EDOs Generalizadas

V ENAMA

Márcia Federson, Universidade de São Paulo

9-11 de novembro de 2011

A integral de Kurzweil

Uma **divisão marcada** de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ é uma coleção finita de pares ponto-intervalo $(\tau_i, [s_{i-1}, s_i])$, onde

- $a = s_0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_k = b$
- $\tau_i \in [s_{i-1}, s_i], \quad \forall\, i.$

Dada uma função $\delta : [a, b] \to (0, +\infty)$ (chamada **função calibre** de $[a, b]$), uma divisão marcada $d = (\tau_i, [s_{i-1}, s_i])$ será δ-**fina**, se

- $[s_{i-1}, s_i] \subset (\tau_i - \delta(\tau_i), \tau_i + \delta(\tau_i)), \quad \forall\, i.$

Definition

Uma função $U(\tau,t) : [a,b]\times[a,b] \to X$ será *Kurzweil integrável*, se $\exists!\ I \in X$ t.q. $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists$ um calibre δ de $[a,b]$ t.q. $\forall$ divisão marcada δ-fina $d = (\tau_i, [s_{i-1}, s_i])$ de $[a,b]$,

$$\left\| \sum_i \left[U(\tau_i, s_i) - U(\tau_i, s_{i-1})\right] - I \right\| < \varepsilon.$$

Neste caso, $I = \int_a^b DU(\tau,t)$.

- $U(\tau,t) = f(\tau)t \implies \int_a^b DU(\tau,t) = (P)\int_a^b f(t)dt;$
- $U(\tau,t) = f(\tau)g(t) \implies \int_a^b DU(\tau,t) = (PS)\int_a^b f(t)dg(t);$

EDOs Generalizadas

Sejam X um espaço de Banach, $\mathcal{O} \subset X$ um aberto $[\alpha, \beta] \subset [a, +\infty)$ e $\Omega = \mathcal{O} \times [\alpha, \beta]$.

Definição

Uma função $x : [\alpha, \beta] \to X$ será *uma solução* em $[\alpha, \beta]$ da EDOG

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x, t),$$

se $(x(t), t) \in \Omega$ para $t \in [\alpha, \beta]$, e se tivermos

$$x(v) = x(\gamma) + \int_{\gamma}^{v} DF(x(\tau), t), \qquad \gamma, v \in [\alpha, \beta].$$

É possível relacionarmos EDOs e EDOGs?

EDOs X EDOGs

Considere a EDO

$$\dot{x} = f(x, t),$$

onde $f : \Omega \subset C([t_0, T], \mathbb{R}^n) \times [t_0, T]$ e Ω é aberto.

Sua forma integral correspondente é

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds, \qquad t \in [t_0, T],$$

quando a integral existir em algum sentido.

A integral $\int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds$ pode ser aproximada por

$$\int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds \cong \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} f(x(\tau_i), \tau_i)(t_i - t_{i-1}) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x(\tau_i), s)ds. \end{cases}$$

onde $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m = t$ é uma divisão de $[t_0, t]$ suficientemente fina e $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\forall\ i$.

Definamos

$$F(x,t) = \int_{t_0}^{t} f(x,s)ds, \quad (x,t) \in \Omega.$$

Então

$$F(x(\tau_i),s_i) - F(x(\tau_i),s_{i-1}) = \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(x(\tau_i),s)ds \cong \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(x(s),s)ds.$$

Logo

$$\int_{t_0}^{t} DF(x(\tau),s) \cong \sum_i [F(x(\tau_i),s_i) - F(x(\tau_i),s_{i-1})] \cong$$

$$\cong \sum_i \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(x(s),s)ds = \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)ds.$$

Assim, existe uma relação biunívoca entre as integrais

$$\int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds \qquad e \qquad \int_{t_0}^{t} DF(x(\tau), t)$$

e, portanto, entre as "equações diferenciais"

$$\dot{x} = f(x, t) \qquad e \qquad \frac{dx}{d\tau} = DF(x, t).$$

Por que relacionar estas equações?

Uma motivação

Seja $W \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Consideremos o espaço das funções

$$f(x,t) : W \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

Lebesgue integráveis t.q. $\forall$ compacto $A \subset W$, $\exists\ M_A, L_A \in L^1_{loc}$ such that $\forall\ x, y \in A$ e $\forall\ t \in \mathbb{R}$,

- $\|f(x,t)\| \leq M_A(t)$
- $\|f(x,t) - f(y,t)\| \leq L_A(t)\|x-y\|$

e consideremos a métrica caracterizada pela convergência

$$\int_0^t f^k(x,s)ds \longrightarrow \int_0^t f^0(x,s)ds \implies f^k \longrightarrow f^0.$$

Este espaço não é completo!!!

