VI ENAMA

Sexto Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações

Resumo de Trabalhos

Realização:

Departamento de Matemática - DMA - UFS - São Cristóvão

Departamento de Matemática - DMAI - UFS - Itabaiana

Aracaju, 07 a 09 de novembro de 2012

O VI ENAMA (Encontro Nacional de Matemática e Aplicações) é uma realização dos Departamentos de Matemática da Universidade Federal de Sergipe (situados nas cidades de São Cristóvão e Itabaiana), na cidade de Aracaju, Sergipe, no período de 07 a 09 de novembro de 2012.

O ENAMA é um evento na área de Matemática, mais especificamente, em Análise Funcional, Análise Numérica e Equações Diferenciais, criado para ser um fórum de debates e de intercâmbio de conhecimento entre diversos especialistas, professores, pesquisadores e alunos de pós-graduação em Matemática do Brasil e do exterior. Nesta sexta edição, o evento contou com 3 minicursos, 2 palestras plenárias, 84 comunicações orais e 12 apresentações de pôsteres.

Os organizadores do VI ENAMA desejam expressar sua gratidão aos órgãos e instituições que apoiaram e tornaram possível a realização deste evento: UFS, DMA, DMAI, CNPq, CAPES e INCT Mat. Agradecem também a todos os participantes do evento, bem como aos colaboradores pelo entusiasmo e esforço, que tanto contribuíram para o sucesso deste evento.

Comissão organizadora local:

Adecarlos Costa Carvalho - UFS

Arlúcio da Cruz Viana - UFS

Éder Mateus de Souza - UFS

Fábio dos Santos - UFS

Haroldo Clark - UFF

José Anderson Valença Cardoso - UFS

Comissão científica:

Cícero L. Frota - UEM

Claudianor Alves - UFCG

Fágner Araruna - UFPB

Geraldo Botelho - UFU

Sandra Godoy - ICMC - USP

Sandra Malta - LNCC

Índice dos Resumos

Apresentação Oral

Apresentação Pôster

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

CONCENTRATION-COMPACTNESS PRINCIPLE FOR AN INEQUALITY BY C. ADAMS

Abiel C Macedo* & João Marcos do Ó†

Here we present a generalized version of the Lions concentration–compactness principle (see [2, Theorem I.6]) for the Sobolev space $W_0^{m,p}(\Omega)$ when $mp = n$ and Ω is a smooth domain in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, with finite n-measure. More precisely, D. Adams (see [1]) prove that

$$\sup_{\substack{u\in W_0^{m,p}(\Omega),\\ \|\nabla^m u\|_p\leq 1}} \int_\Omega e^{\beta|u|^{p/(p-1)}}dx \leq C_{m,n}\mathcal{L}_n(\Omega), \qquad \forall \beta \leq \beta_0. \tag{0.1}$$

where

$$\beta_0 = \beta_0(m,n) = \begin{cases} \frac{n}{\omega_{n-1}}\left[\frac{\pi^{\frac{n}{2}}2^m\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-m+1}{2}\right)}\right]^{\frac{n}{n-m}}, & m \text{ odd},\\ \frac{n}{\omega_{n-1}}\left[\frac{\pi^{\frac{n}{2}}2^m\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-m}{2}\right)}\right]^{\frac{n}{n-m}}, & m \text{ even}, \end{cases}$$

and β_0 is sharp, that is, the supremum in (0.1) is $+\infty$ if $\beta > \beta_0$, where $\mathcal{L}_n$ is the Lebesgue measure in $\mathbb{R}^n$. In other words $W_0^{m,p}(\Omega)$ is embedded in the Orlicz space determined by $\Phi(t) = e^{\beta_0|t|^{p/(p-1)}} - 1$, but this embedding is not compact. We prove that except for "small weak neighbourhoods of 0" the embedding is compact by improving the best constant β_0.

The proof is established using the decreasing rearrangement and comparison principle due to Talenti combined with maximum principle.

1 Mathematical Results

Theorem 1.1. *Let m be a positive integer with $m < n$ and $p = n/m$. Let $u_i, u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, μ, a measure on $\overline{\Omega}$, such that $\|\nabla^m u_i\|_p = 1$, $u_i \rightharpoonup u$ in $W_0^{m,p}(\Omega)$ and $|\nabla\Delta^k u_i|^p \rightharpoonup \mu$ in $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$. Then we have one of the following three cases:*

(i) if $u \equiv 0$ and $\mu = \delta_{x_0}$, for some $x_0 \in \overline{\Omega}$, then, up to a subsequence,

$$e^{\beta_0\ |u_i|^{p/(p-1)}} \rightharpoonup c\delta_{x_0} + \mathcal{L}_n \quad \text{in} \quad \mathcal{M}(\overline{\Omega}), \quad \text{for some } c \geq 0,$$

(ii) if $u \equiv 0$ and μ is not a Dirac mass concentrated at one point and there $\gamma > 1$ and $C = C(\gamma, \Omega) > 0$ such that

$$\int_\Omega e^{\beta_0\,\gamma\,|u_i|^{p/(p-1)}} \leq C,$$

(iii) if $u \not\equiv 0$, and for $\gamma \in [1, \eta)$ there exist a constant $C = C(\gamma, \Omega) > 0$ such that

$$\int_\Omega e^{\beta_0\,\gamma\,|u_i|^{p/(p-1)}} \leq C, \tag{1.2}$$

where

$$\eta_{m,n}(u) := \begin{cases} \left(1 - \|\nabla(\Delta^k u)^*\|_p^p\right)^{-1/(p-1)} & \text{if} \quad m = 2k+1,\\ \left(1 - \|\nabla^m u\|_p^p\right)^{-1/(p-1)} & \text{if} \quad m = 2k. \end{cases}$$

*Departamento de Matemática, UFPE, PE, Brasil, abielcosta@dmat.ufpe.br
†Departamento de Matemática, UFPB, PB, Brasil, e-mail: jmbo@pq.cnpq.br

To prove the case (iii) the following Lemma play a crucial role. Given $A \subset \mathbb{R}^l$ we denote by A^* the ball of radio $R > 0$ centered at 0 in $\mathbb{R}^l$ such that $|A^*| = |A|$. Let $u : A \to \mathbb{R}$ be a measurable function. We denote by

$$\mu(t) = |\{x \in A : |u(x)| > t\}| \qquad \textit{and} \qquad u^{\#}(s) := \inf\{t \geq 0 : \mu(t) < s\} \quad \forall s \in [0, |A|],$$

the *distribution function* and the *decreasing rearrangement* of u, respectively, and by

$$u^*(x) := u^{\#}(\omega_{l-1}|x|^l) \quad \forall x \in A^*,$$

the *spherically symmetric decreasing rearrangement* of u.

Lemma 1.1. *Let $A \subset \mathbb{R}^l$ an open set and $f_i, f \in L^p(A)$ such that $f_i \rightharpoonup f$ weakly in $L^p(A)$, $p > 1$. Then, up to a subsequence, $f_i^{\#} := g_i \to g$ almost everywhere for some $g \in L^p(0, |A|)$ such that $\|g\|_p \geq \|f^{\#}\|_p$.*

Proof of Theorem 1.1 To prove (i) and (ii) we only need to note that if $\xi \in C^1(\Omega)$, $\xi \geq 0$ and $\int |\xi|^p dx = 1$, then $\int e^{\beta_0 |\xi u_i|^{p/(p-1)}}$ is bounded in $L^q(\xi \geq 1 + \delta)$ for some $q > 1$ and $\delta > 0$. So in each case we use a suitable ξ to guarantee the statement.

To prove (iii) the strategy is use the Talenti comparison result (see [3]) combined with maximum principle to find a suitable sequence $v_i \in W^{m,p}_{\mathcal{N}}(\Omega^*)$ such that $v_i \geq u_i^*$ and $0 < \|\nabla^m v_i\|_p \leq \|\nabla^m u_i\|_p \leq 1$, which imply that

$$\int_\Omega e^{\beta_0\, \gamma\, |u_i|^{p/(p-1)}} = \int_\Omega e^{\beta_0\, \gamma\, {u^*_i}^{p/(p-1)}} \leq \int_{\Omega^*} e^{\beta_0\, \gamma\, v_i^{p/(p-1)}}.$$

where Ω^* is a ball of radio R, centered at origin with $|\Omega^*| = |\Omega|$ and

$$W^{m,p}_{\mathcal{N}}(\Omega^*) := \{u \in W^{m,p}(\Omega) : u = \Delta^j u = 0 \text{ in the sense of trace}, 1 \leq j < m/2\}.$$

So, using that

$$\sup_{\substack{u \in W^{m,p}_{\mathcal{N}}(\Omega) \\ \|\nabla^m u\| \leq 1}} \int_\Omega e^{\beta |u|^{p/(p-1)}} \leq C_{m,n} \mathcal{L}_n(\Omega), \quad \forall\, 0 \leq \beta \leq \beta_0, \qquad \text{(see [4, Theorem 4])}$$

together with Lemma 1.1 and Brezis-Lieb's Lemma, we prove the statement.

References

[1] Adams, D. R.: *A sharp inequality of J. Moser for higher order derivatives.* Ann. Math. 128, 385–398 (1988).

[2] Lions, P.-L.: *The concentration compactness principle in the calculus of variation, the limit case, part I.* Rev. Mat. Iberoamericana 1, 145–201 (1985).

[3] Talenti, G.: *Elliptioc Equations and Rearrangements.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 3, 697–718 (1976).

[4] Tarsi, C.: *Adams' inequality and limiting Sobolev embeddings into Zygmund spaces.* Potential Analysis (2011). doi: 10.1007/s11118-011-9259-4.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

SEMILINEAR ELLIPTIC PROBLEMS WITH ASYMMETRIC NONLINEARITIES

ADILSON E. PRESOTO* & FRANCISCO ODAIR V. DE PAIVA†

This work aims to point out new results related to the semilinear elliptic equation

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu |u|^{q-2}u = g(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

where μ is a positive parameter, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded boundary with regular boundary $\partial\Omega$, $N \geq 3$ and $1 < q < 2$, when g is asymmetric and superlinear at $+\infty$. Since the appearance of [1], there has been an increasing concern about problems with a concave term. It is known that crossing eigenvalues, in particular the first one, is related to existence and multiplicity of such problems. For instance, in [3, 4] the assumptions $g'(0), g_- \leq \lambda_1$ were considered. We are interested in the case $g'(0)$ and g_- are between two consecutive eigenvalues. By using variational methods we show the existence of three solutions: one positive, one negative and the third one which cames from linking theorem.

Our work leads explicitly with the nonlinearity $g(u) = au + b(u^+)^p$ with $2 < p \leq 2^*$, $b > 0$ and $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$. We note that we approach both the subcritical and the critical case. For the critical case, as in [2] we construct minimax levels for the energy functional associated to (0.1) below the breaking of compactness.

1 Mathematical Results

Teorema 1.1. *Let $N \geq 3$ and $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$. If $2 < p < 2^*$, then (P) has at least three nontrivial solutions.*

Teorema 1.2. *Let $N \geq 4$ and $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$. If $p = 2^*$ then, for λ small enough, (P) has at least three nontrivial solutions.*

References

[1] AMBROSETTI A., BREZIS H. AND CERAMI G. - *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Func. Anal. **122** (1994), 519–543.

[2] BREZIS, H. AND NIREMBERG, L. - *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev expoents*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), 437–477.

[3] CHABROWSKI J. AND YANG J. - *On the Neumann problem with combined nonlinearities*, Ann. Polon. Math. **85** (2005), 239-250.

[4] CHANG X. - *Multiplicity of solutions for semilinear elliptic problems with combined nonlinearities*, Comm. Contemp. Math. **13** (2011), 389-405.

[5] GAZZOLA F. AND RUF B. - *Lower-order perturbations of critical growth nonlinearities in semilinear elliptic equations*, Adv. Diff. Eq. **2** (1997), 555–572.

*IMECC, UNICAMP, SP, Brazil, e-mail: ra057746@ime.unicamp.br
†DM, UFSCar, SP, Brazil, e-mail: odair@dm.ufscar.br

POLINÔMIOS E OPERADORES MULTILINEARES $(p;q;r)$-SOMANTES

A. T. BERNARDINO*

O conceito de operadores lineares absolutamente $(p;q;r)$-somantes é devido a A. Pietsch; uma extenção natural da noção clássica de operadores absolutamente $(p;q)$-somantes. D. Achour introduziu o conceito de aplicações multilineares absolutamente $(p;q;r)$-somantes em [1]. O ideal de polinômios da versão polinomial dos operadores absolutamente $(p;q;r)$-somantes não é corente nem compatível de acordo com a definição de Carando, Dimant, e Muro [3]. Neste trabalho investigamos outras possibilidades de extensões multilineares e polinomiais do conceito de operadores lineares absolutamente $(p;q;r)$-somantes. Oferecemos uma abordagem alternativa que fornece ideais coerentes e compatíveis.

A noção de operadores multilineares múltiplo $(p;q)$-somantes foi introduzida em 2003, independentemente, por M. C. Matos [4] e D. Pérez-García e I. Villanueva [5]. Inspirados por essa abordagem, introduzimos a noção de operadores multilineares múltiplo $(p;q;r)$-somantes e mostramos que o ideal gerado pela versão polinomial deste conceito é coerente e compatível com o ideal dos operadores lineares absolutamente $(p;q;r)$-somantes ($\prod_{p;q;r}$).

Definição 0.1. *Sejam $m \in \mathbb{N}, p, r, q_1, \ldots, q_n \geq 1$ e $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços de Banach. Um operador multilinear contínuo $T : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ é múltiplo $(p;q_1,\ldots,q_n;r)$-somante se*

$$\left(\varphi_{j_1\ldots j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right)_{(j_1,\ldots,j_n)\in\mathbb{N}^n} \in \ell_p\left(\mathbb{N}^n\right)$$

sempre que $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q_i}^w\left(E_i\right), i = 1,\ldots,n$ e $\left(\varphi_{j_1\ldots j_n}\right)_{(j_1,\ldots,j_n)\in\mathbb{N}^n} \in \ell_r^w\left(F^*,\mathbb{N}^n\right)$.

Escrevemos simplesmente $j \in \mathbb{N}^n$ para denotar $j = (j_1,\ldots,j_n) \in \mathbb{N}^n$.

O espaço vetorial formado pelos operadores multilineares múltiplo $(p;q_1,\ldots,q_n;r)$-somantes de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F será representado por $\mathcal{L}_{mas(p;q_1,\ldots,q_n;r)}\left(E_1,\ldots,E_n;F\right)$. Quando $q_1 = \cdots = q_n = q$, escrevemos apenas $\mathcal{L}_{mas(p;q;r)}\left(E_1,\ldots,E_n;F\right)$. Como na teoria dos operadores múltiplo $(p;q)$-somantes, temos um resultado de caracterização por meio de desigualdades:

Teorema 0.1. *As seguintes afirmações são equivalentes para $T \in \mathcal{L}\left(E_1,\ldots,E_n;F\right)$:*

(i) $T \in \mathcal{L}_{mas(p;q_1,\ldots,q_n;r)}\left(E_1,\ldots,E_n;F\right)$;

(ii) Existe $C \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\left|\varphi_{j_1\ldots j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left\|\left(\varphi_{j_1\ldots j_n}\right)_{j\in\mathbb{N}^n}\right\|_{w,r}\prod_{i=1}^{n}\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q_i} \tag{0.1}$$

sempre que $\left(x_{j_i}^{(i)}\right)_{j_i=1}^{\infty} \in l_{q_i}^w\left(E_i\right), i = 1,\ldots,n$ e $\left(\varphi_{j_1\ldots j_n}\right)_{j\in\mathbb{N}^n} \in \ell_r^w\left(F^*,\mathbb{N}^n\right)$;

(iii) Existe $C \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m}\left|\varphi_{j_1\ldots j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left\|\left(\varphi_{j_1\ldots j_n}\right)_{j\in\{1,\ldots,m\}^n}\right\|_{w,r}\prod_{i=1}^{n}\left\|\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,q_i}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, $x_1^{(i)},\ldots,x_m^{(i)} \in E_i, i = 1,\ldots,n$ and $\left(\varphi_{j_1\ldots j_n}\right)_{j\in\mathbb{N}_m^n} \in \ell_r^w\left(F^*,\mathbb{N}_m^n\right)$.

*Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas, UFRN, RN, Brasil, e-mail: thiagobernardino@yahoo.com.br

O ínfimo de todas as constantes C satisfazendo (0.1) define uma norma em $\mathcal{L}_{mas(p;q_1,\ldots,q_n;r)}\left(E_1,\ldots,E_n;F\right)$.

Mostramos a seguir algumas relações entre as aplicações múltiplo $(p;q_1,...,q_n)$-somantes $(\mathcal{L}_{mas(p;q_1,\ldots,q_n)})$ e múltiplo $(p;q_1,...,q_n;r)$-somantes.

Proposição 0.1. *Se F tem tipo p^* e*
$$\frac{1}{s}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$$
então
$$\mathcal{L}_{mas(q;q_1,\ldots,q_n)}\left(E_1,\ldots,E_n;F\right)\subset\mathcal{L}_{mas(s;q_1,\ldots,q_n;1)}\left(E_1,\ldots,E_n;F\right).$$

Quando $F=\mathbb{K}$ temos

Proposição 0.2. *Se $E_1,\ldots,E_n$ são espaços de Banach, então*
$$\mathcal{L}_{mas(p;q_1,\ldots,q_n)}\left(E_1,\ldots,E_n;\mathbb{K}\right)\subset\mathcal{L}_{mas(t;q_1,\ldots,q_n;r)}\left(E_1,\ldots,E_n;\mathbb{K}\right)$$
para todo
$$\frac{1}{t}=\frac{1}{r}+\frac{1}{p}.$$

Se $F=\ell_2$ e $F=\mathbb{K}$ temos os seguintes resultados de coincidência:

Proposição 0.3. *Se $T\in\mathcal{L}\left(E_1,\ldots,E_n;\ell_2\right)$, então T é múltiplo $(1;1;1)$-somante.*

Proposição 0.4. *Se $T\in\mathcal{L}\left(E_1,\ldots,E_n;\mathbb{K}\right)$ então T é múltiplo $\left(\frac{2n}{3n+1};1;1\right)$-somante.*

Como é de se esperar, cálculos padrão, mostra-se que $\left(\mathcal{L}_{mas(p;q_1,\ldots,q_n;r)},\|\cdot\|_{mas(p;q_1,\ldots,q_n;r)}\right)$ é um multi-ideal de Banach.

Se $\mathcal{M}$ é um ideal (quasi-) normado de aplicações multilineares, a classe $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}=\left\{P\in\mathcal{P}^n;\check{P}\in\mathcal{M},n\in\mathbb{N}\right\}$ com $\|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}}:=\left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{M}}$, é um ideal (quasi-) normado de polinômios, chamado ideal de polinômios gerado por $\mathcal{M}$. Se $\mathcal{M}$ é (quasi-) Banach, então $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ é (quasi-) Banach (ver [2]).

