathcal{H}_b(E)$ is algebrable whenever E is an infinite dimensional Banach space.

References

[1] ARON, R. M., GURARIY, V. J. AND SEOANE-SEPÚLVEDA, J. B. - *Lineability and spaceability of sets of functions on* $\mathbb{R}$. Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), no. 3, 795–803.

[2] BERNAL-GONZÁLEZ, L., PELLEGRINO, D. AND SEOANE-SEPÚLVEDA, J. B. - *Linear subsets of nonlinear sets in topological vector spaces.* Bulletin Amer. Math. Soc., to appear.

[3] LÓPEZ-SALAZAR CODES, J. - *Vector spaces of entire functions of unbounded type.* Proc. Amer. Math. Soc., 139 (2011), 1347–1360.

[4] MUJICA, J. - *Complex analysis in Banach spaces.* Dover Publications, New York, 2010.

[5] MUÑOZ-FERNÁNDEZ, G. A., PALMBERG, N., PUGLISI, D. AND SEOANE-SEPÚLVEDA, J. B. - *Lineability in subsets of measure and function spaces.* Linear Algebra Appl. 428 (2008) 2805–2812.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

Long-time dynamics for a model of viscoelastic beam equation with nonlinear damping

V. NARCISO *

1 Introduction

This paper is concerned with the well-posedness and long-time dynamics of a class of nonlinear viscoelastic beams with nonlinear damping and source terms

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + k\Delta^2 u(t) - \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \mu(t-\tau)\Delta^2 u(\tau)d\tau + f(u(t)) + g(u_t(t)) = h, \quad \text{in} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0 \quad \text{and} \quad u_t(x,0) = u_1 \quad x \in \Omega \quad \text{and} \quad u|_{\Gamma\times\mathbb{R}^+} = \dfrac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma\times\mathbb{R}^+} = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ be a bounded domain with smooth boundary $\Gamma = \partial\Omega$, k is a positive constat, μ represents the kernel of the memory term, g is a nonlinear damping like $g(u_t) \approx |u_t|^r u_t$, f is a nonlinear source term like $f(u) \approx |u|^\alpha u - |u|^\beta u$, with $0 \leq \beta < \alpha$ and h is a external force.

We assume that the memory kernel μ satisfies the following hypotheses:

$$\mu \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+), \quad \int_0^\infty \mu(s)ds = \mu_0 > 0, \tag{1.2}$$

$$\mu(0) \geq 0 \quad \text{and} \quad \mu'(s) \leq 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}^+ \tag{1.3}$$

$$\exists\, \delta; \mu'(s) + \delta\mu(s) \leq 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}^+. \tag{1.4}$$

We assume that the functions f and g are of class C^1, with $f(0) = g(0) = 0$, $|f'(u)| \leq k_0(1+|u|^\alpha)$ and $g'(v) \geq 0$, for all $u, v \in \mathbb{R}$. There exist constants $k_1, L_0, L_1 > 0$ such that

$$|f(u) - f(v)| \leq k_1(1 + |u|^\alpha + |v|^\alpha)|u - v|, \ \ \forall\, u, v \in \mathbb{R} \tag{1.5}$$

$$-L_0 \leq \widehat{f}(u) \leq \frac{1}{2} f(u)u + L_1, \ \ \forall\, u \in \mathbb{R}, \tag{1.6}$$

where $\widehat{f}(z) = \int_0^z f(s)ds$. In addition, there exist also constants $k_2, k_3 > 0$ such that

$$|g(u) - g(v)| \leq k_2(1 + |u|^r + |v|^r)|u - v|, \ \ \forall\, u, v \in \mathbb{R} \tag{1.7}$$

and

$$(g(u) - g(v))(u - v) \geq k_3|u - v|^{r+2}, \ \ \forall\, u, v \in \mathbb{R}, \tag{1.8}$$

where α, r satisfies $0 < \alpha, r \leq \frac{2}{N-2}$ if $N \geq 3$ and $\alpha, r > 0$ if $N = 1, 2$. When the space dimension $N = 1, 2$ the equation (1.1) models the vibrations of viscoelastic beams and plates.

2 Mathematical Results

Let $L^2_\mu(\mathbb{R}^+; H^2_0(\Omega))$ be the Hilbert space of $H^2_0(\Omega)$-valued functions on $\mathbb{R}^+$, endowed with the inner product and norm

$$\langle \varphi, \psi \rangle_\mu = \int_0^\infty \mu(s) \left(\varphi(s), \psi(s)\right)_{H^2_0(\Omega)} dx \quad \text{and} \quad \|\varphi\|_\mu = \int_0^\infty \mu(s)\|\varphi(s)\|^2_{H^2_0(\Omega)} ds.$$

*State University of Mato Grosso do Sul , UEMS, MS, Brasil, vnarciso@uems.br

Our analysis is given in the Sobolev space $\mathcal{H} = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L_\mu^2(\mathbb{R}^+; H_0^2(\Omega))$, equipped with the norm

$$\|(u, v, \eta^t)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\Delta u\|_2^2 + \|\eta^t\|_\mu^2 + \|v\|_2^2,$$

Under assumptions (1.2)-(1) one can prove the following theorem of existence and uniqueness of global solution.

Theorem 2.1. *(***Existence***) Assume that conditions* (1.2)-(1.8) *hold and that* $h \in L^2(\Omega)$*. Then, if*

$$(u_0, u_1, \eta_0) \in \mathcal{H}_1 = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \times L_\mu^2(\mathbb{R}^+; H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega))$$

problem (1.1) has a unique strong solution $(u, u_t, \eta^t(s))$ *in the class*

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)), \quad u_t \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H_0^2(\Omega)), \quad u_{tt} \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)).$$

On the other hand, if the initial data $(u_0, u_1, \eta_0) \in \mathcal{H} = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L_\mu^2(\mathbb{R}^+; H_0^2(\Omega))$*, problem* (1.1) *has a unique weak solution* (u, u_t, η^t) *in the class* $(u, u_t, \eta^t) \in C(\mathbb{R}^+; \mathcal{H})$*.*

Remark 2.1. *Existence and uniqueness of a strong solution in* $\mathcal{H}_1$ *is proved by using Faedo-Galerkin approximation. The existence and uniqueness of a weak solution in* $\mathcal{H}$ *is obtained by using density arguments.*

Remark 2.2. *In view of Theorem 2.1 we can define on* $\mathcal{H}$ *a one-parameter operator*

$$S(t) : (u_0, u_1, \eta_0) \mapsto (u(t), u_t(t), \eta^t(s)), \quad t \geq 0.$$

These nonlinear operator map $\mathcal{H}$ *into itself. It follows that* $S(t)$ *is a nonlinear* C_0*-semigroup defined on the phase space* $\mathcal{H}$*. Then the dynamics of problem (1.1) can be studied through the dynamical system* $(\mathcal{H}, S(t))$*.*

Our main result reads as follows.

Theorem 2.2. *(***Global attractor***) Under the hypotheses of Theorem 2.1, with* $h \in L^2(\Omega)$*, the dynamical system* $(\mathcal{H}, S(t))$ *associated with* (1.1) *has a global attractor* $\mathcal{A}$ *in* $\mathcal{H}$*.*

Remark 2.3. *The first step is to show the dynamic system* $(\mathcal{H}, S(t))$ *is dissipative. The second step is to verify the asymptotic smoothness. Then the existence of a compact global attractor is guaranteed by following theorem (see [2], Thm. 7.1.11).*

Theorem 2.3. *Let* $S(t)$ *be a dissipative semigroup defined on a metric space* H*. Then* $S(t)$ *has a compact global attractor in* H *if and only if it is asymptotically smooth in* H*.*

References

[1] CAVALCANTI, M. M., DOMINGUES CAVALCANTI,V. N., SORIANO, J. A. *Global existence and asymptotic stability for the nonlinear and generalized damped extensible plate equation,* Commun. Contemp. Math. 6 (2004), no. 5, 705-731.

[2] CHUESHOV, I. AND LASIECKA, I. - *Long-time behavior of second order evolution equations with nonlinear damping*, Mem. Amer. Math. Soc. 195, no. 912, Providence, 2008.

[3] CHUESHOV, I. AND LASIECKA, I.- *Von Karman evolution equations: well-posedness and long-time dynamics*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2010.

[4] MA, T. F. AND NARCISO, V. - *Global attractor for a model of extensible beam with nonlinear damping and source terms*, Nonlinear Analysis 73(2010) 3402-3412.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

EXISTENCE OF SOLUTIONS FOR $p(x)$–KIRCHHOFF TYPE PROBLEMS WITH NONLOCAL SOURCE AND NONLINEAR NEUMANN BOUNDARY CONDITIONS

V. E. CARRERA B. * & E. CABANILLAS. L. † & Z. HUARINGA S. ‡

Abstract

In this work we prove a result on the existence of weak solutions for a $p(x)$- Kirchhoff type problem with nonlocal source, subject to Neumann boundary conditions. By means of the Galerkin method, Fixed point theorem in finite dimensions and the theory of the variable exponent Sobolev spaces we establish our result.

1 Introduction

This paper is devoted to the study of the following $p(x)$-Kirchhoff problem

$$\begin{aligned} M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)}\right)dx\right)\left(-div\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right)+|u|^{p(x)-2}u\right) &= f(x,u)|u|^{t(x)}_{s(x)} \qquad \text{in } \Omega \\ |\nabla u|^{p(x)-2}\frac{\partial u}{\partial \nu} &= g(x,u) \qquad \text{on } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.1}$$

where $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ is bounded domain with smooth boundary ∂, $\frac{\partial}{\partial \nu}$ is the outer unit normal derivate, p, t, $s \in C_+(\overline{\Omega})$, $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ is a continuos function, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $g : \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are Carathedory functions.

When $p(x) = p$ (p constant) and $t(x) = 0$, problem (1.1) is the p-Kirchhoff type problem with nonlinear boundary condition and has received considerable attention in recent years, see e.g [4]. The $p(x)$-Kirchhoff type with Dirichlet boundary conditions has been studied in many papers, we refer to [2]. In [3] the $p(x)$-Kirchhoff type problem with nonlinear boundary conditions has been studied. Chen and Gao [1] obtained positive solutions for a class of nonvariational elliptic system with non local source. Motivated by the above references we deal with the existence of solutions for $p(x)$–Kirchhoff type problem (1.1) based on Galerkin method and the Brouwer fixed point theorem.

2 Mathematical results

In order to discuss problem (1.1), we need some theories on $W^{1,p(x)}(\Omega)$ wich we call a variable exponent Sobolev space. Denoted by $M(\Omega)$ the set of all measurable real functions defined on Ω. Write

$$C_+(\overline{\Omega}) = \{p : p \in C(\overline{\Omega}), p(x) > 1 \ \ for\ any\ x \in \overline{\Omega}\}$$

and

$$L^{p(x)}(\Omega) = \{u \in M(\Omega) : \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx < +\infty\}$$

with the norm

$$|u|_{L^{p(x)}(\Omega)} = |u|_{p(x)} = inf\{\lambda > 0 : \int_\Omega |\frac{u(x)}{\lambda}^{p(x)}|dx \leq 1\}$$

and

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \{u \in L^{p(x)}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega)\}$$

with the norm

$$||u||_{1,p(x)} = |u|_{p(x)} + |\nabla u|_{p(x)}, \quad \forall u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$$

*Universidad Nacional Mayor de San Marcos, FCM, Lima, PERU, vcarrerab@unmsm.edu.pe
†Universidad Nacional Mayor de San Marcos, FCM, Lima, PERU, cleugenio@yahoo.com
‡Universidad Nacional Mayor de San Marcos, FCM, Lima, PERU

Definição 2.1. *We say that $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ is a weak solution of (1.1) if*

$$M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)}\right)dx\right)\int_\Omega\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla v+|u|^{p(x)-2}uv\right)dx =$$

$$= ||u||_{s(x)}^{t(x)}\int_\Omega \frac{f(x,u)}{M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)}\right)dx\right)} \; + \; \int_{\partial\Omega} g(x,u)vdt$$

for all $v \in W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Now, we are ready to state and prove the main result of the present paper

Teorema 2.1. *Assume that the following assumptions hold*

(M_0) $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ is a continuos function and satisfies

$$M(t) \geq m_0 > 0 \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}^+$$

(f_0) $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is Carathedory function and satisfies

$$|f(x,t)| \leq c_1\left(1+|t|^{q_1(x)-1}\right),\ \forall (x,t) \in \Omega\times\mathbb{R}$$

where $q_1 \in C_+(\overline{\Omega})$ and $q_1(x) < p^*(x)$ for all $x \in \Omega$

(f_1) $f(x,t)t \leq a\left(1+|t|^{\alpha(x)}\right)$, $\forall (x,t) \in \Omega\times\mathbb{R}$, where $a \in C_+(\overline{\Omega})$

(g_0) $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is Carathedory function and satisfies

$$|g(x,t)| \leq c_2\left(1+|t|^{q_2(x)-1}\right),\ \forall (x,t) \in \Omega\times\mathbb{R}$$

where $q_2 \in C_+(\overline{\Omega})$ and $q_2(x) < p_*(x)$ for all $x \in \Omega$

(g_1) $g(x,t)t \leq b|u|^{\beta(x)}$, $\forall (x,t) \in \Omega\times\mathbb{R}$, where $\beta \in C_+(\overline{\Omega})$

(h) $t \in C(\overline{\Omega})$, $s \in C_+(\overline{\Omega})$ with
$t^+ + \alpha^+ < p^-$, $t^+ = \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} t(x)$, $\beta^+ < p^-$; $s(x) < p^*(x), \quad \forall x \in \Omega$

Then problem (1.1) has at least one weak solution. Besides, any solution of (1.1) satisfies the estimate

$$||u|| \leq \max\left\{1, \left[C_*\left(b+\frac{a|\Omega|+\alpha}{m_0}\right)\right]^{\frac{1}{p^- -\theta}}\right\}$$

where C_* is a constant the embedding depending of $W^{1,p(x)}(E) \hookrightarrow L^{\mu(x)}(E)$, $E = \Omega$ or $\partial\Omega$, $\mu = \beta$, s or α, and $\theta = \max\{\beta^+, t^+ + \alpha^+\}$.

Proof. We apply the Galerkin method and a well known variant of Brouwer's fixed point theorem.

References

[1] Chen Yi and Gao H. *Existence of positive solutions for nonlinear and non variational elliptic systems*, Bull. Austral. Math. Soc. 72 (2005) 271-281.

[2] Dain GW and Hao R. F. *Existence of solutions for a p(x)-Kirchhoff equation*, J. Math. Anal. Appl. 359 (2009) 275-284.

[3] Guo E. and Zhao P. *Existence and multiplicity of solutions for non local p(x) -Laplacian equations with nonlinear Neumann boundary conditions*. Bound. Value Prob. 2012; doi 10.118611687-2770-2012-1.

[4] Correa F. J. S. A. and Nascimento R. G., *On a nonlinear elliptic system of p-Kirchhoff Type under Neumann boundary condition*. Math. Comput. Modelling 49 (2009) N 3-4, 598-604.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

A Hermite analogue of the lowest order Raviart-Thomas method for convection-diffusion equations with enhanced convergence properties

VITORIANO RUAS * & PAULO R. TRALES †

Work supported by CNPq, Brazil, through grant 307996/2008-5.

1 Introduction

This work addresses a technique based on Hermite interpolation, to solve the following convection-diffusion equation:

$$\text{Find } u \in H_0^1(\Omega) \text{ such that } -\nabla \cdot [\mathcal{K}\nabla u] + \mathbf{w} \cdot \nabla u = f \text{ in } \Omega. \tag{1.1}$$

where Ω is a bounded domain of $\Re^N$, $N = 2, 3$, with boundary Γ, f is a given function in $L^2(\Omega)$, $\mathcal{K}$ is a tensor assumed to be constant, symmetric and positive definite, $\mathbf{w}$ is a given velocity field in $\mathbf{C}^0(\bar{\Omega})$, and ∇ and $\nabla\cdot$ denote the gradient and the divergence operator, respectively.
More specifically we extend to the case of equation (1.1) a Hermite finite element method providing flux continuity across inter-element boundaries, shown to be a well-adapted tool for simulating purely diffusive phenomena [6]. The method can be viewed as a non trivial improved version of the lowest order Raviart-Thomas mixed method [4] and its extension to convection-diffusion problems proposed by Douglas and Roberts [2]. However in contrast to this first order method ours is second order convergent in the L^2 norm, though at comparable cost.

Referring to [1] for Sobolev spaces $H^m(\Omega)$, $H_0^m(\Omega)$ and $W^{m,p}(\Omega)$, in the sequel we employ the following notations: S being a bounded open set of $\Re^N$, we denote the standard norm of Sobolev spaces $H^m(S)$, for any non negative integer m by $\|\cdot\|_{m,S}$, including $L^2(S) = H^0(S)$. The standard semi-norm of $H^m(\Omega)$ is denoted by $|\cdot|_{m,S}$.

2 Method Description and Properties

For simplicity we assume that Ω is a polygon if $N = 2$ or a polyhedron if $N = 3$. Let us be given a finite element partition $\mathcal{T}_h$ of Ω, consisting of triangles or tetrahedra according to the value of N, and belonging to a quasi-uniform family of partitions (cf. [3]). h denotes the maximum diameter of the elements of $\mathcal{T}_h$. We associate with $\mathcal{T}_h$ two finite element spaces U_h and V_h as follows:
Let $\mathbf{w}_h$ be the constant field in each element of $T \in \mathcal{T}_h$ whose value in T is $\mathbf{w}(G_T)$, where G_T is the barycenter of T, and $\mathbf{w}_h^1$ be the standard continuous piecewise linear interpolate of $\mathbf{w}$ at the vertices of $\mathcal{T}_h$. For $T \in \mathcal{T}_h$ we further introduce the operator $\Pi_T : L^2(T) \longrightarrow L^2(T)$, given by $\Pi_T[v] := \int_T v dx/meas(T)$, and define the operator $\Pi_h : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ by $\Pi_h[v]_{|T} = \Pi_T[v_{|T}]\ \forall T \in \mathcal{T}_h$.
Every function $v \in V_h$ or $u \in U_h$ is such that in each element $T \in \mathcal{T}_h$ it is expressed by $\{\mathcal{K}^{-1}[a\mathbf{x}^{\mathrm{t}}/2 + \mathbf{b}^{\mathrm{t}}]\}\mathbf{x} + d$, where $\mathbf{x}$ represents the space variable, $\mathbf{b}$ is a constant vector of $\Re^N$ and a and d are two real coefficients. Now F being an edge if $N = 2$ or a face if $N = 3$ belonging to the boundary ∂T of an element $T \in \mathcal{T}_h$, and $\mathbf{n}_F$ being the unit normal vector on F oriented in a unique manner for the whole mesh, we consider that every function in $v \in V_h$ (resp. $u \in U_h$) is such that its restriction to any $T \in \mathcal{T}_h$ is defined by means of $N + 1$ degrees of freedom, namely,

*Research associate at IJRDA, UPMC, Paris 6, France, & PPGM, PUC-Rio, Brazil, e-mail: vitoriano.ruas@upmc.fr
†Instituto de Matemática e Estatística, UFF, Niterói, Brazil, e-mail: paulotrales@im.uff.br

the N mean values of the flux $(\mathcal{K}\nabla v + \mathbf{w}_h \Pi_T[v]) \cdot \mathbf{n}_F$ (resp. $(\mathcal{K}\nabla u) \cdot \mathbf{n}_F$) over $F \subset \partial T$, and $\Pi_T[v]$ (resp. $\Pi_T[u]$). All the degrees of freedom of the first type coincide on both sides of every interface F common to two elements of $\mathcal{T}_h$. We refer to [7] for the unisolvence of the above sets of degrees of freedom.
Next we set the discrete variational problem (2.2) below, aimed at approximating (1.1), whose bilinear form a_h and linear form L_h are given by (2.3), where the notation $(p,q)_S$ represents $\int_S pq\, dS\ \forall S \subset \Omega,\ p,q \in L^2(S)$.

$$\text{Find } u_h \in U_h \text{ such that } a_h(u_h, v) = L_h(v)\ \forall v \in V_h, \text{ where } \forall u \in U_h \text{ and } \forall v \in V_h, \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} a_h(u,v) := \displaystyle\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[(\nabla \cdot [\mathcal{K}\nabla u] - \mathbf{w}_h^1 \cdot \nabla u, \Pi_T[v])_T + (\nabla u, \mathcal{K}\nabla v + \mathbf{w}_h \Pi_T[v])_T + (u, \nabla \cdot [\mathcal{K}\nabla v])_T \right]; \\ L_h(v) := -(f, \Pi_h[v])_\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

If we consider the space $V := \{v | v \in H^1(\Omega); \nabla \cdot [\mathcal{K}\nabla v] \in L^2(\Omega)\}$, we can extend a_h to $(U_h + V) \times (V_h + V)$. Then we further introduce the functional $\| \cdot \|_h$: $U_h + V_h + V \longrightarrow \Re$ given by: $\| v \|_h^2 := (\Pi_h[v], \Pi_h[v])_\Omega + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \{(\nabla v, \nabla v)_T + (\nabla \cdot [\mathcal{K}\nabla v], \nabla \cdot [\mathcal{K}\nabla v])_T\}$. The expression $\| \cdot \|_h$ obviously defines a norm over V, U_h and V_h. In this manner, it is easy to establish the continuity of a_h over $(U_h + V) \times (V_h + V)$ with a mesh independent constant M. Since a_h is not coercive, problem (2.2) is well-posed if and only an *inf-sup* condition holds for a_h over $U_h \times V_h$ [4]. We refer to [7] for the proof of the following result:

Proposition 2.1. *If h is sufficiently small and $\mathbf{w} \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $\exists \alpha > 0$ independent of h such that*

$$\forall u \in U_h \setminus \{0\} \quad \sup_{v \in V_h \setminus \{0\}} \frac{a_h(u,v)}{\| v \|_h} \geq \alpha \| u \|_h \ . \blacksquare \tag{2.4}$$

Now the second Strang inequality extended to the non coercive case (cf. [5]) reads,

$$\| u - u_h \|_h \leq \frac{1}{\alpha} \left[M \inf_{w \in U_h} \| u - w \|_h + \sup_{v \in V_h \setminus \{0\}} \frac{a_h(u,v) - L_h(v)}{\| v \|_h} \right]. \tag{2.5}$$

From the construction of V_h, the numerator on the right hand side of (2.5) vanishes identically. Hence applying standard results to the *inf* term, and arguments similar to those in [6] for estimating $\| u - u_h \|_\Omega$, we can prove,

Theorem 2.1. *Assume that $\mathbf{w} \in W^{1,\infty}(\Omega)$, Ω is convex and h is sufficiently small. Then if $u \in H^2(\Omega)$ and $f \in H^1(\Omega)$ there exists a mesh independent constant C such that,*

$$\| u - u_h \|_\Omega + h \| u - u \|_h \leq C h^2 \, [|u|_{2,\Omega} + |f|_{1,\Omega}]. \blacksquare \tag{2.6}$$

References

[1] R.A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

[2] J. Douglas Jr & J.E. Roberts, Mixed finite element methods for second order eliptic problems, Computational & Applied Mathematics **1-1** (1982), 91-103.

[3] P.G. Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems, North Holland, Amsterdam, 1978.

[4] P.A. Raviart & J.M. Thomas, Mixed Finite Element Methods for Second Order Elliptic Problems, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, **606**, 292-315, 1977.

[5] V. Ruas & J.H. Carneiro de Araujo, A Family of Methods of the DG-Morley Type for Polyharmonic Equations, Advances in Applied Mathematics and Mechanics, **3-2** (2010), 303-332.

[6] V. Ruas, Hermite finite elements for second order boundary value problems with sharp gradient discontinuities, Journal of Computational and Applied Mathematics **246** (2013), 234-242.