Sejam

- F contínua, mas não diferenciável em qualquer ponto,
- $\{F^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em C^1 t.q. $F^k \xrightarrow{u} F$,
- $f^k = (F^k)'$, $\forall\ k$.

Então

- $\displaystyle\int_0^t f_j(x,s)ds$ converge, $\forall\ (x,t)$,
- $\displaystyle F(x,t) = \lim_k \int_0^t f^k(s)ds$, $t \in \mathbb{R}$, não possui representação integral do tipo $\displaystyle F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds$.

Logo F não pode ser "solução" de uma EDO!!!

Uma classe de EDOGs

Sejam $\Omega = \mathcal{O} \times [\alpha, \beta]$, $\mathcal{O} \subset X$ aberto e $[\alpha, \beta] \subset [a, +\infty)$.

Definition

Seja $h : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ não decrescente. Diremos que $F : \Omega \to X$ pertence a $\mathcal{F}(\Omega, h)$, se para (x, s_2), (x, s_1), (y, s_2), $(y, s_1) \in \Omega$,

$$\|F(x, s_2) - F(x, s_1)\| \leq |h(s_2) - h(s_1)|$$

$$\|F(x, s_2) - F(x, s_1) - F(y, s_2) + F(y, s_1)\| \leq \|x - y\| |h(s_2) - h(s_1)|.$$

Para $F \in \mathcal{F}(\Omega, h)$ temos:

- Se x for uma solução em $[\alpha, \beta]$ da EDOG
$$\frac{dx}{d\tau} = DF\left(x, t\right),$$
então
$$\|x(t) - x(s)\| \leq |h(t) - h(s)|, \quad t, s \in [\alpha, \beta],$$
e, portanto
$$x \in BV([\alpha, \beta], X).$$
- $\forall \ (x_0, t_0) \in \Omega, \ \exists\,!$ solução local x da EDOG t.q. $x(t_0) = x_0$.

EDOs impulsivas

Funções regradas:

Seja X um espaço de Banach.

Definição

$f : [a, b] \to X$ será *regrada*, se

- $\exists \lim_{s \to t-} f(s) = f(t-) \in X, \ t \in (a, b]$;
- $\exists \lim_{s \to t+} f(s) = f(t+) \in X, \ t \in [a, b)$.

Escrevemos $f \in G([a, b], X)$.

- $G^-([a, b], X) = \{u \in G([a, b], X); \ u \text{ contínua à esquerda}\}$.
- $BV^-([a, b], X) = \{u \in BV([a, b], X); \ u \text{ contínua à esquerda}\}$.

Algumas propriedades:

- Toda $f \in G([a,b],X)$ é limitada;
- $(G([a,b],X), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach;
- Toda $f \in G([a,b],X)$ é limite uniforme de funções escada;
- $BV([a,b],X) \subset G([a,b],X)$.

Considere $\sigma > 0$ e a EDI

$$\begin{cases} \dot{y} = f\left(y, t\right), & t \neq t_k, \quad t \geq t_0, \\ \Delta y\left(t\right) = I_k\left(y\left(t\right)\right), & t = t_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

onde

- $f : \mathcal{O} \times [t_0, t_0 + \sigma] \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ é aberto;
- $t \mapsto f\left(y(t), t\right)$ pertence a $K([t_0, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n)$;
- $y \mapsto I_k\left(y\right)$ leva $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$;
- $\Delta y\left(t_k\right) := y\left(t_k +\right) - y\left(t_k\right)$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Sabemos que a forma integral de

$$\begin{cases} \dot{y} = f\left(y, t\right), & t \neq t_k, \quad t \geq t_0, \\ \Delta y\left(t\right) = I_k\left(y\left(t\right)\right), & t = t_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

é dada por

$$y\left(t\right) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(y(s), s\right) ds + \sum_{t_0 < t_k \leq t} I_k(y(t_k)), \; t \in [t_0, t_0 + \sigma].$$

Considere a função de Heaviside concentrada em $T \in [t_0, t_0 + \sigma]$ e contínua à esquerda:

$$H_T(t) = \begin{cases} 0, & t_0 \leq t \leq T, \\ 1, & T < t. \end{cases}$$

Então

$$\sum_{t_0 < t_k \leq t} I_k(y(t_k)) = \sum_{k=1}^{m} I_k(y(t_k)) H_{t_k}(t).$$

Portanto, podemos escrever a forma integral da EDI como

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(y_s, s)\, ds + \sum_{k=1}^{m} I_k(y(t_k)) H_{t_k}(t), \ t \in [t_0, t_0 + \sigma],$$