Assim, a classe
$$\mathcal{P}^n_{mas(p;q;r)}=\left\{P\in\mathcal{P}^n;\check{P}\in\mathcal{L}^n_{mas(p;q;r)}\right\},$$
com
$$\|P\|_{\mathcal{P}^n_{mas(p;q;r)}}:=\left\|\check{P}\right\|_{mas(p;q;r)},$$
é um ideal de polinômios de Banach.

Teorema 0.2. $\left(\mathcal{P}^n_{mas(p;q;r)},\|.\|_{\mathcal{P}^n_{mas(p;q;r)}}\right)_{n=1}^{\infty}$ *é coerente e compatível com $\prod_{p;q;r}$.*

Observação 0.1. *Os resultados acima são parte da tese de doutorado do autor e estão submetidos para publicação conjuntamente com outros resultados em co-autoria com D. Pellegrino, J. B. Seoane-Sepúlveda e M.L.V. Souza.*

Referências

[1] ACHOUR, D. - Multilinear extensions of absolutely $(p;q;r)$ -summing operators. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **60**, 337-350, 2011.

[2] BOTELHO, G., BRAUNSS, H. A., JUNEK, H. E PELLEGRINO, D. - Holomorphy types and ideals of multilinear mappings. *Studia Math.*, **177**, 43-65, 2006.

[3] CARANDO, D., DIMANT, V. E MURO, S. - Coherent sequences of polynomial ideals on Banach spaces. *Math. Nachr.*, **282**, 1111-1133, 2009.

[4] MATOS, M. C. - Fully absolutely summing and Hilbert-Schmidt multilinear mappings. *Collect. Math.*, **54**, 111-136, 2003.

[5] PÉREZ-GARCÍA, D. E VILLANUEVA, I. - Multiple summing operators on Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, **285**, 86-96, 2003.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

An euclidean and a Riemannian version of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequality

Aldo Bazan* & Wladimir Neves†

1 Introduction

The Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequality appeared for the first time in [3]. That paper introduces the convenient definition of a suitable weak solution for the incompressible 3D Navier-Stokes equations with unit viscosity, and the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequality was used to improve the result established before by Scheffer concerning the dimension of the subset of singularities. Albeit CKN appears earlier in the study of incompressible Navier-Stokes equations, it was soon understood that, this inequality is important in the theory of elliptic equations, for instance of the following type

$$-div\big(A(x)\nabla u\big) = f(x,u), \tag{1.1}$$

where A is a nonnegative function that may be unbounded and f is a given function.

In different works, the existence and multiplicity of positive or nodal solutions for (1.1) was established, provided the differential operator

$$div\big(A(x)\nabla(\cdot)\big)$$

is uniformly elliptic. Although, interesting and important situations are obtained respectively in the degenerated and singular cases,

$$\inf A(x) = 0, \quad \sup A(x) = \infty.$$

For instance, it was studied in [7] the existence (of at least two solutions) for the following problem

$$-div(|x|^{-2s}\,\nabla u) = K(x)\,|x|^{-\sigma p}\,|u|^{p-2}u + \lambda g(x);$$

where $x \in R^n/\{0\}$ and $K \in L^\infty(R^n)$ (in fact, K has more conditions), λ is a parameter, and g is a continuous function. The inequality CKN was used to show that the functional

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_n |x|^{-2s}\|\nabla u\|^2\,dx - \frac{1}{p}\int_n K(x)\,|x|^{-\sigma p}|u|^p\,dx - \lambda\int_n g(x)u\,dx$$

is well defined among other properties, that is to say, the existence of (at least) two critical points for J_λ. Therefore, the importance of Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequality CKN is also shown in elliptic problems. More information related to applications of this inequality in elliptic problems can be found in [4], [6] and [8]. Finally, we highlight that these singular and degenerate elliptic equations are given models (at the equilibrium) for anisotropic media, that are possibly somewhere between perfect insulators or perfect conductors, see [5], p.79.

2 Principal results

In this section, we state the principal result of this work. This inequality appeared in this form in [2], but here we give a new proof, based in the introduction on a new parameter and a convenient interpolation.

*Departamento de Matemática , UFOP, MG, Brasil, ifap2010@iceb.ufop.br
†Instituto de Matemática , UFRJ, RJ, Brasil, wladimir@im.ufrj.br

Theorem 2.1. *There exists a positive constant C, such that the following inequality holds for all $u \in C_c^\infty(R^n)$*

$$\Big(\int \|x\|^{\gamma r}\,|u|^r dx\Big)^{1/r} \leq C\,\Big(\int \|x\|^{\alpha p}\,\|\nabla u\|^p\,dx\Big)^{a/p}\Big(\int \|x\|^{\beta q}\,|u|^q dx\Big)^{(1-a)/q} \tag{2.2}$$

if and only if the following relations hold:

1. *The dimensional balance condition:*
$$r = \frac{s\,q}{aq + (1-a)s}. \tag{2.3}$$

2. *If $a > 0$ then $\sigma \leq \alpha$. Also, if $a > 0$ and*
$$\frac{s}{r} = \frac{n - p\big(\gamma - (\alpha - 1)\big)}{n - p\big(\sigma - (\alpha - 1)\big)},$$

then $\sigma \geq \alpha - 1$.

Moreover, for $s \in [p, p^*]$ the constant C could depend on all the parameters but not on u, otherwise C may also depend on u.

The Riemannian version of this inequality follow the ideas of the interpolation below, but, the process is more delicated, because of the additional information on the manifold where the inequality holds. For this, we use as weight function a *conformal Killing vector field*, generalizing the ideas of [1].

References

[1] Bozhkov, Y., *A Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequality on Riemannian manifolds*, Appl. Math. Letters., **23** (2010), 1166–1169.

[2] Caffarelli, L., Kohn, R., Nirenberg, L., *First Order interpolation inequalities with weights*, Comp. Math., **53** n.3 (1984), 259–275.

[3] Caffarelli, L., Kohn, R., Nirenberg, L., *Partial regularity of Suitable Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations*, Comm. Pure and App. Math., vol. XXXV (1982), 771–831.

[4] Cirmi, G. R., Porzio, M. M., *L^1-solutions for some nonlinear degenerate elliptic and parabolic equations*, Ann. Mat. Pura Appl., **169** (1995), 67–86.

[5] Dautray, R., Lions, J.-L., *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, vol. 1; Physical Origins and Classical Methods*. Berlin, Heidelberg. New York, Springer, 1985.

[6] Fabes, E., Kenig, C., Serapioni, R., *The local regularity of solutions of degenerate elliptic operators*, Comm. Partial Differ. Equations, **7** (1982), 77–116.

[7] Ghergu, M., Radolescu, V., *Singular elliptic problems with lack of compactness*, Annali di Mat., **185** (2006), 63–79.

[8] Passaseo, D., *Some concentration phenomena in degenerate semilinear elliptic problems*, Nonlinear Anal., **24** (1995), 1011-1025.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

APPROXIMATE CONTROLLABILITY FOR THE STOKES SYSTEM IN NONCYLINDRICAL DOMAINS

ALDO T. LOUREDO * & M. MILLA MIRANDA †

Let Ω be a bounded connected open set of $\mathbb{R}^n$ with boundary Γ of class C^2 and let $\mathcal{O} \subset \Omega$ be a nonempty open subset. Fix an arbitrary real number $T > 0$. Consider a real function $k \in C^2([0,\infty))$ with $k(t) \geq k_0 > 0$, $t \in [0,\infty)$ (k_0 constant), a positive constant ν and a $n \times n$ invertible matrix M whose entries are real numbers. Consider the matrix

$$K(t) = k(t)M, \ t \geq 0.$$

Introduce the following sets:

$$\begin{aligned}
&\Omega_t = \{x = K(t)y; y \in \Omega\}, \ \Gamma_t = \text{boundary of } \Omega_t, \ t \in [0,\infty);\\
&\mathcal{O}_t = \{x = K(t)y; \ y \in \mathcal{O}\}, \ \widehat{Q} = \bigcup_{0<t<T} \Omega_t \times \{t\};\\
&\widehat{\Sigma} = \bigcup_{0<t<T} \Gamma_t \times \{t\}, \ \widehat{\mathcal{O}} = \bigcup_{0<t<T} \mathcal{O}_t \times \{t\}
\end{aligned}$$

Under the above considerations in $\hat{Q}$ we have the Stokes system

$$(\widehat{P}) \quad \left| \begin{array}{l}
\hat{u}' - \nu\Delta\hat{u} + \nabla\hat{p} = \widehat{v}1_{\widehat{\mathcal{O}}} \ \text{ in } \hat{Q};\\
div \ \hat{u} = 0 \quad \text{in } \hat{Q};\\
\hat{u} = 0 \ \text{ on } \hat{\Sigma};\\
\hat{u}(0) = \widehat{u}^0 \ \text{ in } \Omega_0,
\end{array}\right.$$

where $\widehat{v}$ is the control variable supported in $\widehat{\mathcal{O}}$ and $1_{\widehat{\mathcal{O}}}$, the characteristic function of the set $\widehat{\mathcal{O}}$.

We denote by $H(\Omega_t)$ the Hilbert space

$$H(\Omega_t) = \{f \in L^2(\Omega_t)^n \ ; \ div \ f = 0 \text{ in } \Omega_t \ , \ f.\eta_t = 0 \text{ on } \Gamma_t\}$$

where $\eta_t(x)$ denotes the outward unit normal at $x \in \Gamma_t$, equipped with the scalar product

$$(f,g)_{H(\Omega_t)} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_t} f_i(x) g_i(x) \ dx.$$

By $V(\Omega_t)$ is represented the Hilbert space

$$V(\Omega_t) = \{u \in H_0^1(\Omega_t)^n \ , \ div \ u \ = 0 \text{ in } \Omega_t\}$$

provided with the scalar product

$$(u,v)_{V(\Omega_t)} = \sum_{i=n}^{n} \int_{\Omega_t} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \ dx.$$

Note that if $\hat{v} \in L^2(\widehat{\mathcal{O}})^n$, there exists a unique solution $\{\hat{u},\hat{p}\}$ of $(\widehat{P})$ in the class

*Departamento de Matemática, UEPB, Campina Grande, PB, Brasil, aldotl@cct.uepb.edu.br
†Visiting Professor, Departamento de Matemática, UEPB, Campina Grande, PB, Brasil, milla@im.ufrj.br

$$\hat{u} \in L^2(0,T;V(\Omega_t)) \ \cap C^0([0,T];H(\Omega_t)) \ \ ;$$
$$\hat{u}' \in L^2(0,T;V'(\Omega_t)) \ \ ;$$
$$\hat{p} \in L^2(0,T;L^2(\Omega_t)), \ (\widehat{p} \text{ is unique up to an additive constant}).$$

Thus, $\hat{u}(x,T;\hat{v}) \in H(\Omega_T)$.

Theorem 0.1. *Let $\widehat{u}^0 \in H(\Omega_0)$ be. Then the set*

$$\widehat{R_T} = \{\hat{u}(x,T;\hat{v}); \widehat{v} \in (L^2(\widehat{O}))^n, \ \widehat{u} \textit{ solution of } (\widehat{P}) \ \}$$

is dense in $H(\Omega_T)$.

In the proof of the above theorem first we transform problem $(\widehat{P})$ in an equivalent problem (P) defined in the cylinder $Q = \Omega\times]0,T[$. Then in problem (P) we apply a Carleman inequality (cf.[5]) and the Hahn-Banach theorem.

Acknowledgement. We thank to professor L.A.Medeiros by the suggestion of the problem and his important remarks.

References

[1] F. D. Araruna, F. W. Chaves-Silva and M. A. Rojas-Medar., Exact Controllability of Galerkin's Approximations of Micropolar Fluids, Proceedings of the American Matheamtical Society, Volume 138, Number 4, April 2010, Pages 13611370.

[2] A. V. Fursikov and O. Y. Imanuvilov., Controllability of evolution equations, volume 34 of Lecture Notes Series, Seoul National University Research Institute of Mathematics Global Analysis Center, Seoul, 1996.

[3] O.Yu. Imanuvilov, *Controllability of parabolic equations,* Sbornik Mathematies 186 (1995), 879-900.

[4] O.Yu. Imanuvilov, *Remarks of exact controllability for the Navier-Stokes equations,* ESAIN COCV, 6 (2001), 39-72.

[5] E. Fernandez-Cara, S.Guerrero, O.Yu. Imanuvilov & J.Puel, *Local exact controllability of the Navier-Stokes system,* J. Math. Pures Appl. 83 (2004), 1501-1542.

[6] O.Yu. Imanuvilov, J. P. Puel & M. Yamamoto, *Carleman estimates for parabolic equations with nonhomogeneous boundary conditions,* Chin. Ann. Ann. Math., 303 (2009), 333-378.

[7] E. Fernandez-Cara, S. Guerrero, *Global Carleman inequalities for parabolic systems and applications to controllability,* SIAM J. Control Optim. 45 (2006), 1395-1446.

[8] O. Yu. Imanuvilov and J.P. Puel, *Global Carlerman estimates for weak solutions of elliptic nonhomogeneous Dirichlet problems,,* Internat. Math. Research Notices 16 (2003), 883-903.

[9] E. Fernandez-Cara, S. Guerrero, O. Yu. Imanuvilov, J.P. Puel, *Remarks on exact controllability for Stokes and Navier-Stokes systems,* C.R. Math. Acad. Paris 339 (2004), no. 5, 375-380.

[10] J. Limaco, and L.A. Medeiros, *Remarks on approximate controllability in noncylindrical domains,* Comumun. Apppl. Anal. 6 (2002), 375-392.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

NULL CONTROLLABILITY FOR THE STOKES SYSTEM IN NONCYLINDRICAL DOMAIN

ALDO T. LOUREDO* & MANUEL MILLA MIRANDA†

Let Ω be a bounded open set of $\mathbb{R}^n$ with boundary of class C^2. Consider a set $\mathcal{O}$, $\mathcal{O} \Subset \Omega$, and $T > 0$ a real number. Let $k : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ be a function of class C^2 with $k(t) \geq k_0 > 0,\ t \in [0, \infty)$ and let M be an invertible nxn-matrix with real entries. Consider the matrix $K(t) = k(t)M,\ t \in [0, \infty)$. Introduce the sets

$$\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^n ; x = K(t)y,\ y \in \Omega\}\ ,\ \Gamma_t = \text{boundary of } \Omega_t\ ,\ t\ \in [0, \infty);$$

$$\widehat{Q} = \bigcup_{0<t<T} \Omega_t \times \{t\}\ ,\ \widehat{\Sigma} = \bigcup_{0<t<T} \Gamma_t \times \{t\};$$

$$\mathcal{O}_t = \{x \in \mathbb{R}^n ; x = K(t)y\ ,\ y \in \mathcal{O}\}\ ,\ \widehat{\mathcal{O}} = \bigcup_{0<t<T} \mathcal{O}_t \times \{t\}.$$

In $\widehat{Q}$ we consider the following problem for the Stokes system:

$$(*)\quad \left|\begin{array}{l} \hat{u}' - \nu\Delta\hat{u} + \nabla\hat{p} = \hat{v}1_{\widehat{\mathcal{O}}} \ \text{ in } \ \widehat{Q}; \\ \text{div}\hat{u} = 0 \quad \text{in} \quad \widehat{Q}; \\ \hat{u} = 0 \quad \text{on} \quad \widehat{\Sigma}; \\ \hat{u}(0) = \hat{u}^0 \quad \text{in} \quad \Omega_0. \end{array}\right.$$

Here $\nu > 0$ is a constant, $1_{\widehat{\mathcal{O}}}$, the charasteristic function of the set $\widehat{\mathcal{O}}$ and $\hat{v}$, the control variable acting on $\widehat{\mathcal{O}}$.

We denote by $H(\Omega_t)$ the Hilbert space

$$H(\Omega_t) = \{f \in L^2(\Omega_t)^n\ ;\ div\ f = 0 \text{ in } \Omega_t\ ,\ f.\eta_t = 0 \text{ on } \Gamma_t\}$$

where $\eta_t(x)$ denotes the outward unit normal at $x \in \Gamma_t$, equipped with the scalar product

$$(f, g)_{H(\Omega_t)} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_t} f_i(x) g_i(x)\ dx.$$

By $V(\Omega_t)$ is represented the Hilbert space

$$V(\Omega_t) = \{u \in H_0^1(\Omega_t)^n\ ,\ div\ u\ = 0 \text{ in } \Omega_t\}$$

provided with the scalar product

$$(u, v)_{V(\Omega_t)} = \sum_{i=n}^{n} \int_{\Omega_t} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\ dx.$$

Note that if $\hat{v} \in L^2(\widehat{\mathcal{O}})^n$, there exists a unique solution $\{\hat{u}, \hat{p}\}$ of $(\widehat{P})$ in the class

$$\hat{u} \in L^2(0, T; V(\Omega_t))\ \cap C^0([0, T]; H(\Omega_t))\ \ ;$$
$$\hat{u}' \in L^2(0, T; V'(\Omega_t))\ \ ;$$
$$\hat{p} \in L^2(0, T; L^2(\Omega_t))$$

($\widehat{p}$ is unique up to an additive constant).

*Departamento de Matemática , UEPB, PB, Brasil, e-mail:aldotl@cct.uepb.edu.br
†Visiting Professor, Departamento de Matemática, UEPB, PB, Brasil, e-mail: milla@im.ufrj.br

Theorem 0.1. *Consider $\hat{u}^0 \in H(\Omega_0)$ and k the function given above satisfying*

$$k'(t) \geq -\frac{C}{k(t)} \quad , \quad \forall t \in [0,T]$$

where $C > 0$ is a constant independent of $t \in [0,T]$. Then there exists a control $\hat{v} \in L^2(\widehat{\mathcal{O}})^n$ such that the solution $\hat{u}$ of $(*)$ satisfies

$$\hat{u}(T) = 0 \quad in \quad \Omega_T.$$

To prove Theorem 0.1 we proceed in the following way. First, by a change of variables, we transforms problem $(*)$ in an equivalent problem defined in a cylinder. Here appears a Stokes system with variable coefficients. Then we use three global Carleman inequalities to obtain the null controllability of the second problem. Our proof was inspired by the paper [2]. Here the authors obtain a similar result but for the Stokes system with constant coefficients, this system defined in a cylinder.

Acknowledgement. We thank to professor L.A.Medeiros by the suggestion of the problem and his important remarks.

References

[1] ARARUNA, F.D., CHAVES-SILVA, F.W. AND ROJAS-MEDAR, M.A.-*Exact controllability of Galerkin approximations of micropolar fluids,* Proc. AMS. 138(2009),1361-1370.

[2] FERNANDEZ-CARA, E., GUERRERO, S., IMANUVILOV, O.YU. AND PUEL, J.P.-*Local exact controllability of the Navier-Stokes system,* J.Math.Pures Appl. 83(2004), 1501-1542.

[3] FURSIKOV, A., IMANUVILOV, O.YU.-*Controllability of Evolution Equations,* Lectures Notes Ser., vol.34, Seoul National University, Korea,1996.

[4] LIMACO, J. AND MEDEIROS, L.A.-*Remarks on approximate controllability in noncylindrical domain,* Commun.Appl.Anal. 6(2002),375-392.

[5] LIONS, J.L.-*Remarques sur la contrôlabilité approchée,* Proc. Jornadas Hispano-Francesas sobre Control de Sistemas Distribuidos, University of Málaga, Spain, October, 1990.