[7] V. Ruas & P. Trales, A Hermite finite element method for convection-diffusion equations, to appear in AIP Proceedings of ICNAAM, Rhodes, Greece, 2013.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

Solução para uma classe de problemas em R^N com o operador biharmônico e com potencial que tende a zero no infinito

WALDEMAR D. BASTOS * OLIMPIO H. MIYAGAKI † & RÔNEI S. VIEIRA ‡

1 Introdução

Considere a seguinte equação elíptica em R^N com o operador biharmônico:

$$(P) \qquad \begin{cases} \Delta^2 u + V(x)u = K(x)f(u) \text{ in } R^N, \\ u \neq 0, \text{ in } R^N; \quad u \in \mathcal{D}^{2,2}(R^N), \end{cases}$$

em que $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$, $N \geq 5$, $V, K : R^N \to R$ são potenciais contínuos não negativos, K tende a zero no infinito e $f : R \to R$ é uma função contínua com crescimento subcrítico no infinito. Aqui $\mathcal{D}^{2,2}(R^N)$ é o fecho de $\mathcal{C}_0^\infty(R^N)$ em relação à norma $|u| = \left(\int_{R^N} |\Delta u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

Impomos as seguintes hipóteses em V e K:
I) $V(x) > 0$, $K(x) \geq 0$ in R^N and $K \in L^\infty(R^N)$.
II) Se $\{A_n\} \subset R^N$ é uma sequência de conjuntos de Borel tais que $|A_n| \leq \overline{r}$, para todo n e para algum $\overline{r} > 0$, então

$$\lim_{r\to\infty} \int_{A_n \cap B_r^c} K(x)dx = 0, \text{uniformemente em } n. \qquad (K_1)$$

III) Ocorre uma das seguintes condições:

$$K/V \in L^\infty(R^N), \qquad (K_2)$$

$$\text{Existe } \alpha \in (2, 2_*), \text{ com } 2_* = \frac{4N}{N-4}, \text{ tal que } \lim_{|x|\to\infty} \frac{K(x)}{V(x)^{\frac{2_*-\alpha}{2_*-2}}} = 0. \qquad (K_3)$$

Denotamos por $(V, K) \in \mathcal{K}$ quando V e K satisfazem I, II e III acima. Destacamos que (K_1) é mais fraca que qualquer uma das hipóteses abaixo:
i) Existem $r \geq 1$ e $\rho \geq 0$ tais que $K \in L^r(R^N \setminus B_\rho(0))$; ii) $K(x) \to 0$ as $|x| \to \infty$;
iii) $K = H_1 + H_2$, com H_1 e H_2 verificando i) e ii) respectivamente (veja [1]).

Sobre a função f, impomos as seguintes condições:

IV) $$\limsup_{s\to 0} \frac{f(s)}{s^{2_*-1}} = 0. \qquad (f_1)$$

V) $$f \text{ tem crescimento subcrítico no infinito, a saber, } \limsup_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s^{2_*-1}} = 0. \qquad (f_2)$$

VI) $f(s) = 0$ para $s \leq 0$, $s^{-1}f(s)$ é uma função não decrescente em $(0, \infty)$, e sua primitiva F é superquadrática no infinito, isto é,

$$\limsup_{s\to\infty} \frac{F(s)}{s^2} = \infty. \qquad (f_3)$$

*waldemar@ibilce.unesp.br, UNESP, SP, Brasil, waldemar@ibilce.unesp.br
†Universidade Federal de Juiz de Fora, UFJF, MG, Brasil, e-mail: ohmiyagaki@gmail.com
‡Centro Federal de Educação Tecnológica, CEFET, MG, Brasil, e-mail: roneisanvieira@gmail.com

Lembramos que a condição (f_3) é mais fraca que a usual condição de Ambrosetti e Rabinowitz e indicamos [2] para exemplos e maiores informações.

Equações com o operador biharmônico em domínios limitados surgem no estudo de ondas viajantes em pontes suspensas e no estudo de deflexão estática de uma placa elástica num fluido (veja [3] e suas referências). Em domínios ilimitados, sabemos que a equação não linear de Schrödinger com termos adicionais contendo derivadas de maior ordem está proximamente relacionada com o auto foco de ondas Whistler em plasmas na fase final. Equações de quarta ordem não linear de Schrödinger foram introduzidas por Karpman e Shagalov para considerar o papel dos termos de pequena dispersão na propagação de feixes de laser intenso num meio de grandes quantidades com não linearidade do tipo Kerr (veja [4]). Voltando nossa atenção para equações de Schrödinger com o operador biharmônico e com potenciais citamos os seguintes importantes trabalhos [5, 6, 7, 8], entre vários outros.

Neste trabalho usamos uma técnica análoga àquela usada por Alves e Souto em [1]. Para obter a geometria do passo da montanha, usamos condições de crescimento subcrítico em f, além de uma condição específica sobre sua primitiva F. Também impusemos convenientes condições de crescimento sobre V e K para conseguir uma desigualdade do tipo Hardy e, com isso, conseguir uma convergência forte no espaço todo, de forma que pudemos contornar a perda de compacidade na imersão de Sobolev, que é uma das grandes dificuldades deste tipo de problema. De fato, assumimos as condições (K_2) e (K_3) para conseguirmos a imersão compacta de $E \subset \mathcal{D}^{2,2}(R^N)$ em $L^q_K(R^N)$, com $2 < q < 2_*$, sendo $L^q_K(R^N)$ o usual espaço $L^q(R^N)$ com peso $K(x)$.

2 Resultado

Teorema 2.1. *Suponha $(V, K) \in \mathcal{K}$, (f_1), (f_2) e (f_3). Então o problema (P) tem uma solução de energia mínima.*

Referências

[1] ALVES, C. O. AND SOUTO, M. A. S. - *Existence of solutions for a class of nonlinear Schrödinger equations with potential vanishing at infinity,* J. Differential Equations, 254 (2013), pp. 1977-1991.

[2] MIYAGAKI, O. H. AND SOUTO, M. A. S. - *Superlinear problems without Ambrosetti and Rabinowitz growth condition,* J. Differential Equations, 245 (2008), pp. 3628-3638.

[3] YE Y. AND TANG C.-L. - *Infinitely many solutions for fourth order elliptic equations,* J. Math. Anal. Appl., 394 (2012), pp. 841-854.

[4] PAUSADER B. - *The cubic fourth-order Schrödinger equation,* J. Functional Analysis, 256 (2009), pp. 2473-2517.

[5] CHABROWSKI J. AND DO Ó J. M. - *On some fourth order semilinear elliptic problems in R^N,* Nonlinear Analysis, 49 (2002), pp. 861-884.

[6] GAZZOLA F. AND GRUNAU H.-C. - *Radial entire solutions for supercritical biharmonic equations,* Math. Ann., 334 (2006), pp. 905-936.

[7] NOUSSAIR E. S., SWANSON C. A. AND YANG J. - *Transcritical biharmonic equations in R^N,* Funkcialaj Ekvacioj, 35 (1992), pp. 533-543.

[8] SHEN Y. AND WANG Y. - *Multiple and sign-changing solutions for a class of semilinear biharmonic equation,* J. Differential Equations, 246 (2009), pp. 3109-3125.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

Taxas de decaimento para sistemas de Bresse com dissipação localizada não-linear

Wenden Charles*Juan A.Soriano†Flávio A. Falcão Nascimento ‡José H. Rodrigues§

1 Introdução

No presente trabalho, apresentamos taxas de decaimento para o sistema de Bresse com dissipação não linear:

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) + \alpha_1(x)g_1(\varphi_t) = 0 \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \tag{1.1}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \alpha_2(x)g_2(\psi_t) = 0 \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \tag{1.2}$$

$$\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) + \alpha_3(x)g_3(w_t) = 0 \quad \text{em} \quad \times(0,L)\times(0,\infty), \tag{1.3}$$

$$\varphi(0,t) = \varphi(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) = w(0,t) = w(L,t) = 0,\ t > 0 \tag{1.4}$$

$$\varphi(x,0) = \varphi_0, \varphi_t(x,0) = \varphi_1, \psi(x,0) = \psi_0, \psi_t(x,0) = \psi_1, w(x,0) = w_0, w_t(x,0) = w_1,\ x \in (0,L) \tag{1.5}$$

onde ρ_1, k, ρ_2, b, l e k_0 são constantes positivas relacionadas com a composição material.

Denotamos por w o deslocamento ângular longitudinal, φ deslocamento ângular vertical e ψ o deslocamento ângular de cisalhamento.

A energia do sistema $(1.1)-(1.5)$ é dado por

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^L (\rho_1|\varphi_t|^2 + \rho_2|\psi_t|^2 + \rho_1|w_t|^2 + b|\psi_x|^2 + k|\varphi_x + \psi + lw|^2 + k_0|w_x - l\varphi|^2)(x,t)\,dx. \tag{1.6}$$

2 Resultado

Consideremos as seguintes hipóteses:

Hipótese 1. A função feedback g_i, para cada $i = 1,2,3$, é contínua e monótona crescente, e satisfaz as seguintes condições:

(i) $g_i(s)s > 0$ para $s \neq 0$,

(ii) $k_i s \leq g_i(s) \leq K_i s$ para $|s| > 1$,

onde k_i e K_i são constantes positivas.

Hipótese 2. Assumiremos que $\alpha_i \in L^\infty(0,L)$ são funções não negativas tais que

$$\alpha_i(x) \geq \alpha_i > 0 \text{ in } I_i,\ i = 1,2,3, \text{ and } \tilde{I} := \bigcap_{i=1}^{3} I_i \neq \emptyset. \tag{2.1}$$

Seja $\Gamma := (a_1, a_2)$ um intervalo aberto de $(0,L)$. O cerne do trabalho reside em provar que para cada solução fraca do problema $(1.1)-(1.5)$ a seguinte desigualdade de observabilidade é satisfeita

$$E(0) \leq C\int_0^T \int_\Gamma \rho_1|\varphi_t(x,t)|^2 + \rho_2|\psi_t(x,t)|^2 + \rho_1|w_t(x,t)|^2 dxdt, \tag{2.2}$$

*CCET, Universidade Federal do Acre, AC, Brasil, e-mail: wenden@ufac.br
†DMA, Universidade Estadual de Maringá(UEM), PR, Brasil, email:jaspalomino@uem.br
‡FAFIDAM, Universidade Estadual do Ceará, CE, Brasil, email: flavio.falcao@uece.br
§DMA, UEM, PR, Brasil, e-mail:jh.rodrigues@ymail.com

para alguma constante $C = C(T, E(0)) > 0$ e para T suficientemente grande.

Assumindo que (2.2) ocorre, estamos em condições de enunciar o nosso principal resultado:

Teorema 2.1. *Suponhamos que as hipóteses 1 e 2 sejam válidas. Então existe uma constante pisitiva $T_0 > 0$ tal que se $\{\varphi, \psi, w\}$ é uma soução do problema $(1.1) - (1.5)$ cuja energia inicial satisfaz $E(0) < K$, então*

$$E(t) \leq S\left(\frac{t}{T_0} - 1\right), \ \forall t > T_0, \tag{2.3}$$

com $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0$, onde a função escalar $S(t)$ (Contração não-linear) é a solução da seguinte EDO:

$$\frac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0, \qquad S(0) = E(0), \tag{2.4}$$

onde a função q é definida em Lasiecka e Tataru [2]

Referências

[1] Ho, L. F. Exact Controllability of the One-Dimensional Wave Equation with Locally Distributed Control. *SIAM J. Control and Optimization* **28** (1990), nº 3, 733-748.

[2] Lasiecka, I., Tataru, D. Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary damping. *Differential and integral Equations* , **6**, 507-533, 1993.

[3] Liu, Z.; Rao, B. Energy decay rate of the thermoelastic Bresse system. *Z. ang. Math. Phys.* **60** (2009) 54-69.

[4] Soriano, J. A.; Muñoz Rivera, J. E.; Fatori, L. H. Bresse system with indefinite damping. *Journal of Math. Anal. Appl.* **387** (2011), 284-290.

[5] Soriano, J. A.; Charles, Wenden; Schulz, Rodrigo Asymptotic stability for Bresse systems, submited in october/2012 for *Journal of Math. Anal. Appl.*

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

EXISTENCE OF SOLUTIONS FOR A $p(x)$-KIRCHHOFF TYPE PROBLEM WITH NONLOCAL SOURCE

W Barahona M [*] & E Cabanillas L [†] &
P. Seminario H [‡] & R De La Cruz M [§]

Abstract

In this we prove a result on the existence of weak solutions for a Kirchhoff type problem involving nonlocal source, with variable exponent. By means of the Galerkin method, a fixed point theorem in finite dimensions and the theory of the variable exponent Sobolev spaces, we establish our result.

1 Introduction

This paper is devoted to the study of the following $p(x)$-Kirchhoff problem

$$\begin{aligned} -M(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx)div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + \lambda \int_\Omega u(y)^{r(y)}dy = f(x,u) \quad in \quad \Omega \\ u = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad on \quad \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.1}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ with a smooth boundary $\partial\Omega$, $p(x), r(x) \in C_+(\overline{\Omega})$ with

$$1 < p^- = \min_{x\in\overline{\Omega}} p(x) \le p^+ = \max_{x\in\overline{\Omega}} p(x) < \infty$$

$$1 < r^- = \min_{x\in\overline{\Omega}} r(x) \le r^+ = \max_{x\in\overline{\Omega}} r(x) < \infty,$$

M is a continuous function, f is a Caratheodory function and $\lambda < 0$.

The $p(x)$-Kirchhoff type equations with Dirichlet boundary conditions have studied by Dai and Hao [2], Fan [3]. For the nonlocal $p(x)$-Laplacian problems with nonlinear boundary conditions see [4]. Recently Avci [1] obtained the existence of solutions for a $p(x)$-Kirchhoff type equation (1.1) with $\lambda = 0$, by using the Galerkin method.

Motivated by the above references, we focus the case of nonlocal $p(x)$-Laplacian problem with nonlocal source of variable exponent. This is new topic even when $r(y) = r$ is a constant.

2 Mathematical Results

First, we recall some definitions of the generalized Lebesgue-Sobolev Spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.
Set

$$C_+(\overline{\Omega}) = \{p(x) \in C(\overline{\Omega}) : p(x) > 1, \forall x \in \overline{\Omega}\}$$

[*]Universidad Nacional Mayor de San Marcos, FCM, Lima, PERU, wilbara_73@yahoo.es
[†]Universidad Nacional Mayor de San Marcos, FCM, Lima, PERU, cleugenio@yahoo.com
[‡]Universidade de São Paulo , USP - BRASIL
[§]Universidad Nacional Mayor de San Marcos, FCM, Lima,PERU, rodema_71@yahoo.es

For any $p(x) \in C_+(\overline{\Omega})$, we define the variable exponent Lebesgue Space

$$L^{p(x)}(\Omega) = \{u \in M(\Omega) : \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx < \infty\}$$

with the norm

$$|u|_{p(x)} = inf\{\mu > 0 : \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx \leq 1\}$$

where $M(\Omega)$ is the set of all measurable real functions defined on Ω.

Define the Space

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \{u \in L^{p(x)}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega)\}$$

with the norm

$$\|u\| = |u|_{p(x)} + |\nabla u|_{p(x)}$$

It is known that $|\nabla u|_{p(x)}$ and $\|u\|$ are equivalent norms in $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Hence we will use the norm $\|u\| = |\nabla u|_{p(x)}$ for all $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

The main result of this paper is given by the following theorem:

Teorema 2.1. *Assume that $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ is a Caratheodory function and satisfies the growth condition*

$$f(x,t)t \leq a(1 + |t|^{\alpha(x)}), \quad \forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$$

where $\alpha \in C_+(\overline{\Omega})$.
Further, assume that $a < C(\alpha^+, r^+, p^-)$, $1 \leq r^+ + 1 < p^-$, $1 \leq \alpha^+ + 1 < p^-$, where $C(\alpha^+, r^+, p^-)$ is a positive constant (to be specified in the proof) depending of α^+, r^+, p^- and the embedding constant of $W_0^{1,p(x)} \hookrightarrow L^{\alpha(x)}(\Omega)$. Then the problem (1.1) has at least one weak solution. Further, any solution u of (1.1) satisfies the estimate

$$\|u\| \leq C(\alpha^+, r^+, p^-, |\Omega|)$$

Proof Our main arguments rely on the Brouwer fixed point theorem and the Galerkin method. □

References

[1] Avci M. Existence results for a nonlocal problem involving the $p(x)$-Laplacian,*Pure. Appl. Math. J.* **Vol 2 No 1**,(2013) 20-27.

[2] Dai G.U AND Hao R.F.; Existence of solutions for a $p(x)$-Kirchhoff type equation. *J. Math. Anal Appl.* **359**(2009)275-284.

[3] Fan X. L., On nonlocal $p(x)$-Laplacian Dirichlet problems. *Nonlinear Anal.* **72**(2010)3314-3323.

[4] Guo AND Zhao, Existence and multiplicity of solutions for nonlocal $p(x)$-Laplacian equations with nonlinear Neumann boundary conditions. *Boundary Value Prob.* **2012**, 2012:1 doi: 10.1186/1687-2770-2012-1.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

Wellposedness for stochastic continuity equations with Ladyzhenskaya-Prodi-Serrin condition

Wladimir Neves * & Christian Olivera †

1 Introduction

In this work we establish wellposedness for stochastic divergence-free continuity equations. Namely, we consider the following Cauchy problem: Given an initial-data u_0, find $u(t,x;\omega) \in$, satisfying

$$\Big\{\partial_t u(t,x;\omega) + \Big(u(t,x;\omega)\big(b(t,x) + \frac{dB_t}{dt}(\omega)\big)\Big) = 0, u|_{t=0} = u_0, \tag{1.1}$$

$\big((t,x) \in U_T, \omega \in \Omega\big)$, where $U_T = [0,T]\times^d$, for $T > 0$ be any fixed real number, $b : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ is a given vector field, with $div\, b(t,x) = 0$, $B_t = (B_t^1, ..., B_t^d)$ is a standard Brownian motion in $\mathbb{R}^d$.

The Cauchy problem for the stochastic transport equation has taken great attention recently, see for instance [2], [3], [5], [6], [7], and more recently the initial-boundary value problem in [9]. Concerning the deterministic case of the problem trasport, also in a non-regular framework, the reader is mostly addressed to [4] and [1]. Those papers deal respectively with the Sobolev and the BV spatial regularity case, where the uniqueness proof relies on commutators. The main issue in this work is to prove uniqueness of weak $L^\infty-$solution of the Cauchy problem (1.1) for vector fields

$$b \in L^q([0,T],(L^p(\mathbb{R}^d))^d), \quad p,q < \infty, p \geq 2, \quad q > 2, \quad and \quad \frac{d}{p} + \frac{2}{q} < 1, \tag{1.2}$$

The last condition LPSC is known in the fluid dynamic's literature as the Ladyzhenskaya-Prodi-Serrin condition, with $\leq$ in place of $<$. Here, we do not assume any differentiability (one of the main assumptions in [2]), nor boundedness (also important in [5]) of the vector field b. The uniqueness result is established using the transportation property of the continuity equation for divergence free vector fields.

2 Mathematical Results

Theorem 2.1. *Assume conditions LPSC, and $div\, b(t,x) = 0$. If $u, v \in L^\infty(U_T \times \Omega)$ are two weak $L^\infty-$solutions for the Cauchy problem trasport, with the same initial data $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, then for each $t \in [0,T]$, $u(t) = v(t)$ almost everywhere in $\mathbb{R}^d \times \Omega$.*

Theorem 2.2. *Assume conditions LPSC, and $div\, b(t,x) = 0$. Let $\{u_0^n\}$ be any sequence, with $u_0^n \in L^\infty(^d)$ $(n \geq 1)$, converging weakly-star to $u_0 \in L^\infty(^d)$. Let $u(t,x)$, $u^n(t,x)$ be the unique weak $L^\infty-$solution of the Cauchy problem trasport, for respectively the initial data u_0 and u_0^n. Then, for all $t \in [0,T]$, and for each function $\in C_c^0(^d)$ $\mathbb{P}-$ a.s.*

$$\int_d u^n(t,x)\,(x)\; dx \quad convergesto \quad \int_d u(t,x)\,(x)dx$$

*Instituto de Matemática , UFRJ, RJ, Brasil, wladimir@im.ufrj.br
†IMECC, UNICAMP, SP, Brasil, e-mail: colivera@ime.unicamp.br

P-$a.s.$.

Moreover, if u_0^n *converges to* u_0 *in* $L^\infty(\mathbb{R}^d)$, *then*

$$u^n(t,x) \text{ converge to } u(t,x) \quad in$$

$L^\infty(U_T \times \Omega)$.

References

[1] Ambrosio L., *Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields*, Invent. Math., 158, 227–260, 2004.

[2] Attanasio S. and Flandoli F., *Renormalized solutions for stochastic transport equations and the regularization by bilinear multiplication noise*, Comm. Partial Differential Equations, 36, 1455–1474, 2011.

[3] Catuogno P. and Olivera C., L^p-*solutions of the stochastic transport equation*, Random Operator and Stochastic Equations, 21 , 125–134, 2013.

[4] DiPerna R. and Lions P. L , *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math., 98, 511–547, 1989.

[5] Flandoli F., Gubinelli M. and Priola E., *Well-posedness of the transport equation by stochastic perturbation*, Invent. Math., 180, 1-53, 2010.

[6] Kunita H. , *First order stochastic partial differential equationss*, In: Stochastic Analysis, Katata Kyoto, North-Holland Math. Library, 32, 249-269, 1984.

[7] Le Bris C. and Lions P. L , *Existence and uniqueness of solutions to Fokker-Planck type equations with irregular coefficients*, Comm. Partial Differential Equations, 33, 1272-1317 , 2008.

[8] Neves W. and Olivera C. , *Stochastic transport equation in bounded domains*, in preparation, 2013.

[9] Neves W. and Olivera C. , *Wellposedness for stochastic continuity equations with Ladyzhenskaya-Prodi-Serrin condition* , . arXiv:1307.6484, 2013.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

Operators that attain their minima

Xavier Carvajal * & Wladimir Neves †

1 Introduction

We shall be concentrated on this talk in a class of bounded linear operators on complex Hilbert spaces, or on a subspace of it, which attains their minima on the unit sphere. Hereupon by a subspace, we are always saying a closed subspace. Certainly, the study of bounded linear operators that attain their minima have some similarities with the ones that achieve their norm as studied by the authors in [1]. Although, they not share the same characteristics, for instance the injectivity property plays an important role for that ones studied here, that is to say, the class of operators that attains their minima.

We are going to study mostly the operators that satisfy the $\mathcal{N}^*$ and $\mathcal{AN}^*$ properties, defined respectively in Definition 1.1 and Definition 1.2. The class of the $\mathcal{N}^*$ operators contains, for instance, the compact ones which are non-injective (see Proposition 1.1). Then, to introduce the theory, let H, J be complex Hilbert spaces and $\mathcal{L}(H,J)$ the Banach space of linear bounded operators from H to J. We emphasize the case that will appear most frequently later, namely $\mathcal{L}(H,H)=\mathcal{L}(H)$. Furthermore, we recall that, the space $\mathcal{L}(H,J)$ is a Banach space with the norm

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_H \leq 1} \|Tx\|_J = \sup_{\|x\|_H = 1} \|Tx\|_J \tag{1.1}$$

and, it is well known that, if H has finite dimension, then the closed unit ball in H is compact (Heine-Borel Theorem) and the above *supremum* is a maximum. The important question whenever such a *supremum* is a maximum in the infinite dimensional case was studied by the authors in [1], where it is present many characterizations for operators that achieve their norm. Analogously, we now define the following value

$$[\,T\,] := \inf_{\|x\|_H = 1} \|Tx\|_J \tag{1.2}$$

and ask when such an $infimum$ is a minimum. This is one of the main issues of this presentation, which motivates the following

Definition 1.1. *An operator $T \in \mathcal{L}(H,J)$ is called to satisfy the property $\mathcal{N}^*$, when there exists an element x_0 in the unit sphere, such that $[\,T\,] = \|T\,x_0\|_J$.*

We start the study by the following considerations:

1. An operator with zero minimum on the unit sphere should be non-injective in order to satisfy the property $\mathcal{N}^*$. Indeed, if there exists an element x_0 in the unit sphere, such that, $\|T\,x_0\|_J = [\,T\,] = 0$, it follows that $Tx_0 = 0$, and for T injective, $x_0 = 0$, which is a contradiction. Equivalently, if T is injective and satisfies the property $\mathcal{N}^*$, then $[T] > 0$.

2. If T is non-injective, then T attains its minimum and further $[T] = 0$. In fact, when T is non-injective, we have Ker $T \neq \{0\}$, and hence there exists an element $x \in$ Ker T, $x \neq 0$, such that $Tx = 0$. Therefore, $\|T(x/\|x\|)\| = 0 = [T]$.

3. Let us consider $T \in \mathcal{L}(H,J)$ with H finite dimensional. It is well-known that, $\dim T(H) \leq \dim H$, and since S is a compact set, it follows that $T(S)$ is compact. Therefore, applying the Weierstrass' Theorem, T attains its minimum on S. We have the following cases:

*Departamento de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brasil, carvajal@im.ufrj.br
†Departamento de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brasil, wladimir@im.ufrj.br

- If $\dim T(H) = \dim H$, then $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ and thus T is injective. We conclude in this case that $[T] > 0$.
- If $\dim T(H) < \dim H$, then $\operatorname{Ker} T \neq \{0\}$ and T is non-injective. Thus $[T] = 0$.