Hipóteses

Considere $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e

(Car) $\exists$ $M \in L^1([t_0, t_0 + \sigma], \mathbb{R})$ t.q. $\forall$ $x : [t_0, t_0 + \sigma] \to \mathcal{O}$ e $\forall$ $u_1, u_2 \in [t_0, t_0 + \sigma]$,

$$\left| \int_{u_1}^{u_2} f\left(x(s), s\right) ds \right| \leq \int_{u_1}^{u_2} M(s)\, ds;$$

(Lip) $\exists$ $L \in L^1([t_0, t_0 + \sigma], \mathbb{R})$ t.q. $\forall$ $x, y : [t_0, t_0 + \sigma] \to \mathcal{O}$ e $\forall$ $u_1, u_2 \in [t_0, t_0 + \sigma]$,

$$\left| \int_{u_1}^{u_2} \left[f\left(x(s), s\right) - f\left(y(s), s\right)\right] ds \right| \leq \int_{u_1}^{u_2} L(s)\, ds\, \|x - y\|_\infty.$$

Para os operadores de impulsos I_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, considere

(B) $\exists \; B > 0$ t.q. para $k = 1, 2, \ldots, m$ e $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|I_k(x)| \leq B;$$

(K) $\exists \; K > 0$ t.q. para $k = 1, 2, \ldots, m$ e $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$|I_k(x) - I_k(y)| \leq K|x - y|.$$

Para cada $(x,t) \in \mathcal{O} \times [t_0, t_0+\sigma]$, defina

$$F(x,t) = \int_{t_0}^{t} f(x,s)ds + \sum_{k=1}^{m} I_k(x) H_{t_k}(t)$$

. Então $F \in \mathcal{F}(\mathcal{O} \times [t_0, t_0+\sigma], h)$, onde

$$h(t) = \int_{t_0}^{t} [M(s) + L(s)]ds + \max\{B, K\} \sum_{k=1}^{m} H_{t_k}(t),$$

para $t \in [t_0, t_0+\sigma]$.

De fato. Dados $x, y \in \mathcal{O}$ e $s_1, s_2 \in [t_0, t_0 + \sigma]$, com $s_1 \leq s_2$, temos

$$|F(x, s_2) - F(x, s_1)|$$

$$\leq \left| \int_{s_1}^{s_2} f(x, s) ds \right| + \sum_k [H_{t_k}(s_2) - H_{t_k}(s_1)] |I_k(x(t_k))|$$

$$\leq \int_{s_1}^{s_2} M(s) ds + \sum_k [H_{t_k}(s_2) - H_{t_k}(s_1)] B \leq h(s_2) - h(s_1)$$

Também temos:

$$
\begin{aligned}
&|F(x,s_2) - F(x,s_1) - F(y,s_2) + F(y,s_1)| \\
&\leq \left| \int_{s_1}^{s_2} f(x,s)ds - \int_{s_1}^{s_2} f(y,s)ds \right| \\
&+ \sum_k [H_{t_k}(s_2) - H_{t_k}(s_1)] |I_k(x(t_k)) - I_k(y(t_k))| \\
&\leq \int_{s_1}^{s_2} L(s)ds \|x-y\|_\infty + \sum_k [H_{t_k}(s_2) - H_{t_k}(s_1)] K \|x-y\|_\infty \\
&\leq [h(s_2) - h(s_1)] \|x-y\|_\infty .
\end{aligned}
$$

Logo

- $F \in \mathcal{F}(\mathcal{O} \times [t_0, t_0 + \sigma], h)$

e, portanto, existe solução local única de

$$\begin{cases} \dot{y} = f\left(y, t\right), & t \neq t_k, \quad t \geq t_0, \\ \Delta y\left(t\right) = I_k\left(y\left(t\right)\right), & t = t_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Equações Diferenciais em Medida

Sejam $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{O}$ aberto, $\Omega = \mathcal{O} \times [t_0, t_0 + \sigma]$, $\sigma > 0$, e

- $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ Kurzweil integrável,
- $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ du-integrável,

onde du é a medida gerada por $u \in BV([t_0, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n)$.

Uma EDM pode ser escrita formalmente como

$$Dx = f(x,t) + g(x,t)Du,$$

onde Dx e Du são as derivadas distribucionais de x e u no sentido de L. Schwartz.