[6] ZUAZUA, E.-*Approximate controllability for nonlinear heat equations with globally Lipschitz nonlinearity,* Control and Cybernetic 28(1999),665-683.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

NULL CONTROLLABILITY OF NONLINEAR HEAT EQUATION WITH MEMORY EFFECTS IN NON CYLINDRIC DOMAIN

A.O. Marinho* & I.Evangelista†

We study the null controllability of a nonlinear heat type equation with nonlinearities in non cylindric domain. The equation contains the additional integral expression including "memory function" with the Dirichlet boundary conditions. The proof of the linear problem relies on Carleman-estimate and observability inequality for the adjoint equation and that the nonlinear one, on the fixed point technique.

In this work, we consider the following nonlinear parabolic system with memory

$$\begin{cases} y'(x,t) - \nabla y(x,t) + g(y(x,t)) + \int_0^t h(t,\tau)y(\tau,x)d\tau = \chi_\omega v(x,t) \ \text{ in } \ \hat{Q} \\ y(x,t) = 0 \ \text{ on } \ \hat{\Sigma} \\ y(0,x) = 0 \ \text{ in } \ \hat{\Omega} \end{cases} \tag{0.1}$$

where $\hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ be a connected open set whose boundary $\partial\hat{\Omega}$ is regular enough and $\omega \subset \hat{\Omega}$ be a small nonempty open subset.We will use the notation $\hat{Q} = \hat{\Omega} \times (0,T), T > 0$ and $\hat{\Sigma} = \partial\hat{\Omega} \times (0,T)$. The function $y(t,x)$ is a temperature at a point x and time t, $v(t,x)$ is a control function, χ_ω denotes the characteristic function of an open non-empty subset ω of $\hat{\Omega}$. The given function $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfy the following condition: g is of class C^1 and globally Lipschitz continuous with respect to p, there exists a constant $C > 0$ such that $|g(p_1) - g(p_2)| \leq C|p_1 - p_2|$, $\forall\, p \in \mathbb{R}$. The Kernel $h : (0,T) \times (0,T) \to \mathbb{R}$ is sufficiently smooth and satisfy the following assumption: $h(t,\tau) = 0|_{\tau=0,T}$.

1 Mathematical Results

Our main result is the following:

Theorem 1.1. *Assume that the non-cylindrical domain $\widehat{Q}$ satisfies the geometric conditions and also let us assume that the assumptions on g hold. Then the nonlinear system* (0.1) *is locally null controllable at any time $T > 0$.*

To proof the theorem above we use

Lemma 1.1. *Let $\omega \Subset \Omega$ be a non-empty open set. There exists a function $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ satisfying:*

$$\begin{aligned} &\psi(y) > 0 \quad \forall y \in \Omega, \\ &\psi = 0 \quad \forall y \in \partial\Omega, \\ &|\nabla\psi(y)| \geq k > 0 \quad \forall y \in \Omega \setminus \omega. \end{aligned} \tag{1.2}$$

proved in [1].

Introducing the functions

$$\phi(y,t) = \frac{e^{\lambda\psi(y)}}{\beta(t)}\,, \quad \alpha(y,t) = \frac{e^{\lambda\psi(y)} - e^{2\lambda||\psi||_\infty}}{\beta(t)} < 0\,, \tag{1.3}$$

where $\beta(t) = t(T-t)$ for $0 \leq t \leq T$ and $\lambda > 0$, we obtain

*Departamento de Matemática ,UFPI, PI, Brasil, Partially supported by PROCAD-CAPES marinho@ufpi.edu.br
†PGMAT-UFPI, PI, Brasil, e-mail: *raelmathinblood@hotmail.com*

Theorem 1.2. *Let ϕ and α be defined as in (1.3) and suppose the memory kernel satisfy $h(t,\tau) = 0|_{\tau=0,T}$.. Then there exist $\lambda_0 \leq 1$ such that, for an arbitrary $\lambda > \lambda_0$, there exists a $s \geq s_0(\lambda)$ satisfying the following inequality:*

$$\begin{aligned}&\int_{Q_T} (s^3\phi^3 w^2 + s\phi|M\nabla w|^2)dxdt + \int_{Q_T} (\phi s)^{-1} e^{2s\alpha}(|w_t|^2 + |A^* w|^2 + |H_t^T * w|^2)dxdt \\ &\leq C\left(\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f_1|^2 dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s^3\phi^3 w^2 dxdt\right).\end{aligned} \tag{1.4}$$

in the proof the theorem we use the ideas of [1] and [8].

By means Carleman inequality above we obtain

Lemma 1.2. *Suppose all the assumptions of Theorem 1.2 are satisfied. Then for $\lambda_0 > 0$, $s \geq s_0(\lambda)$ (as defined in Theorem 1.2) the following observability estimate holds:*

$$\int_\Omega |w(x,0)|^2 dx \leq C\left(\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f_1|^2 dxdxt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w^2 dxdt\right), \tag{1.5}$$

where $C > 0$ is a constant that does not depend on f_1 and w.

Thus we obtain the proof the Theorem 1.1.

The following, we list the reference used in the work.

References

[1] A. Fursikov and O. Imanuvilov, *Controllability of evolution equations*, Lecture Notes, Vol. **34**, Seoul National University, Korea, 1996.

[2] A. Inoue, *Sur $\Box u_t + u^3 = f$ dans un domaine non-cylindrique*, J. Math. Anal. Appl., 46 (1970), 777-819.

[3] E. Fernández-Cara and S. Guerrero, *Global Carleman inequalities for parabolic systems and applications to controllability*, SIAM J.Control Optim., Vol. 45. No. 4, (2006), 1395–1446.

[4] L.A. Medeiros, Non-linear wave equations in domains with variable boundary, Arch. Rational Mech. Anal., 47 (1972), 47-58.

[5] M.M. Miranda and L.A. Medeiros, *Contrôlabilité exacte de l'équation de Schrödinger dans des domaines non cylindriques*, C.R. Acad. Sci. Paris, 319 (1994), 685-689.

[6] M. M. Miranda and J. Limaco, *The Navier-Stokes Equation in Noncylindrical Domain*, Comput. Appl. Math., 16 (3) (1997), 247-265.

[7] O. Yu. Imanuvilov, *Controllability of parabolic equations (Russian)*, *Mat. Sbornik. Novaya Seriya*, **186** (1995), 109–132.

[8] R. Lavanya, K. Balachandran, *Null controllability of nonlinear heat equation with memory effects*, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, **3** (2009), 163–175.

[9] S. B. de Menezes, J. Limaco and L. A. Medeiros *Remarks on null controllability for semilinear heat equation in moving domains*, Eletronic J. of Qualitative Theory of Differential Equations, No. **16** (2003), 1–32.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

SOLUÇÕES SINGULARES PARA A EQUAÇÃO DE YAMABE

ALMIR SILVA SANTOS*

A equação de Yamabe é uma equação diferencial parcial elíptica com origens na Geometria Diferencial. Geometricamente qualquer solução da equação de Yamabe em uma variedade Riemanniana dar origem a uma métrica conforme a inicial com curvatura escalar constante. No caso em que a variedade é compacta de dimensão maior ou igual a 3, após os trabalhos de Yamabe [9], Aubin [1] e Trundinger [8], Schoen [6] foi capaz de dar uma resposta afirmativa ao então conhecido como o Problema de Yamabe. O caso não compacto, em geral, não possui solução (ver Jin [3]). Para variedades com uma estrutura simples no infinito, este problema pode ser estudado resolvendo o então chamado Problema de Yamabe Singular. Este problema é equivalente a encontrar soluções com singularidades da equação de Yamabe. O objetivo deste trabalho é mostrar como usar técnicas de perturbação e colagem para construir soluções para o Problema de Yamabe Singular.

1 Introdução

Sejam (M^n, g_0) uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 3$, com curvatura escalar R_{g_0}, e $g = u^{4/(n-2)}g_0$ uma métrica conforme à métrica g_0, com curvatura escalar R_g. A relação entre R_{g_0} e R_g é dada pela equação de Yamabe

$$\Delta_{g_0} - \frac{n-2}{4(n-1)}R_{g_0} + \frac{n-2}{4(n-1)}R_g u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0, \tag{1.1}$$

onde Δ_{g_0} é o Laplaciano associado à métrica g_0.

Após a resposta positiva dada por Schoen, é então natural perguntar se no caso não compacto também existe solução da equação (1.1) que der origem à uma métrica completa de curvatura escalar constante. Vamos considerar aqui variedades não compactas que são abertos de variedades compactas. Em termos analíticos, como podemos escrever $g = u^{4/(n-2)}g_0$, este problema é equivalente a encontrar uma função positiva u satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta_{g_0}u - \dfrac{n-2}{4(n-1)}R_{g_0}u + \dfrac{n(n-2)}{4}u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0 \quad \text{on} \quad M\backslash X \\ u(x) \to \infty \text{ as } x \to X \end{cases}, \tag{1.2}$$

onde $X \subset M$ é um conjunto fechado. A condição que g é completa é satisfeita se u vai a infinito com uma taxa de crescimento suficientemente grande. Por um resultado de Caffarelli, Gidas e Spruck [2], quando $M = \mathbb{S}^n$ e $X = \{p\}$, a equação (1.2) não possui solução.

Muito é conhecido sobre este problema. Para mais detalhes ver Silva Santos [7] e as referências lá contidas. O objetivo deste trabalho é mostrar a existência de solução para (1.2) quando X é um único ponto.

2 Resultados

Uma métrica g é dita não degenerada em $u \in C^{2,\alpha}(M)$ se o operador $L_g^u : C^{2,\alpha}(M) \to C^{0,\alpha}(M)$ é sobrejetivo para algum $\alpha \in (0,1)$, onde

$$L_g^u(v) = \Delta_g v - \frac{n-2}{4(n-1)}R_g v + \frac{n(n+2)}{4}u^{\frac{4}{n-2}}v.$$

Notamos aqui que se g_0 é a métrica canônica da esfera unitária $\mathbb{S}^n$, então $L_{g_0}^1 = \Delta_{g_0} + n$. Como n é um autovalor do Laplaciano na esfera, segue que a métrica canônica na esfera é degenerada sobre a função constante 1.

*Departamento de Matemática, UFS, SE, Brasil, arss@ufs.br

O principal resultado deste trabalho é o seguinte teorema.

Teorema 2.1 (Silva Santos, [7]). *Seja (M^n, g_0) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$ de curvatura escalar constante $n(n-1)$, não degenerada sobre 1, e seja $p \in M$ com $\nabla^k_{g_0} W_{g_0}(p) = 0$ para $k = 0, \ldots, \left[\frac{n-6}{2}\right]$, onde W_{g_0} é o tensor de Weyl da métrica g_0. Então, existe uma constante $\varepsilon_0 > 0$ e uma família u_ε de soluções da equação (1.2), definida para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, tais que*

1. *$g_\varepsilon = u_\varepsilon^{4/(n-2)} g_0$ possui curvatura escalar constante igual a $n(n-1)$;*

2. *g_ε é completa em $M \backslash \{p\}$.*

3. *$g_\varepsilon \to g_0$ uniformemente em compactos de $M \backslash \{p\}$ quando $\varepsilon \to 0$.*

A motivação para $\left[\frac{n-6}{2}\right]$, vem da *Conjectura do anulamento do tensor de Weyl* (ver [5]). Ela diz que se uma sequência v_i de soluções da equação

$$\Delta_g v_i - \frac{n-2}{4(n-1)} R_g v_i + v_i^{\frac{n+2}{n-2}} = 0$$

em uma variedade Riemanniana compacta (M, g), explode em $p \in M$, então

$$\nabla^k_g W_g(p) = 0 \quad \text{para todo} \quad 0 \leq k \leq \left[\frac{n-6}{2}\right].$$

É conhecido que esta conjectura é verdadeira para $n \leq 24$ e falsa para $n \geq 25$, ver Marques [4].

A ordem $\left[\frac{n-6}{2}\right]$ aparece naturalmente em nossa construção, apesar de não sabermos se é a ótima. A técnica utilizada é a de perturbação e colagem. Inicialmente analizamos a equação (1.2) localmente, onde podemos fazer uso de coordenadas normais conforme e o anulamento do tensor de Weyl e encontrar uma família de soluções dada por perturbações de soluções da equação no $\mathbb{R}^n$, as conhecidas soluções tipo Delaunay. Em seguida utilizamos a não degenerecência da métrica para perturbar a métrica original e encontrar uma família de soluções no completar de alguma bola centrada no ponto p. E finalmente, usando a teoria de regularidade elíptica e um argumento de ponto fixo mostramos que podemos encontrar um elemento de cada família que gera uma solução global para o problema.

Referências

[1] AUBIN, T. - *Équations différentielles non linéaires et probléme de Yamabe concernant la courbure scalaire.* J. Math. Pures Appl. (9) **55**, no. 3, 269–296, 1976.

[2] CAFFARELLI, L., GIDAS, B AND SPRUCK, J. - *Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equation with critical Sobolev growth.* Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), no. 3, 271–297.

[3] JIN, Z. R. - *A counterexample to the Yamabe problem for complete noncompact manifolds*, Partial differential equations (Tianjin, 1986), 93–101, Lecture Notes in Math., 1306, Springer, Berlin, 1988.

[4] MARQUES, F. C. - *Blow-up examples for the Yamabe problem*, Calc. Var. PDE, **36** (2009), no. 2, 377–397.

[5] SCHOEN, R. - *A report on some recent progress on nonlinear problems in geometry*, Surveys in differential geometry (Cambridge, MA, 1990), 201–241, Lehigh Univ., Bethlehem, PA, 1991.

[6] SCHOEN, R. - *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*, J. Diff. Geom., **20** (1984), no. 2, 479–495.

[7] SILVA SANTOS, A. - *A Construction of Constant Scalar Curvature Manifolds with Delaunay-type Ends* Ann. Henri Poincaré **10**,1487–1535, 2010.

[8] TRUDINGER, N - *Remarks concerning the conformal deformation of a Riemannian structure on compact manifolds.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **22** (1968), 265–274.

[9] YAMABE, H. - *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds.* Osaka Math. J., **12**, 21–37, 1960.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO PARA MODELOS DE CAMPO DE FASE COM UMA FAMÍLIA DE NÃO LINEARIDADES

ANDERSON L. A. DE ARAÚJO*, JOSÉ LUIZ BOLDRINI† & BIANCA M. R. CALSAVARA‡

Neste trabalho são estudados existência e unicidade de soluções para um modelo de campo de fase com uma classe geral de não linearidades. Este modelo consiste em um sistema de dos equaçõe diferenciales parciais parabólicas acopladas, no qual a primeira é para a função de temperatura e a segunda para a função de campo de fase. Aqui segunda equação admite diferentes tipos de não linearidades. Tal modelo é dado pelo seguinte sistema:

$$\begin{cases} u_t + l\phi_t = \Delta u + f(x,t) & \text{em} \quad Q, \\ \phi_t = \Delta\phi + F(x,t,\phi) + u & \text{em} \quad Q, \\ \partial u/\partial\nu = \partial\phi/\partial\nu = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x),\ \phi(x,0) = \phi_0(x) & x \in \Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado, $0 < T < \infty$ e $Q = \Omega \times (0,T)$; as funções u e ϕ estão relacionadas à temperatura e à função de campo de fase, que distingue as fases sólida e líquida; $f(x,t)$ está relacionada com a densidade de fontes e sorvedouros de calor.

O modelo dado por (0.1) generaliza, por exemplo, o modelo tratado em Hoffman and Jiang [1] e está relacionado ao modelo tratado em Moroşanu & Motreanu [2,3]. Em geral, não é fácil de comparar o modelo (0.1) com o tratado en Moroşanu & Motreanu. Mas em alguns casos, por exemplo, no caso onde as não linearidades são autônomas e homogêneas, o modelo (0.1) generaliza o tratado en Moroşanu & Motreanu.

1 Resultado Principal

Considere as seguintes hipóteses:

(H_0) $f \in L^p(Q)$, com $p \geq 2$, ϕ_0, $u_0) \in W_p^{2-2/p}(\Omega)$ são tais que $\partial\phi_0/\partial\nu = \partial u_0/\partial\nu = 0$ em $\partial\Omega \times (0,T)$.

(H_1) Existe uma constante $a_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$(F(x,t,z_1) - F(x,t,z_2))(z_1 - z_2) \leq a_0(z_1 - z_2)^2,\ \forall\ (x,t) \in Q,\ z_1, z_2 \in R.$$

(H_2) Existe uma função $G : Q \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$(F(x,t,z_1) - F(x,t,z_2))^2 \leq G(x,t,z_1,z_2)(z_1 - z_2)^2, \quad \forall (x,t) \in Q,\ z_1, z_2 \in \mathbb{R},$$

$$G(x,t,z_1,z_2) \leq c_0(1 + |z_1|^{2r-2} + |z_2|^{2r-2}), \quad \forall (x,t) \in Q, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{R},$$

para constantes c_0 e $r \geq 1$.

(H_3) Para $N \in \mathbb{N} - \{0\}$, os valores de r permitidos na hipótese anterior são $r \geq 1$, se $p \geq (N+2)/2$, ou $1 \leq r < \frac{N+2}{N+2-2p}$, se $p < (N+2)/2$.

*Departamento de Mateática, UFV, MG, Brasil, anderson.araujo@ufv.br
†IMECC, UNICAMP, SP, Brasil, boldrini@ime.unicamp.br
‡FCA, UNICAMP, SP, Brasil, biancamrcalsavara@gmail.com

(H_4) $F : Q \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Caratheodory, i. e., $F(.,.,z)$ é mensurável em Q, $\forall z \in \mathbb{R}$, e $F(x,t,.) \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\forall (x,t) \in Q$, $F(.,.,0) \in L^\infty(Q)$.

Além disso, para alguma constante $d_0 > 0$, $F(x,t,z)z \leq d_0(1+z^2)$, $\forall (x,t) \in Q$, $z \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.1. *Sob as hipóteses $(H_0) - (H_4)$, o problema (0.1) admite única solução $(u,\phi) \in W_p^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q)$ e esta satisfaz*

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q)} + \|\phi\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C(1 + \|\phi_0\|_{W_p^{2-2/p}(\Omega)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(\Omega)} + \|f\|_{L^p(Q)}),$$

onde C depende somente de $|\Omega|, \alpha, T, p, r, c_0, a, d_0$.

Referências

[1] HOFFMAN, K.H.; JIANG, L. - Optimal control problem of a phase field model for solidification. *Numer. Funct. Anal.*, **13**, 11-17, 1992.

[2] MOROŞANU, C.; MOTREANU, D. - A Generalized Phase-Field System. *Journal of Math. Analysis and Applications*, **237**, 515-540, 1999.