On the other hand, if the dimension of H or the dimension of J are finite and $T \in \mathcal{L}(H, J)$, then there exists an x in the closed unit ball in H (indeed in the boundary, i.e. the unit sphere), such that

$$[\, T \,] = \|Tx\|_J.$$

Therefore, any operator of finite range satisfies the property $\mathcal{N}^*$. Moreover, an important class, which we have the complete characterization of the property $\mathcal{N}^*$, are the non-injective compact operators. Indeed, we have the following

Proposition 1.1. *Let $T \in \mathcal{L}(H, J)$ be a compact operator, with H infinite dimensional. Then, T satisfies the property $\mathcal{N}^*$ if, and only if, T is non-injective.*

The restriction of a compact operator to a subspace is a compact operator. Although, we have seen for instance that, injectiveness is an important property w.r.t. the property $\mathcal{N}^*$. Since the restriction of a non-injective operator is not necessarily non-injective, it does not follow easy (even for the compact operator algebra) the following property

Definition 1.2. *We say that $T \in \mathcal{L}(H, J)$ is an $\mathcal{AN}^*$ operator, or to satisfy the property $\mathcal{AN}^*$, when for all closed subspace $M \subset H$ $(M \neq \{0\})$, $T|_M$ satisfies the property $\mathcal{N}^*$.*

Remark 1.1. *Let $T \in L(H, J)$, if $\dim H < \infty$ or $\dim J < \infty$, then T satisfy the property $\mathcal{AN}^*$.*

We stress that by a subspace, we always mean a closed subspace, thus on the definition quoted above M is always closed. Moreover, it is not difficult to see that, one of the motivations to study the classes $\mathcal{N}^*$ and $\mathcal{AN}^*$ is related to show the injective property.

References

[1] Carvajal, X., Neves, W., *Operators that achieve the norm*, Integral Equations and Operator Theory, **72** (2012), 179–195.

[2] Chevreau, B., Personal communications.

[3] Chalendar, I., Techniques d'algbres duales et sous-espaces invariants. (French) [Dual algebra techniques and invariant subspaces] With a preface in Romanian by Bernard Chevreau. Monografii Matematice (Timisoara) [Mathematical Monographs (Timisoara)], 55. Universitatea de Vest din Timisoara, Facultatea de Matematica, Timisoara, 1995. iv+94 pp.

[4] Fabian, M., Habala, P., Hjek, P., Santaluca, V.M., Pelant, J., Zizler, V., Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry, CMS Books in Mathematics, Springer, New York, 2001.

[5] Halmos P.R., Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity, Chelsea, New York, (1951).

[6] Rudin, W., Functional Analysis, McGraw-Hill, Inc., second edition, 1991.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

ANALYTICAL AND NUMERICAL APPROACHES FOR A STUDY OF QUALITATIVE SOLUTIONS IN A STIFF ISOTHERMAL SYSTEM OF EULER EQUATIONS

A. Alvarez* & E. Abreu† & W. Lambert‡

1 Motivation and the model problem

In this work we are interesting in the study of the long time formation of waves appearing in balance laws by means of singular perturbation techniques [2, 5, 4, 1] and numerical analysis [3, 4]. For concreteness, we performed such analysis applied to relaxation towards a 3 x 3 system of isothermal Euler equations. In short, we apply a Chapman-Enskog like-expansion [2, 5] to get a reliable approximation the 3 x 3 system of isothermal Euler equations. Next, we performed a numerical analysis in order to construct and implement a locally conservative computational scheme for solving a full non-linear balance system as well as the approximating solutions from the outer expansion for comparison purposes. Thus, we combine these two approaches in order to study the long term behavior of the qualitative structure of the solution appearing in non-linear stiff systems of balance laws.

Consider the system of balance laws,

$$U_t + F_x(U) = \frac{1}{\epsilon}Q(U), \text{ with } U(x,t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ and } \mathcal{J} = \{U \in \Omega : Q(U) = 0\} \tag{1.1}$$

where U is the momentum projection with open Ω. Moreover, the assumption that the source term $Q(U)$ has a nonempty $\mathcal{J}$, is *equilibrium manifold*.

In [5] is defined the notion of "stability condition" for the system (1.1). We stress that this condition is different from that one introduced in [1], in which a notion of strictly convex entropy for the system is derived with source terms of the form (1.1), in which in turn admits a nontrivial constant annihilator. It is worth mentioning that for some realistic physical examples this condition is not fulfilled as to the case magnetohydrodynamics [5].

Our proposed numerical method was made following the ideas of [4], which might be seen a generalization of the Nessyahu-Tadmor scheme to a non-homogeneous case of balance laws (1.1). Central schemes enjoy the desirable property of being locally conservative and no Riemann problems are solved and hence field-by-field decompositions are avoided. The main disadvantage is the excessive numerical viscosity since this scheme need to satisfy restrictive Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) conditions, but it is possible bypass this by means of using high-resolution MUSCL-type interpolants [3]. In short, integration of the (1.1) over all intervals of volume $[x_j, x_{j+1}] \times [t^n, t^{n+1}]$ reads:

$$\begin{aligned} u_{j+1}^{n+1} =& \frac{1}{2}\left(u_j^n + u_{j+1}\right) + \frac{1}{8}\left[(u')_j^n - (u')_{j+1}^n\right] + \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F((u(x_{j+1}, t+\Delta t/2)) - F((u(x_j, t+\Delta t/2))\right] \\ &+ \frac{\Delta t}{2\epsilon}[Q(u_{j+1/2}(t^{n+1})) + Q(u_{j+1/2}(t^n))]\ dt + \frac{1}{8\epsilon}\int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[(Q')_j(t) - (Q')_{j+1}(t)\right]\ dt. \end{aligned} \tag{1.2}$$

where $u(x_j, t+\Delta t/2) = u_j(t) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}F_j' + \frac{\Delta t}{2\epsilon}Q(u)$ can be viewed as a predictor step.

2 Mathematical results and numerical experiments

We study the following Euler equations with a relaxation temperature towards a constant value:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (E+p)u \end{bmatrix} = \frac{1}{\epsilon}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (\overline{E}(\rho, \rho u) - E)un \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

*Ph.D. student UNICAMP-IMECC, abelalv@ime.unicamp.br. This work was supported by the FAPESP Scholarship 11/23628-0
†UNICAMP-IMECC, eabreu@ime.unicamp.br. This work was supported by the FAPESP the Grant 2011/11897-6, 2012/19874-8
‡UFRRJ-DM, RJ, Brazil, wanderson.lambert@gmail.com

Here $\overline{E}$ is the energy in the gas that results if we bring T to a reference temperature $\overline{T}$ without changing the density or momentum. We are using the ideal gas law $p = R\rho\overline{T} = a^2\rho$, where $a\sqrt{R\overline{T}}$ is the isometrically sound speed and along with the equations of state gives $\overline{E}(\rho, \rho u) = \frac{a^2\rho}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho u^2$. Here an approximation in the form of an asymptotic series is obtained in the transition layer(s) by treating that part of the domain as a separate *perturbation problem* to (2.3). In this work we provide, our first attempt to address an "outer expansion" approximation to the Euler equations (2.3). Thus, let us consider $U_j = [\rho_j(x,t), (\rho u)_j(x,t), E_j(x,t)]^\top = [\rho_j, w_j, E_j]^\top$. Following [5, 1] we assume the solution of the system (1.1) can be approximated by $U = U_0 + \epsilon U_1 + \epsilon^2 U_2 + \cdots$. Plugging this into (1.1) and matching coefficients of power ϵ we get for Order $\mathcal{O}(\epsilon^{-1})$, $E_0 = \dfrac{a^2\rho_0}{\gamma-1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{w_0^2}{\rho_0}$ and for Order $\mathcal{O}(1)$ the next three equations, $\rho_{0t} + w_{0x} = 0$ along with,

$$w_{0t} + \left(\frac{w_0^2}{\rho_0} + a^2\rho_0\right)_x = 0 \quad \text{and} \quad E_{0t} + \left(\frac{E_0 w_0}{\rho_0} + a^2 w_0\right)_x = \frac{a^2\rho_1}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\left(2\frac{w_0 w_1}{\rho_0} - \frac{w_0^2}{\rho_0^2}\rho_1\right) - E_1 \tag{2.4}$$

Next, we get the Order $\mathcal{O}(\epsilon)$, let $E_0 = \mathcal{H}(\rho_0, w_0)$ after some straightforward algebra, we get:

$$E_1 = \mathcal{H}_{\rho_0} w_{0x} + \mathcal{H}_{w_0}\left[\frac{w_0^2}{\rho_0} + a^2\rho_0\right]_x - \left[\frac{E_0 w_0}{\rho_0} + a^2 w_0\right]_x + \frac{a^2\rho_1}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\left(2\frac{w_0 w_1}{\rho_0} - \frac{w_0^2}{\rho_0^2}\rho_1\right). \tag{2.5}$$

We use (2.3) and $\rho_l = 2,\ (\rho u)_l = 1,\ E_l = 1,$ for $x < 0.2$ and $\rho_r = 1,\ (\rho u)_r = 0.13962,\ E_r = 1,$ for $x > 0.2$, as a Riemann problem in order to study the shock-capturing properties of the proposed approach in this work by three distinct ways: by means of an implementation of the direct outer expansion, by an operator splitting approach (with respect to the stiff term and to the homogeneous counterpart) and, finally, by a non-splitting procedure; the latter two with respect to system (2.3) taking into account the scheme (1.2) to get approximations to the Orders $\mathcal{O}(\epsilon^{-1})$, $\mathcal{O}(1)$ and $\mathcal{O}(\epsilon)$. Our numerical solutions (see Figure 1) to the relaxation towards a 3 x 3 system of isothermal Euler equations (2.3) show a very good qualitative resemblance for quantities E, p and $p\,u$. We observe that for $\epsilon << 1$ the approximations quickly reach the equilibrium. Thus, numerical analysis and asymptotic analysis are then reliable and mandatory approaches for solving perturbation problems associated to system of balance laws (1.1) and (2.3).

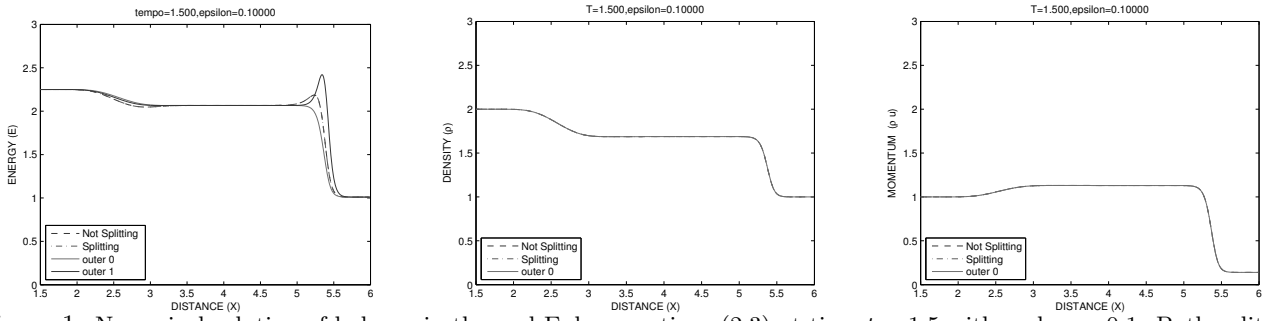


Figure 1: Numerical solution of balance isothermal Euler equations (2.3) at time $t = 1.5$ with scale $\epsilon = 0.1$. Both splitting and the non-splitting schemes were able to capture with accuracy the same wave structure for large times.

References

[1] Q. G. Chen, C. David Levermore and Tai-Ping Liu. Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy. *Comm. Pure Appl. Math*, 47:787–830, 1994.

[2] J. K. Kevorkian and J. D. Cole. Multiple Scale and Singular Perturbation Methods. Springer-Verlag, 2000.

[3] S. F. Liotta, V. Romano and G. Russo. Central schemes for balance laws of relaxation type. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 38:1337-1356, 2000.

[4] L. Pareschi. Cental differencing based numerical schemes for hyperbolic conservation laws with relaxation terms. *SIAM J. Numer. Anal*, 39(4):1395–1417, 2001.

[5] W. A. Yong. Singular perturbations of first-order hyperbolic systems with stiff source terms. *Journal of Differential Equations*, 155(1):89–132, 1999.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA UM PROBLEMA QUASELINEAR COM CRESCIMENTO DO TIPO CÔNCAVO CONVEXO

ALEX J. BECKER * & MÁRCIO L. MIOTTO †

Neste trabalho pretendemos garantir condições para a existência e multiplicidade de soluções fracas de um problema elítico quaselinear com crescimento do tipo côncavo convexo.

1 Introdução

Estabeleceremos a existência, bem como a multiplicidade de soluções fracas para a seguinte classe de problemas

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda f(x)|u|^{q-1} + h(x)|u|^{r-1} \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, os expoentes satisfazem a condição $1 < q < p < r < p^* \doteq \frac{Np}{N-p}$, sendo o operador $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, λ um parâmetro real positivo e as funções f e h satisfazem as seguintes condições:

(H_1) $f \in L^{q'}(\Omega)$, $q' = \frac{q}{q-1}$, onde $f_+ \not\equiv 0$ e $f_- \in L^\infty(\Omega)$;

(H_2) $h \in L^\infty(\Omega)$, com h não negativa.

O problema (P_λ) com tais condições sobre os expoentes p, q e r é classificado como um problema elítico quaselinear subcrítico com crescimento superlinear e sublinear, ou simplesmente com crescimento do tipo côncavo convexo. Problemas semilineares, bem como quaselineares com tais condições de crescimento são amplamente estudados tanto no caso subcrítico, quanto no caso crítico ($r = p^*$), e também em domínios limitados ou ilimitados.

Citamos por exemplo o trabalho de Ambrosetti, Brézis e Cerami que em [1], justificaram a existência de uma constante positiva λ_o tal que o problema (P_λ), com $p = 2$ e $f \equiv 1 \equiv h$, admite ao menos duas soluções positivas se $\lambda \in (0, \lambda_o)$, tem uma solução positiva para $\lambda = \lambda_o$ e não possui solução positiva se $\lambda \in (0, \lambda_o)$. Mencionamos ainda o trabalho de Wu [2], o qual considerou o problema (P_λ) no caso em que $p = 2$ e $h \equiv 1$ e assumindo que $f \in C(\overline{\Omega})$, com $f_+ \not\equiv 0$. Ele obteve, via métodos variacionais, mais precisamente através da variedade de Nehari, a existência de $\lambda_o > 0$ tal que o problema (P_λ), com $p = 2$, admite ao menos duas soluções se $\lambda \in (0, \lambda_o)$. Ressaltamos, que o problema (P_λ) possui alguns variantes, dentre outros, o caso crítico, ou seja, pode-se admitir que $r = p^*$. Para referências destas variantes, e também para outros problemas relacionados mencionamos os seguintes trabalhos [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11].

O nosso resultado pode ser visto como uma variação dos trabalhos aqui citados, no caso particular em que envolve expoente subcrítico de Sobolev. Sob as nossas condições sobre as funções peso f e h, obtemos o seguinte resultado acerca da existência e multiplicidade de soluções do problema (P_λ).

Teorema 1.1. *Suponha que f, h sejam funções mensuráveis em $\mathbb{R}^N$ que satisfaçam as condições (H_1) e (H_2), respectivamente. Então existe uma constante positiva $\Lambda_o = \Lambda_o(N, q, p, r, h)$, onde para todo $\lambda \in (0, \Lambda_o)$ o problema (P_λ) admite ao menos duas soluções fracas não triviais.*

Para a justificarmos este resultado, utilizamos argumentos variacionais, mais especificamente, empregamos o Princípio Variacional de Ekeland, para garantir a existência de uma primeira solução fraca para (P_λ), e o Teorema do Passo da Montanha para obter a existência de uma segunda solução fraca para (P_λ).

*Bolsista CAPES/FAPERGS do Programa de Pós-Graduação em Matemática, UFSM, RS, Brasil, alexjenaro@gmail.com
†Departamento de Matemática, UFSM, RS, Brasil, miottomatica@gmail.com

Ressaltamos que este trabalho é um resultado preliminar que surgiu como aplicação de algumas das técnicas abordadas em uma disciplina de métodos variacionais, embasada dentre outras referências em [12, 13, 14], a qual foi cursada pelo mestrando no Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Maria. Uma vez que o acadêmico cursa o primeiro ano de mestrado, faz-se relevante tal estudo para o desenvolvimento de sua dissertação, bem como o aporfundamento do conhecimento e o uso dessas de técnicas na resolução de problemas elíticos.

Referências

[1] AMBROSETI, A., BRÉZIS, H. AND CERAMI,G. - *Combined effects of concave e convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. 122 (1994) 519-543.

[2] WU. T. F. - *On semilinear elliptic equations involving concave-convex nonlinearities and sign-changing weight function*, J. Math. Anal. Appl. 318 (2006), 253-270.

[3] ALVES, C. O. - *Multiple Positive solutions for equations involving critical Sobolev exponent*, Eletron. J. Differential Equations 13 (1997), 1-10.

[4] ALVES, C. O., GONÇALVES, J. V. A. AND MIYAGAKI, O. H. - *Multiple positive solutions for semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ involving critical exponentes*, Nonlinear Analysis 34 (1998), 593-615.

[5] AMBROSETTI, A., GARCIA AZORERO, J. AND PERAL ALONSO, I. - *Elliptic variational problems in $\mathbb{R}^N$ with critical growth*, 168 (2000), 10-32.

[6] BRÉZIS, H. AND NIREMBERG, L. - *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983), 437-477.

[7] CHABROWSKI, J. AND DO O, J. M. B. - *On semilinear elliptic equations involving concave and convex nonlinearities*, Math. Nachr. 233-234 (2002), 55-76.

[8] FIGUEIREDO, D. G., GOSSEZ, J. P. AND UBILLA P. - *Multiplicity results for a family of semilinear elliptic problems under local superlinearity and sublinearity*, J. European Mth. Soc. 8 (2006), 269-288.

[9] MORAIS FILHO, D. C. AND MIYAGAKI, O. H. - *Critical singular problems on unbounded domains*, Abst. Appl. Analysis, 2005 (2005), 639-653.

[10] MIOTTO, M. L. - *Multiple solutions for elliptic problem in $\mathbb{R}^N$ with critical Sobolev exponents and sign-changing weight function* Comm. Pure Appl. Anal., 9 (2010), 233-248.

[11] WU. T. F. - *On semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents and sign-changing weight function*, Comm. Pure Anal. Appl. 7 (2008), 383-405.

[12] FIGUEIREDO, D. G. - *Lectures om the Ekeland variational principle with applications and detours*, Springer-Verlag, Heidelberg 1989.

[13] RABINOWITZ, P. H. - *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, Expository Lectures from the CBMS Regional Conference held at the University of Miami January 9-13,1984.

[14] WILLEM, M. - *Minimax Theorems - Progress in nonlinear differential equations and their applications*, Birkhäuser, Massachusetts Avenue, Cambrige, 1996.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

UMA ANÁLISE MATEMÁTICA DE UM SISTEMA NÃO ISOTÉRMICO DO TIPO ALLEN-CAHN

ANDERSON L. A. DE ARAUJO * & RONDINEI A. DA SILVA †

1 Introdução

Neste trabalho estudamos a resolução do sistema não-linear

$$\varphi_t - \xi^2\Delta\varphi = \varphi(\varphi-1)(1-2\varphi) - |\nabla\varphi|(\mu_1 c + \mu_2\theta) \quad \text{em} \quad Q, \tag{1.1}$$

$$\theta_t + \ell\varphi_t - div(k(\varphi,\theta,c)\nabla\theta) = f(x,t) \quad \text{em} \quad Q, \tag{1.2}$$

$$c_t - div(D_1(\varphi,\theta,c)\nabla c + D_2(\varphi,\theta,c)\nabla\varphi) = 0 \quad \text{em} \quad Q, \tag{1.3}$$

com condições iniciais e de fronteira

$$\varphi = 0, \theta = 0, c = 0 \quad \text{em} \quad S,$$

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x),\ \theta(x,0) = 0,\ c(x,0) = c_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega,$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio aberto, limitado e C^2 na fronteira. Seja T um número positivo finito; $Q = \Omega \times (0,T)$ indica o cilindro de espaço-tempo com a superfície lateral $S = \partial\Omega \times (0,T)$.

O presente problema tem uma estrutura que é similar ao problema de solidificação não isotérmica para uma liga binária apresentado em [2] e [3]. A equação (1.1) é a equação tipo Allen-Cahn para o campo de fase e, basicamente, é obtido de [2] e [3]. As equações (1.2) e (1.3) são equações obtidas por formas mais gerais dos balanços de energia térmica e de massa. As constantes positivas ξ, μ_1, μ_2, ℓ estão associadas com as propriedades do material; $k(\cdot)$ está associada com a condutividade térmica; $D_1(\cdot)$ e $D_2(\cdot)$ são os coeficientes de difusão do soluto na matriz do solvente, isto é, o material que constitui a outra liga binária; $f(\cdot)$ é um dado campo externo associado com a densidade de fontes de calor ou bacias; e as condições iniciais $\varphi_0(\cdot)$, $\theta_0(\cdot)$ e $c_0(\cdot)$, respectivamente são, o campo de fase, a temperatura, e concentração de soluto.

Muita atenção tem sido dada aos métodos de campo de fase nos processos de solidificação durante as duas últimas décadas por muitos autores. Para mais informações, ver, por exemplo [2, 4-6] e as referências deles. Nestas obras, muitas situações e diferentes hipóteses têm sido consideradas.

Neste trabalho, a equação de campo de fase (1.1) foi obtido em [2]. E num certo sentido, (1.1) pode ser considerado mais preciso do que o formato final indicado em [2]. As outras duas equações generalizam equações encontradas em [2,3,7].

No entanto, para tal modelagem mais precisa, devemos pagar o preço que a não-linearidade do acoplamento na equação de campo de fase (1.1), isto é, o termo $-|\nabla\varphi|(\mu_1 c + \mu_2\theta)$, envolvendo os produtos da temperatura e da

*Departamento de Matemática, UFV, MG, Brasil, e-mail: anderson.araujo@ufv.br
†Mestrando em Matemática , UFV, MG, Brasil, rondinei.silva@ufv.br

concentração, com as derivadas do campo de fase, é muito mais difícil de manusear em termos matemáticos que o acoplamento clássico habitual entre a equação de campo de fase e a temperatura e equações de concentração.

Para resolver os problemas (1.1) - (1.3) com as condições iniciais e de fronteira dadas, temos que usar uma combinação de técnicas: teoria do grau e o princípio do máximo em conjunto com um método espectral de Galerkin semidiscreto para a construção de soluções aproximadas, em seguida, passar para o limite para a obtenção de soluções do problema original. A regularidade e singularidade são obtidos para o caso dos domínios bidimensionais quando $k = k(\varphi), D_1(\varphi, \theta)$ e $D_2 = D_2(\varphi, \theta)$ e os outros dados são suficientemente suaves. Neste caso especial, as estimativas de erro para as aproximações semidiscretas podem ser obtidas.

Referências

[1] VAZ, C.L.D. E BOLDRINI J.L. - A mathematical analysis of a nonisothermal Allen-Cahn type system. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **35**, 1392-1405, 2012.

[2] BECKERMANN, C., DIEPERS, H.J., STEINBACH, I., KARMA, A., TONG, X. - Modeling melt convection in phase-field simulations of solidification. *Journal of Computational Physics*, **154**, 468-496, 1999.

[3] DIEPERS, H.J., BECKERMANN, C., STEINBACH, I., - Simulation of convection and ripening in a binary alloy mush using the phase-field method. *Acta Materialia*, **47** (13), 3663-3678, 1999.

[4] BOLDRINI, J.L., CARETTA, B.C., FERNÁNDEZ-CARA, E. - Analysis of a two-phase field model for the solidication of an alloy. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **357**, 25-44, 2009.

[5] JIANG, J. - Convergence to equilibrium for a parabolic-hyperbolic phase field model with Cattaneo heat flux law. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **341**, 149-169, 2008.

[6] RUBIO, P.M., PLANAS, G., REAL, J. - Asymptotic behaviour of a phase-field model with three coupled equations without uniqueness. *Journal of Differential Equations*, **246**, 4632-4652, 2009.

[7] RAPPAZ, J. E SHEID, J.F. - Existence of solutions to a phase-field model for the isothermal solidification process of binary alloy. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **23** (6), 491-513, 2000.

[8] MOROSANU, C. E MOTREANU, D. - A generalized phase-field system. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **273**, 515-540, 1999.

[9] EVANS, L.C. - *Partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence, 1998.

[10] LADYZENSKAJA, O.A., SOLONNIKOV, V.A, URAL´CEVA, N.N. - *Linear and quasilinear equations of parabolic type, Translations of Mathematical Monographs*, American Mathematical Society, Providence, 1995.

[11] ZHENG, S. - Nonlinear parabolic equations and hyperbolic-parabolic coupled system. *Pitman Monographs e Surveys in Pure e Applied Math*, Longman-Wiley, Essex, 1995.

[12] VAZ, C.L.D. E BOLDRINI, J.L. - A mathematical analysis of a non-isothermal Alle n-Cahn type system, error estimates 2011, pre-print, accepted for publication in the Mathematical Methods in the Applied Sciences.

[13] FENG, X. E PROHL, A. - Numerical analysis of the Allen-Cahn equation and approximation for mean curvature flows. *Numerische Mathematik*, **94**, 33-65, 2003.

[14] DEIMLING, K. - *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[15] LIONS, J.L. - *Control of Distributed Singular Systems*, John Wiley e Sons Inc: New York, 1987.

