EDOs Generalizadas

V ENAMA

Márcia Federson, Universidade de São Paulo

9-11 de novembro de 2011

Métodos da Média para EDFRs e EDFRIs

Um modelo SIR com retardo:

$$\begin{cases} S' &= -\beta S(t)I(t-\omega) - \mu S(t) + \mu, \\ I' &= \beta S(t)I(t-\omega) - \mu I(t) - rI(t), \\ R' &= rI(t) - \mu R(t), \end{cases}$$

- $\omega > 0$ é o tempo de incubação,
- $\mu > 0$ é a taxa de mortalidade e nascimento,
- $r > 0$ é a taxa diária de recuperação,
- $\beta > 0$ média de contatos por infectados por dia.

O modelo SIR com impulsos:

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} S'(t) &= -\beta S(t)I(t-\omega) - \mu S(t) + \mu, \\ I'(t) &= \beta S(t)I(t-\omega) - \mu I(t) - rI(t), \\ R'(t) &= rI(t) - \mu R(t), \end{aligned}\right\} t \neq n\tau, \;\; n \in \mathbb{N}, \\ \left.\begin{aligned} S(t+) &= (1-\delta)S(t), \\ I(t+) &= I(t), \\ R(t+) &= R(t) + \delta S(t), \end{aligned}\right\} t = n\tau, \;\; n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

- δ $(0 \leq \delta < 1)$ é a proporção de vacinados entre susceptíveis,
- $\tau > 0$ é o período de vacinação.

Um PVI impulsivo:

Seja $r > 0$ e considere

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y_t, t), \ t \neq t_k \\ \Delta y(t_k) = I_k(y(t_k)), \ k = 1, 2, \ldots \\ y_0 = \phi, \end{cases}$$

onde

- $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots$ com $t_k \to \infty$;
- $f(\varphi, t) \in \mathbb{R}^n$, onde $\varphi : [-r, 0] \to \mathbb{R}^n$ e $t \geq t_0$;
- $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2 \ldots$;
- $\Delta y(t_k) := y(t_k+) - y(t_k)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Nosso “ambiente” de trabalho:

Consideraremos EDFRs impulsivas, onde

- as funções do lado direito são Lebesgue ou Perron integráveis;
- os operadores de impulsos são lypschitzianos;
- as condições iniciais são funções regradas.

O método da média é usado para o estudo de

- sistemas não autônomos com oscilações,

através da análise de

- sistemas autônomos (= invariantes no tempo)

obtidos fazendo-se uma “média”do sistema original.

Seja $\varepsilon > 0$. Considere a EDO

$$\dot{x} = \varepsilon f\left(t, x\right), \quad \varepsilon > 0.$$

Fazendo $t \mapsto \frac{t}{\varepsilon}$ e $y(t) = x(t/\varepsilon)$, obtemos

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{\varepsilon}\dot{x}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = f\left(\frac{t}{\varepsilon}, y(t)\right). \tag{1}$$

Daí, para $\varepsilon \to 0$, a equação média de (1) é a EDO autônoma

$$\dot{y} = f_0(y), \qquad f_0(y) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(s, y)ds.$$

Consideremos a EDFR particular

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x(t-r)), \quad r, \varepsilon > 0.$$

Fazendo $t \mapsto \frac{t}{\varepsilon}$ e $y(t) = x(t/\varepsilon)$, obtemos

$$x\left(\frac{t}{\varepsilon} - r\right) = x\left(\frac{t - \varepsilon r}{\varepsilon}\right) = y(t - \varepsilon r).$$

Logo

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{\varepsilon}\dot{x}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = f\left(\frac{t}{\varepsilon}, y(t - \varepsilon r)\right).$$