[3] MOROŞANU, C.; MOTREANU, D. - The phase field system with a general nonlinearity. *Int. J. Differ. Equ. Appl.*, **1** no.2, 187-204, 2000.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

EQUAÇÃO DE ONDAS SEMILINEAR EM DOMÍNIOS COM FRONTEIRA NÃO LOCALMENTE REAGENTE

ANDRÉ VICENTE[*], CÍCERO LOPES FROTA[†] & LUÍS ADAUTO MEDEIROS[‡]

Ao longo das últimas decadas vários autores tem se dedicado ao estudo de problemas de valores iniciais e de fronteira envolvendo equações de ondas. Quando trata-se de problemas envolvendo motivações físicas condições de fronteira nao homogêneas podem tornar-se mais interessante. Nesta direção, as Condições de Fronteira da Acústica introduzidas por Beale e Rosencrans, [1], apresentam uma significativa contribuição. A ideia central para a formulação destas condições de fronteira consiste em considerar que cada ponto da fronteira de um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, no qual esta confinado um fluido sujeito ao movimento de ondas acústicas, age como uma mola à pressão que o fluido exerce sobre a fronteira. Precisamente, o modelo considerado por Beale e Rosencrans foi

$$\begin{array}{ll} u'' - \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \times (0,\infty); \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \delta' & \text{em } \Gamma \times (0,\infty); \\ u' + d\delta'' + l\delta' + m\delta = 0 & \text{em } \Gamma \times (0,\infty), \end{array} \tag{1}$$

onde d, l e m são constantes positivas; $u(x,t)$ é a velocidade potencial do fluido no ponto $x \in \Omega$ e tempo t; e $\delta(x,t)$ é o deslocamento vertical, na direção normal, do ponto $x \in \Gamma$ no instante de tempo t. Após o trabalho de Beale e Rosencrans surgiram vários outros artigos tratando de problemas similares com estas condições de fronteira, ver [2,3,4,5,7,8,10] e suas referências.

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre a existência, unicidade e comportamento assintótico da solução para um problema envolvendo uma equação de ondas semilinear sobre o domínio e condições de fronteira que generalizam as condições introduzidas por Beale e Rosencrans. Precisamente, estudamos o seguinte problema de valores iniciais e de fronteira

$$\begin{array}{ll} u'' - \Delta u + \rho(u') = F & \text{em } \Omega \times (0,\infty); \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times (0,\infty); \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \delta' & \text{em } \Gamma_1 \times (0,\infty); \\ u' + f\delta'' - c^2 \Delta_\Gamma \delta + g\delta' + h\delta = 0 & \text{em } \Gamma_1 \times (0,\infty); \\ \delta = 0 & \text{em } \partial\Gamma_1 \times (0,\infty); \\ u(x,0) = \phi(x),\ u'(x,0) = \psi(x) & x \in \Omega; \\ \delta(x,0) = \theta(x),\ \delta'(x,0) = \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x) & x \in \Gamma_1, \end{array} \tag{2}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, limitado e conexo com fronteira suave Γ; Γ_1 é um subconjunto aberto e conexo de Γ com fronteira suave, $\partial\Gamma_1$, e $\Gamma_0 = \Gamma \backslash \Gamma_1$. Aqui $' = \frac{\partial}{\partial t}$; $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, Δ_Γ são o operador de Laplace na variável espacial e o operador de Laplace-Beltrami, respectivamente; ν é o vetor normal, unitário e exterior em Γ; c é uma constante positiva; $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F : \Omega \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f, g, h : \overline{\Gamma_1} \to \mathbb{R}$, $\phi, \psi : \Omega \to \mathbb{R}$ and $\theta : \Gamma_1 \to \mathbb{R}$ são funções conhecidas.

Como dito acima, as condições de fronteira $(2)_3 - (2)_4$ são uma generalização das condições de Beale e Rosencrans e foram inicialmente estudadas em [6], onde foram chamadas de condições de fronteira da acústica para fronteira não localmente reagente. Sua formulação, motivada pelo trabalho de Beale e Rosencrans, consiste em considerar que

[*] CCET, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, PR, Brasil, e-mail: andre.vicente@unioeste.br
[†] UEM - DMA, Universidade Estadual de Maringá, PR, Brasil, e-mail: clfrota@uem.br
[‡] IM, Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brasil, e-mail: luisadauto@gmail.com

parte da fronteira de Ω reage como uma membrana elástica a pressão que o fluido exerce sobre ela. Recentemente, Vicente-Frota, [11], estudaram um problema não linear com uma dissipação mais fraca do que a considerada em [6], onde os autores provaram a existência, unicidade e decaimento exponencial da energia associada ao problema. Tanto em [6] quanto em [11] para provar o decaimento da energia os autores usaram o método conhecido na literatura como Método de Nakao, [9], para isso foi necessária uma hipótese envolvendo a constante c de $(2)_4$.

Neste trabalho, usando o método construtivo de Faedo-Galerkin provamos a existência de solução global para (2), a unicidade também foi obtida. Por último, foi estabelecido um teorema no qual provamos a estabilidade assintótica da solução do problema. O principal avanço em relação a [6] e [11] encontra-se no fato que a hipótese envolvendo a constante c foi eliminada.

Referências

[1] Beale, J. T.; Rosencrans, S. I. - *Acoustic boundary conditions*, Bull. Amer. Math. Soc., Vol 80, Number 6, 1974, p. 1276-1278.

[2] Frigeri, S. - *Attractors for semilinear damped wave equations with an acoustic boundary condition*, Journal of Evolution Equations, 10, 2010, p. 29-58.

[3] Frota, C. L.; Cousin, A. T.; Larkin, N. A. - *Global solvability and asymptotic behaviour of a hyperbolic problem with acoustic boundary conditions*, Funkcialaj Ekvacioj, Vol 44, Number 3, 2001, p. 471-485.

[4] Frota, C. L.; Cousin, A. T.; Larkin, N. A. - *On a system of klein-Gordon type equations with acoustic boundary conditions*, J. Math. Anal. Appl., Vol 293, 2004, p. 293-309.

[5] Frota, C. L.; Goldstein, J. A. - *Some nonlinear wave equations with acoustic boundary conditions*, Journal of Differential Equations, 164, 2000, p. 92-109.

[6] Frota, C. L.; Medeiros, L. A.; Vicente, A. - *Wave equation in domains with non locally reacting boundary*, Differential and Integral Equations, Vol. 24, 2011, p. 1001-1020.

[7] Graber, P. J. - *Strong stability and uniform decay of solutions to a wave equation with semilinear porous acoustic boundary conditions*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 74, Issue 10, 2011, p. 3137-3148.

[8] Graber, P. J.; Said-Houari, B. - *On the wave equation with semilinear porous acoustic boundary conditions*, Journal of Differential Equations, 252, Issue 9, 2012, p. 4898-4941.

[9] Nakao, M. - *A difference inequality and its application to nonlinear evolution equations*, Journal Math. Soc. Japan, Number 4, 1978, p. 747-762.

[10] Park, J. Y.; Park, S. H. - *Decay rate estimates for wave equations of memory type with acoustic boundary conditions*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 74, Issue 3, 2011, p. 993-998.

[11] Vicente, A.; Frota, C. L. - *Nonlinear wave equation with weak dissipative term in domains with non-locally reacting boundary*, submetido para publicação.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

EXACT CONTROLLABILITY FOR A COUPLED SYSTEM

ANTÔNIO JOAQUIM R. FEITOSA * & RICARDO E. FUENTES APOLAYA †

1 Introduction

Let Ω be an open bounded subset of $\mathbb{R}^n$ with regular boundary Γ. In this work the authors are interested in proving the existence of exact controllability for a coupled system of the type,

$$u''(x,t) - \Delta u(x,t) + \alpha\, v(x,t) = 0 \text{ in } Q = \Omega \times (0,\infty) \tag{1.1}$$

$$v''(x,t) - \Delta v(x,t) + \alpha\, u(x,t) = 0 \text{ in } Q = \Omega \times (0,\infty), \tag{1.2}$$

with initial conditions

$$u(x,0) = u^0(x), \quad u'(x,0) = u^1(x) \quad \text{in} \quad \Omega,$$
$$v(x,0) = v^0(x), \quad v'(x,0) = v^1(x) \quad \text{in} \quad \Omega,$$

here Δ denotes the Laplace operator and α is a real constant.

In this paper our focus is to present the exact controllability for the coupled linear system (1.1) - (1.2), that appears when we consider the precise exact controllability of the nonlinear coupled system

$$u''(x,t) - \Delta u(x,t) + u(x,t)\, v(x,t) = 0 \text{ in } Q = \Omega \times (0,\infty) \tag{1.3}$$

$$v''(x,t) - \Delta v(x,t) + u^2(x,t) = 0 \text{ in } Q = \Omega \times (0,\infty), \tag{1.4}$$

which is in preparation, and the result that we present is very useful to study the nonlinear system, using a technique of continuity and the Schauder fixed point theorem [1], [2].

2 Mathematical Result

Theorem 2.1. *There exists $T_0 > 0$ such that the coupled system (1.1)-(1.2) is exact controllably in the space $\left[L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)\right]^2$ with control in $L^2(\Sigma)$ for $T > T_0$. This means that for each $z_0, w_0 \in L^2(\Omega)$ and $z_1, w_1 \in H^{-1}(\Omega)$ there exists a control $v \in L^2(\Sigma)$ such that the ultra-weak solution of problem $\{z, w\}$ verify*

$$z(T) = z_0,\ z'(T) = z_1,\ \ w(T) = w_0,\ w'(T) = w_1$$

Proof The proof is based on the Hilbert Uniqueness Method idealized by J. L. Lions [3]. We follow the steps:

- Weak Solution and strong solution.
- Fundamental lemma.
- Inequality Direct.
- Inequality Inverse.

*Instituto de Matemática , UFPB, PB, Brasil, joaquim@mat.ufpb.br
†Instituto de Matemtica, UFF, RJ, Brasil, ricardof16@yahoo.com.br

- Ultra-weak Solution
- Application of the H.U.M. method

The main difficulty is to show the reverse inequality weak solutions of the system to associate, due to the terms αv and αu of the coupled system. ■

References

[1] ARARUNA, F. D., BOLDRINI J. L., ROJAS-MEDAR M. A. - *Exact null approximate controllability for semi-galerkim approximations of a Boussinesq system,* to appear

[2] CORON J. M. - *Control and Nonlinearity.*, American Mathematical Society, Mathematical Surveys and Monographs, Volume 136, 2009.

[3] LIONS, J. L. - *Contrôlabilité de Systèmes Distribué*, C.R. Acad. Scl. Paris, T. 302, Series 1, 1986, pp. 471-475.

[4] ZUAZUA, E. - *Exact Controllability For the Semilinear Wave Equation* , J. Math. pures et appl., 69, 1990, p. 1 a 31.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

EXISTENCE AND NONEXISTENCE OF PATTERNS WITH VARIABLE DIFFUSIVITY ON SURFACES OF REVOLUTION WITHOUT BOUNDARY

ARNALDO SIMAL DO NASCIMENTO* & MAICON SÔNEGO†

The main concern in this work is to find sufficient conditions for existence as well as nonexistence of nonconstant stable stationary solutions (herein referred to as *patterns*, for short) to the diffusion problem

$$u_t = div(a(x)\nabla u) + f(u), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \tag{0.1}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ is a surface of revolution such that $\partial\Omega = \emptyset$, $a(\cdot)$, the diffusivity function, a smooth and positive function which will be detailed below. Also f is a function in $C^1(\mathbb{R})$, sometimes considered of the bistable type.

This kind of problem appears as a mathematical model in many distinct areas and, roughly speaking, a solution models the time evolution of the concentration of a diffusing substance in a heterogeneous medium whose diffusivity is given by $a(\cdot)$, under the effect of a source/sink term f.

In this work we are concerned in finding mechanisms of interaction between the diffusivity function $a(\cdot)$ and the geometry of the domain so as to produce patterns to the problem (0.1) as well as those which do not produce patterns.

For domains in $\mathbb{R}^N$ the question of how the diffusivity function can give rise to patterns, or not, has been considered by many authors. In the one-dimensional case and Neumann boundary conditions, the condition for nonexistence of patterns was $a'' < 0$ in [4] and $(\sqrt{a})'' < 0$ in [5]. For larger dimensions see [2], and [6] where a problem with nonlinear flux on the boundary was addressed.

The problem (0.1) with $a =$ constant on a Riemannian manifold without boundary appears in [1, 3]. In particular, if Ω is a surface of revolution the authors in [1] show that there are no patterns when the sum of the Gaussian curvature in every point p and the square of the geodesic curvature of the parallel passing through p is nonnegative.

1 Main Results

Let Ω be the surface of revolution parametrized by

$$\begin{cases} x_1 = \psi(s)\cos(\theta) \\ x_2 = \psi(s)\sin(\theta) \qquad (s,\theta) \in [0,l] \times [0,2\pi) \\ x_3 = \chi(s) \end{cases} \tag{1.2}$$

where $\psi, \chi \in C^2(I)$, $\psi > 0$ in $(0,l)$ and $(\psi')^2 + (\chi')^2 = 1$ em I. Moreover, $\psi(0) = \psi(l) = 0$, and $\psi'(0) = -\psi'(l) = 1$.

Abusing notation for simplicity sake we set

$$a(x) = a(s), \text{ for } x = (\psi(s)\cos(\theta), \psi(s)\sin(\theta), \chi(s)) \in \Omega.$$

Theorem 1.1. *If*

$$-\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)'(s) \geq \frac{a'(s)\psi'(s) + a''(s)\psi(s)}{2a(s)\psi(s)}, \quad \forall\, s \in (0,l) \tag{1.3}$$

*Dep. de Matemtica, UFSCar, SP, Brasil, e-mail: arnaldon@dm.ufscar.br
†Dep. de Matemtica, UFSCar, SP, Brasil, e-mail: maicon@dm.ufscar.br

then every nonconstant stationary solution of (0.1) is unstable.

In particular this is the case if

- *Ω is the border of a convex domain and*
- *$(a'\psi)(\cdot)$ is a nonincreasing function.*

The condition (1.3) has a geometrical meaning in the sense that

$$-\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)' = -\frac{\psi''}{\psi} + \left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2 = K + (K_g)^2,$$

where K is the Gaussian curvature of the Ω and K_g represents the geodesic curvature of the parallel circles $s =$ constant on Ω.

Also (1.3) generalizes the condition in [1], namely $-\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)' \geq 0$, where the case $a=$ constant has been addressed.

Note that Theorem 1.1 is valid for any $f \in C^1(\mathrm{I\!R})$. In the case where $\psi > 0$ in $[0, l]$ with the Neumann boundary condition and $a \equiv$ constant, the authors in [1], based on the work [5], show that if $-\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)'(s_0) < 0$ for some $s_0 \in (0, l)$ then there exists $f \in C^1(\mathrm{I\!R})$ such that (0.1) admits patterns.

In the next result we take $f \in C^1(\mathrm{I\!R})$ satisfying:

- (f_1) f has three consecutives zeros α, θ and β $\alpha < \theta < \beta$, satisfying $f(\alpha) = f(\theta) = f(\beta) = 0$ and $f'(\alpha) < 0$, $f'(\beta) < 0$.
- (f_2) $\int_\alpha^\beta f(\xi)d\xi = 0$ (the equal-area condition).
- (f_3) There exist positives constants c_1, c_2, s_0 and a number $p \geq 2$ such that $c_1 |t|^p \leq F(t) \leq c_2 |t|^p$ for $|s| \geq s_0$, where $F(t) = -\frac{1}{2}\int_\alpha^t f(\xi)d\xi$.

We give sufficient conditions for existence of patterns to the following problem

$$\partial_t u_\epsilon = \epsilon^2 div(a(x)\nabla u_\epsilon) + f(u_\epsilon), \quad (t, x) \in \mathrm{I\!R}^+ \times \Omega \tag{1.4}$$

where ϵ is a small positive parameter and Ω, $a(\cdot)$ are as in (0.1).

Theorem 1.2. *Suppose that f satisfies (f_1), (f_2), (f_3) and that the function $\sqrt{a}\psi$ assumes an isolated local minimum in $(0, l)$. Then $\exists\, \epsilon_0 > 0$ and a family $\{v_\epsilon\}_{0<\epsilon\leq\epsilon_0}$ of nonconstant stable stationary solution to the problem (1.4).*

In order to utilize Γ-convergence results, f has to be a function of bistable type that satisfies the equal-area condition (f_2). Our last result proves that this condition is actually necessary in our approach.

References

[1] BANDLE, C., PUNZO, F., TESEI, A. - *Existence and nonexistence of patterns on Riemannian manifolds*, J. Math. Anal. Appl., **387** (2012), 33-47.

[2] DO NASCIMENTO, A. S. - *On the role of diffusivity in some stable equilibria of a diffusion equation*, J. Diff. Eqns., **155** No. 2 (1999), 231-244.

[3] DO NASCIMENTO, A. S. AND GONÇALVES, A. C. - *Instability of elliptic equations on compact Riemannian manifolds with non-negative Ricci curvature*, Electr. J. Diff. Eqns., **67** (2010), 1-18.

[4] CHIPOT, M. AND HALE, J. K. - *Stable equilibria with variable diffusion*, Contemp. Math., **17** (1983), 209-213.

[5] YANAGIDA, E - *Stability of stationary distributions in a space-dependent population growth process*, J. Math. Biol., **15** (1982), 37-50.

[6] DO NASCIMENTO, A. S., CREMA, J. AND SÔNEGO, M. - *Necessary and sufficient conditions on diffusivity for existence of patterns with nonlinear flux on the boundary*, Electr. J. Diff. Eqns., **62** (2012), 1-14.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

ON ABSTRACT INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH STATE-DEPENDENT DELAY

BRUNO DE ANDRADE [*] [†] & GIOVANA SIRACUSA [‡]

In this work we study some topological properties of the solution set of a class of integro-differential equations with state-dependent delay described by

$$\begin{cases} u'(t) &= \int_0^t a(t-s)Au(s)ds + f\left(t, u_{\rho(t,u_t)}\right), \quad t \in [0,b], \\ u(0) &= \varphi \in \mathfrak{B}, \end{cases} \tag{0.1}$$

where $A : D(A) \subset X \to X$ is a closed linear operator defined on a Banach space X, $a \in L^1_{loc}([0,\infty))$ is a completely positive function, the history $x_t : (-\infty, 0] \to X$, given by $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, belongs to phase space $\mathfrak{B}$ described axiomatically, $f : [0,b] \times \mathfrak{B} \to X$ and $\rho : [0,b] \times \mathfrak{B} \to (-\infty, b]$ are appropriated functions. Particularly, we are able to establish an existence theory to (0.1).

The study of topological structure of solution set of differential equations dates back to the beginning of the 20's when H. Kneser (see [5]) proved that the Peano existence theorem could be reformulated to ensure that the solution set of a ODE is, beyond nonempty, a compact and connected set. Almost 20 years later, in 1942, N. Aronszajn, (see [2]) improved the Kneser theorem showing that the set of all solutions of a ODE is an R_δ-set. The Aronszajn theorem had a large impact on qualitative theory of differential equations and due to this the study of topological structure of solution set of differential equations has drawn attention of researchers in the last years.

The result we will present says that, under suitable conditions, the set $\mathcal{S}$ formed by the mild solution of the problem 0.1 is a R_δ-set. Particulary, is a compact, nonempty and connected space. Futhermore is acyclic with respect to the Čech homology functor which means that from the point of view of Algebraic Topology, it is equivalent to a point, in the sense that it has the same homology groups as one point set (see [4]).