[16] HENRY, D. - Geometric theory of semilinear parabolic equations. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 840, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

UM MODELO DE CAMPO DE FASES PARA O PROCESSO DE SOLIDIFICAÇÃO ISOTÉRMICA DE UMA LIGA BINÁRIA

ANDERSON L. A. DE ARAUJO * & THIAGO MARCIANO †

1 Introdução

Neste trabalho, vamos analizar a existência de solução para o modelo de campo de fase para a solidificação de uma liga binária, a uma temperatura constante. Tal modelo é devido a Warren - Boettinger [2], e envolve a concentração relativa c e um parâmetro de ordem ϕ que representa o estado de solidificação da liga, sendo igual a 0, se o sistema está em uma fase sólida e igual a 1 se estiver em uma fase líquida. A evolução no tempo de c e ϕ é dada pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = \varepsilon \Delta \phi + F_1(\phi) + c\, F_2(\phi) & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ \dfrac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div}(D_1(\phi)\nabla c + D_2(c,\phi)\nabla \phi) & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial n} = \dfrac{\partial c}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ \phi(0) = \phi_0, \;\; c(0) = c_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde Ω é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^d$, com $1 \leqslant d \leqslant 3$, e com fronteira ou bordo $\partial\Omega$, n é o vetor unitário normal à $\partial\Omega$ e $\varepsilon > 0$ é uma constante.

As funções F_1, F_2, D_1 e D_2 que aparecem em (1.1) possuem as seguintes propriedades:

(1) F_1 e F_2 são funções regulares tais que $F_i(0) = F_i(1) = 0$ para $i = 1, 2$.

(2) D_1 é uma função positiva e regular limitada por duas constantes positivas.

(3) D_2 é uma função regular tal que $D_2(c, .) = 0$ para $c = 0$ e 1.

Esses modelos estão sendo usados para descrever as transições de fase de materiais puros devido aos efeitos térmicos. Isso resulta em sistemas não lineares parabólicos para o campo de fase e temperatura. No entanto as não linearidades são diferentes das do problema (1.1).

2 Resultado de existência de solução

Provaremos a existência de uma solução fraca para o problema (1.1), supondo que as funções não-lineares F_i e $D_i = 1, 2$ são Lipschitzs e limitadas. Mais precisamente, vamos supor que

(H1) F_1, F_2 são Lipschitz e limitadas com $|F_i(r)| \leqslant M_1$ para $i = 1, 2$ e $\forall\, r \in \mathbb{R}$.

(H2) $D_1 \in C(\mathbb{R})$ é Lipschitz positiva e limitada com $0 < D_s \leqslant D_1(r) \leqslant D_1$, $\forall\, r \in$ R.

*Departamento de Matemática , UFV, MG, Brasil, e-mail: anderson.araujo@ufv.br
†Departamento de Matemática , UFV, MG, Brasil, thiago.marciano@ufv.br

(H3) $D_2 \in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ é Lipschitz e limitada com $|D_2(r_1,r_2)| \leqslant M_2, \quad \forall\,(r_1,r_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Para provar o resultado de existência, um importante resultado da teoria elíptica será usado neste trabalho, mais precisamente temos.

Lema 1. Seja $k\in\mathbb{N}$ e $u\in H^2(\Omega)$ satisfazendo que $\Delta u\in H^k(\Omega)$ e $(\partial u/\partial n)=0$ sobre $\partial\Omega$. Então $u\in H^{k+2}(\Omega)$ e existe uma constante $C>0$ independente de u tal que

$$||u||_{H^{k+2}(\Omega)} \leqslant C(||\Delta u||_{H^k(\Omega)} + ||u||_{H^k(\Omega)}). \tag{2.2}$$

Agora, podemos enunciar o principal resultado deste trabalho:

Teorema 1. Assumindo que $(H1)-(H3)$ sejam válidas, e seja $V=H^1(\Omega)$.

(1) Para qualquer $(\phi_0,c_0)\in L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ e $T>0$, existe um par de funções (ϕ,c) satisfazendo

$$\phi, c\in L^2(0,T;H^1(\Omega))\cap H^1(0,T;V'),$$

tal que $\phi(0)=\phi_0$, $c(0)=c_0$ e

$$\left\langle \frac{\partial\phi}{\partial t}, v\right\rangle_{V',V} + \varepsilon^2\int_\Omega \nabla\phi.\nabla v\ dx = \int_\Omega (F_1(\phi)+cF_2(\phi))v\ dx,$$

$$\left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, w\right\rangle_{V',V} + \int_\Omega (D_1(\phi)\nabla c + D_2(c,\phi)\nabla\phi).\nabla w\ dx = 0 \tag{2.3}$$

para todo $v,w\in H^1(\Omega)$ e q.t.p. em $(0,T)$.

(2) Para qualquer $(\phi_0,c_0)\in H^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ e $T>0$, existe um par de funções (ϕ,c) satisfazendo

$$\phi\in L^2(0,T;H^2(\Omega))\cap H^1(0,T;L^2(\Omega)),$$
$$c\in L^2(0,T;H^1(\Omega))\cap H^1(0,T;V'),$$

tal que $\phi(0)=\phi_0$, $c(0)=c_0$ e

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - \varepsilon^2\Delta\phi = F_1(\phi)+cF_2(\phi) \quad \text{q.t.p em } Q_r,$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \quad \text{q.t.p. sobre } \partial\Omega\times(0,T),$$

$$\left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, v\right\rangle_{V',V} + \int_\Omega (D_1(\phi)\nabla c + D_2(c,\phi)\nabla\phi).\nabla v\ dx = 0, \tag{2.4}$$

para todo $v\in H^1(\Omega)$ e q.t.p. em $(0,T)$.

A demostração deste resultado está em [1], e como ferramenta principal, é utilizado o método de Faedo - Galerkin.

Referências

[1] Rappaz, J. & Scheid, J. F., Existence of Solucions to a Phase-field Model for the Isotermal Solidification Process of Binary Alloy, *Mathematical Methods ih the Applied Sciences*, 23 (2000) 491-513.

[2] Warren, J. A. & Boettinger, W. J., Prediction of dendritic growth and microsegregation patterns in a binary alloy using the phase-field model, *Acta Metall. Mater.*, 43(2) (1995) 689-703.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

ESTABILIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE BERNOULLI-EULER: ASPECTOS TEÓRICOS E COMPUTACIONAIS

CARLA E. O. DE MORAES , MAURO A. RINCON * & GLADSON O. ANTUNES †

1 Introdução

A finalidade deste trabalho é estudar numericamente a estabilização interna da equação da placa de Bernoulli-Euler. Consideraremos uma placa quadrada sujeita a uma força de amortecimento agindo apenas em um sudomínio dela.

A estabilização desta equação já foi estudada por diversos pesquisadores e entre eles, podemos citar os trabalhos [1] e [4].

Não é simples construir sistemas de dimensão finita que sejam precisos, isto é, que se aproximem do modelo matemático que descreve as situações desejadas e que sejam exponencialmente estáveis, com decaimento de energia uniforme. Os sistemas aproximados obtidos utilizando o método de elementos finitos ou diferenças finitas, em geral, não são uniformemente estáveis com relação ao parâmetro de discretização. Alguns trabalhos foram realizados propondo novas ideias para contornar este problema, como em [2] e [3].

Para evitar isto, pode ser visto em [5] e [6] que adicionando um termo de viscosidade no problema numérico, as aproximações são uniformemente e exponencialmente estáveis, como desejado. Neste trabalho, a partir dos resultados obtidos em [5] e [6], será implementado um algoritmo para obtenção da solução numérica da equação de Bernoulli-Euler. O método numérico utilizado é o das diferenças finitas e serão apresentadas algumas simulações.

2 Apresentação do Problema: Placa Bidimensional Quadrada

Considere o quadrado $\Omega = (0,\pi)\times(0,\pi)$ e seja $\mathcal{O} \subset \Omega$ o retângulo $[a,b]\times[c,d]$, com $0 < a < b < \pi$ e $0 < c < d < \pi$. Denotando por $\chi_{\mathcal{O}}$ a função característica de $\mathcal{O}$, nosso objeto de estudo é modelado pelo seguinte problema:

$$\begin{cases} \ddot{\omega}(t) + \Delta^2\omega(t) + \chi_{\mathcal{O}}\dot{\omega}(t) = 0 \quad , \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0, \\ \omega(t) = \Delta\omega(t) = 0, \ \ x \in \partial\Omega, \ \ t \geq 0, \\ \omega(x,0) = \omega_0(x), \quad \dot{\omega}(x,0) = \omega_1(x), \quad \forall x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde ($\dot{}$) denota a derivada em relação ao tempo e $\Delta^2\omega$ representa o bilaplaciano de ω. Nota-se que o termo de *damping* $\chi_{\mathcal{O}}\dot{\omega}(t)$ é efetivo apenas no subconjunto $\mathcal{O} \subset \Omega$ e as últimas duas relações de (2.1) representam as condições iniciais e de contorno do problema.

A demonstração de existência e unicidade de solução de (2.1) pode ser encontrada em [6].

Como estamos interessados em estudar numericamente (2.1), assim como em [5], para discretizar o domínio espacial, consideramos uma malha uniforme com espaçamento h:

$$h = \frac{\pi}{m+1}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Denotamos por $\omega_{j,k}$ a aproximação da solução ω do sistema acima no ponto $x_{j,k} = (jh, kh)$; $j,k = 0,\ldots,m+1$. Assim, definimos $\omega_h \in V_h = \mathbb{R}^{(m^2)}$ como sendo o vetor cujas componentes são $\omega_{j,k}$, para $1 \leq j,k \leq m$, ou seja,

*Programa de Pós-Graduação em Informática , IM/NCE , UFRJ, RJ, Brasil, carlamoraesmat@gmail.com, rincon@dcc.ufrj.br
†DME, UNIRIO, RJ, Brasil, e-mail: gladsonantunes@hotmail.com

os nós da malha nos quais precisamos calcular a solução aproximada. Assim, aplicando o Método das Diferenças Finitas nas variáveis espaciais, obtemos:

$$\begin{cases} \ddot{\omega}_{j,k} + (A_{0h}\omega_h)_{j,k} + (\chi_{\mathcal{O}}\dot{\omega}_h)_{j,k} + h^2(A_{0h}\dot{\omega}_h)_{j,k} = 0, \quad 1 \leq j,k \leq m \ , \ t \geq 0 \ , \\ \\ \omega_h(0) = \omega_{0h} \quad , \quad \dot{\omega}_h(0) = \omega_{1h}, \end{cases} \tag{2.2}$$

onde A_{0h} representa a discretização, de segunda ordem, do bilaplaciano, já considerando as condições de contorno dadas em (2.1).

Note que adicionamos no sistema (2.2), o termo $h^2(A_{0h}\dot{\omega}_h)$, chamado de viscosidade numérica. Além disto, ω_{0h} e ω_{1h} são, respectivamente, aproximações suaves dos dados iniciais ω_0 e ω_1 na malha definida acima.

Segundo [5], a família de sistemas definida por (2.2) é exponencialmente uniformemente e exponencialmente estável e é sabido que a energia do sistema semi-discretizado no instante t é dada por:

$$E_h(t) = \frac{1}{2}\left\{\|\dot{\omega}_h(t)\|^2 + \|A_{0h}^{1/2}\omega_h(t)\|^2\right\}. \tag{2.3}$$

Novamente, aplicando o Método das Diferenças Finitas no sistema (2.2), obtemos um sistema de equações lineares que pode ser resolvido para cada tempo discreto $t_n = n\Delta t$ e desta forma, é possível obter uma solução aproximada para o sistema (2.1). Além disso, são feitas simulações numéricas que mostram o comportamento da placa ao longo do tempo, comprovando os resultados teóricos obtidos na literatura. Finalmente, apresenta-se uma análise de erro numérico e o decaimento de energia associada ao problema.

Referências

[1] BURQ, N; LEBEAU, G. - *Micro-local approach to the control for the plates equation*, Optimization, Optimal Control and Partial Differential Equations (Iasi, 1992), International Series of Numerical Mathematics, 107, Birkhäuser, Basel, 111-122, 1992.

[2] GLOWINSKI, R.; LI, C.H.; LIONS, J. L.; - *A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation, I. Dirichlet controls: description of the numerical methods*, Japan J. Appl. Math. 7, 1-76, 1990.

[3] INFANTE, J. A.; ZUAZUA, E. - *Boundary observability for the space semi-discretizations of the 1-D wave equation*, M2AN, 33, nº 2, 407-438, 1999.

[4] LAGNESE, J.; LIONS, J. L. - *Modelling analysis and control of thin plates*, Recherches en Mathématiques Appliquées (Research in Applied Mathematics), vol. 6, Masson, Paris, 1988.

[5] RAMDANI, K.; TAKAHASHI, M.; TUCSNAK, M. - *Internal stabilization of the plate equation in a square: the continuous and the semi-discretized problems*, J. Math. Pures Appl. 85, 17-37, 2006.

[6] RAMDANI, K.; TAKAHASHI, M.; TUCSNAK, M. - *Uniformly exponentially stable approximations for a class of second order evolution equations*, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variation, Vol. 13, nº 13, 503-527, 2007.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

BANDLIMITED MAJORANTS FOR TRUNCATED AND ODD FUNCTIONS VIA DE BRANGES SPACES

FELIPE FERREIRA * & EMANUEL CARNEIRO †

1 Introduction

We start by recalling some of the main features of de Branges' theory of Hilbert spaces of entire functions [1]. A function F analytic in the open upper half plane, $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$ has *bounded type* if it can be written as the quotient of two functions that are analytic and bounded in $\mathcal{U}$. If F has bounded type in $\mathcal{U}$ then, according to [1, Theorems 9 and 10], we have

$$\limsup_{y\to\infty} y^{-1}\log|F(iy)| = v(F) < \infty.$$

The number $v(F)$ is called the *mean type* of F. We say that an entire function $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, not identically zero, has *exponential type* if

$$\limsup_{|z|\to\infty} |z|^{-1}\log|F(z)| = \tau(F) < \infty. \tag{1.1}$$

In this case, the nonnegative number $\tau(F)$ is called the *exponential type of* F. If $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ is entire we define $F^* : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ by $F^*(z) = \overline{F(\overline{z})}$. We will say that F is *real entire* if F restricted to $\mathbb{R}$ is real valued.

A *Hermite-Biehler function* $E : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ is an entire function that satisfies the inequality

$$|E^*(z)| < |E(z)| \tag{1.2}$$

for all $z \in \mathcal{U}$. We define the *de Branges space* $\mathcal{H}(E)$ to be the space of entire functions $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ such that

$$\|F\|_E^2 := \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2\,|E(x)|^{-2}\,\mathrm{d}x < \infty\,,$$

and such that F/E and F^*/E have bounded type and nonpositive mean type in $\mathcal{U}$. This is a Hilbert space with respect to the inner product

$$\langle F, G\rangle_E := \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,\overline{G(x)}\,|E(x)|^{-2}\,\mathrm{d}x.$$

The Hilbert space $\mathcal{H}(E)$ has the special property that, for each $w \in \mathbb{C}$, the map $F \mapsto F(w)$ is a continuous linear functional on $\mathcal{H}(E)$. Therefore, there exists a function $z \mapsto K(w, z)$ in $\mathcal{H}(E)$ such that

$$F(w) = \langle F, K(w,\cdot)\rangle_E\,. \tag{1.3}$$

The function $K(w, z)$ is called the *reproducing kernel* of $\mathcal{H}(E)$. If we write

$$A(z) := \frac{1}{2}\big\{E(z) + E^*(z)\big\} \quad \text{and} \quad B(z) := \frac{i}{2}\big\{E(z) - E^*(z)\big\}, \tag{1.4}$$

then A and B are real entire functions and $E(z) = A(z) - iB(z)$.

We now consider Hermite-Biehler functions E satisfying the following properties:

*IMPA, RJ, Brasil, lipe239@gmail.com
†IMPA, RJ, Brasil, carneiro@impa.br

(P1) E has bounded type in $\mathcal{U}$;

(P2) E has no real zeros;

(P3) $E(0)$ is a real number;

(P4) $A, B \notin \mathcal{H}(E)$.

By Krein's theorem we see that if E satisfies (P1) then E has exponential type, $\tau(E) = v(E)$ and every function $F \in \mathcal{H}(E)$ has exponential type $\tau(F) \leq \tau(E)$.

2 Mathematical Results

Let $x \mapsto x_+^0$ denote the characteristic function of the positive real axis. Now we can state the main theorem.

Theorem 1. *Let $\lambda > 0$. Let E be a Hermite-Biehler function satisfying properties* (P1) - (P4) *above. Assume also that*

$$\int_0^\infty e^{-\lambda|x|} \, |E(x)|^{-2} \, \mathrm{d}x < \infty.$$

The following properties hold:

(i) If $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ is an entire function of exponential type at most $2\tau(E)$ such that $L(x) \leq x_+^0 e^{-\lambda|x|}$ for all $x \in \mathbb{R}$ then

$$\int_{-\infty}^\infty L(x) \, |E(x)|^{-2} \, \mathrm{d}x \leq \sum_{\substack{\xi > 0 \\ B(\xi)=0}} \frac{e^{-\lambda|\xi|}}{K(\xi,\xi)}, \tag{2.5}$$

where the sum on the right-hand side of (2.5) *is finite. Moreover, there exists an entire function $z \mapsto L(B^2, \lambda, z)$ of exponential type at most $2\tau(E)$ such that $L(B^2, \lambda, x) \leq x_+^0 e^{-\lambda|x|}$ for all $x \in \mathbb{R}$ and equality in* (2.5) *holds.*

(ii) If $M : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ is an entire function of exponential type at most $2\tau(E)$ such that $M(x) \geq x_+^0 e^{-\lambda|x|}$ for all $x \in \mathbb{R}$ then

$$\int_{-\infty}^\infty M(x) \, |E(x)|^{-2} \, \mathrm{d}x \geq \sum_{\substack{\xi \geq 0 \\ B(\xi)=0}} \frac{e^{-\lambda|\xi|}}{K(\xi,\xi)}, \tag{2.6}$$

where the sum on the right-hand side of (2.6) *is finite. Moreover, there exists an entire function $z \mapsto M(B^2, \lambda, z)$ of exponential type at most $2\tau(E)$ such that $M(B^2, \lambda, x) \geq x_+^0 e^{-\lambda|x|}$ for all $x \in \mathbb{R}$ and equality in* (2.6) *holds.*

References

[1] L. de Branges, *Hilbert spaces of entire functions*, Prentice-Hall, 1968.

[2] E. Carneiro and F. Littmann, Extremal functions in de Branges and Euclidean spaces, preprint.

[3] S. W. Graham and J. D. Vaaler, A class of extremal functions for the Fourier transform, Trans. Amer. Math. Soc. 265 (1981), 283–382.

[4] I. I. Hirschman and D. V. Widder, *The convolution transform*, Princeton Univ. Press, 1955.

[5] J. Holt and J. D. Vaaler, The Beurling-Selberg extremal functions for a ball in the Euclidean space, Duke Math. Journal 83 (1996), 203–247.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES EM DOMÍNIOS TRIDIMENSIONAIS COM UMA DIMENSÃO FINA

FELIPE C. MINUZZI * & JOÃO PAULO LUKASZCZYK †

1 Introdução

As equações clássicas de Navier-Stokes descrevem o movimento de um fluido homogêneo em um domínio bi ou tri dimensional sujeito a um campo de forças externos. Mais precisamente,

$$\begin{cases} u_t + u \cdot \nabla u - \mu \Delta u + \nabla p = f & ; \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,T) \\ \mathbf{div} u = 0 & ; \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & ; \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,T) \\ u(x,t) = 0 & ; \quad \forall\, x \in \partial\Omega, \forall\, t \in (0,T) \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou 3, $T > 0$, $f : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^n$ é a força externa, $u : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^n$ é o campo de velocidades, $p : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ é a pressão, $\mu > 0$ é a viscosidade do sistema e u_0 é a velocidade inicial dada. Neste sistema de equações, a condição $\mathbf{div} u = 0$ representa a incompressibilidade do fluido.

Em aplicações, domínios finos estão presentes em muitos campos, tais como mecânica dos sólidos, meteorologia, fisiologia, problemas de geofísica e dinâmica dos oceanos, entre outros.

Neste trabalho, pretende-se estudar soluções fracas em espaços do tipo Sobolev do sistema de Navier Stokes em domínios tridimensionais finos, isto é, domínios onde uma dimensão é pequena se comparada com as outras. Com o uso do método de Galerkin, encontra-se resultados com relação a existência e unicidade, bem como solução global no tempo.

2 Resultados

Considera-se, neste trabalho, $\Omega_\epsilon \subset \mathbb{R}^3$ um domínio tal que $\Omega_\epsilon = \omega \times (0,\epsilon)$, onde $\epsilon \in (0,1)$ e ω é um domíno suave de $\mathbb{R}^2$. Sejam $H_\epsilon = \left\{u \in L^2(\Omega_\epsilon);\ \mathbf{div} u = 0,\ u \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ em } \partial\Omega_\epsilon\right\}$ (onde $\mathbf{n}$ é a normal de $\partial\Omega_\epsilon$ apontada para fora), $V_\epsilon = \left\{u \in H_0^1(\Omega_\epsilon);\ \mathbf{div} u = 0\right\}$ e $D(A_\epsilon)$ o domínio do operador de Stokes A_ϵ.

O resultado fundamental referente a existência de solução fraca dado por [3] é o que segue:

Teorema 2.1. *Dados $u_0 \in H_\epsilon$ e $f \in L^2(0,T,V_\epsilon)$, então existe $u = u_\epsilon \in L^2(0,T,V_\epsilon) \cap L^\infty(0,T,H_\epsilon)$, para todo $T > 0$, solução de (1.1). Se $u_0 \in V_\epsilon$ então existe $T_\epsilon = T_\epsilon(\Omega_\epsilon, \mu, u_0, f) > 0$ tais que $u_\epsilon \in L^2(0,T_\epsilon, D(A_\epsilon)) \cap L^\infty(0,T_\epsilon,V_\epsilon)$ é a única solução de (1.1).*

Com relação a solução global no tempo, tem-se o seguinte resultado de [4]

*Programa de Pós Graduação em Matemática , UFSM, RS, Brasil, e-mail: feminuzzi@hotmail.com
†Departamento de Matemática, UFSM, RS, Brasil, e-mail: joaopaulolukas@yahoo.com.br

Teorema 2.2. *Seja* $R_\epsilon : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *uma função monótona positiva satisfazendo* $\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon R_\epsilon^2 = 0$. *Então existe* ϵ_0 *tal que para todo* $\epsilon \leq \epsilon_0$, *para todo* $u_0 \in V_\epsilon$ *e para toda* $f(t) \in H_\epsilon$ *com*

$$| A_\epsilon^{1/2} u_0 |_\epsilon^2 + | f(t) |_\epsilon^2 \leq R_\epsilon^2$$

tem-se $T_\epsilon = \infty$, *onde* $|\cdot|_\epsilon$ *é a norma em* H_ϵ.

Referências

[1] ADAMS, R.A. - *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.

[2] EVANS, L. C. - *Partial Differential Equations*, Berkeley Mathematics Lecture Notes, 1993.

[3] TEMAM, R. - *Navier-Stokes Equations Theory and Numerical Analysis*, North Holland Publisshing Company, 1979.

[4] TEMAM, R. and ZIANE, M. - *Navier-Stokes Equations in Three-Dimensional Thin Domains with Various Boundary Conditions*, Advances in Differential Equations, v. 1, n. 4, p. 499-546, 1996.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

Existência de soluções para uma classe de problemas elíticos

FRANCISCO H. S. DIAS * & MÁRCIO L. MIOTTO †

1 Introdução

No presente trabalho apresentamos condições suficientes para a existência de soluções fracas para o problema de Dirichlet :

$$(P_{h,f}) \quad \begin{cases} -\Delta u = h(x)u^q + f(x,u), & \text{em} \quad \Omega, \\ 0 \leq u \in H_0^1(\Omega),\ 0 < q < 1, \end{cases}$$

onde Δ denota o operador Laplaciano, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, $N \geq 1$, $h \in L^\infty(\Omega)$ e a função $f(x,s)$ satisfaz hipóteses apropriadas.

O problema $(P_{h,f})$ foi estudado sob os mais diversos comportamentos das aplicações h e f. Mencionamos dentre outros, os trabalhos de Brezis e Oswald em [2] onde $h(x) \equiv 0$, Brezis e Nirenberg [3] com $h(x) \equiv 1$, Ambrosetti, Brezis e Cerami [4] que consideram f como a soma de um termo sublinear com um superlinear. Por sua vez, sendo λ uma constante positiva Perera em [5] supõe $h(x) \equiv -\lambda$ e $f(x,s) \equiv g(s) \in C^1(\Omega)$, satisfazendo determinadas hipóteses, enquanto Wang em [6] considera $h(x) \equiv \lambda$, e $f(x,s)$ ímpar para $|s| \to 0$. Destacamos ainda outros trabalhos similares a esse, [7,8,9,10,11] os quais obtêm resultados de existência de soluções através de argumentos variacionais em domínios ilimitados.