Um exemplo

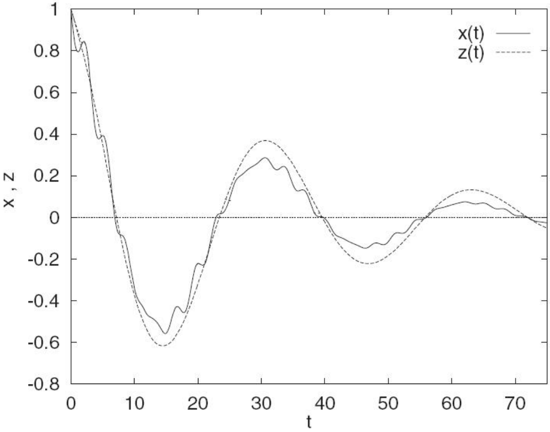
Equação original:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \varepsilon(-4\cos^2(t)x(t-r) + x(t)) \\ x(t) = 1, \quad t \in [-r, 0]. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_0(\varphi) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (-4\cos^2 s\varphi(-r) + \varphi(0))ds \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left[-\left(2T + (\sin 2t)_0^T\right) \varphi(-r) + \varphi(0)T \right] \\ &= -2\varphi(-r) + \varphi(0), \quad \varphi : [-r, 0] \to \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Equação média:

$$\dot{z}(t) = \varepsilon(-2z(t-r) + z(t)), \quad x(t) = 1, \quad t \in [-r, 0].$$



Simulação para $r = 5$ e $\varepsilon = 0,1$.

No caso geral para EDFRs, consideraremos

Equação original	Equação média
$\dot{x} = \varepsilon f(t, x_t)$	$\dot{z} = \varepsilon f_0(z_t)$
$\dot{y} = f\left(\frac{t}{\varepsilon}, y_t\right)$	$\dot{w} = f_0(w_t)$

onde

$$f_0(\varphi) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(s, \varphi) ds.$$

A evolução do método da média

- N. N. Krylov, N. N. Bogolyubov, A. Mitropolskii (1961)

  aproximaram a EDO

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon X(t, x) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

pela EDO autônoma média

$$\begin{cases} \dot{y} = \varepsilon X_0(y) \\ y(0) = x_0, \end{cases}$$

onde

$$X_0(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x)dt.$$

- V. I. Foduck, A. Halanay, J. K. Hale, G. N. Medvedev, V. M. Volosov (1966) aproximaram EDFRs por EDOs autônomas;
- V. Strygin, B. Lehman, S. P. Weibel (1999) aproximaram a EDFR

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon f\left(t, x_t\right) \\ x_0 = \phi, \end{cases}$$

pela EDFR autônoma média

$$\begin{cases} \dot{y} = \varepsilon f_0\left(y_t\right) \\ y_0 = \phi, \end{cases}$$

onde

$$f_0(\varphi) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(s,\varphi)ds.$$

- D. D. Bainov, S. D. Milusheva (1983) aproximaram a EDF neutra impulsiva

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon X\left(t, x(t), x(\Delta(t, x(t))), \dot{x}(\Delta(t, x(t)))\right), \ t > 0, t \neq \tau_i(x), \\ x(t) = \phi(t, \varepsilon), \quad \dot{x}(t) = \dot{\phi}(t, \varepsilon), \quad t \in [-r, 0] \\ {x_i}^{+} = {x_i}^{-} + \varepsilon I_i({x_i}^{-}), \ i = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

pela EDO autônoma média

$$\begin{cases} \dot{y} = \varepsilon\left[X_0\left(y\right) + I_0\left(y\right)\right] \\ y\left(0\right) = x_0, \end{cases}$$

onde

$$X_0(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X(s, x, x, 0) ds,$$

$$I_0(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_{t < t_i < t+T} I_i(x).$$

- Nós (2011) aproximamos a EDFRI(f)

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon f\left(t, x_t\right), \quad t \neq t_k \\ \Delta x(t_k) = x(t_k+) - x(t_k) = I_k(x(t_k)), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \\ x_0 = \phi, \end{cases}$$

pela EDFR autônoma média

$$\begin{cases} \dot{y} = \varepsilon \left[f_0\left(y_t\right) + I_0(y)\right] \\ y_0 = \phi, \end{cases}$$

onde

$$f_0(\varphi) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(s, \varphi) ds, \quad I_0(x) = \lim_{T \to \infty} \sum_{0 \leq t_i < T} I_i(x).$$