1 Mathematical Results

The scope of this work is to study the topological structure of the solution set of (0.1). Particularly, we establish some sufficient conditions for the existence of mild solutions for this problem.

Definition 1.1. *Let A be a generator of a solution operator $S(t)$. A function $u : (-\infty, b] \to X$ is called a mild solution of the problem (0.1) if $u_0 = \varphi$, $u_{\rho(t,u_t)} \in \mathfrak{B}$, $u|_{[0,b]} \in C([0,b], X)$ and*

$$u(t) = S(t)\varphi(0) + \int_0^t S(t-s) f\left(s, u_{\rho(s,u_s)}\right) ds, \ t \in [0,b].$$

To prove our results we always assume that $\rho : I \times \mathfrak{B} \to (-\infty, b]$ is continuous and $\varphi \in \mathfrak{B}$. Furthermore, we will suppose that the linear operator $A : D(A) \subset X \to X$ is the generator of a solution operator $S(t)$ and there exist a constant $M > 0$ such that $\|S(t)\| \leq M$, for all $t \in [0,b]$. If $u \in C([0,b]; X)$ we define $\overline{u} : (-\infty, b] \to X$ as the extension of u to $(-\infty, b]$ such that $\overline{u}_0 = \varphi$.

In the sequel we introduce some conditions.

[*] ICMC-USP, SP, Brasil, bruno00luis@gmail.com
[†] Bruno de Andrade is partially supported by CNPQ/Brazil under Grant 100994/2011-3.
[‡] Dmat and NFD, UFPE, PE, Brasil, e-mail: gisiracusa@gmail.com

($\mathbf{H}_\varphi$) The function $t \to \varphi_t$ is well defined and continuous from the set

$$\mathcal{R}(\rho^-) = \{\rho(s,\psi) : (s,\psi) \in [0,b] \times \mathfrak{B},\ \rho(s,\psi) \leq 0\}$$

into $\mathfrak{B}$ and there is a bounded continuous function $J^\varphi : \mathcal{R}(\rho^-) \to (0,\infty)$ such that $\|\varphi_t\|_{\mathfrak{B}} \leq J^\varphi(t)\|\varphi\|_{\mathcal{B}}$ for every $t \in \mathcal{R}(\rho)$.

$(\mathbf{H_1})'$ The function $f : [0,b] \times \mathfrak{B} \to X$ verifies the following conditions.

(i) The function $f(t,\cdot) : \mathfrak{B} \to X$ is continuous for almost everywhere $t \in [0,b]$, and for every $\psi \in \mathfrak{B}$, the function $f(\cdot,\psi) : [0,b] \to X$ is strongly measurable.

(ii) There exists $m \in C([0,b],[0,\infty))$ and a bounded continuous non-decreasing function $\Omega : [0,\infty) \to (0,\infty)$ such that $\|f(t,\psi)\| \leq m(t)\Omega(\|\psi\|_{\mathcal{B}})$, for all $(t,\psi) \in [0,b] \times \mathcal{B}$.

$(\mathbf{H_2})'$ For every $t \in [0,b]$, the set $\{f(s,\psi) : s \in [0,t], \psi \in \mathcal{B}\} \subset X$ is a bounded set.

Theorem 1.1. *Suppose that conditions $(\mathbf{H_1})'$, $(\mathbf{H_2})'$ and $(\mathbf{H}_\varphi)$ are fulfilled. If $S(t)$, $t > 0$, is compact then the set $\mathcal{S}$ formed by the mild solution of (0.1) is a R_δ-set.*

Example 1.1. *Consider a class of fractional integro-differential equations with state-dependent delay of the form*

$$u_t = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} u_{xx}(s)ds + m(t)h(u(t-\sigma(u(t,x_0)),x)), \quad t \in [0,b],\ x \in [0,\pi], \tag{1.2}$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \quad t \geq 0, \tag{1.3}$$

$$u(t,x) = \varphi(t,x), \quad t \leq 0,\ x \in [0,\pi], \tag{1.4}$$

where $x_0 \in (0,\pi)$ is fixed, $1 < \alpha < 2$, $m : [0,b] \to \mathbb{R}$, $\sigma : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ are continuous function and $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a bounded continuous function. Finally, by defining the maps f and ρ appropriately, we can represent (1.2)-(1.4) by the abstract form (0.1). It is not hard to check that under above considerations the conditions $(\mathbf{H_1})'$ and $(\mathbf{H_2})'$ are fulfilled. Then follows from Theorem 1.1 that the solution set of the problem (1.2)-(1.4) is a compact, nonempty and connected space. For more details, see [1].

References

[1] AGARWAL, R., DE ANDRADE, B. AND SIRACUSA, G. *On fractional integro-differential equations with state-dependent delay,* Comput. Math. Appl., **62**, 2011, 1143-1149.

[2] ARONSZAJN, N. - *Le Correspondant Topologique De L'Unicite Dans La Theorie Des Equations Differentielles,* Ann. Math., **43 (4)**, 1942, 730-738.

[3] HINO, Y., MURAKAMI, S. AND NAITO, T. - *Functional-differential equations with infinite delay,* Lecture Notes in Mathematics, **1473**. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[4] GÓRNIEWICZ, L. -*Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings,* Kluwer, Dordrecht, 1999.

[5] KNESER, H. - *Uber die Lsungen eine system gewhnlicher differential Gleichungen, das der lipschitzchen Bedingung nicht gengt,* S. B. Preuss. Akad.Wiss. Phys. Math. Kl. **4**, 1923, 171-174.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

RESOLUBILIDADE GLOBAL PARA UMA CLASSE DE SISTEMAS INVOLUTIVOS

CLEBER DE MEDEIRA * & ADALBERTO P. BERGAMASCO † & SÉRGIO L. ZANI ‡

Neste trabalho estudamos a *resolubilidade global* do seguinte sistema de campos vetoriais complexos definidos no toro $\mathbb{T}^{n+1} \simeq (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^{n+1}$

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + (a_j(t) + ib_j(t_j))\frac{\partial}{\partial x}, \quad j = 1, \dots, n, \tag{0.1}$$

sendo $a_j \in C^\infty(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$, $b_j \in C^\infty(\mathbb{T}^1; \mathbb{R})$ e $(t, x) = (t_1, \dots, t_n, x)$ as coordenadas em $\mathbb{T}^{n+1}$. Assumimos que o sistema (0.1) é involutivo o que equivale a 1-forma $c(t) = \sum_{j=1}^n (a_j(t) + ib_j(t_j))dt_j$ ser fechada.

O estudo da resolubilidade global do sistema (0.1) consiste em obter condições necessárias e/ou suficientes para que, dadas funções $f_j \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$, $j = 1, \dots, n$, satisfazendo certas condições naturais de compatibilidade, exista solução u das EDP's lineares de primeira ordem

$$L_j u = f_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Pelo trabalho [7] de François Treves, a *resolubilidade local* do sistema (0.1) está relacionada com a conexidade de todos os conjuntos de subnível e supernível da parte imaginária de uma *primitiva local* da 1-forma c. Propriedades dessa natureza aparecem pela primeira vez nesse trabalho que trata de operadores em um contexto mais geral e em todos os níveis do complexo associado. Pelo trabalho [5] de Cardoso e Hounie, posterior a [7], quando a 1-forma c for exata, o sistema (0.1) será *globalmente resolúvel* se, e somente se, a parte imaginária de uma *primitiva global* de c possuir todos os subníveis e superníveis conexos em $\mathbb{T}^n$. Contudo, quando a 1-forma c não é exata, ela não possui uma primitiva global definida em $\mathbb{T}^n$, o que exige nova abordagem. Ainda, o trabalho [6] de Hounie apresenta uma resposta completa para a resolubilidade global quando o sistema (0.1) é composto por um único campo. Nesse caso, a resolubilidade global envolve também condições sobre a parte real da 1-forma c.

Outros trabalhos que tratam de questões semelhantes são [2], [3] e [4].

Em nosso trabalho (ver [1]) apresentamos uma caracterização completa para a resolubilidade global do sistema (0.1) em termos de formas de Liouville e da conexidade de todos os subníveis e superníveis, no recobrimento minimal, de uma primitiva global da 1-forma associada ao sistema.

1 Resultados principais

Seja b uma 1-forma real, fechada e suave definida em $\mathbb{T}^n$. Em [3] os autores definem o recobrimento minimal de $\mathbb{T}^n$ com relação a b como o menor espaço de recobrimento $\Pi : \mathcal{T} \to \mathbb{T}^n$ tal que o *pull back* $\Pi^* b$ é uma forma exata. Neste trabalho a 1-forma b é a parte imaginária da 1-forma c considerada inicialmente, ou seja, $b = \sum_{j=1}^n b_j(t_j)dt_j$.

Seja $\mathcal{T}$ o recobrimento minimal de $\mathbb{T}^n$ com relação a b. A 1-forma $\Pi^* b$ possui uma primitiva global B definida em $\mathcal{T}$ e uma vez que cada função b_j depende apenas da variável t_j correspondente, a função $B : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ pode ser escrita na seguinte forma $B(t) = \sum_{j=1}^n B_j(t_j)$.

Sejam $J = \{j_1, \dots, j_m\} \subset \{1, \dots, n\}$ com $j_1 < \dots < j_m$ e $a_0 \doteq (a_{10}, \dots, a_{n0}) \in \mathbb{R}^n$ sendo cada a_{j0} a média da função a_j. Quando $a_0 \in \mathbb{Q}^n$ e $J \neq \emptyset$, denotamos por q_J o menor inteiro positivo que satisfaz $q_J(a_{j_1 0}, \dots, a_{j_m 0}) \in \mathbb{Z}^m$.

*UEPG, PR, Brasil, e-mail: cleber3m@gmail.com
†ICMC, USP, SP, Brasil, e-mail: apbergam@icmc.usp.br
‡ICMC, USP, SP, Brasil, e-mail: szani@icmc.usp.br

No caso em que $J = \{1, \ldots, n\}$ usamos a notação q_*. Assim, qualquer que seja $J = \{j_1, \ldots, j_m\} \neq \emptyset$ teremos $q_J \leq q_*$ e além disso q_J divide q_*. Consideramos o conjunto $J = \{j \in \{1, \ldots, n\};\ b_j \equiv 0\}$ e o escrevemos da seguinte forma $J = \{j_1 < \cdots < j_m\}$. Sob estas notações, o principal resultado deste trabalho é o seguinte:

Teorema 1.1. *Seja B uma primitiva global de $\Pi^* b$ definida no recobrimento minimal $\mathcal{T}$. O sistema (0.1) é globalmente resolúvel se, e somente se, pelo menos uma das duas situações ocorre:*

I) $J \neq \emptyset$ e $(a_{j_1 0}, \ldots, a_{j_m 0}) \notin \mathbb{Q}^m$ é não-Liouville.

II) Os subníveis $\Omega_s = \{t \in \mathcal{T};\ B(t) < s\}$ e superníveis $\Omega^s = \{t \in \mathcal{T};\ B(t) > s\}$ são conexos para todo $s \in \mathbb{R}$ e além disso uma das seguintes condições é satisfeita:

1. *$J = \emptyset$, b é exata e $a_0 \in \mathbb{Z}^n$;*
2. *$J \neq \emptyset$, b é exata, $a_0 \in \mathbb{Q}^n$ e $q_J = q_*$;*
3. *b é não exata.*

Quando $b = \sum_{j=1}^n b_j(t_j)dt_j$ é uma 1-forma não exata, a propriedade de todos os subníveis Ω_s e superníveis Ω^s serem conexos em $\mathcal{T}$ está intimamente ligada com a existência de uma função $b_j \not\equiv 0$ que não muda de sinal, conforme mostra o seguinte resultado:

Proposição 1.1. *Sejam $b = \sum_{j=1}^n b_j(t_j)dt_j$ uma 1-forma não exata e $B = \sum_{j=1}^n B_j(t_j)$ uma primitiva global de b definida no recobrimento minimal $\mathcal{T}$. Então os subníveis $\Omega_s = \{t \in \mathcal{T};\ B(t) < s\}$ e superníveis $\Omega^s = \{t \in \mathcal{T};\ B(t) > s\}$ são conexos para todo $s \in \mathbb{R}$ se, e somente se, existe uma função $b_j \not\equiv 0$ que não muda de sinal.*

Exemplo 1.1. *Como consequência do Teorema 1.1 obtemos um interessante exemplo:*

Uma vez que $B(t_1, t_2) = -\cos t_2$ possui apenas subníveis e superníveis conexos em $\mathbb{T}^2$, o sistema

$$\begin{cases} L_1 = \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x} \\ L_2 = \frac{\partial}{\partial t_2} + (\frac{1}{2} + i\sin(t_2))\frac{\partial}{\partial x} \end{cases}$$

é globalmente resolúvel em $\mathbb{T}^3$ pois $q_J = q_* = 4$, enquanto que

$$\begin{cases} L_1 = \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} \\ L_2 = \frac{\partial}{\partial t_2} + (\frac{1}{4} + i\sin(t_2))\frac{\partial}{\partial x} \end{cases}$$

não é globalmente resolúvel, pois nesse caso $q_J = 2 < 4 = q_*$.

Referências

[1] BERGAMASCO A., DE MEDEIRA C. AND ZANI S. - Globally solvable systems of complex vector fields, *J. Diff. Equations* **252**, 4598–4623, 2012.

[2] BERGAMASCO A. AND KIRILOV A. - Global solvability for a class of overdetermined systems, *J. Funct. Anal.*, **252**, 603–629, 2007.

[3] BERGAMASCO A., KIRILOV A., NUNES W. AND ZANI S. - On the global solvability for overdetermined systems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, to appear.

[4] BERGAMASCO A. AND PETRONILHO G. - Global solvability of a class of involutive systems, *J. Math. Anal. Appl.*, **233**, 314–327, 1999.

[5] CARDOSO F. AND HOUNIE J. - Global solvability of an abstract complex, *Proc. Amer. Math. Soc.* **65**, 117–124, 1977.

[6] HOUNIE J. - Globally hypoelliptic and globally solvable first order evolution equations, *Trans. Amer. Math.* **252**, 233–248, 1979.

[7] TREVES F. - Study of a model in the theory of complexes of pseudo-differential operators, *Ann. of Math.* (2) **104**, 269–324, 1976.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

On the growth of the optimal constants of the multilinear Bohnenblust–Hille inequality

Daniel Núñez Alarcón* & Daniel Marinho Pellegrino†

Let $\mathbb{K}$ be the real or complex scalar field. The multilinear Bohnenblust–Hille inequality (see, for example, [1, 3]) asserts that for every positive integer $n \geq 1$ there exists a constant $c_{\mathbb{K},n}$ such that

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{N} \left|T(e_{i_1},\ldots,e_{i_n})\right|^{\frac{2n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{2n}} \leq c_{\mathbb{K},n} \sup_{z_1,\ldots,z_n\in\mathbb{D}^N} |T(z_1,...,z_n)| \tag{0.1}$$

for all n-linear forms $T:\mathbb{K}^N\times\cdots\times\mathbb{K}^N\to\mathbb{K}$ and every positive integer N, where $(e_i)_{i=1}^N$ denotes the canonical basis of $\mathbb{K}^N$ and $\mathbb{D}^N$ represents the open unit polydisk in $\mathbb{K}^N$. It is well-known that $c_{\mathbb{K},n}\in[1,\infty)$ for all n and that the power $\frac{2n}{n+1}$ is sharp but, on the other hand, the optimal values for $c_{\mathbb{K},n}$ remain a mystery. To the best of our knowledge the unique known precise information is that $c_{\mathbb{R},2}=\sqrt{2}$ is sharp . The original constants obtained by Bohnenblust and Hille (for the complex case) are

$$c_{\mathbb{C},n} = n^{\frac{n+1}{2n}} 2^{\frac{n-1}{2}}.$$

Later, these results were improved by (Davie, 1973 ([2])),to

$$c_{\mathbb{C},n} = 2^{\frac{n-1}{2}}$$

and (Quéffelec, 1995 ([5])), to

$$c_{\mathbb{C},n} = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1}.$$

In 2012 ([4]) it was proved that the best constants satisfying the Bohnenblust–Hille inequality have a subexponential growth (for both real and complex scalars).

In this work we obtain more information on the asymptotic behavior of these optimal constants.

Conventions

Definition 0.1. *We say that a sequence of positive real numbers $(R_n)_{n=1}^{\infty}$ is well-behaved if there are $L_1, L_2 \in [0,\infty]$ such that*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_{2n}}{R_n} = L_1 \tag{0.2}$$

and

$$\lim_{n\to\infty}(R_n - R_{n-1}) = L_2. \tag{0.3}$$

- The subexponential sequence of constants satisfying the multilinear Bohnenblust–Hille inequality constructed in [4] is denoted by $(C_n)_{n=1}^{\infty}$.
- The letter γ denotes the Euler constant

$$\gamma = \lim_{m\to\infty}\left((-\log m)+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\right) \approx 0.577. \tag{0.4}$$

*Departamento de Matemática , UFPB, PB, Brasil, danielnunezal@gmail.com
†Departamento de Matemática , UFPB, PB, Brasil, dmpellegrino@gmail.com

1 Mathematical Results

Theorem 1.1 (Dichotomy)**.** *If $1 \leq R_n \leq C_n$ for all n, exactly one of the following assertions is true:*

(i) $(R_n)_{n=1}^{\infty}$ is subexponential and not well-behaved.

(ii) $(R_n)_{n=1}^{\infty}$ is well-behaved with

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_{2n}}{R_n} \in [1, \frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}]$$

and

$$\lim_{n\to\infty} (R_n - R_{n-1}) = 0.$$

Corollary 1.1. *The optimal constants $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ satisfying the Bohnenblust–Hille inequality is*

(i) subexponential and not well-behaved

or

(ii) well-behaved with

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K_{2n}}{K_n} \in [1, \frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}}]$$

and

$$\lim_{n\to\infty} (K_n - K_{n-1}) = 0.$$

The non-existence of the above limits would be an extremely odd event since there is no reason for a pathological behavior for the optimal constants $(K_{\mathbb{K},n})_{n=1}^{\infty}$ satisfying the Bohnenblust–Hille inequality.

Another corollary of the Dichotomy Theorem is that the sequence $(K_{\mathbb{K},n})_{n=1}^{\infty}$ of optimal constants satisfying the Bohnenblust–Hille inequality *can not* have any kind of polynomial growth.

Corollary 1.2. *Let*

$$q \in \mathbb{R} - [0, \beta] \tag{1.5}$$

with

$$\beta := \log_2 \left(\frac{e^{1-\frac{1}{2}\gamma}}{\sqrt{2}} \right) \approx 0.526$$

and $c \in (0, \infty)$, then the sequence $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ can not be of the form

$$K_n \sim cn^q.$$

Furthermore, if $p(n)$ is any non-constant polynomial, then

$$K_n \nsim p(n).$$

References

[1] Bohnenblust, H. F. and Hille, E. - *On the absolute convergence of Dirichlet series.*, Ann. of Math. **32** (1931), 600-622.

[2] Davie, A. M. - *Quotient algebras of uniform algebras.*, J. London Math. Soc. **7** (1973), 31-40.