As condições sobre f e h que serão utilizadas no presente trabalho, são devidas a Li, Wu e Zhou [1]. Suponhamos que:
$(h1)$ $h \in L^\infty(\Omega)$ e $h(x) \not\equiv 0$;
$(f1)$ $f(x,s) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$; $f(x,0) \equiv 0$; $f(x,s) \gneq 0$ $\forall s \geq 0, x \in \Omega$;
$(f2)$ $\lim\limits_{s\to 0^+} \dfrac{f(x,s)}{s} = \mu \in [0,\lambda_1)$; $\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{f(x,s)}{s} = \xi \in (\lambda_1, +\infty)$ uniformemente em $x \in \Omega$, onde $\lambda_1 > 0$ é o primeiro autovalor de $-\Delta$ em Ω.

2 Resultados

A seguir, enunciamos os dois resultados principais deste trabalho.

Teorema 2.1. *Suponhamos que as condições $(h1), (f1)$ e $(f2)$ sejam válidas. Então existe uma constante Λ, $\Lambda = \Lambda(\mu, q, f, N, \Omega)$ tal que para toda $h \in L^\infty(\Omega)$ com $|h|_\infty < \Lambda$, o problema $(P_{h,f})$ tem uma solução não negativa $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, com $I(u_1) > 0$ e $u_1 > 0$ q.t.p em Ω se $h(x) \geq 0$.*

Para o nosso próximo resultado, acrescentaremos a hipótese de que existe uma função $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(h2) \quad \int_\Omega h(x)(v_+)^{q+1}\, dx > 0.$$

*Mestrando em Matemática , Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brasil, kxchico@yahoo.com.br
†Departamento de Matemática , Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brasil, e-mail: miottomatica@gmail.com

Teorema 2.2. *Suponhamos que as condições* $(h1), (f1), (f2)$ *e* $(h2)$ *sejam satisfeitas. Então existe uma constante* $\Lambda = \Lambda(\mu, q, f, N, \Omega) > 0$ *tal que para toda* $h \in L^\infty(\Omega)$ *com* $|h|_\infty < \Lambda$*, o problema* $(P_{h,f})$ *tem uma solução* $u_2 \in H_0^1(\Omega)$*,* $u_2 \geq 0$ *e* $I(u_2) < 0$*. Além disso, se* $h(x) \geq 0$*, então* $u_2 > 0$ *q.t.p em* Ω*.*

Motivados por Li, Wu e Zhou [1], utilizando técnicas de minimização combinadas com o Princípio Variacional de Ekeland, Figueiredo [12] e o Teorema do Passo da Montanha, Rabinowitz [13], provamos os dois teoremas anteriores.

Observemos ainda que nas hipóteses do teorema anterior, através de uma aplicação do Princípio do Máximo Forte, Gilbarg [14], obtemos que se $h(x) \gneq 0$ existe $\Lambda > 0$ tal que para toda $h \in L^\infty(\Omega)$ com $|h|_\infty < \Lambda$, o problema $(P_{h,f})$ tem ao menos duas soluções positivas $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$, tais que $I(u_2) < 0 < I(u_2)$.

Referências

[1] LI, S., WU, S. AND ZHOU, H.S. - Solutions to semilinear elliptic problems with combined nonlinearities. *J. Differential Equations.*, **185**, 200-224, 2002.

[2] BREZIS, H. AND OSWALD, H. - Remarks on sublinear elliptic equations. *Nonlinear Anal.*, **10**, 313-376, 1983.

[3] BREZIS, A., NIRENBERG, L. - Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. *Comm. Pure Appl. Math.*, **36**, 437-477, 1983.

[4] AMBROSETTI, A., BREZIS, H. AND CERAMI, G. - Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems. *J. Funct. Anal.*, **122**, 519-543, 1994.

[5] PERERA, K. - Multiplicity results for some elliptic problems with concave nonlinearities. *J. Differential Equations.*, **140**, 133-141, 1997.

[6] WANG, Z.Q. - Nonlinear boundary value problems with concave nonlinearities near the origin. *Nonlinear Differential Equations Appl.*, **8**, 15-33, 2001.

[7] ZHOU, H.S. -Positive solution for a semilinear elliptic equation which is almost linear at infinity. *Z. Angew Math. Phys.*, **49**, 896-906, 1998.

[8] ALVES, C.O., GONÇALVES, J.V. AND MIYAGAKI, O. H. - On elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ with critical exponents. *Electron J. Differential Equations*, **9**, 1-11, 1996.

[9] ALVES, C.O., GONÇALVES, J.V. AND MIYAGAKI, O. H. - Multiple positive solutions for semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ involving critical exponents. *Nonlinear Analysis*, **34**, 593-615, 1998.

[10] ALVES, C.O. AND MIYAGAKI, O. H. - Multiple positive solutions for equations involving critical Sobolev exponent in in $\mathbb{R}^N$. *Electron J. Differential Equations*, **1997**, 1-10, 1997.

[11] MIOTTO, M.L. AND MIYAGAKI, O. H. - Multiple positive solutions for semilinear Dirichlet problems with sign-changing weight function in infinite strip domains. *Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications*, **71**, 3434-3447, 2009.

[12] FIGUEIREDO, D.G. - *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours.*, Heidelberg: Springer-Verlag, 1989.

[13] *Minimax Methods in critical point theory with applications to differential equations.*, Providence: American Mathematical Society, 1986.

[14] GILBARG, D. AND TRUDINGER, N.S. - *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1983.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

O TEOREMA DE HUTTON POLINOMIAL

GERALDO BOTELHO * & LETÍCIA G. POLAC †

1 Introdução

Um operador linear contínuo entre espaços de Banach é *aproximável* se pode ser aproximado, na norma usual de operadores, por operadores contínuos de posto finito. Em [3], Hutton provou que um operador é aproximável se, e somente se, seu adjunto é aproximável. Neste trabalho provaremos que polinômios homogêneos contínuos satisfazem essa mesma propriedade.

Sejam E e F espaços de Banach e $P\colon E \longrightarrow F$ um polinômio m-homogêneo contínuo. Em [1], Aron e Schottenloher definiram o adjunto de P como sendo o seguinte operador linear contínuo:

$$P'\colon F' \longrightarrow \mathcal{P}(^mE)\ ,\ P'(\varphi)(x) = \varphi(P(x)),$$

onde $\mathcal{P}(^mE)$ é o espaço dos polinômios m-homogêneos contínuos de E no corpo dos escalares. É claro que essa definição generaliza a noção de adjunto u' de um operador linear u. O objetivo deste trabalho é provar que um polinômio homogêneo contínuo pode ser aproximado por polinômios de posto finito se, e somente se, seu adjunto é aproximável.

As seguintes notações serão utilizadas:
- E'= dual topológico do espaço vetorial normado E.
- $\mathcal{L}(E;F)$= espaço dos operadores lineares contínuos de E em F.
- $\mathcal{P}(^mE;F)$= espaço dos polinômios m-homogêneos contínuos de E em F.
- $\mathcal{P}(^mE)$= espaço dos polinômios m-homogêneos contínuos de E sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2 Resultados

Definimos polinômios homogêneos de posto finito de acordo com a definição geral de Mujica [4, p.872]:

Definição 2.1. Sejam E e F espaços vetoriais e $U \subseteq E$. Uma aplicação $f\colon U \longrightarrow F$ tem *posto finito* se o subespaço vetorial $[f(U)]$ de F gerado pela imagem de f tem dimensão finita.

Dados espaços de Banach E e F, denotamos:
- $\mathcal{F}(E;F)$ = o conjunto de todos os operadores lineares contínuos de posto finito de E em F.
- $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(E;F)$ = o conjunto de todos os polinômios m-homogêneos contínuos de posto finito de E em F.

Vejamos primeiramente que a propriedade que desejamos provar vale para operadores/polinômios de posto finito:

Teorema 2.1. *Sejam E e F espaços de Banach e $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$. Então $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(^mE;F)$ se, e somente, se $P' \in \mathcal{F}(F';\mathcal{P}(^mE))$.*

Como estamos interessados em polinômios que podem ser aproximados por polinômios de posto finito, definimos:

Definição 2.2. Sejam E e F espaços de Banach. Um polinômio homogêneo $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$ é denominado *aproximável* se existe uma sequência $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(^mE;F)$ tal que $P_n \longrightarrow P$ na norma usual de polinômios m-homogêneos.

*Faculdade de Matemática, UFU, MG, Brasil, e-mail: botelho@ufu.br
†Faculdade de Matemática, UFU, MG, Brasil, e-mail: leticiagarciapolac@yahoo.com.br

Denotaremos por $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}({}^m E;F)$ o conjunto de todos os polinômios m-homogêneos aproximáveis de E em F. Assim $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}({}^m E;F) = \overline{\mathcal{P}_{\mathcal{F}}({}^m E;F)}$.

Fazendo $m = 1$ na definição acima, recuperamos a definição de operadores lineares aproximáveis. Nesse caso, denotaremos por $\mathcal{A}(E;F)$ o conjunto de todos os operadores aproximáveis de E em F.

A definição a seguir é devida a Pietsch [5]:

Definição 2.3. Um *ideal de operadores* $\mathcal{I}$ é uma subclasse da classe $\mathcal{L}$ de todos os operadores lineares contínuos entre espaços de Banach tal que, para todos espaços de Banach E e F, suas componentes

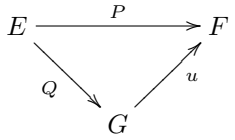
$$\mathcal{I}(E;F) := \mathcal{L}(E;F) \cap \mathcal{I}$$

satisfazem as seguintes condições:
(1) $\mathcal{I}(E;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$ que contém os operadores lineares contínuos de posto finito.
(2) A propriedade de ideal: se $u_1 \in \mathcal{L}(F_0;F)$, $u_2 \in \mathcal{I}(E_0;F_0)$ e $u_3 \in \mathcal{L}(E;E_0)$, então a composição $u_1 \circ u_2 \circ u_3$ pertence a $\mathcal{I}(E;F)$.

É claro que a classe de todos operadores lineares contínuos de posto finito $\mathcal{F}$ é um ideal de operadores que contém todos os outros ideais de operadores. E como o fecho de um ideal de operadores é também um ideal de operadors, então $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{F}}$ é também um ideal de operadores.

A demonstração do nosso teorema principal combina o teorema original de Hutton com o seguinte teorema de fatoração, provado por Botelho, Çaliskan e Moraes [2]:

Teorema 2.2. *Sejam $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I}$ um ideal de operadores, E e F espaços de Banach e $P \in \mathcal{P}({}^m E;F)$. Então $P' \in \mathcal{I}(F';\mathcal{P}({}^m E))$ se, e somente se, existem um espaço de Banach G, um operador linear $u \in \mathcal{L}(G;F)$ e um polinômio $Q \in \mathcal{P}({}^m E;G)$ tais que $u' \in \mathcal{I}(F';G')$ e $P = u \circ Q$, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo:*



Conforme anunciado, o Teorema de Hutton também vale para polinômios m-homogêneos:

Teorema 2.3. (Teorema de Hutton Polinomial) *Sejam E e F espaços de Banach e $P \in \mathcal{P}({}^m E;F)$. Então $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}({}^m E;F)$ se, e somente se, $P' \in \mathcal{A}(F';\mathcal{P}({}^m E))$.*

Este Teorema de Hutton Polinomial não foi por nós encontrado em nenhuma referência.

Referências

[1] ARON, R. AND SCHOTTENLOHER, M. - *Compact holomorphic mappings on Banach spaces and the approximation property*, J. Funct. Anal. **21** (1976), 7–30.

[2] BOTELHO, G. , ÇALISKAN, E. AND MORAES, G. - *The polynomial dual of an operator ideal*, preprint.

[3] HUTTON, C. V. - *On the approximation numbers of an operator and its adjoint*, Math. Ann. **210** (1974), 277–280.

[4] MUJICA, J. - *Linearization of bounded holomorphic mappings on Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **324** (1991) 867–887.

[5] PIETSCH, A. - *Operator Ideals*, North-Holland, 1980.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

SOBRE A IGUALDADE $\mathcal{CC}^{\text{dual}} = \mathcal{CC}$.

GISELLE MORAES R. PEREIRA *
GERALDO MÁRCIO DE AZEVEDO BOTELHO †

1 Introdução

Um ideal clássico da teoria de ideais de operadores lineares entre espaços de Banach é o ideal $\mathcal{CC}$ dos operadores completamente contínuos formado pelos operadores lineares contínuos que transformam sequências fracamente convergentes em sequências convergentes em norma. Uma característica importante deste é ideal é que o ideal $\mathcal{CC}$ não é simétrico (isto é, existe um operador completamente contínuo cujo adjunto não é completamente contínuo) nem anti-simétrico (isto é, existe um operador não completamente contínuo cujo adjunto é completamente contínuo). O objetivo deste trabalho é identificar condições sobre os espaços de Banach E e F de forma a garantir que um operador de E em F é completamente contínuo se, e somente se, seu adjunto é completamente contínuo. É imediato que a equivalência acima é verdadeira acrescentando a condição dos espaços E e F' serem espaços de Schur. Na verdade, neste caso todos os operadores de E em F satisfazem a propriedade desejada. Mais interessante é investigar situações em que a equivalência ocorre sem atingir todos os operadores entre E e F. O objetivo deste trabalho é exibir uma tal situação. Mais precisamente, mostraremos que se E for um espaço de Banach reflexivo de dimensão infinita, então: (i) um operador de E em E é completamente simétrico se, e somente se, seu adjunto é completamente simétrico; (ii) nem todo operador de E em E é completamente simétrico. Este trabalho foi baseado na dissertação [4] e nas referências [1,2,3,5].

2 Resultados

Dado um ideal de operadores $\mathcal{I}$ no sentido de Pietsch [5], seu dual é definido da seguinte forma: dados espaços de Banach E e F,

$$\mathcal{I}^{\text{dual}}(E;F) := \{u \in \mathcal{L}(E;F) : u' \in \mathcal{I}(F';E')\},$$

onde u' denota o adjunto do operador u.

Dizemos que um ideal de operadores $\mathcal{I}$ é: *simétrico* se $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^{\text{dual}}$, *anti-simétrico* se $\mathcal{I}^{\text{dual}} \subseteq \mathcal{I}$ e *completamente simétrico* se $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\text{dual}}$. É imediato que:

Proposição 2.1. *Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores para o qual existem espaços de Banach E e F e um operador $u \in \mathcal{L}(E;F)$ tal que $u \notin \mathcal{I}(E;F)$, $u' \in \mathcal{I}(F';E')$ e $u'' \notin \mathcal{I}(E'';F'')$. Então o ideal $\mathcal{I}$ não é nem simétrico nem anti-simétrico.*

Denotaremos por $\mathcal{CC}(E;F)$ o conjunto de todos os operadores $u\colon E \longrightarrow F$ completamente contínuos, isto é, $x_n \xrightarrow{w} x$ em $E \Longrightarrow u(x_n) \longrightarrow u(x)$ em F.

Chamando de Id_E o operador identidade no espaço de Banach E, é fácil verificar que $Id_{\ell_1} \in \mathcal{CC}(\ell_1;\ell_1)$, $Id_{\ell_\infty} \notin \mathcal{CC}(\ell_\infty;\ell_\infty)$ e $Id_{c_0} \notin \mathcal{CC}(c_0;c_0)$. Segue então da Proposição 2.1 que o ideal $\mathcal{CC}$ dos operadores completamente contínuos não é simétrico nem anti-simétrico.

*Faculdade de Matemática , UFU, MG, Brasil, gisellemoraes@famat.ufu.br
†Faculdade de Matemática , UFU, MG, Brasil, botelho@ufu.br

Queremos identificar condições sobre os espaços E e F de forma a garantir que $\mathcal{CC}(E;F) = \mathcal{CC}^{\text{dual}}(E;F)$. Em primeiro lugar relembre que um espaço no qual toda sequência fracamente convergente é convergente em norma é chamado de *espaço de Schur*. É imediato que:

Proposição 2.2. *Seja E um espaço de Schur. Então $\mathcal{CC}(E;F) = \mathcal{L}(E;F)$ para todo espaço de Banach F.*

Da Proposição 2.2 segue que

Proposição 2.3. *Se E e F' são espaços de Schur, então $\mathcal{CC}(E;F) = \mathcal{CC}^{\text{dual}}(E;F)$.*

Observe que, na igualdade acima, os espaços na verdade coincidem com $\mathcal{L}(E;F)$. Trabalharemos agora para obter um caso em que a igualdade vale sem que os espaços sejam iguais a $\mathcal{L}(E;F)$.

Proposição 2.4.
(a) $\mathcal{K}(E;F) \subseteq \mathcal{CC}(E;F)$ *para todos espaços de Banach E e F.*
(b) *Seja E um espaço reflexivo. Então $\mathcal{K}(E;F) = \mathcal{CC}(E;F)$ para todo espaço de Banach F.*

Demonstração: Veja [1, Proposição 7.2.8]. □

Proposição 2.5. *Sejam E e F espaços de Banach.*
(a) *Se E é reflexivo, então $\mathcal{CC}(E;F) \subseteq \mathcal{CC}^{\text{dual}}(E;F)$.*
(b) *Se F é reflexivo, então $\mathcal{CC}(E;F) \supseteq \mathcal{CC}^{\text{dual}}(E;F)$.*

Demonstração: (a) Seja $u \in \mathcal{CC}(E;F)$. Da reflexividade de E, pela Proposição 2.4(b) sabemos que $u \in \mathcal{K}(E;F)$. Pelo Teorema de Schauder, $u \in \mathcal{K}^{\text{dual}}(E;F)$, ou seja, $u' \in \mathcal{K}(F';E')$. Aplicando agora a Proposição 2.4(a) temos que $u' \in \mathcal{CC}(F';E')$, e isso significa que $u \in \mathcal{CC}^{\text{dual}}(E;F)$.
(b) Seja $u \in \mathcal{CC}^{\text{dual}}(E;F)$, ou seja, $u' \in \mathcal{CC}(F';E')$. Da reflexividade de F, e portanto de F', pela Proposição 2.4(b) sabemos que $u' \in \mathcal{K}(F';E')$, ou seja $u \in \mathcal{K}^{\text{dual}}(E;F)$. Pelo Teorema de Schauder, $u \in \mathcal{K}^{\text{dual}}(E;F) = \mathcal{K}(E;F)$, e pela Proposição 2.4(a) concluímos que $u \in \mathcal{CC}(E;F)$. □

Provamos agora o resultado principal:

Teorema 2.1. *Seja E um espaço de Banach reflexivo de dimensão infinita. Então*

$$\mathcal{CC}(E;E) = \mathcal{CC}^{\text{dual}}(E;E) \neq \mathcal{L}(E;E).$$

Demonstração: De fato, como E é espaço de Banach reflexivo, pela Proposição 2.5 temos que $\mathcal{CC}(E;E) = \mathcal{CC}^{\text{dual}}(E;E)$. E como em dimensão infinita, a bola unitária fechada B_E nunca é compacta na topologia da norma, logo $Id_E \notin \mathcal{K}(E;E)$. Pela Proposição 2.4(b) segue que $Id_E \notin \mathcal{K}(E;E) = \mathcal{CC}(E;E)$. Portanto $\mathcal{CC}(E;E) = \mathcal{CC}^{\text{dual}}(E;E) \neq \mathcal{L}(E;E)$. □

Obtemos ainda uma consequência importante para a Teoria dos Espaços de Banach:

Corolário 2.1. *Não existe espaço de Banach reflexivo de Schur de dimensão infinita.*

A demonstração desse resultado segue imediatamente da Proposição 2.2 e do Corolário 2.1.

Referências

[1] G. Botelho, D. Pellegrino, E. Teixeira, Fundamentos de Análise Funcional, SBM, 2012.
[2] A. Defant e K. Floret - *Tensor norms and operator ideals*, North-Holland, 1993.
[3] R. E. Megginson - *An introduction to Banach space theory*, Springer-Verlag, 1998.
[4] G. M. R. Pereira - *O dual de um ideal de operadores e ideais de operadores simétricos entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, UFU, 2012.
[5] A. Pietsch - *Operator ideals*, North-Holland, 1980.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

SOBRE SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES ELÍPTICAS ENVOLVENDO O N-LAPLACIANO E CRESCIMENTO CRÍTICO EXPONENCIAL

GUSTAVO DA SILVA ARAÚJO * & UBERLANDIO BATISTA SEVERO †

Neste trabalho, estudamos existência, multiplicidade e não-existência de soluções positivas, com respeito a um parâmetro positivo λ, para uma classe de problemas elípticos quasilineares em domínios limitados de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, envolvendo o operador N-laplaciano e uma não-linearidade $f(t)$ que se comporta como t^α, para algum $\alpha \in (0, N-1)$, quando $t \to 0^+$ e possui crescimento crítico exponencial do tipo Trudinger-Moser em $+\infty$. Na obtenção dos resultados, podemos destacar a utilização de teoremas do tipo minimax, métodos de sub e supersolução e um refinamento da Desigualdade de Trudinger-Moser devido a P.-L. Lions.

1 Introdução

Em diversas áreas da Matemática Aplicada, Física e Mecânica podemos encontrar fenômenos que podem ser modelados por equações que envolvem o operador p-laplaciano, $p > 1$. Tal operador surge, por exemplo, em glaciologia, no estudo dos fluidos não-newtonianos e na extração de petróleo. Para mais detalhes sobre o desenvolvimento dos aspectos físicos para problemas modelados pelo operador p-laplaciano, citamos, por exemplo, [GR] e suas referências.

Mais especificamente, estamos interessados na análise de existência, não-existência e multiplicidade de soluções fracas para a seguinte classe de problemas elípticos quasilineares:

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta_N u &=& \lambda f(u), & \text{em} \quad \Omega \\ u &>& 0, & \text{em} \quad \Omega \\ u &=& 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{P_λ}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, é um domínio limitado com fronteira suave, $\Delta_N u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{N-2}\nabla u) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{N-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$ é o operador N-laplaciano, λ é um parâmetro positivo e a não-linearidade $f(t) = h(t)e^{|t|^{N/(N-1)}}$ é uma função que satisfaz as seguintes condições: existem constantes $\alpha \in (0, N-1)$ e $t_* \in (0,1)$ tais que

(A1) $h \in C^1((0,\infty))$, $h(t) = 0$ para todo $t \leq 0$ e $h(t) > 0$ para todo $t > 0$;

(A2) a função $t \mapsto f(t)$ é não-decrescente em $(0, t_*) \cup (1/t_*, \infty)$;

(A3) $\left\{\begin{array}{ll} (1) & \lim_{t\to 0^+} \frac{h(t)}{t^\alpha} > 0 \\ (2) & \text{a aplicação } t \mapsto t^{1-N} f(t) \text{ é não-crescente em } (0, t_*); \end{array}\right.$

(A4) $\left\{\begin{array}{ll} (1) & \lim_{t\to\infty} h(t)e^{\varepsilon|t|^{N/(N-1)}} = \infty, \text{ para todo } \varepsilon > 0 \\ (2) & \lim_{t\to\infty} h(t)e^{-\varepsilon|t|^{N/(N-1)}} = 0, \text{ para todo } \varepsilon > 0; \end{array}\right.$

(A5) $\lim_{t\to\infty} h(t)te^{\varepsilon t^{1/(N-1)}} = \infty$, para todo $\varepsilon > 0$;

(A6) existem $R > 0$ e $C > 0$ tais que, para todo $s \geq R$, $F(s) \leq Cf(s)$, onde $F(s) = \int_0^s f(t)dt$.

As hipóteses $(A1) - (A6)$ sobre a não-linearidade f são basicamente consideradas por Giacomoni, Prashanth e Sreenadh em [GPS].

*Departamento de Matemática , UFPB, PB, Brasil, e-mail: gustavosa89@gmail.com
†Departamento de Matemática , UFPB, PB, Brasil, e-mail: uberlandio@mat.ufpb.br

2 Resultados

Ao analisarmos o problema (P_λ), obtivemos dois resultados que merecem destaque. O primeiro deles nos garante a existência de solução fraca para λ suficientemente pequeno e certas propriedades desta solução. O enunciado preciso deste resultado é o seguinte:

Teorema 2.1. *Se a não-linearidade f satisfaz (A1), (A2), (A3)-(1) e (A3)-(2), então existe $\lambda_0 > 0$ tal que, para qualquer $\lambda \in (0, \lambda_0)$, o problema (P_λ) possui uma única solução, digamos u_λ, com a propriedade $\|u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \leq t_*$.*

Para provar o teorema acima, associamos ao problema (P_λ) um problema auxiliar, o qual denotamos por $(\widetilde{P_\lambda})$, e, utilizando minimização de funcionais e um princípio de comparação devido a Abdellaoui e Peral em [AP], provamos que o problema $(\widetilde{P_\lambda})$ possuía uma única solução $\widetilde{u_\lambda}$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$, a qual satisfaz a condição $\|\widetilde{u_\lambda}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq t_*$.