- J. Hale, S. M. Verduyn Lunel (1990) e M. Lakrib, T. Sari (2004) aproximaram a EDFR

$$\begin{cases} \dot{x} = f\left(\dfrac{t}{\varepsilon}, x_t\right), \\ x_0 = \phi, \end{cases}$$

pela EDFR autônoma média

$$\begin{cases} \dot{y} = f_0\left(y_t\right) \\ y_0 = \phi, \end{cases}$$

onde

$$f_0(\varphi) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(s, \varphi) ds.$$

- Em 2011, provamos um método da média para o problema

$$\begin{cases} \dot{x} = f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_t\right), \\ x_0 = \phi, \end{cases}$$

onde

- $f(t, \varphi)$ não precisa ser periódica em t,
- $f(t, \varphi)$ não precisa ser contínua em φ.

Um PVI para EDFRIs:

Sejam $r, \sigma > 0$ e $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots$ com $t_k \to \infty$.

Considere a EDFRI(f)

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y_t, t), \; t \neq t_k \\ \Delta y(t_k) = I_k(y(t_k)), \; k = 1, 2, \ldots \\ y_0 = \phi, \end{cases}$$

- $f(\phi, t) : G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n) \times [t_0, t_0 + \sigma] \to \mathbb{R}^n$;
- $\Delta y(t_k) := y(t_k+) - y(t_k), \; k = 1, 2, \ldots;$
- $\phi \in G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n)$.

A EDFRI(f) pode ser reescrita como

$$\begin{cases} y(t) = y(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(y_s, s)ds + \sum_{k=1}^{m} I_k(y(t_k))H_{t_k}(t) \\ y_{t_0} = \phi, \end{cases}$$

onde, para $T \in [t_0, t_0 + \sigma]$,

$$H_T(t) = \begin{cases} 0, & t_0 \leq t \leq T, \\ 1, & T < t. \end{cases}$$

- Usaremos integração de Lebesgue.

Hipóteses sobre f

- $t \mapsto f(y_t, t)$ pertence a L^1, $\forall\ y \in G^-([-r,\infty),\mathbb{R}^n)$;

$\exists\ M \in L^1_{loc}, C > 0$ tq $\forall\ x, y \in G^-([-r,\infty),\mathbb{R}^n)$, $\forall\ u_1, u_2 \geq 0$,

- (Car) $\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x_s, s)\, ds\right| \leq \int_{u_1}^{u_2} M(s)\, ds$;
- (Lip) $\left|\int_{u_1}^{u_2} [f(x_s, s) - f(y_s, s)]\, ds\right| \leq C \int_{u_1}^{u_2} \|x_s - y_s\|_\infty\, ds.$

Hipóteses sobre os operadores de impulsos

$\exists\ B, K > 0$ tq $\forall\ k = 1, 2, \ldots$ e $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$,

- $(B)\quad |I_k(x)| \leq B$;
- $(K)\quad |I_k(x) - I_k(y)| \leq K|x - y|$.

Método da média para EDFRs

Teorema

Assuma (*Lip*) e considere as equações

- $\dot{x} = f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_t\right), \quad x_0 = \phi,$
- $\dot{y} = f_0\left(y_t\right), \quad y_0 = \phi.$

com soluções x^ε e y resp. e

- $\exists \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(s,\varphi)ds = f_0(\varphi), \quad \varphi \in G^-([-r,0],\mathbb{R}^n).$

Então $\forall\ \mu, L > 0$, $\exists\ \varepsilon_0 > 0$ tq $\forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$,

$$\sup_{t\in[0,L]} |x^\varepsilon(t) - y(t)| < \mu.$$

Método da média para EDFRIs

Teorema

Assuma (Car), (Lip), (B) e (K) e considere

- $\limsup_{T\to\infty} \sum_{\alpha \leq t_i \leq \alpha+T} 1 \leq d$, $\forall\ \alpha \geq 0$;
- $\exists\ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{0<t_i<T} I_i(x) = I_0(x)$, $\forall\ \alpha \geq 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$;
- $\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} M(s)ds \leq c$, $\forall\ \alpha \geq 0$;
- $\exists\ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(s,\varphi)ds = f_0(\varphi)$, $\forall\ \varphi \in G^-([-r,0],\mathbb{R}^n)$.