[3] Defant, A., Popa, D. and Schwarting, U. - *Coordinatewise multiple summing operators in Banach spaces.*, Funct. Anal. **259** (2010), 220-242.

[4] Diniz, D., Muñoz-Fernández, G. A., Pellegrino, D. and Seoane-Sepúlveda, J. B. - *The asymptotic growht of the constants in the Bohnenblust–Hille inequality is optimal.*, J. Funct. Anal. **263** (2012), 415-428

[5] Queffélec, H. - *H. Bohr's vision of ordinary Dirichlet series: old and new results.*, J. Anal. **3** (1995), 43-60.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

How do the Bohnenblust–Hille constants behave?

DANIEL M. PELLEGRINO*

The Bohnenblust–Hille inequality, in its formulation for complex scalars and multilinear mappings, asserts that there is a constant $C_n \in [1, \infty)$ such that the $\ell_{\frac{2n}{n+1}}$-norm of $\left(U(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})\right)_{i_1,\ldots i_n=1}^{N}$is bounded above by C_n times the supremum norm of U, regardless of the n-linear form $U : \mathbb{C}^N \times \cdots \times \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ and the positive integer N. More precisely:

Multilinear Bohnenblust–Hille inequality. For every positive integer $n \geq 1$ there exists a sequence of positive scalars $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ in $[1, \infty)$ such that

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{N} \left| U(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) \right|^{\frac{2n}{n+1}} \right)^{\frac{n+1}{2n}} \leq C_n \sup_{z_1,\ldots,z_n \in \mathbb{D}^N} |U(z_1, ..., z_n)|$$

for all n-linear forms $U : \mathbb{C}^N \times \cdots \times \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ and all positive integers N, where $(e_i)_{i=1}^{N}$ denotes the canonical basis of $\mathbb{C}^N$ and $\mathbb{D}^N$ represents the open unit polydisk in $\mathbb{C}^N$.

The exponent $2n/(n + 1)$ is sharp but the precise values and asymptotic behavior of the optimal constants (denoted by K_n) remain a mystery. The first estimates for the Bohnenblust–Hille constants suggested an exponential growth:

- $K_n \leq n^{\frac{n+1}{2n}} 2^{\frac{n-1}{2}}$ ([1], 1931),
- $K_n \leq 2^{\frac{n-1}{2}}$ ([2], 1970's),
- $K_n \leq \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1}$ ([9], 1995).

In this talk we survey the recent advances related to the search of the optimal constants of the Bohnenblust–Hille inequalities (including the polynomial Bohnenblust–Hille inequality and the case of real scalars).

From now on γ denotes the Euler–Mascheroni constant $\gamma := \lim_{m\to\infty} \left((-\log m) + \sum_{k=1}^{m} k^{-1} \right) \approx 0.5772.$

Among other results of different authors we stress the recent results:

Theorem 0.1. *([3]) The optimal constants satisfying the polynomial Bohnenblust–Hille inequality are hypercontractive.*

Theorem 0.2. *([4]) The optimal constants satisfying the multilinear Bohnenblust–Hille inequality have a subexponential growth.*

Theorem 0.3. *([7])There exist multilinear Bohnenblust–Hille constants $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ such that* $\lim (C_{n+1} - C_n) = 0$.

Theorem 0.4. *([7]) The optimal constants K_n satisfying the multilinear Bohnenblust–Hille inequality are such that*

$$K_{n+1} - K_n < \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}} - \frac{4}{e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\gamma} \sqrt{\pi}} \right) n^{\log_2 \left(\frac{e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\gamma}}{2} \right) + \varepsilon}$$

for infinitely many n's and all $\varepsilon > 0$.

Numerically, we have:

*Departamento de Matemática, UFPB, PB, Brazil, dmpellegrino@gmail.com

Theorem 0.5. *([7]) The optimal constants K_n satisfying the multilinear Bohnenblust–Hille inequality are such that*

$$K_{n+1} - K_n < \frac{0.87}{n^{0.473}}$$

for infinitely many n's.

Theorem 0.6. *([7]) The optimal constants K_n satisfying the multilinear Bohnenblust–Hille inequality are such that*

$$K_n < 1 + \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(1 - e^{\gamma/2-1/2}\right) \sum_{j=1}^{n-1} j^{\log_2\left(e^{-\gamma/2+1/2}\right)-1} \right)$$

for all $n \geq 2$.

Numerically, the above formula shows a surprising low growth, since a straightforward computation informs us that

$$K_n < 1.41\,(n-1)^{0.305} - 0.04$$

for every integer $n \geq 2$.

References

[1] BOHNENBLUST, H.F AND HILLE, E. - *On the absolute convergence of Dirichlet series,* Ann. of Math. (2) **32** (1931), 600–622.

[2] DAVIE, A.M. - *Quotient algebras of uniform algebras,* J. London Math. Soc. **7** (1973), 31–40.

[3] DEFANT, A., FRERICK, L., ORTEGA-CERDÁ J., OUNAÏES, M. AND SEIP, K., *The polynomial Bohnenblust–Hille inequality is hypercontractive,* Ann. of Math. (2) **174** (2011), 485–497.

[4] DINIZ, D., MUÑOZ-FERNÁNDEZ, G.A., PELLEGRINO, D. AND SEOANE-SEPÚLVEDA, J.B.- *The asymptotic growth of the constants in the Bohnenblust–Hille inequality is optimal,* J. Funct. Anal. **263** (2012), 415–428.

[5] DINIZ, D., MUÑOZ-FERNÁNDEZ, G.A., PELLEGRINO, D. AND SEOANE-SEPÚLVEDA, J.B.- *Lower bounds for the constants in the Bohnenblust–Hille inequality: the case of real scalars,* Proc. Amer. Math. Soc., in press.

[6] MUÑOZ-FERNÁNDEZ, G.A., PELLEGRINO, D., RAMOS CAMPOS, J. AND SEOANE-SEPÚLVEDA, J.B.- *A geometric technique to generate lower estimates for the constants in the Bohnenblust–Hille inequalities,* arXiv:1203.0793.

[7] NUÑEZ-ALARCÓN, D., PELLEGRINO, D. SERRANO-RODRÍGUEZ, D. AND SEOANE-SEPÚLVEDA, J.B.- *There exist multilinear Bohnenblust–Hille constants $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ such that* $\lim\left(C_{n+1} - C_n\right) = 0$, arXiv:1207.0124v4.

[8] PELLEGRINO, D. AND SEOANE-SEPÚLVEDA, J.B.- *New upper bounds for the constants in the Bohnenblust Hille inequality,* J. Math. Anal. Appl. **386** (2012), 300–307.

[9] QUEFFÉLEC, H.- *H. Bohr's vision of ordinary Dirichlet series: old and new results,* J. Anal. **3** (1995), 43–60.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

IDEAIS DE POLINÔMIOS E APLICAÇÕES MULTILINEARES QUASE SOMANTES

DANIEL PELLEGRINO* & JOILSON RIBEIRO†

A noção de ideais de operadores, como também a sua configuração multilinear, é devida a Albrecht Pietsch. Como um determinado ideal linear pode admitir várias extensões multilineares e polinomiais, torna-se necessário responder a seguinte questão natural: Dado um ideal de operadores $\mathcal{I}$, como definir um multi-ideal e um ideal de polinômios que mantêm as principais características do ideal $\mathcal{I}$? Nesse sentido, vários autores estudaram recentemente métodos abstratos de definir quando extensões multilineares (e polinomiais) são, em algum sentido, compatíveis com a estrutura do ideal linear.

Alguns métodos de avaliar extensões multineares/polinomiais foram introduzidas recentemente. A ideia é que dados inteiros positivos k_1 e k_2, os respectivos níveis de k_1-linearidade e k_2-linearidade de um dado multi-ideal (ou ideal de polinômios) deve ter uma forte relação, como também uma conexão com o ideal linear original ($k = 1$).

O principal objetivo deste trabalho é mostrar que o espaço dos operadores multilineares quase somantes em todo ponto pode ser dotado de uma norma, de sorte que o multi-ideal seja Banach e o ideal de polinômios quase somantes em todo ponto seja um tipo de holomorfia (global) no sentido Narchbin [7], como também coerente e compatível com o ideal de operadores lineares, no sentido de [4].

1 Definições e Resultados

Ao longo deste trabalho $E, E_1, ..., E_n, F$ denotarão espaços de Banach reais ou complexos. Dado um inteiro positivo $n \geq 2$, o espaço de Banach de todas as transformações n-lineares limitadas de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F com a norma do sup será denotado por $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n;F)$. A notação para o respectivo espaço de polinômios é $\mathcal{P}(^nE;F)$.

A notação $Rad(F)$ denota o espaço vetorial formado pelas sequências $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ tais que a soma $\sum_{j=1}^{n} r_j(t)x_j$ é convergente em F para quase todo $t \in [0,1]$ (ou, equivalentemente, $\sum_{j=1}^{n} r_j(.)x_j$ converge em $L_p([0,1],F)$ para algum, e portanto todos, $0 < p < \infty$). O espaço $Rad(F)$ é Banach se for munido da norma

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{Rad(F)} := \left(\int_0^1 \left\|\sum_{n=1}^{\infty} r_j(t)x_j\right\|^2 dt\right)^{1/2}. \tag{1.1}$$

Os elementos de $Rad(F)$ são chamados de sequências quase incondicionalmente somáveis. Para mais detalhes, recomendamos o excelente texto [5]. Um polinômio $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ é quase p-somante em $a \in E$ se $(P(a+x_j) - P(a))_{j=1}^{\infty} \in Rad(F)$ para todo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E)$ (para a definição desse conjunto, veja [6]).

O espaço formado pelos polinômios n-homogêneos que são quase p-somantes em $a \in E$ será denotado por $\mathcal{P}_{al,p}^{(a)}(^nE;F)$. Os polinômios n-homogêneos quase p-somantes em $a = 0$ são simplesmente chamados de quase p-somantes e o respectivo espaço é denotado por $\mathcal{P}_{al,p}(^nE;F)$.

O espaço formado pelos polinômios n-homogêneos que são quase p-somantes em todo ponto é denotado por $\mathcal{P}_{al,p}^{ev}(^nE;F)$. De forma análoga, definimos $\mathcal{L}_{al,p}^{(a)}(E_1,\ldots,E_n;F)$ e $\mathcal{L}_{al,p}^{ev}(E_1,\ldots,E_n;F)$.

Os dois resultados a seguir são teoremas que fornecem uma caracterização para os espaços $\mathcal{L}_{al,p}^{(a)}(^nE;E)$ e $\mathcal{L}_{al,p}^{ev}(E_1,...,E_n;F)$, respectivamente. Obtivemos resultados semelhantes para polinômios.

*Departamento de Matemática, UFPB, PB, Brasil, dmpellegrino@gmail.com
†Departamento de Matemática, IM, UFBA, BA, Brasil, e-mail: joilsonribeiro@yahoo.com.br

Teorema 1.1 (Teorema do tipo Dvoretzky-Rogers)**.** *Sejam $n \geq 2$ e $1 < p \leq 2$. São equivalentes:*

(a) E tem dimensão infinita.

(b) $\mathcal{L}_{al,p}^{(a)}({}^nE; E) \neq \mathcal{L}({}^nE; E)$ para todo $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E^n$ com $a_i \neq 0$ para todo i ou $a_i = 0$ para apenas um i.

(c) $\mathcal{L}_{al,p}^{(a)}({}^nE; E) \neq \mathcal{L}({}^nE; E)$ para algum $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E^n$ com $a_i \neq 0$ para todo i ou $a_i = 0$ para apenas um i.

Teorema 1.2. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $T \in \mathcal{L}_{al,p}^{ev}(E_1, ..., E_n; F)$.

(b) Existe $C \geq 0$ tal que

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t) \left(T\left(a_1 + x_j^{(1)}, ..., a_n + x_j^{(n)}\right) - T(a_1, ..., a_n)\right)\right\|^2 dt\right)^{1/2} \leq C \prod_{k=1}^{n} \left(\|a_k\| + \left\|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p}\right)$$

para todo $\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_p^u(E_k)$, $k = 1, ..., n$ e $(a_1, ..., a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$.

(c) Existe $C \geq 0$ tal que

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{m} r_j(t) \left(T\left(a_1 + x_j^{(1)}, ..., a_n + x_j^{(n)}\right) - T(a_1, ..., a_n)\right)\right\|^2 dt\right)^{1/2} \leq C \prod_{k=1}^{n} \left(\|a_k\| + \left\|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,p}\right)$$

para todo positivo inteiro m, $x_j^{(k)} \in E_k$, $k = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$ e $(a_1, ..., a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$.

Mostramos ainda que a menor constante C que satisfaz o item (b) do teorema anterior é uma norma e, com essa norma, $\mathcal{L}_{al,p}^{ev}(E_1, ..., E_n; F)$ é um espaço de Banach. Mais precisamente:

Teorema 1.3. $(\mathcal{L}_{al,p}^{ev}, \|.\|_{al,p}^{ev})$ *é um multi-ideal de Banach.*

Quanto ao ideal de polinômios, mostramos que:

Teorema 1.4. $(\mathcal{P}_{al,p}^{ev}, \|.\|_{al,p}^{ev})$ *é um ideal de polinômios de Banach.*

Teorema 1.5. $(\mathcal{P}_{al,p}^{ev}, \|.\|_{al,p}^{ev})$ *é um tipo de holomorfia global.*

Teorema 1.6. *Para todo inteiro positivo k, o ideal de polinômios $(\mathcal{P}_{al,p}^{ev}, \|.\|_{al,p}^{ev})$ é coerente e compatível com o ideal linear original.*

Referências

[1] BARBOSA, J., BOTELHO, G., DINIZ, D. AND PELLEGRINO, D. - *Spaces of absolutely summing polynomials*, Math. Scand, **101**, 219-237, 2007.

[2] BOTELHO, G. - *Almost summing polynomials*, Math. Nachr. **211**, 25-36, 2000.

[3] BOTELHO, G., BRAUNSS, H. A., AND JUNEK, H. - *Almost p-summing polynomials and multilinear mappings*, Arch. Math. **76**, 109-118, 2001.

[4] CARANDO, D., DIMANT, V. AND MURO, S. - *Coherent sequences of polynomial ideals on Banach spaces*, Math. Nachr. **282**, 1111-1133, 2009.

[5] DIESTEL, J., JARCHOW, H. AND TONGE, A. - *Absolutely summing operators*, Cambridge University Press. 1995.

[6] MATOS, M. C. - *Nonlinear absolutely summing mappings*, Math. Nachr. **258**, 71-89, 2003.

[7] NACHBIN, L. - *Topology on Spaces of Holomorphic Mappings*, Springer, New York, 1969.

[8] PELLEGRINO, D. - *Almost summing mappings*, Arch. Math. **82**, 68-80, 2004.

[9] PELLEGRINO, D. AND RIBEIRO, J. - *On almost summing polynomials and multilinear mappings*, Linear and Multilinear Algebra, **60**, 397-413, 2012.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

CAREY-SUPERCONVERGÊNCIA DA DERIVADA PARA BASES DE ELEMENTOS FINITOS DE LAGRANGE, HERMITE E PEANO EM 1D

DAVID S. PINTO JR.*

Neste estudo é demonstrado inicialmente que o cálculo de pontos superconvergentes pode ser estendido, no sentido introduzido primeiramente pelo Prof. Graham F. Carey em 1989, inclusive para derivadas de segunda, terceira e quarta ordens de interpolantes de elementos finitos da Família de Lagrange unidimensionais. Adicionalmente, é provado que é possível generalizar a Teoria do Prof. Carey [1], aplicando-a a novas bases de espaços de elementos finitos tais como a Base de Elementos de Hermite e a Base Hierárquica de Peano, esta última especialmente importante para a formulação da versão p do Método de Elementos Finitos Adaptativo, idealizado pelo Prof. Ivo Babuska. É demonstrado como é possível associar, e entender com simplicidade, a existência de pontos de superconvergência da derivada primeira de interpolantes de elementos da Família de Lagrange ao Teorema de Rolle Clássico e, particularmente, ao Teorema de Rolle Generalizado quando derivadas de ordem superior são analisadas. É discutida a possibilidade de usar os pontos de superconvergência de derivadas de ordem superior para a propositura de novas formulações de indicadores de erro *a posteriori* e fórmulas de pós-processamento da derivada, ambos essenciais em simulações de problemas reais *via* códigos computacionais para Análise de Elementos Finitos Adaptativos.

1 Resultado

Segundo Zienkiewicz[4], importa em Análise de Erros *a Posteriori via* Métodos de Elementos Finitos Adaptativos, e notadamente em fórmulas de pós-processamento de derivadas idealizadas pelo Prof. Loula, a análise da superconvergência no sentido de Carey, referida como Carey-superconvergência em homenagem ao Professor Carey. Classicamente, é definida a superconvergência da derivada primeira como a ordem de convergência do erro entre a derivada da solução de elementos finitos e a derivada da solução exata na norma de $L^2(\Omega)$, Ω é um conjunto limitado discretizável numa família regular de elementos finitos. Significa dizer que o erro exato na derivada é, na notação de Landau, $O(h^{k+1})$, ou seja, existe uma constante C, independente do parâmetro h da discretização, que satisfaz a:

$$\|u' - u_h'\|_{L^2} \leq Ch^{k+1}. \tag{1.1}$$

Definições de superconvergência, ultraconvergência e hiperconvergência no sentido de Carey são apresentadas sistematicamente e com pormenores no artigo de Pinto Jr.[2], podendo ser estendidas para ordens arbitrárias de forma inteiramente semelhante. Geralmente, entretanto, estuda-se a superconvergência para a derivada primeira ou para o gradiente, no caso multidimensional, posto que não é tão evidente as aplicações para pontos superconvergentes de derivadas de ordem superior.

Particularmente, neste estudo, é demonstrado que é possível calcular pontos de superconvergência de derivadas de ordem superior, por exemplo, de derivadas de terceira ordem para um problema local de interpolação num espaço de elementos finitos da família de Lagrange de classe C^o. Estes pontos superconvergentes, associados à derivada terceira de uma interpolante de elementos finitos lagrangeanos, estão indicados na tabela abaixo, para o elemento finito de referência unidimensional:

*Departamento de Matemática, UFS, SE, Brasil, david@ufs.br

k	N=k+1	$\overline{x} \in [-1,1]$	Funções de Superconvergência
3	4	0	$\sum_{i=0}^{k} x_i^N L_i'''(\overline{x}) - 4\overline{x} \sum_{i=0}^{k} x_i^{N-1} L_i'''(\overline{x})$
4	5	$\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sum_{i=0}^{k} x_i^N L_i'''(\overline{x}) - 5\overline{x} \sum_{i=0}^{k} x_i^{N-1} L_i'''(\overline{x}) + 10\overline{x}^2 \sum_{i=0}^{k} x_i^{N-2} L_i'''(\overline{x})$
5	6	$0, \pm\frac{\sqrt{7}}{5}$	$\sum_{i=0}^{k} x_i^N L_i'''(\overline{x}) - 20\overline{x}^3 \sum_{i=0}^{k} x_i^{N-3} L_i'''(\overline{x})$

Tabela 1: Pontos Carey-Superconvergentes da derivada terceira u_h''' de elementos de Lagrange.