O outro resultado do nosso estudo é o teorema a seguir, no qual conseguimos estabelecer uma condição global em relação ao parâmetro λ para que o problema (P_λ) possua multiplas soluções fracas.

Teorema 2.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, um domínio limitado com fronteira suave. Suponha que $f(t) = h(t)e^{|t|^{N/(N-1)}}$, $t \in \mathbb{R}$, satisfaz as hipóteses (A1)-(A6). Então, existe $\Lambda > 0$ tal que (P_λ) admite, pelo menos, duas soluções, digamos u_λ e v_λ, para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$, uma solução para $\lambda = \Lambda$ e nenhuma solução para $\lambda > \Lambda$.*

Na demonstração da existência da primeira solução para (P_λ), $\lambda \in (0, \Lambda)$, utilizamos um argumento de minimização local na topologia de $\mathcal{C} = C^1(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}_0(\overline{\Omega})$, onde $\mathcal{C}_0(\overline{\Omega}) = \{u \in C(\overline{\Omega}); u = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$, para mostrar que, restrito a $\mathcal{C}$, o funcional energia J_λ associado ao problema (P_λ) possuía mínimo local u_λ. Em seguida, trabalhamos no intuito de provar que u_λ é também mínimo local de J_λ em $W_0^{1,N}(\Omega)$. A prova foi feita por contradição: utilizando iteração de Moser, método dos Multiplicadores de Lagrange e resultados de regularidade de DiBenedetto [DI] e Tolksdorf [TO], obtemos uma contradição com o fato de u_λ ser mínimo local de $J_\lambda|_{\mathcal{C}}$. Para a obtenção da segunda solução, quando $\lambda \in (0, \Lambda)$, podemos destacar a utilização de uma versão generalizada do Teorema do Passo da Montanha e de um refinamento da desigualdade de Trudinger-Moser devido a P.-L. Lions (ver [CCH]). Foi necessário estudarmos também os níveis críticos e as sequências de Palais-Smale.

Diante do fato já provado de que, para $\lambda \in (0, \Lambda)$, o problema possuía solução, garantimos a existência de solução para o problema (P_Λ).

Finalmente, para garantir que o problema (P_λ) não possui solução para $\lambda > \Lambda$, fizemos uso de um argumento por contradição: utilizando, dentre outros, resultados de regularidade de Tolksdorf [TO], Princípio do Máximo de Vázquez e um método de sub e supersolução, foi possível provarmos que o primeiro autovalor de $-\Delta_N$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$ não era isolado, o que é um absurdo.

Referências

[AP] ABDELLAOUI, B.; PERAL, I. *Existence and nonexistence results for quasilinear elliptic equations involving the p-laplacian with a critical potential*, Annali di Matematica 182, 247-270 (2003).

[CCH] CERNÝ, R.; CIANCHI, A.; HENCL, S. *Concentration-compactness principles for Moser-Trudinger inequalities: new results and proofs*, Annali di Matematica, DOI 10.1007/s10231-011-0220-3 (2011).

[DI] DIBENEDETTO, E. *$C^{1,\alpha}$-local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Anal. 7, 827-850 (1983).

[GPS] GIACOMONI, J.; PRASHANTH, S.; SREENADH, K. *A global multiplicity result for N-Laplacian with critical nonlinearity of concave-convex type*, Journal of Differential Equations 232, 544-572 (2007).

[GR] GLOWINSKI, R; RAPPAZ, J. *Approximation of Nonlinear Elliptic Problem Arising in a Non-Newtonian Fluid Flow Model in Glaciology*, Math. Model. Numer. Anal. 37, 175-186 (2003).

[TO] TOLKSDORF, P. *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*, Journal of Differential Equations 51, 126-150 (1984).

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

Propriedades Assintóticas de um Sistema Semilinear de Ondas Elásticas com Potencial do Tipo Dissipativo

Jaqueline Luiza Horbach * & Cleverson Roberto da Luz †

1 Introdução

Neste trabalho encontramos taxas de decaimento para a energia total associada ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - a^2\Delta u(t,x) - (b^2-a^2)\nabla \mathrm{div}(u(t,x)) + V(x)u_t(t,x) = |u(t,x)|^{p-1}u(t,x) \\ u(0,x) = \varepsilon u_0(x) \\ u_t(0,x) = \varepsilon u_1(x) \end{cases}$$

com $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ e os coeficientes de Lamé $a > 0$ e $b > 0$ satisfazem $0 < a^2 < b^2$. No problema acima $u(t,x) = (u_1(t,x), \cdots, u_n(t,x))$ é uma função vetorial que representa o deslocamento da onda no ponto x e no instante de tempo t.

E ainda, assumiremos que o expoente do termo não-linear satisfaz as seguintes condições se $n = 2$ temos $1 + \dfrac{4}{n-1} < p < \infty$ e se $n \geq 3$ temos $1 + \dfrac{4}{n-1} < p < \dfrac{n+2}{n-2}$.

Vamos considerar dados iniciais pequenos, isso é necessário para mostrar a existência de solução global e $[u_0, u_1] \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n \times (L^2(\mathbb{R}^n))^n$ tal que $\mathrm{supp}(u_0) \cup \mathrm{supp}(u_1) \subset \{|x| \leq R\}$, onde $R > 0$ é uma constante e $|x|$ é a norma Euclidiana usual para $x \in \mathbb{R}^n$.

Para a função potencial $V(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ vamos supor que existe uma constante $C_0 > 0$ tal que $V(x) \geq \dfrac{C_0}{1+|x|}$.

A energia total associada ao sistema é

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\left(||u_t(t)||^2 + a^2||\nabla u(t)||^2 + (b^2-a^2)||\mathrm{div}(u(t))||^2\right).$$

O termo dissipativo é $\mathcal{F}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} V(x)|u_t|^2 dx$. Em todo o trabalho $||\cdot||$ denota a norma usual no espaço $(L^2(\mathbb{R}^n))^3$.

Neste trabalho mostramos estimativas de decaimento no tempo para a energia total do sistema de ondas elásticas não absorvente acima. Os casos do sistema de ondas elásticas linear e do sistema semilinear absorvente foram estudadas por Charão e Ikehata [2], nesse artigo Charão e Ikehata encontraram taxas polinomiais para a energia total.

O caminho para estudar o problema semilinear não absorvente é estudar primeiro o caso linear de maneira completa. Depois obter resultados para o caso semilinear não absorvente usando as estimativas do problema linear, combinadas com estimativas e ideias mais avançadas utilizadas em trabalhos anteriores de Todorova-Yordanov [6] e Ikehata-Todorova-Yordanov [3].

Para o caso da equação da onda com dissipação do tipo potencial

$$u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) + V(t,x)u_t(t,x) + \eta|u(t,x)|^{p-1}u(t,x) = 0,$$

existem vários trabalhos com resultados sobre o decaimento e não decaimento da energia total, podemos citar por exemplo [4], [7] para o caso $\eta = 0$. Recentemente, Todorova-Yordanov [6] obtiveram taxas de decaimento para a energia total considerando $V(x) \approx (1+|x|)^{-\gamma}$ com $0 \leq \gamma < 1$ e $\eta = 0$. Eles também estudaram o

*Departamento de Matemática , UFSC, SC, Brasil, jaqueluizah@gmail.com
†Departamento de Matemática , UFSC, SC, Brasil, cleverson.luz@ufsc.br

problema semilinear com $\eta = 1$ (ver [5]). Para o sistema de ondas elásticas em domínios exteriores, com uma dissipação localizada próximo ao infinito, Charão-Ikehata [1] obtiveram taxas de decaimento polinomial assumindo uma condição adicional sobre os coeficientes de Lamé: $b^2 < 4a^2$.

2 Existência e Unicidade de Soluções Globais e Taxas de Decaimento para a Energia Total

Usando a teoria de semigrupos obtém-se o seguinte resultado:

Teorema 1. *Suponha que p e $V = V(x)$ satisfazem as condições acima. Então, para dados iniciais $(u_0, u_1) \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n \times (L^2(\mathbb{R}^n))^n$ com suporte contido no conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n \ / \ |x| \leq R\}$, $R > 0$ fixo, a equação admite uma única solução local fraca $u = u(t,x)$, definida em algum intervalo maximal de existência $(0, T_m)$, tal que*

$$u \in C([0,T_m); (H^1(\mathbb{R}^n))^n) \cap C^1([0,T_m); (L^2(\mathbb{R}^n))^n)$$

e satisfaz a propriedade da velocidade finita de propagação $u(t,x) = 0 \quad para \quad |x| \geq bt + R\,, \quad 0 \leq t < T_m\,.$

O tempo T_m depende dos dados iniciais e vai a infinito se os dados iniciais tendem a zero.
Além disso, se $T_m < \infty$ então,

$$\limsup_{t \to T_m} \{\ ||u_t(t)||^2 + a^2||\nabla u(t)||^2 + (b^2 - a^2)||\mathrm{div}(u(t))||^2\} = \limsup_{t \to T_m} 2\mathcal{E}(t) = +\infty.$$

Teorema 2. *Assumindo as hipóteses acima, supondo que $F(n,p) = \dfrac{n(p-1) - p - 3}{p-1} > 1 - \dfrac{C_0}{b}$ se $0 < C_0 \leq b$ e ainda considerando que δ satisfazendo*

$$1 - \frac{C_0}{b} < \delta < F(n,p) \text{ se } 0 < C_0 \leq b \qquad e \qquad 0 \leq \delta < F(n,p) \text{ se } C_0 > b.$$

Então existe ε_1 tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ a equação tem uma única solução global e

$$\mathcal{E}(t) < K(1+t)^{\delta - 1}$$

para todo $t \geq 0$ e com K uma constante positiva dependendo dos dados iniciais, δ, R, p, $||V||_{L^\infty}$.

Referências

[1] Charão, R. C., Ikehata, R. - Decay of solutions for a semilinear system of elastic waves in an exterior domain with damping near infinity. *Nonlinear Analysis*, **67**, 398-429, 2007.

[2] Charão, R. C., Ikehata, R. - Energy dacay rates of elastic waves in unbounded domain with potential type of damping. *J. Math. Anal. Appl.*, **380**, 46-56, 2011.

[3] Ikehata, R., Todorova, G., Yordanov, B. - Critical Exponent for Semilinear Wave Equations with Space-Dependent Potential. *Funkcialaj Ekvacioj*, **52**, 411-435, 2009.

[4] Matsumura, A., -Energy decay of solutions of dissipative wave equations. *Japan Acad.*, **53**, 232-236, 1977.

[5] Todorova, G., Yordanov B. - Nonlinear dissipative wave equations with potential. *AMS Contemporary Math.*, **426**, 317-337, 2007.

[6] Todorova, G., Yordanov B. - Weighted L^2-estimates for dissipative wave equations with variable coefficients. *J. Diff. Eqns.*, **242**, 4497-4518, 2009.

[7] Uesaka H. - The total energy decay of solutions for the wave equation with a dissipative term. *J. Math. Kyoto Univ.*, **20**, 57-65, 1979.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

TENSOR PRODUCT STABILIZATION UNDER MULTIPLICATIVE PERTURBATION

JOÃO ZANNI * & CARLOS KUBRUSLY †

This work establishes some partial results for uniform stabilization of tensor products under multiplicative perturbation. In other words, if $T = A \otimes B$ is a tensor product we investigate which operators C and D ensures uniform stability for $ST = (C \otimes D)(A \otimes B)$.

1 Introduction

In this work an operator T is a bounded (i.e. continuous) linear transformation of a Hilbert space into itself, where $\mathcal{H}$ will denote a complex infinite-dimensional Hilbert space and $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$ is the set of all operators defined on $\mathcal{H}$. An operator $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ is uniformly stable if the power sequence $\{T^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converges to the null operator in the uniform topology (i.e., if $\|T^n\| \to 0$). The notion of "stable operator" comes from discrete-time dynamical systems. Consider an autonomous homogeneous difference equation $x_{n+1} = Tx_n$, with $x_n = x_0$ for every integer $n \geq 0$. A discrete-time invariant free bounded linear system modeled by the previous equation is uniformly stable if the Hilbert space-valued sequence $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converges to zero uniformly for all initial conditions. Equivalently $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T^n x\| \to 0$. In this case, the linear operator T and the linear model are said to be uniformly (asymptotically) stable.

The multiplicative stabilization problem investigates necessary and sufficient conditions for which ST is uniformly stable for some multiplicative perturbation $S \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$. We can rephrase this problem in terms of discrete-time dynamical systems: given a model as above, one wants to establish which class of operators S is able to make the system $x_{n+1} = STx_n$, with $x_0 = x$, uniformly stable.

This question has been under investigation for some decades, for instance, see [1], [2], [6] and the references therein. Bhaya [1] investigates multiplicative stabilization for finite dimension. Cain [2] generalizes Bhaya results for infinite-dimensional spaces. More recently, Kubrusly and Vieira [6] improved Cain's results and had given a collection of necessary and sufficient conditions for ST be uniformly stable when a proper contraction T is multiplicatively perturbated by a compact contraction S. Moreover, the investigation of stabilization of operators could bring an answer to the milestone Invariant Subspace Problem (e.g., [4] and [7]).

This paper investigates a possible generalization of the results established in [6] for tensor product properties. That is, which classes of multiplicative perturbation $S = C \otimes D$ uniformly stabilize the original tensor product $T = A \otimes B$, where $\otimes$ denotes the tensor product.

2 Stabilization of Tensor Products

In this section we summarize the main results of this note. Since the text is required to be short we will restrict ourselves to just enunciate the theorems.

Teorema 2.1. *Let $T = A \otimes B \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$, where $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ and $\mathcal{B}[\mathcal{K}]$. If one of them is uniformly stable and the other is power bounded then T is uniformly stable.*

*Departamento de Engenharia Elétrica, PUC, RJ, Brasil, jzanni@gmail.com
†Departamento de Engenharia Elétrica, PUC, RJ, Brasil, e-mail: carlos@ele.puc-rio.br

Let $S = C \otimes D \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$ be a multiplicative perturbation for the tensor product $T = A \otimes B \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$. Theorem 2.1 shows which conditions CA and DB should satisfy for ST to be uniformly stable. Thus a solution to our problem is to determine C and D which satisfy the Theorem 2.1 conditions. It can be show that result holds for several classes of contraction. In particular, Kubrusly and Vieira [6] show T is a proper contraction if and only if ST is uniformly stable for every $S = C \otimes D$ compact contraction. However, what does happen when T is not a proper contraction or even a contraction?

Let $T \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$. A class $\mathcal{S}$ of operators in $\mathcal{B}[\mathcal{H}]$ satisfy the numerical sup property if $sup_{S \in \mathcal{S}} r(ST) = w(T)$, where $r(\cdot)$ and $w(\cdot)$ denotes the spectral radius and the numerical radius, respectively. The numerical radius sup property holds for the classes of all orthogonal projections, nonnegative contraction, positive contractions and strictly positive contractions (e.g., [6]).

Teorema 2.2. *Let $T = A \otimes B \in \mathcal{B}[\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}]$, such that $A \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ is a proper contraction (i.e., $\|Ax\| < \|x\|$, $x \in \mathcal{H}$, $\|A\| \leq 1$) and $B \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ is a spectraloid operator with numerical range less than 1 (i.e., $r(B) = w(B) \leq 1$). If $C \in \mathcal{B}[\mathcal{H}]$ is a compact contraction and $D \in \mathcal{B}[\mathcal{K}]$ belongs to a class which satisfies the numerical radius sup property then ST is uniformly stable.*

Notice that spectraloid operators are not unusual. It can be shown that every normaloid operator is spectraloid (e.g., [3, p.117]). Thus all self-adjoint, unitary, normal, quasinormal, subnormal and hyponormal operators are also spectraloids.

Let $T = A \otimes B = \text{diag}(\frac{k+1}{k+2})_{k \geq 0} \otimes \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$, where $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ and B_2 is a normal operator whose spectrum is the closed unit disc $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$. It is readily verified that A is a proper contraction for which $r(A) = \|A\| = 1$. Moreover, one can show $\sigma(B) = \{0\} \cup \mathbb{D} = \mathbb{D}$ and $\|B\| = \|B_2\| = 2$. Thus B is a spectraloid non-contraction with $w(B) = 1$. In particular, $T = (A \otimes B)$ is not a contraction. On other hand, consider a compact contraction $C = \text{diag}(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ and D an operator which belongs to a class satisfying the numerical radius sup property. So $r(ST) = r(CA)r(DB) \leq r(CA)w(B) \leq r(CA) < 1$. Therefore ST is an uniformly stable operator. In other words Theorem 2.2 could be interpreted as an attempt to stabilize tensor products for a class more general than those treated in [6].

Summarizing: in the present note we investigate uniform stability for tensor products by multiplicative perturbation. This can be thought as an attempt to extent the results of [6] for tensor products.

References

[1] BHAYA, A. AND KASZKUREWICZ, E. - *On discrete-time diagonal e D-stability*, Linear Alg. Appl., 187 (1993), 87-104.

[2] CAIN, B.E. *Operators which remain convergent when multiplied by certain Hermitian operators*, Linear Algebra Appl., 297 (1999), 57-61.

[3] HALMOS, P. *A Hilbert Space Problem Book*, Springer, New York, 1982.

[4] KUBRUSLY, C. S. *An Introduction to Models and Decompositions in Operator Theory*, Birkhaüser, Boston, 1997.

[5] KUBRUSLY, C. S. *The Elements of Operator Theory*, Birkhaüser\Springer, New York, 2011.

[6] KUBRUSLY, C. S. AND VIEIRA, P. C. M *Multiplicative pertubation by contractions and uniform stability*, Z. Anal. Anwend. 26 (2007), 391-406.

[7] ZANNI, J. AND KUBRUSLY, C. S., *Considerações sobre o Problema do Subespaço Invariante*, ENAMA V (2011).

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

A lagrangian approximation scheme for balance laws

Eduardo Abreu * & John Perez †

In [4, 8, 6, 1] the authors present distinct Lagrangian formulations to the case of linear and non-linear transport flow problems; to the purely linear transport problem the space-time integral curves coincide with characteristic equations [1, 6]. Such Lagrangian approach provides a very accurate solution to purely advection problems, virtually free of numerical diffusion. They have in common the fact that the advection is treated by a characteristic tracing algorithm from a fixed Eulerian space-time control volume over each time step for evolution. In this work we provide a new view to such approach and its extension to the case of non-linear scalar balance laws of the form $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x,t))}{\partial x} = s(x,u(x,t)), \quad u(x,0) = \varphi(x),\ -\infty < x < \infty,\ t > 0$, as introduced in [3, 5], where $s(x,u) = \frac{\partial a(x)}{\partial x}$ or $s(x,u) = \frac{\partial a(x)}{\partial x}u$, $a(\cdot)$ is a bounded piecewise smooth function and f is an even convex function that satisfies $f(0) = 0$ and $f'' > 0$, $-\infty < u < \infty$. It is also worth mentioning that numerical schemes for this type of balance laws need to be able to compute efficiently and accurately steady state *or nearly steady state* solutions for which the flux gradients $\partial f(u(x,t))/\partial x$ are non-zero, but are exactly or approximately balanced by the source terms $s(x,u(x,t))$. Numerical schemes, which in turn respect the balance that occurs on the steady flow are called Well Balanced [3, 5]. Our Lagrangian approximate scheme exhibits the required property to be locally conservative.

1 Mathematical Results and Numerical Experiments

For the construction of the scheme, we consider the balance law in a generalized divergence form in space-time [2],

$$\nabla_{t,x} \begin{bmatrix} u \\ f(u) \end{bmatrix} = s(x,u), \qquad u(x,0) = \varphi(x), \tag{1.1}$$

where the functions $u(\cdot,t) \in L^p(\mathbb{R})$ for $t \geq 0$. We will consider the sequences $U^n = (U^n)_j$, $j \in \mathbb{Z}$ for $n = 0, 1, 2, \cdots$, for a given mesh $h > 0$ and a time level $t^n = \sum_{i=0}^{i=n-1} \Delta t^i$ with $t^0 = 0$. In the time level t^n, the numerical solution of u in the cells $[x^n_{j-\frac{1}{2}}, x^n_{j+\frac{1}{2}}]$ and $[\overline{x}^{n+1}_{j-\frac{1}{2}}, \overline{x}^{n+1}_{j+\frac{1}{2}}]$ are defined by,

$$U(x_j,t^n) = U^n_j = \frac{1}{h^n_j}\int_{x^n_{j-\frac{1}{2}}}^{x^n_{j+\frac{1}{2}}} u(x,t^n)\,dx \quad \text{and} \quad \overline{U}^{n+1}_j = \frac{1}{h^{n+1}_j}\int_{\overline{x}^{n+1}_{j-\frac{1}{2}}}^{\overline{x}^{n+1}_{j+\frac{1}{2}}} u(x,t^{n+1})\,dx \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{1.2}$$

The discrete counterpart of the space $L^p(\mathbb{R})$ is l^p_h, the space of sequences $U = (U_j)$, with $j \in \mathbb{Z}$, such that $\|U\|_{l^p_h} = \left(h\sum_{j\in\mathbb{Z}} |U_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < \infty$, see, e.g., [7]. In a similar way as in papers [4, 8, 6, 1], we consider finite-volume cell centers of the form $D_j = \{(t,x)\ /\ t^n \leq t \leq t^{n+1},\ \sigma_j(t) \leq x \leq \sigma_{j+1}(t)\}$ and by the divergence theorem applied over the region inside the surface in the balance law (1.1) we get the equivalence $\iint_{D_j} \nabla_{t,x}\left[u, f(u)\right]^T dV = \iint_{D_j} s(x,u)dV \Leftrightarrow \oint_{\partial D_j}\left[u, f(u)\right]^T \cdot n ds = \iint_{D_j} s(x,u)dA$, where the parameterized curves $\sigma_j(t)$ and $\sigma_{j+1}(t)$ are naturally impervious zero-flux boundaries. In addition, $\sigma_j(t)$ is the solution of the following family of ordinary differential equations $\sigma'_j(t) = \dfrac{f(u)}{u}$, with initial condition $\sigma_j(t^n) = x^n_j$ in $t^n \leq t \leq t^{n+1}$. Therefore, the space-time evolution of the balace law (1.1) is then given by the resolution of this system of ODEs jointly with (1.2), because the spatial and temporal "dimensions" are coupled through the characteristic tracing along the naturally impervious

*Advisor - Department of Applied Mathematics - IMECC, UNICAMP, SP, Brazil. e-mail: eabreu@ime.unicamp.br.
†Ph.D. Student of Applied Mathematics - IMECC/UNICAMP, e-mail: ra108979@ime.unicamp.br; Acknowledgments: This work was supported by the CAPES Scholarship, the Grant of the University of Campinas 519.292-785/11, and the FAPESP grants 2011/11897-6; 2012/19874-8; 11/23628-0: ITM-Institucion Universitaria, e-mail: jhonperez@itm.edu.co, Medellin-Colombia.

zero-flux boundaries by construction and the local approximations $\overline{U}_j^{n+1}$, $j \in \mathbb{Z}$ are projected over the original grid:

$$\overline{U}_j^{n+1} = \frac{1}{h_j^{n+1}} \left[\int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} u(x,t^n)dx + \iint_{D_j} s(x,u)dA \right], \quad U_j^{n+1} = \frac{1}{h} \left[(\frac{h}{2} - f_j^n k^n)\overline{U}_{j-1}^{n+1} + (\frac{h}{2} + f_j^n k^n)\overline{U}_j^{n+1} \right]. \quad (1.3)$$

Although the natural setting would be an implicit approach to the ODE dynamics, here we consider for simplicity the an explicit approximation [3, 5] $f_j^n = \frac{f(U_j^n)}{U_j^n} \approx \frac{f(u)}{u}$ and notice that now the curve $\sigma_j(t)$ is a straight line for f_j^n along with $k^n = \Delta t^n = t^{n+1} - t^n$. This is the basis of the new well balanced Lagrangian approximation scheme. When $f(u) = au$ and $s(x,u) = 0$ we get $f_j = a$ and by means of a simple mathematical reasoning, the above construction can be viewed as a finite difference scheme for linear hyperbolic conservation laws, which in turn we can apply linear stability by means of the Fourier analysis [7]. Indeed, after some calculation it is possible to show that this method is consistent and stable, and so convergent in the sense of Lax Equivalence Theorem [7] and we found the following Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) condition $|a\lambda| \leq \frac{1}{2}$, where $\lambda = \frac{k}{h}$. This gives some support to use $max_j|f_j^n\lambda^n| \leq \frac{1}{2}$ in the numerical experiments as a CFL-like condition for the case non-linear balance law. A very preliminary analysis of the modified equation with respect to the new scheme by means of Fourier analysis [7] reveal a resemblance of the diffusive-dispersive relation as such for upwinding schemes,

$$v_t + av_x = \frac{h^2}{2k}\left(\frac{1}{2} - \frac{a^2k^2}{h^2}\right)v_{xx} - \frac{ah^2}{3}\left(1 - \frac{a^2k^2}{h^2}\right)v_{xxx} + O(k^3). \quad (1.4)$$

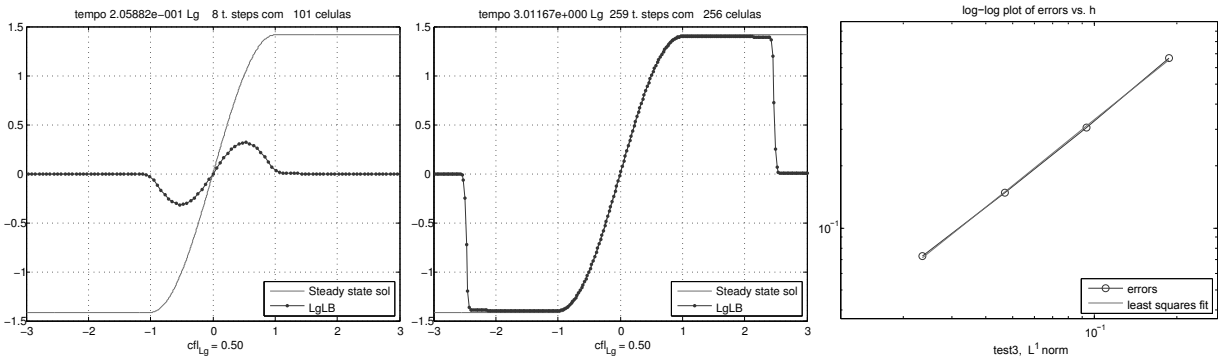


Figure 1: Approximation of (1.1) for $f(u) = u^2/2$, $a(x) = -cos^2(\pi\frac{x}{2})$, $x \in [-1,1]$ and 0 elsewhere with I.C. $u(x,0) = 0$. The new scheme captured the propagation of waves in both directions $t = 0.2$ (left) and $t = 3$ (middle) as in [3]. The numerical rate of convergence (~ 1) agrees well with the theoretical prediction (right frame).