Teorema - continuação

Considere os PVIs

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon f\,(x_t, t)\,, \;\; t \neq t_i \\ \Delta x(t_i) = \varepsilon I_i(x(t_i)), \quad i = 1, 2, \ldots \\ x_0 = \phi, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \dot{y} = \varepsilon\,[f_0(y_t) + I_0(y)] \\ y_0 = \phi. \end{cases} \tag{3}$$

Então $\forall\ \mu, L > 0$, $\exists\ \varepsilon_0 > 0$ tq $\forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$,

$$\|(x^{\varepsilon})_t - (y^{\varepsilon})_t\| < \mu, \quad t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right],$$

onde x^{ε} é solução de (2) e y^{ε} é solução de (3).

Teoremas de Lyapunov inversos para EDFRs

Considere a EDFR(f)

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y_t, t), \\ y_{t_0} = \phi, \end{cases}$$

- $\phi \in G^{-}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, $r \geq 0$,
- $f(\phi, t) : \Omega \subset G^{-}([-r, 0], \mathbb{R}^n) \times [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$.

A forma integral da EDFR(f) é dada por

$$\begin{cases} y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(y_s, s)\, ds, \quad t \in [t_0, +\infty), \\ y_{t_0} = \phi, \end{cases}$$

onde consideraremos a integral de Lebesgue.

Novamente, assuma que

- $f(\phi, t) : G^{-}([-r, 0], \mathbb{R}^n) \times [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$;
- $t \mapsto f(y_t, t)$ pertence a $L_1([t_0, +\infty), \mathbb{R}^n)$

(Car) $\exists\ M \in L_1([t_0, +\infty), \mathbb{R})$ t.q. $\forall\ x \in G_1,\ \forall\ u_1, u_2 \in [t_0, +\infty)$,

$$\left| \int_{u_1}^{u_2} f(x_s, s)\, ds \right| \leq \int_{u_1}^{u_2} M(s) ds;$$

(Lip) $\exists\ L \in L_1([t_0, +\infty), \mathbb{R})$ s.t. for $x, y \in G_1,\ u_1, u_2 \in [t_0, +\infty)$,

$$\left| \int_{u_1}^{u_2} [f(x_s, s) - f(y_s, s)]\, ds \right| \leq \int_{u_1}^{u_2} L(s) \|x_s - y_s\|\, ds.$$

Considere $f(0,t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, i.e. $y \equiv 0$ é solução da EDFR(f).

Definição

A solução $y \equiv 0$ da EDFR(f) será *estável*, se $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ t.q., se $\phi \in G^-([-r,0],\mathbb{R}^n)$ e $\bar{y} : [\gamma, v] \to \mathbb{R}^n$, com $[\gamma, v] \subset [t_0 - r, +\infty)$ e $[\gamma, v] \ni t_0$, for solução da EDFR(f) com $\bar{y}_{t_0} = \phi$ e

$$\|\phi\| < \delta,$$

então

$$\|\bar{y}_t(t_0, \phi)\| < \varepsilon, \quad t \in [t_0, v].$$

A próxima definição é devida a A. Halanay (1966).