A forma integral correspondente à EDM

$$Dx = f(x,t) + g(x,t)Du,$$

é dada por

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)ds + \int_{t_0}^{t} g(x(s),s)du(s),$$

onde $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$ e du é a medida de Lebesgue-Stieltjes gerada por u.

Hipóteses

Considere $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e

(Car_f) $\exists\ M_f \in L^1([t_0, t_0+\sigma], \mathbb{R})$ t.q. para $x : [t_0, t_0+\sigma] \to \mathcal{O}$ e $u_1, u_2 \in [t_0, t_0+\sigma]$,

$$\left| \int_{u_1}^{u_2} f(x(s), s)\, ds \right| \leq \int_{u_1}^{u_2} M_f(s)\, ds;$$

(Lip_f) $\exists\ L_f \in L^1([t_0, t_0+\sigma], \mathbb{R})$ t.q. para $x, y : [t_0, t_0+\sigma] \to \mathcal{O}$ e $u_1, u_2 \in [t_0, t_0+\sigma]$,

$$\left| \int_{u_1}^{u_2} [f(x(s), s) - f(y(s), s)]\, ds \right| \leq \int_{u_1}^{u_2} L_f(s)\, ds\, \|x - y\|_\infty .$$

Considere, também,

(Car_g) $\exists\ M_g : [t_0, t_0+\sigma] \to \mathbb{R}$ du-integrável t.q. $\forall$ $u_1, u_2 \in [t_0, t_0+\sigma]$ e $\forall\ x : [t_0, t_0+\sigma] \to \mathcal{O}$,

$$\left| \int_{u_1}^{u_2} g\left(x(s), s\right) du(s) \right| \leq \int_{u_1}^{u_2} M_g\left(s\right) du(s);$$

(Lip_g) $\exists\ L_g : [t_0, t_0+\sigma] \to \mathbb{R}$ du-integrável t.q. $\forall$ $u_1, u_2 \in [t_0, t_0+\sigma]$ e $\forall\ x, y : [t_0, t_0+\sigma] \to \mathcal{O}$,

$$\left| \int_{u_1}^{u_2} \left[g\left(x(s), s\right) - g\left(y(s), s\right)\right] du(s) \right| \leq \int_{u_1}^{u_2} L_g\left(s\right) du(s) \left\|x-y\right\|_\infty.$$

Proposição

Suponha que $g : \mathcal{O} \times [t_0, t_0 + \sigma] \to \mathbb{R}^n$ satisfaça as condições acima e seja $G : \mathcal{O} \times [t_0, t_0 + \sigma] \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$G(x, t) = \int_{t_0}^{t} g(x, s) du(s).$$

Se $x : [t_0, t_0 + \sigma] \to \mathcal{O}$ for o limite pontual de uma sequência de funções escada, então as integrais

$$\int_{\alpha}^{\beta} DG(x(\tau), t) \quad \text{e} \quad \int_{\alpha}^{\beta} g(x(s), s) du(s)$$

existirão e terão o mesmo valor.

Para $x \in \mathcal{O}$ e $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$, defina

- $F(x,t) = \int_{t_0}^{t} f(x,s)ds + \int_{t_0}^{t} g(x,s)du(s)$,
- $h(t) = \int_{t_0}^{t} [M_f(s) + L_f(s)]ds + \int_{t_0}^{t} [M_g(s) + L_g(s)]du(s)$.

Então

- $F \in \mathcal{F}(\mathcal{O} \times [t_0, t_0 + \sigma], h)$.

Logo

$$\begin{cases} Dx = f(x,t) + g(x,t)Du \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admite solução única.

EDFRs impulsivas

Sejam $r, \sigma > 0$ e $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots$ com $t_k \to \infty$.

Considere a EDFRI(f)

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y_t, t), \; t \neq t_k \\ \Delta y(t_k) = I_k(y(t_k)), \; k = 1, 2, \ldots \\ y_0 = \phi, \end{cases}$$

- $f(\phi, t) : G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n) \times [t_0, t_0 + \sigma] \to \mathbb{R}^n$;
- $\Delta y(t_k) := y(t_k+) - y(t_k), \; k = 1, 2, \ldots$;
- $\phi \in G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n)$.

A forma integral correspondente a EDFRI(f) é

$$\begin{cases} y(t) = y(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(y_s, s)ds + \sum_{k=1}^{m} I_k(y(t_k))H_{t_k}(t) \\ y_{t_0} = \phi, \end{cases}$$

quando a integral existir em algum sentido.

- Usaremos integração de Lebesgue.
- Uma solução da EDFRI(f) será no sentido de Carathéodory.