2 Conclusões

A Teoria de Superconvergência, iniciada com os estudos do Prof. Graham F. Carey, é interessantíssima e proporciona um entendimento da superconvergência de derivadas de primeira ordem, principalmente para derivadas de ordens arbitrárias, num problema de interpolação local posto no elemento finito de referência unidimensional $\hat{I} = [-1, +1]$. É conhecido que o Hessiano, o equivalente multidimensional da derivada segunda, é aplicado em refinamento direcional adaptativo na Dinâmica dos Fluidos, mas não existem aplicações das derivadas de ordem superior em geral. Quando se trata da Carey-superconvergência para Bases de Peano, não existem resultados indicando a existência de pontos de superconvergência em geral. Em especial, a Análise Numérica da Superconvergência no caso de bases hierárquicas de Peano, que são atrativas para aplicações em Análise p-Adaptativa, depende fundamentalmente de novas propriedades de completeza das funções de forma de Peano em relação à base polinomial canônica, combinadas à cinemática do elemento finito que os funcionais graus de liberdade representam. Em conclusão, com este estudo introdutório é dada uma contribuição no sentido da sistematização do cálculo dos pontos de superconvergência não apenas para elementos de Lagrange ou para os elementos de Hermite, mas para os elementos hierárquicos de Peano; e, concomitantemente, é sugerida a possibilidade de criação de novas fórmulas de pós-processamento, assintoticamente exatas, baseadas em pontos superconvergentes de derivadas de ordem superior.

Referências

[1] Mackinnon, R.G. and Carey, G.F. - *Superconvergent derivatives: A Taylor Series Analysis*, Int. J. for Num. Meth. in Engng., 28 (1989)489-509.

[2] Pinto Jr., d.s. - *Numerical and Analytical Studies of Superconvergence for First and Second Order Derivatives in Finite Element Interpolations*, Procedings of 23^{st} Ibero-Latin American Congress on Computer Methods in Engineering, GiuliaNova, Italy,(2002).

[3] Pinto Jr., d.s. - *Studies on Barlow points, Gauss points and superconvergent points in 1D with lagrangian and hermitian finite element basis*, Computational and Applied Mathematics, 27(2008).

[4] Zienkiewicz, o.c. and Zhu, j.z - *The Superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique*, Int. J. for Num. Meth. in Engng., 33(1992) 1331-1364.

[5] Loula, a.f.d., Rochinha, f.a. and Murad, m.a. - *Higher-ordergradientpost-processings for second-order elliptic problems* , Comp. Methods in Applied Mech. and Engng., 128(1995) 361-381.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

An explicit formula for subexponential constants in the multilinear Bohnenblust-Hille inequality

Diana Marcela Serrano-Rodríguez*

The complex multilinear Bohnenblust-Hille inequality asserts that for every positive integer $m \geq 1$ there exists a sequence of positive scalars $C_{\mathbb{K},m} \geq 1$ such that

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} \left| U(e_{i_1},\ldots,e_{i_m}) \right|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq C_{\mathbb{K},m} \sup_{z_1,\ldots,z_m \in \mathbb{D}^N} |U(z_1,\ldots,z_m)|$$

for every m-linear form $U : \mathbb{K}^N \times \cdots \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}$ and every positive integer N, where $(e_i)_{i=1}^N$ is the canonical basis of $\mathbb{K}^N$ and $\mathbb{D}^N$ is the open unit polydisk in $\mathbb{K}^N$. This inequality was overlooked for some decades but it was rediscovered some years ago and, since then, many works and applications have been appearing.
It is well known (since the original proof by H.F. Bohnenblust and E. Hille) that the power $\frac{2m}{m+1}$ is sharp; on the other hand the optimal values of the constants $C_{\mathbb{K},m}$ are not known. In the case of real scalars the Bohnenblust-Hille inequality also holds, but with different constants. In fact it is known that, in the real case, $C_{\mathbb{R},2} = \sqrt{2}$ is optimal (see [5]) and, in the complex case, $C_{\mathbb{C},2} \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}$.
The estimates for these constants are becoming more accurate along the time. In the complex case, we have:

- $C_{\mathbb{C},m} \leq m^{\frac{m+1}{2m}} 2^{\frac{m-1}{2}}$ (1931 - Bohnenblust and Hille [1]),
- $C_{\mathbb{C},m} \leq 2^{\frac{m-1}{2}}$ (70's - Kaijser [4]),
- $C_{\mathbb{C},m} \leq \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1}$ (1995 - Queffélec [6]).

Very recently, quite better estimates, with a surprising subexponential growth, were obtained in [2], in the real case, by the formula

$$C_{\mathbb{R},1} = 1$$

$$C_{\mathbb{R},m} = \left(A_{\frac{2m}{m+2}}^{m/2}\right)^{-1} C_{\frac{m}{2}}$$

if m is even, and

$$C_{\mathbb{R},m} = \left(A_{\frac{2m-2}{m+1}}^{\frac{-1-m}{2}} C_{\frac{m-1}{2}}\right)^{\frac{m-1}{2m}} \left(A_{\frac{2m+2}{m+3}}^{\frac{1-m}{2}} C_{\frac{m+1}{2}}\right)^{\frac{m+1}{2m}}$$

if m is odd. And, in the complex case, the next formula was presented in [3],

$$C_{\mathbb{C},1} = 1$$

$$C_{\mathbb{C},n} = \left(\left(\widetilde{A_{\frac{2n}{n+2}}}\right)^{n/2}\right)^{-1} \widetilde{C}_{\frac{n}{2}}$$

if m is even, and

$$C_{\mathbb{C},n} = \left(\left(\widetilde{A_{\frac{2n-2}{n+1}}}\right)^{\frac{-1-n}{2}} \widetilde{C}_{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2n}} \left(\left(\widetilde{A_{\frac{2n+2}{n+3}}}\right)^{\frac{1-n}{2}} \widetilde{C}_{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2n}}$$

if m is odd, where A_p are precisely the best constants satisfying Khinchine's inequality (these constants are due to U. Haagerup) and $\tilde{A}_p$ as in [3]

*Departamento de Matemática , UFPB, PB, Brasil, dmserrano0@gmail.com

Note that the recursive formula of these constants makes the presentation of a closed or explicit formula a quite difficult task.

In [2], using the above sequences, it was shown that there is a constant D ($D \approx 1.44$ for real scalars, and $D \approx 1.23$ for complex scalars) so that the sequence $(C_m)_{m=1}^{\infty}$ given by

$$\begin{aligned} C_{2m} &= C_m \\ C_{2m+1} &= D\,(C_m)^{\frac{2m}{4m+2}}\,(C_{m+1})^{\frac{2m+2}{4m+2}}, \end{aligned} \tag{0.1}$$

with $C_1 = 1$, $C_2 = \sqrt{2}$ in the real case and $C_1 = 1$, $C_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ in the complex case, satisfies the Bohnenblust-Hille inequality and, moreover, this sequence is subexponential. Thus, the main goal of this work is to present an explicit formula for these constants.

From now on C_n will denote the numbers given by (0.1).

1 Mathematical Results

It is plain that every positive integer n can be written (in an unique way) as

$$n = 2^k - l, \tag{1.2}$$

where k is the smaller positive integer such that $2^k \geq n$ and $0 \leq l < 2^{k-1}$.

Theorem 1.1. *If $n \geq 3$ is written as in (1.2), then*

$$C_n = D^{k-1} C_2^{\frac{n-l}{n}}$$

if $l \leq 2^{k-2}$, and

$$C_n = D^{\frac{n(k-1)+2^{k-1}-2l}{n}} C_2^{\frac{2^{k-1}}{n}}$$

if $2^{k-2} < l < 2^{k-1}$, where $C_2 = \sqrt{2}$ for real scalars, and $C_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ for complex scalars.

The proof is done by induction. As the result depends on l, we split the proof into seven possible cases and apply induction in all cases.

References

[1] Bohnenblust, H. F. Hille, Einar. - *On the absolute convergence of Dirichlet series* Ann. of Math. **32** (1931), 600-622.

[2] Diniz, D., Muñoz-Fernández, G. A., Pellegrino, D. and, Seoane-Sepúlveda, J. B. - *The asymptotic growth of the constants in the Bohnenblust-Hille inequality is optimal*, J. Funct. Anal., **263** (2012), 415-428

[3] D. Nuñez-Alarcón and D. Pellegrino and J.B. Seoane-Sepúlveda - *A note on the Bohnenblust-Hille inequality and Steinhaus random variables* , available at arXiv:1203.3043.

[4] Kaijser, S. - *Some results in the metric theory of tensor products.*, Studia Math., **63** (1978), 157-170.

[5] Muñoz-Fernández, G. A., Pellegrino, D. and Seoane-Sepúlveda, J. B. - *Lower bounds for the constants in the Bohnenblust–Hille inequality: the case of real scalars.*, Proc. Amer. Math. Soc., in press.

[6] Queffélec, H. - *H. Bohr's vision of ordinary Dirichlet series: old and new results*, J. Anal. **3** (1995), 43-60.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

UPPER BOUNDS FOR SINGULAR VALUES OF INTEGRAL OPERATORS GENERATED BY POWER SERIES KERNELS ON THE SPHERE

DOUGLAS AZEVEDO* & VALDIR A. MENEGATTO †

Let m be a positive integer at least 1, S^m the unit sphere in $\mathbb{R}^{m+1}$ and $d\sigma_m$ the surface element of S^m. We consider integral operators of the form

$$\mathcal{K}(f)(x) = \int_{S^m} K(x,y)\, f(y) d\sigma_m(y), \quad x \in S^m, \quad f \in L^2(S^m),$$

where the generating kernel K is a power series kernels, that is,

$$K(x,y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^{m+1}} a_\alpha x^\alpha y^\alpha, \quad x, y \in S^m,$$

in which $\{a_\alpha\} \subset \mathbb{R}$ satisfies

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^{m+1}} |a_\alpha|\, ||p_\alpha||_2^2 < \infty. \tag{0.1}$$

Here, $|| \cdot ||_2$ stands for the usual norm in $L^2(S^m, \sigma_m)$ and $p_\alpha(x) = x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_{m+1}^{\alpha_{m+1}}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^{m+1}$, $x \in S^m$.

The main goal in this work is to provide a concise procedure to deduce decay rates for the sequence of singular values of $\mathcal{K}$ when the operator is compact and self-adjoint from $L^2(S^m, \sigma_m)$ into itself and the power series kernel K is smooth. Compactness will be guaranteed by a sole condition on the sequence $\{a_\alpha\}$, namely, condition (0.1), while smoothness will be defined through an additional decay on the same sequence.

There are at least two drawbacks when one consider kernels as above: computations with multi-index notation is not always pleasant and the lack of orthonormality of the set of all monomials in $L^2(S^m, \sigma_m)$ may complicate the arguments. One advantage is that this category of kernels include important examples, such as, dot product kernels. If we denote by $\cdot$ the usual dot product in $\mathbb{R}^{m+1}$ then a dot product kernel is one of form

$$K(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x \cdot y)^n = \sum_{\alpha} b_{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} x^\alpha y^\alpha, \quad x, y \in S^m.$$

A relevant dot product kernel is the Gaussian-like kernel

$$K(x,y) = \sum_{\alpha} \frac{(2d)^{|\alpha|}}{\alpha!} x^\alpha y^\alpha, \quad x, y \in S^m,$$

an element of a wide category employed in radial basis interpolation, learning theory, support vector machines, regularization networks and Gaussian processes ([3,4,5,6]). The family of dot product kernels also includes the nonlinearly factorizable kernels ([6]), that is, kernels of the form

$$K(x,y) = \prod_{k=1}^{m+1} f(x_k \cdot y_k), \quad x, y \in S^m,$$

for a convenient analytic function f.

*ICMC-USP, SP, Brasil, dgs.nvn@gmail.com
†ICMC, USP, SP, Brasil, menegatt@icmc.usp.br. Partially supported by FAPESP grant # 2010/19734 − 6.

1 Main Results

In the conditions stated in above, we can represent the eigenvalues of $\mathcal{K}$ by a sequence of real numbers $\{\lambda_n\}$ such that $\{|\lambda_n|\}$ decreases to 0 as $n \to \infty$. And the later is precisely, the sequence of singular values of $\mathcal{K}$. In the setting we introduce above, the Weyl-Courant minimax principle for compact operators on a Hilbert space ([2], pg.51) asserts that $|\lambda_n| \leq ||\mathcal{K} - R_n||$, $n = 1, 2, \ldots$, whenever R_n is an operator on $L^2(S^m, \sigma_m)$ of rank at most $n-1$. So, our strategy in order to bound $\{|\lambda_n|\}$ will be to estimate the right-hand side of the above inequality for some specially chosen R_n. The asymptotic behavior of the sequence $||p_\alpha||_2$ will be needed along the way.

The first result presents the decay rates for the sequence $\{|\lambda_n|\}$ based on a decay for the series in (0.1).

Teorema 1.1. *Let $\mathcal{K}$ and K be as defined above. If there exist $\gamma > 0$ so that*

$$\sum_{|\alpha|=n}^{\infty} |a_\alpha| \, ||p_\alpha||_2^2 = O(n^{-\gamma}), \quad (n \to \infty)$$

then

$$|\lambda_n| = O\left(n^{-\gamma/(m+1)}\right), \quad (n \to \infty).$$

Note that the decay in the previous result is meaningful whenever $2\gamma \geq m+1$.

The next two results describe the decay of a special subsequence of $\{|\lambda_n|\}$ that depends upon the sequence

$$s_n = \sum_{|\alpha|=n} |a_\alpha|, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Teorema 1.2. *Let $\mathcal{K}$, K and s_n be as defined in the previous lines. Assume there exists $c \in (0,1)$ and a positive integer N such that*

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} \leq c, \quad n = N, N+1, \ldots. \tag{1.2}$$

Then, there exists a positive integer l for which $|\lambda_{(ln)^{m+1}}| = O\left(s_n n^{-m/2}\right)$ as $(n \to \infty)$.

The following theorem is the main result in this note and provides decay rates for the sequence $\{|\lambda_n|\}$ when an additional decay for the sequence $\{s_n\}$ is available ([1]).

Teorema 1.3. *Let $\mathcal{K}$, K and s_n be be as be before. Assume there exists $c \in (0,1)$ and a positive integer N such that*

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} \leq c, \quad n = N, N+1, \ldots. \tag{1.3}$$

If $s_n = O(n^{-\gamma})$ as $n \to \infty$, for some $\gamma > 0$, then

$$|\lambda_n| = O(n^{-(2\gamma+m)/2(m+1)}), \quad (n \to \infty).$$

Referências

[1] AZEVEDO, D; MENEGATTO, V. A., Estimates for singular values of integral operators generated by power series kernels on the sphere. Preprint, 2012.

[2] GOHBERG, I.; GOLDBERG, S.; KRUPNIK, N., *Traces and determinants of linear operators*. Operator Theory: Advances and Applications, 116. Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.

[3] LU, F., SUN, H. Positive definite dot product kernels in learning theory. *Adv. Comput. Math.* 22, 181-198 (2005).

[4] SCHABACK, R., Interpolation by polynomials and radial basis functions. *Constr. Approx.*, 21, 293-317 (2005).

[5] SMOLA, A. J.; OVÁRI, Z. L.; WILLIAMSON, R. C., Regularization with dot-Product kernels. *In Proc. of the Neural Information Processing Systems (NIPS)*, pp.308-314, MIT-Press, 2000.

[6] ZWICKNAG, B., Power series kernels. *Constr. Approx.*, 29 (2009), no. 1, 61-84.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

ASYMPTOTIC BEHAVIOUR TO A VON KÁRMÁN SYSTEM WITH INTERNAL DAMPING

Ducival C. Pereira*, Carlos A. Raposo† and Celsa H.M. Maranhão‡

Abstract

In this work we consider the Von Kármán system with internal damping acting on the displacement of the plate and using the Theorem due to Nakao [1] we prove the exponential decay of the solution.

Keywords: Von kármán System

1 Introduction

Let Ω be a bounded domain of de plane with regular boundary Γ. For a real number $T > 0$ we denote $Q = \Omega \times (0, T)$ and $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. Here $u = u(x, t)$ is the displacement, $v = v(x, t)$ is the Airy stress function and η is the unit normal external in Ω. With this notation we have the following system

$$u_{tt} - \Delta^2 u + u_t = [u, v] \text{ in } Q\,, \tag{1.1}$$

$$-\Delta^2 v = [u, u] \text{ in } Q\,, \tag{1.2}$$

$$u(0) = u_0\,,\ u_t(0) = u_1 \text{ in } \Omega \tag{1.3}$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial \eta} = v = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \text{ on } \Sigma \tag{1.4}$$

were $[u, v] = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

2 Asymptotic Behaviour

In this section, we use the Theorem of Nakao (see [1]) to prove the exponential decay of the energy $E = E(t)$ to the system $(1.1) - (1.4)$, which we define by

$$E(t) = |u_t(t)|^2 + |\Delta u(t)|^2 + \frac{1}{2}|\Delta v(t)|^2\,.$$

Subsequently we prove two lemmas:

Lemma 2.1. The functional $F^2(t) = E(t) - E(t+1)$ satisfies: $\displaystyle\int_t^{t+1} |u_t(s)|^2 ds \le F^2(t)\,.$

*Departament of Mathematics, Pará State University, UEPA, Belém, Brazil, e-mail: ducival@oi.com.br,
†Departament of Mathematics, Federal University of São João Del-Rei, UFSJ, São João Del-Rei, Brazil e-mail: raposo@ufsj.edu.br
‡Departament of Mathematics, Federal University of Pará, UFPA, Belém, Brazil e-mail: celsa@ufpa.br

Lemma 2.2. The functional $G^2(t) = 8C(\sup_{s\in[t,t+1]} |\Delta u(s)|)F(t) + 2(1+C^2)\int_{t_1}^{t_2} |u_t(t)|^2 dt$ satisfies

$$\int_{t_1}^{t_2} |\Delta u(t)|^2 + \frac{1}{2}|\Delta v(t)|^2 dt \leq G^2(t)\,.$$

Taking into account the Lemmas we can prove our principal result

Theorem 2.1 The solution (u,v) of $(1.1)-(1.4)$ satisfies

$$|u(t)|^2 + |\Delta u(t)|^2 + \frac{1}{2}|\Delta v(t)|^2 + \int_{t_1}^{t_2} |u_t(s)|^2 ds \leq C_1 e^{-wt}\,,\ \text{for almost every } t \geq 1\,,$$

with $C_1, w > 0$, constants independent of t.