Definição

A solução $y \equiv 0$ da EDFR(f) será *integralmente estável*, se $\forall$ $\varepsilon > 0$, $\exists$ $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ t.q., se $\phi \in G^{-}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, $\|\phi\| < \delta$ e $p \in L_1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ com $\int_{t_0}^{t_1} |p(s)| ds < \delta$, então

$$|y(t; t_0, \phi)| < \varepsilon, \qquad t \in [t_0, t_1],$$

onde $y(t; t_0, \phi)$ é solução da EDFR(f) perturbada

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y_t, t) + p(t), & t \in [t_0, t_1], \\ y_{t_0} = \phi. \end{cases}$$

Um novo conceito de estabilidade para EDFRs

Definição

A solução $y \equiv 0$ da EDFR(f) será *variacionalmente estável*, se $\forall$ $\varepsilon > 0$, $\exists$ $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ t.q., se $\phi \in G^{-}([-r,0],\mathbb{R}^n)$, $\|\phi\| < \delta$ e $P \in BV^{-}([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ com $\mathrm{var}_{t_0}^{t_1} P < \delta$, então

$$|y(t;t_0,\phi)| < \varepsilon, \quad t \in [t_0,t_1],$$

onde $y(t;t_0,\phi)$ é solução de

$$\begin{cases} y(t) = y(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(y_s,s)\,ds + P(t) - P(t_0), & t \in [t_0,t_1] \\ y_{t_0} = \phi. \end{cases}$$

Note que, quando $p \in L_1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ e

$$P(t) = \int_{t_0}^{t} p(s)ds, \quad t \geq t_0,$$

então $P \in AC \cap BV$ em $[t_0, t_1]$ e

$$\mathrm{var}_{t_0}^{t_1} P = \int_{t_0}^{t_1} |P'(s)|ds = \int_{t_0}^{t_1} |p(s)|ds.$$

Dados $P \in BV^{-}([t_0,+\infty),\mathbb{R}^n)$, $y \in G_1$ e $t \in [t_0,+\infty)$, defina

$$F\left(y,t\right)\left(\vartheta\right) = \begin{cases} 0, \quad t_0 - r \leq \vartheta \leq t_0 \\ \int_{t_0}^{\vartheta} f\left(y_s,s\right)ds, \quad t_0 \leq \vartheta \leq t < +\infty; \\ \int_{t_0}^{t} f\left(y_s,s\right)ds, \quad t_0 \leq t \leq \vartheta < +\infty. \end{cases}$$

$$\overline{P}\left(t\right)\left(\vartheta\right) = \begin{cases} 0, \quad t_0 - r \leq \vartheta \leq t_0 \\ P(\vartheta) - P(t_0) = \int_{t_0}^{\vartheta} p(s)ds, \quad t_0 \leq \vartheta \leq t < +\infty; \\ P(t) - P(t_0) = \int_{t_0}^{t} p(s)ds, \quad t_0 \leq t \leq \vartheta < +\infty. \end{cases}$$

Então G dada por

$$G\left(y,t\right) = F\left(y,t\right) + \overline{P}\left(t\right)$$

é t.q. $G : G_1 \times [t_0,+\infty) \to G^{-}([t_0 - r,+\infty),\mathbb{R}^n)$, onde G_1 é certo subespaço de $G^{-}([t_0 - r,+\infty),\mathbb{R}^n)$.

Um conceito de estabilidade para EDOGS

Sejam $\Omega = B_c \times [t_0 - r, \infty)$, $B_c = \{y \in X; \|y\| < c\}$, $r, c > 0$.

Seja $F : \Omega \to X$ t.q. $F \in \mathcal{F}(\Omega, h)$ e

- $F(0,t) - F(0,s) = 0, \quad t, s \in [t_0 - r, +\infty)$.

Então

- $\displaystyle\int_\gamma^v DF(0,t) = F(0,v) - F(0,\gamma) = 0,\ \gamma, v \in [t_0 - r, +\infty)$.

Logo

- $x \equiv 0$ é solução de $\dfrac{dx}{d\tau} = DF(x,t)$ em $[t_0 - r, +\infty)$.

Observação

Como $x \in BV$ quando $F \in \mathcal{F}(\Omega, h)$, é natural medir a distância entre duas soluções pela norma da variação.