Hipóteses

Hipóteses sobre f:

- $t \mapsto f(y_t, t)$ pertence a L^1, $\forall\ y \in G^-([t_0 - r, \infty), \mathbb{R}^n)$;

$\exists\ M, L \in L^1_{loc}$ t.q. $\forall\ x, y \in G^-([t_0 - r, \infty), \mathbb{R}^n)$, $\forall\ u_1, u_2 \geq 0$,

- (Car) $\left| \int_{u_1}^{u_2} f(x_s, s)\, ds \right| \leq \int_{u_1}^{u_2} M(s)\, ds$;
- (Lip) $\left| \int_{u_1}^{u_2} [f(x_s, s) - f(y_s, s)]\, ds \right| \leq L(s) \int_{u_1}^{u_2} \|x_s - y_s\|\, ds$.

Hipóteses sobre os operadores de impulsos:

$\exists\ B, K > 0$ tq $\forall\ k = 1, 2, \ldots$ e $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$,

- (B) $\quad |I_k(x)| \leq B$;
- (K) $\quad |I_k(x) - I_k(y)| \leq K|x - y|$.

Correspondência entre as equações

Seja $\Omega \subset G^{-}([-r,\infty),\mathbb{R}^n) \times [0,\infty)$.

Suponha que f da EDFRI satisfaça (Car) e (Lip) e, para $(y,t) \in \Omega$, defina

$$F(y,t)(\vartheta) = \begin{cases} 0, & -r \leq \vartheta \leq 0, \\ \int_0^{\vartheta} f(y_s, s)\, ds, & 0 \leq \vartheta \leq t < \infty; \\ \int_0^{t} f(y_s, s)\, ds, & 0 \leq t \leq \vartheta < \infty. \end{cases}$$

Então

$$F : \Omega \to C([-r,\infty),\mathbb{R}^n).$$

Suponha que os operadores de impulso I_k, $k = 1, 2, \ldots$, satisfaçam (B) e (K) e, para $(y, t) \in \Omega$, defina

$$J(y, t)(\vartheta) = \sum_k H_{t_k}(t) H_{t_k}(\vartheta) I_k(y(t_k)),$$

para $\vartheta \in [-r, \infty)$, onde H_{t_k} é a função de Heaviside concentrada em t_k e contínua à esquerda. Então

$$J : \Omega \to G^{-}([-r, \infty), \mathbb{R}^n).$$

Sejam $h_1, h_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dados por

- $h_1(t) = \int_0^t [M(s) + L(s)] ds$;
- $h_2(t) = \max(B, K) \sum_k H_{t_k}(t)$.

Então

- h_1 é contínua e não decrescente;
- h_2 é contínua à esquerda e não decrescente;
- $F \in \mathcal{F}(\Omega, h_1)$;
- $J \in \mathcal{F}(\Omega, h_2)$.

Para $(y, t) \in \Omega$, defina

- $G(y, t) = F(y, t) + J(y, t)$;
- $h = h_1 + h_2$.

Então

- $G : \Omega \to G^{-}([-r, \infty), \mathbb{R}^n)$;
- h é contínua à esquerda e não decrecente;
- $G \in \mathcal{F}(\Omega, h)$.

Teorema 1 - Federson & Schwabik

Considere a EDFRI, onde f e I_k, $k = 1, 2, \ldots,$ satisfazem (Car), (Lip), (B) e (K). Seja $y(t)$ solução da EDFRI em $[-r, \infty)$. Dado $t \in [0, \infty)$, seja

$$x(t)(\vartheta) = \begin{cases} y(\vartheta), & \vartheta \in [-r, t] \\ y(t), & \vartheta \in [t, \infty). \end{cases}$$

Então $x \in G^{-}([0, \infty), \mathbb{R}^n)$ será solução de

$$\frac{dx}{d\tau} = DG(x, t)$$

em $[0, \infty)$.

Teorema 2 - Federson & Schwabik

Sejam G como acima e x solução de $\dfrac{dx}{d\tau} = DG(x,t)$ in $[0,\infty)$ com condição inicial

$$x(0)(\vartheta) = \begin{cases} \phi(\vartheta), & -r \leq \vartheta \leq 0, \\ x(0)(0), & 0 \leq \vartheta < \infty \end{cases}$$

Para $\vartheta \in [-r,\infty)$, defina

$$y(\vartheta) = \begin{cases} x(0)(\vartheta), & -r \leq \vartheta \leq 0, \\ x(\vartheta)(\vartheta), & 0 \leq \vartheta < \infty. \end{cases}$$

Então $y(\vartheta)$ será solução da EDFRI em $[-r,\infty)$.