References

[1] J. Aquino, F. Pereira, H. P. A. Souto, A. S. Francisco. "A forward tracking scheme for solving radionuclide advective problems in unsaturated porous media", Int. J. of Nuclear Energy Sci. & Tech, 3(2) (2007), 196-205.

[2] C. M. Dafermos. "Hyperbolic conservation laws in continuum physics". 2º ed. Springer, 2005.

[3] R. Donat and A. Martinez-Gavara. "Hybrid Second Schemes for Scalar Balance Laws", Journal of Scientific Computing, 48(1-3) (2011), 52-69.

[4] J. Douglas, F. Pereira and L. M. Yeh. "A locally conservative Eulerian-Lagrangian numerical method and its application to nonlinear transport in porous media", Computational Geosciences, 4 (2000), 1-40.

[5] J. M. Greenberg and A. Y. Leroux. "A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations", SIAM J. Numer. Anal., 33(1) (1996), 1-16.

[6] Ch.-S. Huang, T. Arbogast and J. Qiu. "An Eulerian-Lagrangian WENO finite volume scheme for advection problems", J. Comp. Phys., 231(11) (2012), 4028-4052.

[7] J. C. Strikwerda. "Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations", 2º ed. SIAM, 2004.

[8] H. Wang, D. Liang, R. E. Ewing, S. L. Lyons, and G. Qin. "An ELLAM approximation for highly compressible multicomponent flows in porous media. Locally conservative numerical methods for flow in porous media", Computational Geosciences, 6 (2002), 227-251.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

MÉTODO DA ENERGIA NO ESPAÇO DE FOURIER PARA A EQUAÇÃO DE PLACAS COM DISSIPAÇÃO FRACIONÁRIA

MAÍRA FERNANDES GAUER * & CLEVERSON ROBERTO DA LUZ †

1 Introdução

O objetivo principal deste trabalho é investigar propriedades assintóticas da equação de placas em $\mathbb{R}^n$ com dissipação fracionária usando o método da energia no espaço de Fourier. Esse método foi introduzido por Umeda-Kawashima-Shizuta [8], Ide-Haramoto-Kawashima [2] e Dharmawardane-Rivera-Kawashima [1].

Mais especificamente, queremos obter taxas explícitas de decaimento para a energia total e a norma $L^2(\mathbb{R}^n)$ da seguinte equação de placas

$$u_{tt}(t,x) + \Delta^2 u(t,x) + A^\theta u_t(t,x) = 0, \quad \text{em} \quad (0,+\infty)\times\mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

com dados iniciais

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n \tag{1.2}$$

satisfazendo $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^n),\ u_1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

O termo dissipativo $A^\theta u_t$ acima será especificado a seguir. Denotando por $\mathcal{F}$ a transformada de Fourier usual, para cada $0 \le \theta \le 1$ definimos o operador

$$A^\theta : H^{2\theta}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$$

dado por

$$A^\theta v(x) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2\theta}\mathcal{F}(v)(\xi))(x),$$

para todo $v \in H^{2\theta}(\mathbb{R}^n)$ e $x \in \mathbb{R}^n$. O operador A^θ é um operador não-negativo e auto-adjunto em L^2.

Os resultados obtidos e o método utilizado foram baseados no trabalho de Ikehata-Natsume (2012) [3], em que foram encontradas taxas de decaimento para a energia e solução da equação de ondas em $\mathbb{R}^n$ com dissipação fracionária. Podemos citar também outros trabalhos em relação às equações de placas semilineares, como Luz-Charão [6] e Sugitani-Kawashima [7] que encontraram várias estimativas de decaimento que incluem a energia total e a norma L^2 da solução. Em [5], Liu-Kawashima estudaram a seguinte equação de placas semilinear com termo de memória:

$$u_{tt} + \Delta^2 u + u + g * \Delta u = f(u).$$

Eles provaram a existência global e estimativas de decaimento da norma L^2 da solução usando o método da energia no espaço de Fourier e o teorema da contração. Uma situação mais geral foi considerada por Liu [4], que estudou a equação de placas acima com efeitos de inércia rotacional e um termo semilinear que inclui derivadas da função u.

*UFSC, SC, Brasil, mairagauer@gmail.com
†UFSC, SC, Brasil, cleverson.luz@ufsc.br

2 Resultados

Definimos a energia associada ao problema (1.1)-(1.2) por

$$E_u(t) = \frac{1}{2}\left(||u_t(t)||^2 + ||\Delta u(t)||^2\right)$$

no espaço $X = H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$, onde $\|\cdot\|$ representa a norma em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Usando a teoria de semigrupos, mostramos que para cada $(u_0, u_1) \in H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ o problema (1.1)-(1.2) admite uma única solução fraca $u \in C([0,+\infty); H^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,+\infty); L^2(\mathbb{R}^n))$.

Os resultados obtidos sobre o comportamento assintótico são os seguintes:

Teorema 2.1. *Sejam $n \geq 1$, $(u_0, u_1) \in (H^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)) \times (L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n))$ e $\theta \in [0,1]$. Então*

$$E_u(t) \leq C(1+t)^{-\frac{n}{4-2\theta}}||u_1||^2_{L^1} + C(1+t)^{-\frac{n+4}{4-2\theta}}||u_0||^2_{L^1} + Ce^{-\eta t}(||u_1||^2 + ||\Delta u_0||^2), \quad \forall\, t \geq 0,$$

onde $C > 0$ e $\eta > 0$ são constantes.

Teorema 2.2. *Seja $n \geq 5$ e $\theta \in [0,1]$. Se $(u_0, u_1) \in (H^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)) \times (L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n))$, então a seguinte estimativa é válida:*

$$||u(t)||^2 \leq C(1+t)^{-\frac{n-4}{4-2\theta}}||u_1||^2_{L^1} + C(1+t)^{-\frac{n}{4-2\theta}}||u_0||^2_{L^1} + Ce^{-\eta t}(||u_0||^2 + ||u_1||^2), \quad \forall\, t \geq 0,$$

onde $C > 0$ e $\eta > 0$ são constantes.

Referências

[1] DHARMAWARDANE, P. M. N., RIVERA, J.E.M. AND KAWASHIMA, S. - Decay property for second order hyperbolic systems of viscoelastic materials., *J. Math. Anal. Appl.*, **366**, No. 2, 621-635, 2010.

[2] IDE, K., HARAMOTO, K. AND KAWASHIMA, S. - Decay property of regularity-loss type for dissipative Timoshenko system, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **18**, 647-667, 2008.

[3] IKEHATA, R AND NATSUME, M. - *Energy Decay Estimates for Wave Equations with a Fractional Damping*, *Differential and Integral Equations*, **25**, No 9/10, 939-956, 2012.

[4] LIU, Y. - Decay of solutions to an inertial model for a semilinear plate equation with memory, *J. Math. Anal. Appl.*, **394**, 616-632, 2012.

[5] LIU, U. AND KAWASHIMA, S. - Decay property for a plate equation with memory-type dissipation, *Kinet. Relat. Models*, **4**, 531-547, 2011.

[6] DA LUZ, C. R. AND CHARÃO, R.C. - Asymptotic properties for a semilinear plate equation in unbounded domains, *J. Hyperbolic Diff. Eqns.,* **6**, 269-294, 2009.

[7] SUGITANI, Y. AND KAWASHIMA, S. - Decay estimates of solutions to a semi-linear dissipative plate equation, *J. Hyperbolic Diff. Eqns.,* **7**, 471-501, 2010.

[8] UMEDA, T., KAWASHIMA, S. AND SHIZUTA, Y. - On the decay of solutions to the linearized equations of electro-magneto-fluid dynamics. *Japan J. Appl. Math.*, **1**, 435-457, 1984.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

TEORIA E SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE ONDA NÃO-LINEAR

NATANAEL P. QUINTINO * & IVO F. LOPEZ † & MAURO A. RINCON ‡

1 Introdução

Neste trabalho analisamos numericamente a equação da onda não-linear

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + |u|^{\rho} = f \quad \text{em} \quad Q, \quad \rho > 1, \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \\ u(0,x) = u_0(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x), \quad \text{para} \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $Q = (0,T)\times\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\quad T > 0$, com Ω sendo um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ possuindo fronteira Γ e $\Sigma = (0,T)\times\Gamma$. A solução u do Problema (1.1) é uma função que depende das variáveis temporal t e espacial x.

Quando $\rho = 2$ e $f = 0$, o Problema (1.1) tem solução desde que as condições iniciais u_0 e u_1 sejam suficientes pequenas, ver Lions [1].

Em Medeiros et all [3], foi demonstrada a existência de solução global para o Problema (1.1) sujeita a restrições envolvendo as normas de u_0, u_1 e f. O resultado se aplica para $\rho > 1$, com n igual a 1 ou 2, e, também, com restrições adicionais em ρ, para $n \geq 3$.

Neste trabalho, investigamos o comportamento de soluções numéricas para o Problema (1.1) considerando dados iniciais satisfazendo a restrição proposta em [3] e, também, para dados iniciais com norma maior.

2 Método Numérico

Usando o Método de Galerkin associado à formulação variacional do Problema (1.1) definindo como funções base polinômios lineares por partes, aplicando o Métodos dos Elementos Finitos (MEF) em relação à variável espacial x e definindo as matrizes associadas, obtemos o sistema de equações diferenciais ordinárias para cada $t \in (0,T)$ fixo dado por

$$Ad''(t) + Bd(t) + Q(d(t)) = F(t),$$

onde A e B são matrizes quadradas do tipo tridiagonal, para o caso unidimensional, e de banda, para o caso bidimensional; F, vetor dependente de t; e Q, vetor dependente da incógnita $d(t)$. Aplicando o Método de Newmark, método que utiliza uma aproximação de ordem quadrática para a segunda derivada temporal, ver Logan [2] ou Rincon et all [3], podemos discretizar o sistema de EDO obtendo um sistema não-linear. O sistema não-linear é resolvido para $t_n = n\Delta t$, utilizando o Método de Newton Modificado.

Neste trabalho buscamos investigar se, da mesma forma que nos resultados analíticos citados, obteríamos soluções numéricas limitadas quando normas de u_0, u_1 e f fossem menores que uma dada restrição e, também, verificar se quando estas normas fossem maiores, a solução se comportaria como não limitada e, até mesmo, não existiria para todo tempo $T > 0$. Os trabalhos analíticos mostravam que se a solução $u(t)$ fosse positiva, esta seria limitada,

*Programa de Pós Graduação em Informática, UFRJ, RJ, Brasil, natanael_quintino@hotmail.com
†Instituto de Matemática , UFRJ, RJ, Brasil, ivolopez@ufrj.br
‡Instituto de Matemática , UFRJ, RJ, Brasil, rincon@dcc.ufrj.br

mas esta situação claramente não é esperada em um problema de evolução de ondas. Por outro lado, especulava-se se a existência de soluções não limitadas estaria relacionada com uma predominância de valores negativos para a solução $u(x,t)$.

Nos experimentos numéricos realizados, obtivemos solução limitada para normas de u_0, u_1 e f menores, ver Figura (1). Por outro lado, mesmo no caso homogêneo, com combinações de u_0 e u_1 com normas maiores, a solução numérica evolui oscilando inicialmente e, aos poucos, se torna predominantemente negativa e tem norma crescendo com taxas cada vez maiores e apresentando pouca oscilação, ver Figura (2). Para valores de ρ maiores o crescimento da norma da solução com o tempo se acelera.

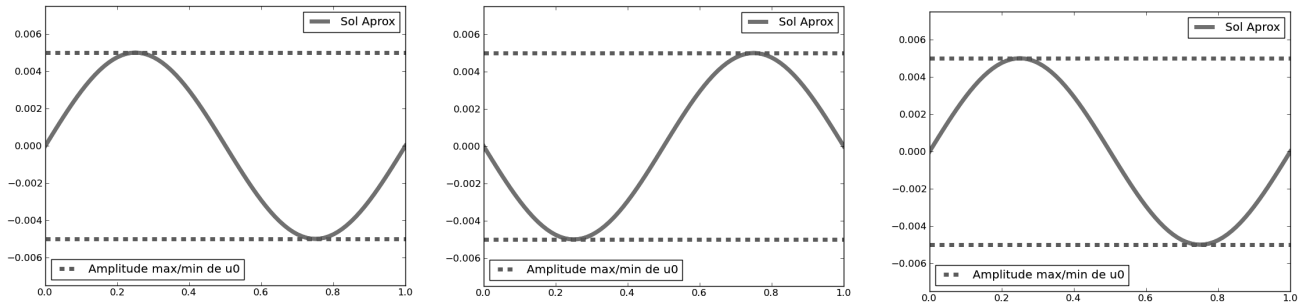


Figura 1: Gráfico $x \times u_m(t_n, x)$, para $\rho = 2$ e $n = 0, \tau/2$ e τ, respectivamente, com $\tau = 160$ sendo o total de passos no tempo, $|u_0| < 0,005$ e $|u_1| = 0$

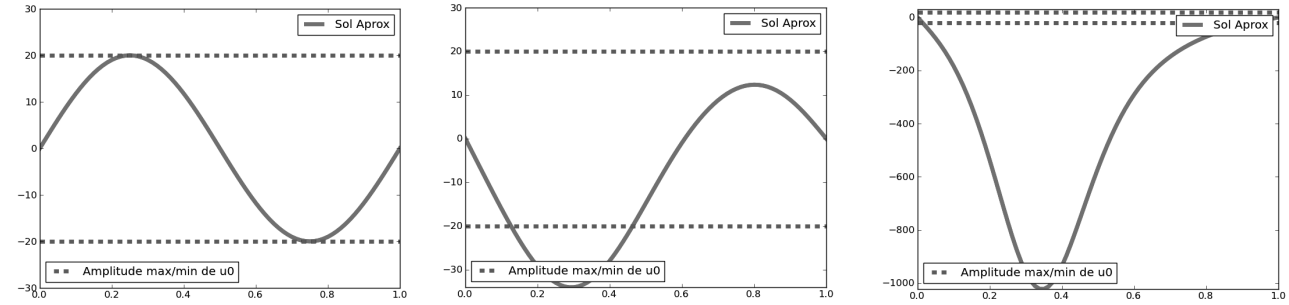


Figura 2: Gráfico $x \times u_m(t_n, x)$, para $\rho = 2$ e $n = 0, \tau/2$ e τ, respectivamente, com $\tau = 160$ sendo o total de passos no tempo, considerando $|u_0| < 20$ e $|u_1| = 0$

Referências

[1] LIONS, J. L. - *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéares.*, Dunod-Gauthier Villars, Paris, First edition, 1969.

[2] LOGAN, D. L. - *A first course in the finite elements method.*, Thomson, Toronto, Fourth edition, 2007.

[3] MEDEIROS, L. A. AND LIMACO, J. AND FROTA, C. L. - On wave equations witthout global a priori estimates. *Boletim da sociedade paranaense de matemática*, **30**, 19-32, 2012.

[4] RINCON, M. A. AND LIU, I. - *Introdução ao método de elementos finitos - computação e análise em equações diferenciais parciais.*, Editora IM/UFRJ, Rio de Janeiro, 3th edition, 2013.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

ESTABILIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE BERGER-TIMOSHENKO COMO LIMITE SINGULAR DA ESTABILIZAÇÃO UNIFORME DO SISTEMA DE VON-KÁRMÁN PARA VIGAS *

PAMMELLA QUEIROZ DE SOUZA †

Nesse trabalho estamos interessados em analisar o seguinte sistema de Von-Kármán para vibrações de vigas que ocupa o intervalo $(0, L)$:

$$\begin{cases} \varepsilon v_{tt} - \left[v_x + \frac{1}{2}w_x^2\right]_x = 0, & 0 < x < L, \ \ t > 0, \\ w_{tt} + w_{xxxx} - w_{xxtt} - \left[\left(v_x + \frac{1}{2}w_x^2\right) w_x\right]_x = 0, & 0 < x < L, \ \ t > 0, \end{cases} \tag{0.1}$$

sujeito a condições de contorno. Em (0.1), $v = v(x,t)$ representa a deformação longitudinal, $w = w(x,t)$ a transversal e $\varepsilon > 0$ é um parâmetro.

Em [2] e [3] foi provado que, quando $\varepsilon \to 0$, e para condições de contorno apropriadas, a solução $w = w^\varepsilon$ de (0.1) converge (em uma topologia adequada) para a solução do modelo de Berger-Timoshenko para vibrações transversais de vigas:

$$w_{tt} + w_{xxxx} - w_{xxtt} - \left(\frac{1}{2L}\int_0^L w_x^2 dx\right) w_{xx} = 0. \tag{0.2}$$

É importante notar que esse comportamento do sistema limite é muito sensível às condições de contorno. De fato, como mostrado em [3], para alguns casos, o limite w obedece a seguinte equação linear de viga

$$w_{tt} + w_{xxxx} - w_{xxtt} = 0.$$

Os resultados que iremos abordar são tratados em [1] e concerne na análise de algumas propriedades analíticas para o modelo de Berger-Timoshenko com dissipação. Mais precisamente, estudamos existência e unicidade de solução e a estabilização uniforme, em relação a ε, do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \varepsilon v_{tt} = \left[v_x + \frac{1}{2}w_x^2\right]_x - \varepsilon^\alpha v_t, & 0 < x < L, \ \ t > 0, \\ w_{tt} + w_{xxxx} - w_{xxtt} = \left[\left(v_x + \frac{1}{2}w_x^2\right) w_x\right]_x - w_t + w_{xxt}, & 0 < x < L, \ \ t > 0, \\ v(0,t) = v(L,t) = 0, & t > 0, \\ w(0,t) = w(L,t) = w_{xx}(0,t) = w_{xx}(L,t) = 0, & t > 0, \\ v(x,0) = v_0(x), \ v_t(x,0) = v_1(x), & 0 < x < L, \\ w(x,0) = w_0(x), \ w_t(x,0) = w_1(x), & 0 < x < L. \end{cases} \tag{0.3}$$

A existência e unicidade de solução é garantida no seguinte resultado:

Teorema 0.1. *Consideremos $\varepsilon > 0$, $0 \le \alpha \le 1$ e $(v_0, v_1, w_0, w_1) \in \mathcal{X} = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times \left[H^2 \cap H_0^1(0,L)\right] \times H_0^1(0,L)$, então o problema (0.3) tem única solução (fraca) na classe $(v, v_t, w, w_t) \in \mathcal{C}([0,\infty); \mathcal{X})$. Além disso, a energia total $E_\varepsilon(t)$ dada por*

$$E_\varepsilon(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left[\varepsilon {v_t}^2 + w_t^2 + w_{xt}^2 + w_{xx}^2 + \left(v_x + \frac{1}{2}w_x^2\right)^2\right] dx$$

*Esse trabalho é uma parte da dissertação de mestrado na Universidade Federal da Paraíba, 2012

†Programa de Pós-Graduação em Matemática, UFPB, PB, Brasil, pammellaqueiroz@gmail.com

obedece a lei de dissipação de energia

$$\frac{dE_\varepsilon(t)}{dt} = -\int_0^L \left[\varepsilon^\alpha v_t^2 + w_t^2 + w_{xt}^2\right] dx.$$

Para mostrar a existência de solução usamos a teoria de semigrupo.

O decaimento exponencial uniforme da solução é garantido como no seguinte resultado:

Teorema 0.2. *Seja $\{v, w\}$ a solução global do problema (0.3) com dados iniciais no espaço $\mathcal{X}$. Suponhamos que $0 \leq \alpha \leq 1$. Então, existem constantes positivas $c > 0$ e $\mu > 0$, tais que, para $t > 0$ e $0 < \varepsilon < 1$,*

$$E_\varepsilon(t) \leq cE_\varepsilon(0)e^{-\frac{\mu}{1+\varepsilon^\alpha E_\varepsilon(0)}t}.$$

É também natural investigar o comportamento da taxa de decaimento quando a dissipação aparece nas condições de contorno. Por isso, vamos analisar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \varepsilon v_{tt} = \left[v_x + \frac{1}{2}w_x^2\right]_x, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ w_{tt} + w_{xxxx} - w_{xxtt} = \left[\left(v_x + \frac{1}{2}w_x^2\right) w_x\right]_x, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ v(0,t) = w(0,t) = w_x(0,t) = 0, & t > 0, \\ \left[v_x + \frac{1}{2}w_x^2\right](L,t) = -\varepsilon^\alpha v_t(L,t), & t > 0, \\ w_{xx}(L,t) = -w_{xt}(L,t), & t > 0, \\ \left[w_{xxx} - w_{xtt} - \left(v_x + \frac{1}{2}w_x^2\right) w_x\right](L,t) = w_t(L,t), & t > 0, \\ v(x,0) = v_0(x), v_t(x,0) = v_1(x), & 0 < x < L, \\ w(x,0) = w_0(x), w_t(x,0) = w_1(x), & 0 < x < L. \end{cases} \tag{0.4}$$

Uma vez que o problema (0.4) está bem posto, analisamos a taxa de decaimento uniforme (em relação a ε) para o sistema (0.4) por meio do seguinte resultado:

Teorema 0.3. *Seja $\{v, w\}$ solução global (fraca) do sistema (0.4). Suponhamos que $0 \leq \alpha \leq 1$. Então existem constantes positivas $c, \mu > 0$ tais que, para $t > 0$ e $0 < \varepsilon < 1$,*

$$E_\varepsilon(t) \leq cE_\varepsilon(0)e^{-\frac{\mu}{1+\varepsilon^\alpha E(0)}t}.$$

Referências

[1] PERLA MENZALA, G., PAZOTO, A. F. AND ZUAZUA, E. - Stabilization of Berger-Timoshenko's equation as limit of the uniform stabilization of the Von Kármán system of beams and plates. *M2AN Math. Model. Numer. Anal*, **36 (4)** 657-691, 2002.

[2] PERLA MENZALA, G., AND ZUAZUA, E. - Timoshenko's beam equation as limit of a nonlinear one-dimensional von Kármán system. *Roy. Soc. Edinburg Sect*, **A 130** 855-875, 2000.

[3] PERLA MENZALA, G., AND ZUAZUA, E. - The beam equation as a limit of 1-D nonlinear Von Kármán model. *Appl. Math. Lett*, **12** 47-52, 1999.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

OPERADORES HIPERCÍCLICOS DEFINIDOS EM ESPAÇOS DE FRÉCHET

RAFAELA N. BONFIM * & VINÍCIUS V. FÁVARO †

Sejam E um espaço de Fréchet e T um operador linear contínuo em E (lembrando que um espaço de Fréchet é um espaço vetorial topológico, localmente convexo, metrizável e completo). Diremos que T é *hipercíclico* se, para algum elemento $x \in E$, a *órbita de x sob T*, dada por $Orb(x,T) = \{x, Tx, T^2x, ...\}$, for densa em E. Nesse caso, tal elemento $x \in E$ será chamado um *vetor hipercíclico para T*.

Nos últimos 25 anos, diversos autores vêm estudando resultados nas mais diversas direções envolvendo hiperciclicidade. Uma excelente referência para consulta de resultados envolvendo hiperciclicidade é [3]. O termo hiperciclicidade foi utilizado pela primeira vez por B. Beauzamy em [1] e foi motivado pelo conhecido conceito de ciclicidade na teoria de operadores em espaços de Hilbert que é bastante usado no estudo de subespaços T-invariantes.