Definição

A solução $x \equiv 0$ de $\dfrac{dx}{d\tau} = DF(x,t)$ será *variacionalmente estável*, se $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ t.q., se $\overline{x} : [\gamma, v] \to B_c$ for BV em $[\gamma, v] \subset [t_0 - r, \infty)$ com

$$\|\overline{x}(\gamma)\| < \delta \qquad \text{e} \qquad \mathrm{var}_{\gamma}^{v}\left(\overline{x}(s) - \int_{\gamma}^{s} DF(\overline{x}(\tau), t)\right) < \delta,$$

então

$$\|\overline{x}(t)\| < \varepsilon, \quad t \in [\gamma, v].$$

Além de $\frac{dx}{d\tau} = DF(x,t)$, considere a EDOG perturbada

$$\frac{dx}{d\tau} = DG(x,t) = D[F(x,t) + \overline{P}(t)]$$

onde $\overline{P} \in BV^{-}([t_0 - r, \infty), X)$.

- Para $G(x,t) = F(x,t) + \overline{P}(t)$, temos $G \in \mathcal{F}(\Omega, h_{\overline{P}})$ com $h_{\overline{P}}(t) = h(t) + \mathrm{var}_{t_0}^{t}\overline{P}$.

Definição

A solução $x \equiv 0$ de $\dfrac{dx}{d\tau} = DF(x,t)$ será *estável por perturbações*, se $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ t.q., se

$$\|x_0\| < \delta \quad e \quad \text{var}_\gamma^v \overline{P} < \delta,$$

onde $\overline{P} \in BV^-([\gamma, v], X)$, então

$$\|x(t,\gamma,x_0)\| < \varepsilon, \quad t \in [\gamma, v]$$

onde $x(t,\gamma,x_0)$ é solução da EDOG perturbada

$$\frac{dx}{d\tau} = D[F(x,t) + \overline{P}(t)],$$

com $x(\gamma,\gamma,x_0) = x_0$ e $[\gamma, v] \subset [t_0 - r, +\infty)$.

Proposição

A solução $x \equiv 0$ de $\dfrac{dx}{d\tau} = DF(x,t)$ será variacionalmente estável sse for estável por perturbações.

Proposição

A solução $y \equiv 0$ da EDFR(f) será variacionalmente estável sse a solução $x \equiv 0$ de $\dfrac{dx}{d\tau} = DF(x,t)$ for variacionalmente estável.

Proposição

A solução $y \equiv 0$ da EDFR(f) será variacionalmente estável sse a solução $x \equiv 0$ de $\dfrac{dx}{d\tau} = DF(x,t)$ for estável por perturbações.

Teorema

Se a solução $x \equiv 0$ de $\dfrac{dx}{d\tau} = DF(x,t)$ for variacionalmente estável, então $\forall\ 0 < a < c$, $\exists\ V : [t_0, +\infty) \times B_a \to \mathbb{R}$, $\overline{B_a} = \{y \in X; \|y\| \leq a\}$, t.q. $\forall\ x \in B_a$, $V(\cdot, x)$ será BV^{-}_{loc} e

(i) $V(t,0) = 0,\ t \in [t_0, +\infty)$;

(ii) $|V(t,z) - V(t,y)| \leq \|z - y\|,\ t \in [t_0, +\infty),\ z, y \in B_a$.

(iii) $\exists\ b : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ de classe Hahn t.q.

$$V(t, x(t)) \geq b(\|x(t)\|), \quad (t, x(t)) \in [t_0, +\infty) \times B_a;$$

(iv) $\forall$ solução x de $\dfrac{dx}{d\tau} = DF(x,t)$, vale

$$\dot{V}(t, x(t)) = \limsup_{\eta \to 0_+} \frac{V(t+\eta, x(t+\eta)) - V(t, x(t))}{\eta} \leq 0.$$

Teorema

Se a solução $y \equiv 0$ da EDFR(f) for variacionalmente estável, então $\forall\ 0 < a < c$, $\exists\ U : [t_0 - r, +\infty) \times E_a \to \mathbb{R}$, $\overline{E_a} = \{\psi \in G^{-}([-r, 0], \mathbb{R}^n); \|\psi\| \leq a\}$, t.q. $\forall\ x \in E_a$, $U(\cdot, \psi)$ será BV^{-}_{loc} e

(i) $U(t, 0) = 0$, $t \in [t_0 - r, +\infty)$;

(ii) $|U(t, \psi) - U(t, \overline{\psi})| \leq \|\psi - \overline{\psi}\|$, $t \in [t_0 - r, +\infty)$, $\psi, \overline{\psi} \in E_a$.

(iii) $\exists\ b : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ de classe Hahn t.q.

$$U(t, y_t) \geq b(\|y_t\|), \quad (t, y_t) \in [t_0 - r, +\infty) \times E_a;$$

(iv) $\forall$ solução y da EDFR(f), vale

$$\dot{U}(t, y_t) = \limsup_{\eta \to 0_+} \frac{U(t + \eta, y_{t+\eta}) - V(t, y_t))}{\eta} \leq 0.$$

Sistemas semidinâmicos locais para EDOGs

O problema

Uma aplicação de dinâmica topológica para EDOs não autônomas

$$\dot{x} = f(x, t),$$

é considerar pontos limites (quando $|s| \to +\infty$) das transladadas

$$f_s(x, t) = f(x, t + s).$$

Entretanto...

- a equação limite de uma EDO pode não ser uma EDO.

Relembrando...

Sejam $\Omega = \mathcal{O} \times [\alpha, \beta]$, $\mathcal{O} \subset X$ aberto e $[\alpha, \beta] \subset [a, +\infty)$.

Definiçãon

Seja $h : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ não decrescente. Então $G : \Omega \to X$ pertencerá à classe $\mathcal{F}(\Omega, h)$, se $\forall\ (x, s_2), (x, s_1), (y, s_2), (y, s_1) \in \Omega$,

$$\|G(x, s_2) - G(x, s_1)\| \leq |h(s_2) - h(s_1)|$$

$$\|G(x, s_2) - G(x, s_1) - G(y, s_2) + G(y, s_1)\| \leq \|x - y\||h(s_2) - h(s_1)|.$$

- $G \in \mathcal{F}(\Omega, h)$ é contínua em cada variável.

$\mathcal{F}(\Omega, h)$ como espaço métrico

Sejam $X = \mathbb{R}^n$, $\Omega = \mathcal{O} \times [0, +\infty)$ e $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Seja $\{K_n\}_{n \geq 1}$ sequência de compactos de Ω t.q. $K_n \subset int(K_{n+1})$, $\Omega = \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n$.

Para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, sejam

- $|G_1 - G_2|_n = \sup\{|G_1(x,t) - G_2(x,t)| : (x,t) \in K_n\}$
- $\rho_n(G_1, G_2) = \dfrac{|G_1 - G_2|_n}{1 + |G_1 - G_2|_n}$.

Então

$$\rho(G_1, G_2) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \rho_n(G_1, G_2)$$

define uma métrica em $\mathcal{F}(\Omega, h)$.

A compacidade de $\mathcal{F}(\Omega, h)$

Lema

Seja $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ não decrescente e contínua. Então $\mathcal{F}(\Omega,\, h)$ será equicontínua em compactos de $\Omega = \mathcal{O} \times [0, +\infty)$, onde $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ é aberto.

Teorema

Seja $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ não decrescente e contínua. Então $\mathcal{F}(\Omega,\, h)$ será compacto.

Um sistema semidinâmico local

Sejam $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $\Omega = \mathcal{O} \times [0, +\infty)$. Dado $(v, G) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}(\Omega, h)$, seja $I_{(v,G)} = [0,\ b) \subset \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}_+$ e defina

- $S = \{(t, v, G) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{O} \times \mathcal{F}(\Omega, h) :\ t \in I_{(v,G)}\}$.