O primeiro exemplo de operador hipercíclico apareceu em 1929 no trabalho [2] de Birkhoff, apesar de não aparecer nessa linguagem de hiperciclicidade que utilizamos hoje. Essencialmente, ele mostrou a existência de uma função f no espaço de Fréchet $H(\mathbb{C})$ das funções inteiras definidas em $\mathbb{C}$, munido da topologia compacto-aberta, tal que o conjunto $\{f(z), f(1+z), ..., f(n+z), ...\}$ é denso em $H(\mathbb{C})$.

Neste trabalho, apresentaremos a demonstração detalhada deste exemplo devido a Birkhoff a fim de comprovar a dificuldade que é, na maioria das vezes, mostrar que um dado operador T num espaço de Fréchet é hipercíclico exibindo o vetor cuja órbita é densa no espaço. Depois provaremos um Critério Geral de Hiperciclicidade e, como caso particular, obteremos o Critério de Kitai [4], que é uma ferramenta extremamente útil para provar a hiperciclicidade de operadores.

1 Resultados

Aqui listamos os principais resultados deste trabalho. Começamos com o enunciado preciso para o problema de Birkhoff:

Teorema 1.1. ***(Birkhoff)*** *Existe uma função $f \in H(\mathbb{C})$ com a seguinte propriedade: Para qualquer $g \in H(\mathbb{C})$ e $\varepsilon > 0$ dados, e para todo $R > 0$ existe um número natural n tal que $\mid f(z+n) - g(z) \mid < \varepsilon$ qualquer que seja $z \in \mathbb{C}$ com $\mid z \mid \leq R$. Em outras palavras, o operador $L : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ dado por $L(f)(z) = f(z+1)$, $\forall z \in \mathbb{C}$, é hipercíclico.*

Vejamos agora um critério geral de hiperciclicidade e o caso particular conhecido como Critério de Kitai.

Teorema 1.2. ***(Critério de Hiperciclicidade)*** *Seja T um operador linear contínuo em um espaço de Fréchet E separável. Suponhamos que existam subconjuntos densos Z e Y de E, uma sequência de inteiros positivos $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e uma família de aplicações $S_{n_k} : Z \to Z$ tais que*

(i) *para cada $y \in Y$, $T^{n_k} y \mapsto 0$, quando $k \to \infty$;*

(ii) *para cada $z \in Z$, $S_{n_k} z \mapsto 0$, quando $k \to \infty$;*

(iii) *$T^{n_k} \circ S_{n_k} z \mapsto z$, quando $k \to \infty$, para todo $z \in Z$.*

*Instituto de Matemática , UFU, MG, Brasil, rafaelanevesbonfim@yahoo.com.br
†FAMAT, UFU, MG, Brasil, e-mail: favaro@famat.ufu.br

Então T é hipercíclico.

Corolário 1.1. ***(Critério de Kitai)*** *Seja T um operador linear contínuo em um espaço de Fréchet E separável. Suponhamos que existam subconjuntos densos Z e Y de E e que exista uma aplicação $S : Z \to Z$ tal que*

(i) *para cada $y \in Y$, $T^n y \mapsto 0$, quando $n \to \infty$;*

(ii) *para cada $z \in Z$, $S^n z \mapsto 0$, quando $n \to \infty$;*

(iii) $T \circ S = Id_z$.

Então T é hipercíclico.

Referências

[1] BEAUZAMY , B. - *Un opérateur, sur l'espace de Hilbert, dont tous les polynômes sont hypercycliques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 303 (1986) 923-925.

[2] BIRKHOFF, G. D. - *Démonstration d'un théoreme élémentaire sur les fonctions entiéres*, C. R. Acad Sci., Paris 189 (1929) 473-475.

[3] COSTA, D. C. B. - *Operadores hipercíclicos em espaços vetoriais topológicos*, Dissertação de mestrado, USP, São Paulo, 2007.

[4] KITAI, C. - *Invariant closed sets for linear operators*, Thesis, University of Toronto, Toronto, 1982.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

BOUNDARY OBSERVABILITY OF STAR SHAPED SOURCES IN THE MODIFIED HELMHOLTZ EQUATION

ROBERTO M. G. SILVA * & NILSON C. ROBERTY †

1 Introduction

In 1938, a well known result, due Novikov, says that if we consider the problem of reconstruction of an unknown characteristic source inside a domain modelled by Poisson equation with a source given by a non homogeneous characteristic star-shaped function, then this kind of source can be reconstructed uniquely from the Cauchy boundary data. In this work we assume that the model is given by a modified Helmholtz equation, in which the Laplacian operator is perturbed by an absorption term, and prove an uniqueness result for the case of characteristic source. The main applications are in stationary and transient inverse problems modelled with partial differential equations.

Let $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ be the open unitary ball centred at the origin. The inverse problem for the modified Helmholtz operator is, given Cauchy datum $(g, g_\nu) \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Omega)$, to find $(u, f) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ such that

$$\begin{cases} -\Delta u + \kappa^2 u = & f, & \text{in } \Omega \\ u = & g, & \text{on } \partial\Omega \\ \partial_\nu u = & g_\nu, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

This problem had been studied for generic sources by Alves, Martins and Roberty, [3], who showed that it is useless to change the input Dirichlet data g. Without loss of generality, we can consider $d = 2$. The unique information available is given by only one measurement, say, $(0, g_\nu)$. Also, considering this data the unique available boundary information, there exist a very large class of solutions $(u, f) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ satisfying equation (1.1), where $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) | u(1, \theta) = 0, \theta \in [-\pi, \pi)\}$.

Lemma 1.1. *Let $H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega);\ (-\Delta + \kappa^2)v = 0\}$ and $H_0^2(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega); u(1, \theta) = 0, u'(1, \theta) = 0, \theta \in [-\pi, \pi)\}$. If κ^2 and κ^4 are not eigenvalues of the laplacian and bilaplace operators, respectively, then,*

$$L^2(\Omega) = H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega) \oplus (-\Delta - \kappa^2)(H_0^2(\Omega)).$$

Proof : Note that, by Green's Identity, $\int_\Omega f v dx = -\int_{\partial\Omega} g_\nu v d\sigma$, and, if $f \in (H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega))^\perp$, then $\int_\Omega f v dx = 0$. In this way, we can consider the following decomposition, $L^2(\Omega) = H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega) \oplus (H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega))^\perp$. For more information, see [3], where it is shown that $(H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega))^\perp = \overline{(-\Delta - \kappa^2)(H_0^2(\Omega))}^{L^2(\Omega)}$. □

Therefore we can investigate problem (1.1) by studying the following fourth order Dirichlet problem:

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \kappa^4 u = & -\Delta f - \kappa^2 f, & \text{in } \Omega \\ u = & 0, & \text{on } \partial\Omega \\ \partial_n u = & g_n, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

2 Mathematical Results

Lemma 2.1. *Let J_m be the Bessel function of the first kind and I_m be the modified Bessel function. Then*

*Nuclear Engineering Program, COPPE , UFRJ, RJ, Brasil, rmamud@con.ufrj.br
†Nuclear Engineering Program, COPPE , UFRJ, RJ, Brasil, nilson@con.ufrj.br

(i) $\{\phi_m^l(r,\theta) = J_m(\mu_m^l r)e^{im\theta}; m \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{N}$ *and* μ_m^l *root of* $J_m(r) = 0\}$ *forms a orthogonal basis for the space* $\{\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega);\ \phi(1,\theta) = 0,\ \theta \in [-\pi,\pi)\}$ *which is dense in* $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$.

(ii) $\{\xi_m^l(r,\theta) = [J_m(\kappa_m^l)I_m(\kappa_m^l r) - I_m(\kappa_m^l)J_m(\kappa_m^l r)]e^{im\theta}; m \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{N}$ *and* κ_m^l *root of* $J_m(x)I_m^{'}(x) - I_m(x)J_m^{'}(x) = 0\}$, *forms a orthogonal basis for the space* $\{\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega);\ \phi(1,\theta) = 0,\ \phi'(1,\theta) = 0,\ \theta \in [-\pi,\pi)\}$ *which is dense in* $H_0^2(\Omega) \subset L^2(\Omega)$.

Lemma 2.2. *Define*

$$\begin{cases} \psi_m^l(r) := \frac{1}{2}(J_m(\kappa_m^l)I_m(\kappa_m^l r) - I_m(\kappa_m^l)J_m(\kappa_m^l r)), \\ \varphi_m^l(r) := \frac{1}{2}(J_m(\kappa_m^l)I_m(\kappa_m^l r) + I_m(\kappa_m^l)J_m(\kappa_m^l r)). \end{cases} \tag{2.3}$$

Then,

(i) If $l_1 \neq l_2$, *then* $\int_0^1 \psi_m^{l_1}(r)\psi_m^{l_2}(r)rdr = -\int_0^1 \varphi_m^{l_1}(r)\varphi_m^{l_2}(r)rdr$, *else,* $\|\psi_m^{l_2}\|_{L^2(\Omega)} = \|\varphi_m^{l_2}\|_{L^2(\Omega)}$;

(ii) $(\kappa_m^{l_2})^2 \int_0^1 \varphi_m^{l_2}(r)\psi_m^{l_1}(r)rdr = (\kappa_m^{l_1})^2 \int_0^1 \varphi_m^{l_1}(r)\psi_m^{l_2}(r)rdr$ *and* $\int_0^1 (\psi_m^l(r)\varphi_m^l(r))'r^n dr = 0$ *for* $n \geq 1$.

Theorem 2.1. *Let* $\hat{g}_\nu^m = \int_{-\pi}^{\pi} g_\nu(\theta)\exp(-im\theta)d\theta$, *and*

$$(u_0, f_0)(r,\theta) = \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{g}_\nu^m}{2\kappa\pi} \frac{J_m(\kappa)I_m(\kappa r) - I_m(\kappa)J_m(\kappa r)}{J_m(\kappa)I_m'(\kappa) - I_m(\kappa)J_m'(\kappa)} \exp(im\theta), - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa\hat{g}_\nu^m}{\pi} \frac{I_m(\kappa)J_m(\kappa r)}{J_m(\kappa)I_m'(\kappa) - I_m(\kappa)J_m'(\kappa)} \exp(im\theta) \right).$$

Then (u_0, f_0) *is a particular solution of inverse problem (1.1). Furthermore, given Cauchy data* $(0, g_\nu(\theta))$, *the solution of problem (1.1) in* $H_0^1(\Omega) \times H_{-\Delta-\kappa^2}(\Omega)$ *is unique.*

Remark 2.1. *A general* $L^2(\Omega)$ *source solution will belong in the following linear manifold*

$$f = f_0 + h \in \{f_0\} \oplus \overline{(-\Delta - \kappa^2)(H_0^2(\Omega))}^{L^2(\Omega)} = \{f_0\} \oplus (H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega))^\perp,$$

in which will have the following representation $f = f_0 + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^{+\infty} h_m^l [J_m(\kappa_m^l)I_m(\kappa_m^l r) - I_m(\kappa_m^l)J_m(\kappa_m^l r)]e^{im\theta}$.

Definition 2.1. *Let* $\mathcal{C}_s(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ *some class of functions that depends on some parameter* s. *We say that* $\mathcal{C}_s(\Omega)$ *is an uniqueness class if there exist an unique* $h_0 \in L^2(\Omega)$, *such that* $h_0 \in \mathcal{C}_s(\Omega) \bigcap \left(\{f_0\} \oplus (H_{-\Delta+\kappa^2}(\Omega))^\perp\right)$.

An example of a such class is the set of star shaped characteristic functions $\mathcal{C}_\omega(\Omega)$, which has been investigated with generalized Fourier series representation. Functional properties of the integral equation for the Source-to-Neumann Operator is investigated. Numerical experiments related with centroid and parametric star shaped boundary reconstruction is presented.

References

[1] ISAKOV, V. - *Inverse sources problems*, Mathematical Surveys and Monographs, 34, AMS, 1990.

[2] LEBEDEV, N. N. - *Special functions and their applications*, Prentice Hall, N.J, Seleted Russian publications in Mathematical Sciences, 1965.

[3] ALVES, C. J. S., MARTINS, N. F. M. AND ROBERTY, N. C. - Full identification of acoustic sources with multiple frequencies and boundary measurements. *Inverse Problems Imaging*, **3**, 275-294, 2009.

[4] ROBERTY, N. C. AND RAINHA, M. L. S. - Moving heat source reconstruction from Cauchy boundary data, *Mathematical problems in Engineering*, **2010**, 1-22, 2010.

[5] RAINHA, M. L. S. AND ROBERTY, N. C. - Integral and Variational formulation for the Helmholtz equation inverse problem,*Mathematical problems in Engineering*, **2012**, 1-28, 2012.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

ESTABILIZAÇÃO DE ENERGIA PARA UMA CLASSE DISSIPATIVA DE EQUAÇÃO DE PLACAS

RODRIGO CAPOBIANCO *

1 Introdução

No presente trabalho estudamos a boa colocação e o comportamento assintótico para a seguinte equação viscoelástica da placa com dissipação não local

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-\tau)\Delta^2 u(\tau)\, d\tau + M\left(\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\, dx\right) u_t = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times (0,\infty), \tag{1.1}$$

com condições de fronteira

$$u = \Delta u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega \times [0,\infty), \tag{1.2}$$

e condições iniciais

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.3}$$

onde Ω é um conjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ bem regular, $\Delta^2 = \Delta(\Delta)$ denota o operador biharmônico, g é o núcleo da memória e M é uma função não linear.

O principal objetivo é estabelecer os mesmos resultados obtidos em Cavalcanti et al [2], porém com hipóteses menos restritivas sobre as funções g e M. Mais precisamente, em [2] os autores estabeleceram existência e unicidade de soluções fracas para o sistema (1.1)-(1.3) com restrições a g, g' e g'', e também com $M \in C^1([0,\infty))$ tal que $M(s) \geq 0$ para todo $s \geq 0$. Além disso, para determinar que tal solução decai de forma exponencial, foi assumido que

$$M(s) \geq \lambda_0 > 0, \quad \forall\ s \geq 0. \tag{1.4}$$

Neste trabalho, os mesmos resultados foram obtidos utilizando apenas hipóteses sobre g, g' e $M \geq 0$, mas sem a necessidade de considerar a condição (1.4). Isto nos permite dizer que o termo de memória na equação (1.1) é suficiente para estabilizar o sistema. Com respeito a existência de soluções usamos o método de Faedo-Garlerkin, assim como em [2]. Ver também Lions [1]. Para determinar a estabilidade exponencial de soluções via método de energia perturbada, utilizamos ideias análogas a Berrimi e Messaoudi [4]. Ver também os trabalhos de Lagnese [3] e Muñoz Rivera el al [5].

2 Resultados

Iniciamos com as condições sobre as funções g e M.

*Universidade Estadual de Londrina, UEL, PR, Brasil, e-mail: rocap22@hotmail.com. Mestrando no Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, sob orientação do Prof. Dr. Marcio A. Jorge da Silva.

Núcleo da memória g. Seja $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função de classe C^1 tal que

$$g(0) > 0, \quad 1 - \int_0^\infty g(\tau)\, d\tau = l > 0. \tag{2.1}$$

Além disso, suponhamos que exista uma constante ξ_1 tal que

$$g'(t) \leq -\xi_1 g(t), \quad \forall\ t \geq 0. \tag{2.2}$$

Termo não local M. Seja $M : [0, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$, com $M \in C^1([0, \infty])$, tal que

$$M(s) \geq 0, \quad \forall\ s \geq 0. \tag{2.3}$$

O principal resultado do presente trabalho é dado a seguir.

Teorema 2.1. *Sob as hipóteses* (2.1)-(2.3)*, temos:*

1. *Se* $(u_0, u_1) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times L^2(\Omega)$*, então o problema* (1.1)-(1.3) *possui uma única solução fraca na classe*

$$u \in C^0([0, \infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, \infty); L^2(\Omega)). \tag{2.4}$$

2. *Se os dados iniciais* $(u_0, u_1) \in H_\Gamma^3(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$*, onde*

$$H_\Gamma^3(\Omega) = \left\{ u \in H^3(\Omega) \mid u = \Delta u = 0 \quad \textit{sobre} \quad \partial\Omega \right\}, \tag{2.5}$$

então o problema (1.1)-(1.3) *possui uma única solução mais regular na classe*

$$u \in L^\infty(0, T; H_\Gamma^3(\Omega)), \quad u_t \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad u_{tt} \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)). \tag{2.6}$$

3. *Em ambos os casos, a energia*

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2$$

satisfaz

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\gamma t}, \quad \forall\ t \geq 0, \tag{2.7}$$

para determinadas constantes $C > 0$ *e* $\gamma > 0$.

Referências

[1] LIONS, J. L. - *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéares*, Dunod-Gauthier Villars, Paris, First edition, 1969.

[2] CAVALCANTI M.M., DOMINGOS CAVALCANTI V.N. AND MA T.F. - Exponential decay of the viscoelastic Euler-Bernoulli equation with a nonlocal dissipation in general domains. *Differential Integral Equations* **17** (2004), 495-510.

[3] LAGNESE J. E. - Asymptotic energy estimates for Kirchhoff plates subject to weak viscoelastic damping, *Control and estimation of distributed parameter systems* (Vorau, 1988), 211-236. Internat. Ser. Numer. Math., 91, Birkhäuser, Basel, 1989.

[4] BERRIMI S. AND MESSAOUDI S. A. - Existence and decay of solutions of a viscoelastic equation with a nonlinear source, *Nonlinear Anal.*, **64** (2006), 2314-2331.

[5] MUNOZ RIVERA J. E., LAPA E. C. , AND BARRETO R. - Decay rates for Viscoelastic plates with memory. *J. of Elasticity*, **44** (1996), 61-87.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
VII ENAMA - Novembro 2013

O TEOREMA DE BISHOP-PHELPS-BOLLOBÁS PARA OPERADORES DEFINIDOS EM c_0-SOMAS DE ESPAÇOS DE BANACH A ESPAÇOS UNIFORMEMENTE CONVEXOS

THIAGO GRANDO * & MARY LILIAN LOURENÇO †

Mostramos que o par $(c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i\right), Y)$ satisfaz a propriedade de *Bishop-Phelps-Bollobás*, onde X_i são espaços de Banach de dimensão finita, sempre que Y for uniformemente convexo.

1 Introdução

Na década de 50, o matemático Robert James mostrou que um espaço de Banach X é reflexivo, se e somente se, todo funcional linear e contínuo definido em X atinge a norma. Tal resultado é conhecido como *Teorema de James*. Inspirados no resultado de James, em 1961, Erret Bishop e Robert R. Phelps começam a estudar classes de funcionais lineares contínuos definidos em espaços de Banach não reflexivos, que atigem a norma e provam que tal classe é densa em X^*. Este resultado é conhecido como *Teorema de Bishop-Phelps* [2]. Em 1970, o matemático húngaro B. Bollobás [3], provou uma "versão quantitativa"do teorema de Bishop-Phelps, conhecido como teorema de *Bishop-Phelps-Bollobás*, que pode ser enunciado como

Teorema 1.1 (B. Bollobás)**.** *Seja $\epsilon > 0$ um número arbitrário. Se $x \in S_X$ e $x^* \in S_{X^*}$ são tais que $|1-x^*(x)| < \frac{\epsilon^2}{4}$, então existem $y \in S_X$ e $y^* \in S_{X^*}$ tais que $y^*(y) = 1$, $\|y - x\| < \epsilon$ e $\|y^* - x^*\| < \epsilon$.*

Diversos trabalhos e propriedades surgem para investigar o problema da densidade dos operadores que atigem a norma. Surgiu também a idéia de buscar o equivalente do Teorema de *Bishop-Phelps-Bollobás* para o caso de operadores. Em 2008, M. D. Acosta, R. M. Aron, D. García e M. Maestre [1], introduziram a seguinte definição que chamaram de *propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás(BPBP):*

Definição 1.1. *Sejam X e Y espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que o par (X, Y) satisfaz a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás, se dado $\epsilon > 0$, existirem $\eta(\epsilon) > 0$ e $\beta(\epsilon) > 0$ com $\lim_{\epsilon \to 0} \beta(\epsilon) = 0$ tais que, para cada $T \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$, se $x \in S_X$ satisfaz $\|Tx\| > 1 - \eta(\epsilon)$, então existem $x_0 \in S_X$ e um operador $R \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ tais que*

$$\|R(x_0)\| = 1, \quad \|x - x_0\| < \beta(\epsilon), \quad \|T - R\| < \epsilon.$$

Em [1], os autores apresentaram alguns pares de espaços de Banach que tem BPBP. Em 2012, S. K. Kim, [4], mostrou que um par (c_0, Y) tem a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás quando Y for uniformemente convexo. Além disso, quando Y for estritamente convexo, se (c_0, Y) tem a propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás então Y é uniformemente convexo considerando como espaço de Banach real.

2 Resultados

Supondo $\{X_i\}_i$ uma família de espaços de Banach tais que $\dim X_i = i$, para cada i, considere $X = c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i\right)$. Tendo em vista as técnicas apresentadas em [4], e munidos dos seguintes resultados:

*Instituto de Matemática e Estatśtica , IME-USP, SP, Brasil, tgrando@ime.usp.br
†Instituto de Matemática e Estatśtica , IME-USP, SP, Brasil, mllouren@ime.usp.br

Lema 2.1 (1, Lema 6.1)**.** *Sejam $\epsilon > 0$ e Y um espaço de Banach uniformemente convexo com módulo de convexidade $\delta(\epsilon)$. Se $T \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ e $A \subset \mathbb{N}$ tem a propriedade que $\|TP_A\| > 1 - \delta(\epsilon)$, então $\|T(I - P_A)\| \leq \epsilon$, onde P_A é a projeção canônica de X em l_∞^A.*

Lema 2.2 (1, Lema 5.1)**.** *Sejam Y um espaço de Banach estritamente convexo e $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Se $\|T(x)\| = \|T\|$ para algum $x = \sum_i \beta_i e_i \in S_X$, então $T(e_k) = 0$ para todo $k \in \{j \in \mathbb{N} : |\beta_j| < 1\}$, onde $(e_n)_n$ é a base canônica de X.*

mostramos que:

Teorema 2.1. *Seja Y um espaço de Banach uniformemente convexo. Então o par (X,Y) tem a propriedade de Bishop-Phelps Bollobás.*

Idéia da prova: Dado $0 < \epsilon < 1$, sejam $T \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ e $x \in S_X$, satisfazendo a estimativa $\|T(x)\| > 1 - \eta(\epsilon) > 1 - \delta(\epsilon)$, onde $\eta(\epsilon) > 0$ é o número positivo do Teorema 2.5 em [4], e $0 < \delta(\epsilon) < 1$ é o módulo de convexidade de Y. Podemos escolher $u \in S_X$ com suporte finito A, de forma que $\|T(u)\| > 1 - \delta(\epsilon)$, e pelo Lema 2.1, $\|T(I - P_A)\| \leq \epsilon$. A idéia é construir um vetor em S_X e um operador em $S_{\mathcal{L}(X,Y)}$, que aproximem a x e a T, respectivamente. Para esse fim, considerando T_A a restrição de TP_A em l_∞^A, segue de ([4], Teorema 2.5) que existem $\tilde{u} \in S_X$ e $\tilde{R} \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ tais que

$$\|\tilde{R}(\tilde{u})\| = 1, \ \left\|\tilde{R} - \frac{T_A}{\|T_A\|}\right\| < \epsilon, \ \|u - \tilde{u}\| < \sqrt{\epsilon} + \sqrt{\epsilon^2 + 2\epsilon}.$$

Definindo o operador $R : X \to Y$ por $R(e_i) = \tilde{R}(e_i)$, se $i \in A$ e $R(e_i) = 0$, se $i \in A^c$, e o vetor $v = (v_i)_{i \in \mathbb{N}} \in S_X$ por $v_i = \tilde{u}_i$, se $i \in A$ e $v_i = x_i$, se $i \in A^c$, obtemos as estimativas desejadas. ∎

Teorema 2.2. *Seja Y um espaço de Banach real estritamente convexo. Se o par (X,Y) tem BPBP, então Y é uniformemente convexo.*

Referências

[1] ACOSTA, M. D., ARON, R. M., GARCÍA, D. AND MAESTRE, M. - *The Bishop-Phelps-Bollobás theorem for operators*, J. Functional Anal. **254**(2008), 2780-2799.

[2] BISHOP, E. AND PHELPS, R. R. - *A proof that every Banach space is subreflexive*, Bull. Amer. Math. Soc. **67**(1961), 97-98.

[3] BOLLOBÁS, B. - *An extension to the theorem of Bishop and Phelps*, Bull. London Math. Soc. **2**(1970), 181-182.

[4] KIM, S. K. - *The Bishop-Phelps-Bollobás theorem for operators from c_0 to uniformly convex spaces* Israel J. Math. http://dx.doi.org/10.1007/s11856-012-0186-x.