Definição

$\pi : S \to \mathcal{O} \times \mathcal{F}(\Omega, h)$ será um *sistema semidinâmico local*, se

- $\pi(0, v, G) = (v, G),\ \forall\ (v, G) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}(\Omega, h)$;
- $\forall\ (v, G) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}(\Omega, h)$, se $t \in I_{(v,G)}$ e $s \in I_{\pi(t,v,G)}$, então $t + s \in I_{(v,G)}$ e

$$\pi(s,\ \pi(t, v, G)) = \pi(t + s, v, G);$$

Além disso,

Definição - continuação

- Dado $(v,\ G) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}(\Omega,\ h)$, $\pi(t,\ v,\ G)$ é contínua em $t \in I_{(v,G)}$;
- $I_{(v,G)} = [0,\ b_{(v,G)})$ é maximal, i.e., ou $I_{(v,G)} = \mathbb{R}_+$, ou, se $b_{(v,G)} \neq +\infty$, então a órbita positiva

$$\{\pi(t, v, G) : t \in [0,\ b_{(v,G)})\} \subset \mathcal{O} \times \mathcal{F}(\Omega, h)$$

  não pode "escapar" de $[0,\ b_{(v,G)} + c)$, $c > 0$;
- Se $(v_k, G_k) \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} (v, G)$, então $I_{(v,G)} \subset \liminf I_{(v_k,G_k)}$, onde $(v, G), (v_k, G_k) \in \mathcal{O} \times \mathcal{F}(\Omega, h),\ k = 1, 2, \ldots$.

As transladadas de $G \in \mathcal{F}(\Omega, h)$

Dados $G \in \mathcal{F}(\Omega,\, h)$ e $t \geq 0$, defina a transladada G_t de G por

$$G_t(x,\, s) = G(x,\, t+s) - G(x,\, t), \quad (x,\, s) \in \Omega.$$

Então

- $G_0 = G$ (normalização de G);
- $G_{t+\tau} = (G_t)_\tau \ \forall \ t, \tau \geq 0$ (propriedade de semigrupo);
- a aplicação $(t, G) \mapsto G_t$ é contínua.

Um subconjunto de $\mathcal{F}(\Omega, h)$

Vamos definir um subconjunto de $\mathcal{F}(\Omega, h)$ que contém as transladadas G_t de todos os seus elementos G.

Definição

Seja $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ não decrescente e contínua. Então $G : \Omega \to X$ pertencerá à classe $\mathcal{F}^*(\Omega, h)$, se $G \in \mathcal{F}(\Omega, h)$ e

$$|h(t_1 + s) - h(t_2 + s)| \leq |h(t_1) - h(t_2)|, \quad t_1, t_2, s \in [0, +\infty).$$

- $\mathcal{F}^*(\Omega, h)$ é compacto;
- $G \in \mathcal{F}^*(\Omega, h) \Longrightarrow G_t \in \mathcal{F}^*(\Omega, h), \forall\ t \geq 0.$

Existência de um sistema semidinâmico local $\mathcal{F}(\Omega, h)$

Teorema

Suponha que $\forall\ u \in \mathcal{O}$ e $\forall\ G \in \mathcal{F}^*(\Omega,\ h)$, $x(t,\ u,\ G)$ seja solução maximal de

$$\frac{dx}{d\tau} = DG(x,\ t), \qquad x(0) = u.$$

Seja $[0,\ \omega(u,\ G))$, $\omega(u,\ G) > 0$, o intervalo máximo de definição de $x(\cdot\,, u, G)$. Defina $\pi : S \to \mathcal{O} \times \mathcal{F}^*(\Omega,\ h)$ por

$$\pi(t,\ u,\ G) = (x(t,\ u,\ G),\ G_t),$$

onde $S = \{(t, u, G) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{O} \times \mathcal{F}^*(\Omega, h) :\ t \in I_{(u,G)}\}$. Então π será um sistema semidinâmico local em $\mathcal{O} \times \mathcal{F}^*(\Omega,\ h)$.

Obrigada pela paciência e atenção!