References

[1] M. Nakao, "A Difference Inequality and Its Application to Nonlinear Evolution Equation", Journal of the Mathematical Society of Japan, Vol. 30, No 4, 1978, pp. 747. **doi:** 10.2969/**jmsj**/03040747

[2] T.V. Kármán, "Festigkeitsprobleme im Mashinenbaum. Encyklopadie der Math", Wiss V/4C, Leipzig, 1910, pp. $311-385$

[3] M. Horn, A. Favini, I. Lasiecka and D. Tataru "Global Existence, Uniqueness and Regularity to a Von Kármán System with Nonlinear Boundary Dissipation ", Applied Mathematics & Optimization, Vol. 31, No 1, 1995, pp $57-84$ **doi:** 10.1007/**BF**01182557

[4] M. Horn and Lasiecka, "Global Stabilization of a Dynamical Von Kármán Plate with Nonlinear Boundary Feedback ", Differential and Integral Equations, Vol. 9, No 2, 1996, pp $267-294$

[5] G.P. Menzala and E. Zuazua, "Energy Decay Rates for the Von Kármán System of Thermoelastic Plates", Differential and Integral Equations, Vol. 11, No 5, 1998, pp $755-770$

[6] J.E.M Rivera and G.P. Menzala, "Decay Rates of Solutions a Von Kármán System for Viscoelastic Plates with Memory", Quartely of Applied Mathematics, United States, Vol. 82, No 1, 1999, pp $181-200$

[7] J.E.M Rivera, H.P. Oquendo and M. L. Santos "Asymptotic Behaviour to a Von Kármán Plate with Boundary Memory Conditions ", Nonlinear Analysis, Vol. 62, No 7, 2005, pp. $1183-1205$. **doi:** 10.1016/**jna**2005.04.025

[8] C. A. Raposo and M. L. Santos "General Decay to a Von Kármán System with Memory", Nonlinear Analysis, Vol. 74, No 3, 2011, pp. $937-945$. **doi:** 10.1016/**jna**2010.09.047

[9] G. Avalos, I. Lasieck and R. Triggiani, "Uniform Stability of Nonlinear Thermoelastic Plates with Free Boundary Conditions", International Series of Numerical Mathematics, Vol. 133, 1999, pp $1-23$

[10] J. Puel and M. Tucsnack "Boudary Stabilization for the Von Kármán Equations", SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 33, No 1, 1996, pp. $255-273$. **doi:** 10.1137/**S**0363012992228350

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

ESTABILIDADE ORBITAL DE SOLUÇÕES ONDAS ESTACIONÁRIAS PERIÓDICAS PARA A EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON

ELEOMAR CARDOSO JR.* & FÁBIO NATALI

1 Introdução

Neste trabalho investigamos resultados de existência e estabilidade/instabilidade orbital de ondas estacionárias periódicas para a equação de Klein-Gordon

$$u_{tt} - u_{xx} + u - |u|^4 u = 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

A análise da estabilidade orbital se baseia na teoria desenvolvida por Grillakis, Shatah e Strauss para sistemas Hamiltonianos abstratos (ver [1] e [2]), ao passo que a existência de ondas periódicas é determinada usando funções elípticas de Jacobi combinadas com o Teorema da Função Implícita.

Uma função $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma solução onda estacionária periódica de período $L > 0$ da equação (1.1) se existem $c \in \mathbb{R}$ e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função suave e periódica de período L, satisfazendo

$$u(x,t) := e^{ict}\varphi(x), \ (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

tal que u soluciona (1.1) no sentido clássico. Neste contexto, a solução onda estacionária periódica (1.2) da equação de Klein-Gordon (1.1) é orbitalmente estável quando para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se

$$(u_0, u_1) \in X = H^1_{per}([0,L]) \times L^2_{per}([0,L]) \text{ satisfaz } \|(u_0,u_1) - (\varphi, ic\varphi)\|_X < \delta,$$

então, a solução $\vec{u}(t) = (u, u_t)$ de (1.1) com $\vec{u}(0) = (u_0, u_1)$ existe globalmente e satisfaz

$$\sup_{t \geq 0} \inf_{\theta \in \mathbb{R}, \ y \in \mathbb{R}} \|\vec{u}(t) - e^{i\theta}(\varphi(\cdot + y), ic\varphi(\cdot + y))\|_X < \varepsilon.$$

Caso contrário, a solução (1.2) é dita orbitalmente instável.

2 Resultados

A equação (1.1) admite ao menos duas quantidades conservadas, à saber,

$$\mathcal{E}(U) := \frac{1}{2}\int_0^L \left[|u_x|^2 + |u_t|^2 + |u|^2 - \frac{1}{3}|u|^6 \right] \, dx$$

e

$$\mathcal{F}(U) := \operatorname{Im} \int_0^L \bar{u} u_t \, dx = \int_0^L (\operatorname{Re} u \operatorname{Im} u_t - \operatorname{Im} u \operatorname{Re} u_t) \, dx,$$

onde $U = (\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u_t, \operatorname{Im} u, \operatorname{Re} u_t)$ e $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ denota o módulo do número complexo $z = x + iy$.

Sejam $c \in \mathbb{R}$ e o funcional $\mathcal{G} := \mathcal{E} + c\mathcal{F}$. Considere φ_c uma solução suave da equação

$$-\varphi_c'' + (1-c^2)\varphi_c - \varphi_c^5 = 0. \tag{2.1}$$

*DMA, UEM, Maringá-PR, Brasil, e-mail: eleomar.jr@gmail.com

Vemos que o par $(\varphi_c, ic\varphi_c)$ é um ponto crítico de $\mathcal{G}$. Denote por $\mathcal{L}_{\varphi_c} := \mathcal{G}''(\varphi_c, ic\varphi_c)$ o operador linearizado em torno de $(\varphi_c, ic\varphi_c)$. Temos o seguinte resultado de estabilidade e instabilidade que é baseado na teoria abstrata em [1] e [2]. Para este fim, faz-se necessário a construção de uma curva suave de soluções que preservam o período bem como uma análise espectral elaborada para o espectro não positivo do operador linearizado $\mathcal{L}_{\varphi_c}$. Com intuito de simplificarmos a notação, vamos fixar $L = 2\pi$. Temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1. *(Estabilidade/Instabilidade). Existem constantes c_0 e c_1 satisfazendo $0 < c_0 < c_1$ de forma que a onda estacionária periódica $e^{ict}\varphi$ é orbitalmente instável para $c \in (0, c_0)$ e orbitalmente estável para $c \in (c_0, c_1)$.*

Veremos que o resultado do teorema acima se modifica conforme mudamos o período. Por exemplo, se fixarmos $L = 4$ obtemos que a onda periódica é orbitalmente instável para todos os valores da velocidade c onde a curva existe. Outro fato interessante é que a medida que o período cresce tem-se um resultado bem próximo ao que acontece no caso de ondas solitárias (ondas com período infinito) o qual é sabido que as tais ondas são instáveis para todos os valores da velocidade c onde a curva existe. Estes fatos podem ser checados numericamente fazendo uso da recente teoria desenvolvida em [3].

Referências

[1] GRILLAKIS, M.; SHATAH, J.; STRAUSS, W. *Stability Theory of Solitary Waves in the Presence of Symmetry I.* J. Funct. Anal. 74 (1987), 160-197.

[2] GRILLAKIS, M.; SHATAH, J.; STRAUSS, W. *Stability Theory of Solitary Waves in the Presence of Symmetry II.* J. Funct. Anal. 94 (1990), 308-348.

[3] NATALI, F.; NEVES, A. *Orbital Stability of Solitary Waves.* Preprint, 2012.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

EXPONENTIAL STABILITY FOR A TRANSMISSION CONTACT PROBLEM IN VISCOELASTIC MATERIALS

EUGENIO CABANILLAS LAPA * & JUAN B. BERNUI B. & ZACARIAS HUARINGA S. †
PAULO N. SEMINARIO H. ‡

Abstract

In this article we study the evolution of displacement in a body constituted by two different types of materials: one part is simply elastic while the other has viscoelastic properties and may come into contact with a rigid foundation. Under this condition we have a transmission-contact problem. We show that the dissipation given by the viscoelastic region is strong enough to produce exponential stability for the solution, no matter how small is that region.

1 Introduction

The main purpose of this paper is to study the existence of global solutions and the asymptotic behavior of the energy related to the following system of Kirchhoff type

$$
\begin{aligned}
\rho_1 u_{tt} - b u_{xx} + f_1(u) = 0 \quad \text{in} \quad]0, L_0[\times\mathbb{R}^+ \\
\rho_2 v_{tt} - M\left(\int_{L_0}^{L} |v_x|^2 dx\right) v_{xx} - \alpha v_{xxt} + f_2(v) = 0 \quad \text{in} \quad]L_0, L[\times\mathbb{R}^+ \\
u(0,t) = 0 \\
u(L_0,t) = v(L_0,t), \quad b u_x(L_0,t) = M\left(\int_{L_0}^{L} |v_x|^2 dx\right) v_x(L_0,t) + \alpha v_{xt}(L_0,t), \quad t > 0 \\
v(L,t) \le g, \quad M\left(\int_{L_0}^{L} |v_x|^2 dx\right) v_x(L,t) + \alpha v_{xt}(L,t) \le 0 \\
\left\{(M\left(\int_{L_0}^{L} |v_x|^2 dx\right) v_x(L_0,t) + \alpha v_{xt}(L_0,t)\right\}(v(L,t) - g) = 0 \\
u(x,0) = u^0(x), \quad u_t(x,0) = u^1(x), \quad x \in]0, L_0[\\
v(x,0) = v^0(x), \quad v_t(x,0) = v^1(x), \quad x \in]L_0, L[
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

where $\rho_1, \rho_2, b, \alpha, g$ are positive constants, M is a function satisfying

$$
M \in C^1(]0,\infty[) \cap C(]0,\infty[), \qquad M(s) \ge m_0. \tag{1.2}
$$

and the functions $f_i \in C^1(\mathbb{R})$, satisfy $f_i(0) = 0, \ i = 1, 2$.
The system (1.1) model the evolution of displacement in a elastic body consisting of two different types of materials one of them is simply elastic while, the other has viscoelastic properties and may come into contact with a rigid obstacle fixed at a distance g from the end $x = L$. The mathematical model which deals with the above situation

*Instituto de Investigación, Facultad de Ciencias Matemáticas-UNMSM, Lima-Perú, cleugenio@yahoo.com,
†jbernuib@unmsm.edu.pe,1euko1@gmail.com
‡zhuaringas.edu.pe

is called transmission-contact problem.
The main question is about the asymptotic behavior;we may ask whether the sole dissipation produced by the viscoelastic part is strong enough to produce an uniform rate of decay?.
The goal of this paper is to show that the solution of the transmission-contact problem decays exponentially to zero as time goes to infinity, no matter how small is the difference $L - L_0$. The main difficulties are that we have a more complicated situation involving transmission condition in $x = L_0$ and Signorini's contact condition in $x = L$, the dissipation only works in $[L_0, L]$ and we need estimates over the whole domain $[0, L]$. The situation for the variational inequalities arising in transmission-contact problem is worse because we lead with weak solutions. So, we have neither regularity nor nice boundary conditions. We overcome this problem combining arguments of [2] and [3] and introducing suitable multipliers which allow us to control the energy only estimating over $[L_0, L]$.

2 Mathematical Results

Let us the following notations

$$V = \{(w, z) \in H^1(0, L_0) \times H^1(L_0, L) : w(L_0) = z(L_0),\ w(0) = 0\}$$

$$K = \{(w, z) \in V : z(L) \leq g\}.$$

We establish now the result that treats the existence of solutions for the transmission-contact problem associated with the Kirchhoff type wave equation.

Teorema 2.1. *If Suppose that $\{u^0, v^0\} \in K,\ \{u^1, v^1\} \in H_0^1(0, L_0) \times H_0^1(L_0, L)$,then there exists a weak solution of (1.1).*

Proof We obtain the solution of (1.1) as limit of solutions of the penalized problem. □
We are in position to show the main result of this paper.

Teorema 2.2. *Let $\{u, v\}$ be the solution of (1.1).Then there are exists positive constants C and γ independents of ϵ and t such that the energy $E(t)$ of the system (1.1)satisfies*

$$E(t) \leq C\, E(0) e^{-\gamma\, t}.$$

Proof We have from the convergence of $\{u^\epsilon, v^\epsilon\}$ solutions of the penalized problem and the lower semicontinuity of the energy that

$$E(t) \leq \liminf_{\epsilon \to 0} \mathcal{E}_\epsilon(t) \leq C\{\liminf_{\epsilon \to 0}\ \mathcal{E}_\epsilon(0)\} e^{-\gamma\, t} \leq C E(0) e^{-\gamma\, t}.$$

This completes the proof. □

References

[1] J.J.BAE;On uniform decay for transmission problem of Kirchhoff type viscoelastic wave equation *Acta Math Sc.* **26**(7)(2007) 1197-1206.

[2] E. CABANILLAS LAPA AND J. E. MUÑOZ RIVERA; A Nonlinear transmission Problem with time dependent coefficients *Electron. J. Diff. Eq* **131**(2007) 1-13.

[3] M. NAKAO AND J. MUÑOZ RIVERA, The contact problem in thermoviscoelastic materials, *J. Math. Anal. App.* **264**(2001), 522-545.

[4] E. CABANILLAS LAPA, Exponential Decay for a Transmission-Contact Problem with Frictional Damping, *To appear in International Journal of Nonlinear Science (2012)* .

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

ON A CRITICAL SET FOR THE KAWAHARA EQUATION

FÁGNER D. ARARUNA*, GLEB G. DORONIN† & LIONEL ROSIER‡

This communication concerns the Kawahara equation posed on bounded intervals and a forthcoming critical set of its lengths. Our study is motivated by physics and numerics: the nonlinear relation

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} = 0, \tag{1}$$

known as the Kawahara equation is a dispersive PDE describing one-dimensional propagation of small-amplitude long waves in various problems of fluid dynamics and plasma physics, [8, 9]. Due to different physically-based hypotheses and scales the Kawahara equation is also known as the fifth-order KdV or a special version of the Benney-Lin equation, [2]. This model was originally developed for unbounded regions of wave propagation when the third derivative in the KdV equation

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{2}$$

is close to zero, but the dispersive effects remain relevant. One of the basic assumptions for these models is an unboundness of a spatial region. If, however, one is interested in implementing a numerical scheme to calculate solutions to the KdV and/or Kawahara equations in unbounded regions, the issue of cutting off the spatial domain arises. In this situation some boundary conditions are needed to specify the solution. Moreover, there are practical situations as well as physically reasonable remarks and examples that justify a validity of cut-off configurations, [4]. Therefore, the detailed analysis of related initial-boundary value problems in bounded domains appears ripe to development.

Concerning the KdV equation (2) posed on a fixed finite interval, its well-posedness, asymptotics and a control theory have been intensively studied in the last decades, see, for instance, [3, 4, 6, 11, 15] and the references therein. One of the notable results in this context is the explicit description of a spectrum-related countable critical set $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^+$ which provides qualitative difficulties when the length of a spatial interval coincides with some of its elements. This set is no longer important for the control and related issues if the linear transport term u_x in (2) is scaled out. Such a scaling is quite natural for pure initial-value problems on whole $\mathbb{R}$, since u_x can be eliminated by a simple change of variables. By contrast, for problems posed on finite segments, it can not be removed without changes in the original domain. The term u_x both in (1) and in (2) can also be dropped out by choosing $v = u + 1$; however, zero (for instance) boundary conditions in this way become nonhomogeneous which complicates an original problem, as well. Thus, the linear "propagator" u_x not only provides just mentioned mathematical features (like a critical set $\mathcal{N}$), but becomes important physically.

Contrary to the KdV model, the Kawahara equation (1) posed on a bounded domain is somewhat new in a literature. We refer the reader to [5, 10], mainly dealing with existence, uniqueness and some asymptotic questions, and the article [13] and its erratum [14] where stabilization properties and controllability issues are claimed. Other interesting paper is [7] where the controllability of the fifth-order KdV-type nonlinear system is studied; however, the corresponding model is different from the Kawahara equation both in physical and in mathematical aspects.

Since its dispersive nature, one can expect the Kawahara equation to be endowed with a $\mathcal{N}$-type set, in the same manner as for the KdV model, [1]. We show that this is indeed true.

*Universidade Federal da Paraíba (fagner@mat.ufpb.br)
†Universidade Estadual de Maringá (ggdoronin@uem.br), corresponding author
‡Institut Élie Cartan (rosier@iecn.u-nancy.fr)

Our general purpose is to study an exact (boundary) controllability of the Kawahara equation (1) posed on $(0,L) \subset \mathbb{R}^+$ for $t \in (0,T)$ under the initial and boundary conditions

$$u(x,0) = u_0(x),$$
$$u(0,t) = u(L,t) = u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0,$$
$$u_{xx}(L,t) = h(t),$$

where $h : (0,T) \to \mathbb{R}$ designs a boundary control input.

Due to [12], this problem at least in linear case is equivalent to non existence of eigenvalues for a related eigenvalue problem with an extra boundary condition. The properties of such eigenvalue problem is the main novelty of our research. We prove the existence of a countable set of eigenvalues corresponding to a critical countable set of the interval lengths $L > 0$ for which the (linear) Kawahara model is not exactly controllable. Necessary and sufficient conditions are obtained to determine this set in an implicit form.

References

[1] F. D. Araruna, R. A. Capistrano-Filho and G. G. Doronin, *Energy decay for the modified Kawahara equation posed in a bounded domain*, J. Math. Anal. Appl. **385** (2012), 743–756.

[2] D. J. Benney, *Long waves on liquid films*, J. Math. and Phys., **45** (1966), 150–155.

[3] J. L. Bona, S. M. Sun and B.-Y. Zhang, *A nonhomogeneous boundary-value problem for the Korteweg-de Vries equation posed on a finite domain*, Comm. Partial Differential Equations, **28** (2003), 1391–1436.

[4] J. L. Bona, H. Chen, S. M. Sun and B.-Y. Zhang, *Comparison of quarter-plane and two-point boundary vlaue problems: the KdV-equation*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B , **7** (2007), no. 3, 465–495 (electronic).

[5] G. G. Doronin and N. A. Larkin, *Kawahara equation in a bounded domain*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **10** (2008), no. 4, 783–799.

[6] A. V. Faminskiĭ, *Mixed problems for the Korteweg-de Vries equation*, (Russian), Mat. Sb., **190** (1999), 127–160. Translation in Sb. Math., **190** (1999), 903–935.

[7] O. Glass and S. Guerrero *On the controllability of the fifth-order Kortewegde Vries equation*, Ann. I. H. Poincaré - AN (2009), doi:10.1016/j.anihpc.2009.01.010.

[8] T. Iguchi, *A long wave approximation for capillary-gravity waves and the Kawahara equation*, Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.) **2** (2007), no. 2, 179–220.

[9] T. Kawahara, *Oscillatory solitary waves in dispersive media*, J. Phys. Soc. Japan, **33** (1972), 260–264.

[10] N. A. Larkin, *Correct initial boundary value problems for dispersive equations*, J. Math. Anal. Appl., **344** (2008), no. 2, 1079–1092.

[11] L. Rosier, *Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., **2** (1997), 33–55.

[12] L. Rosier, *A survey of controllability and stabilization results for partial differential equations*, RS - JESA. Volume 41 – No 3-4, 2007, 365–411.

[13] C. F. Vasconcellos and P. N. Silva, *Stabilization of the linear Kawahara equation with localized damping*, Asymptotic Analysis, **58** (2008), 229–252.

[14] C. F. Vasconcellos and P. N. Silva, *Erratum*, Asymptotic Analysis, **66** (2010), 119–124.

[15] B.-Y. Zhang, *Exact boundary controllability of the Korteweg-de Vries equation*, SIAM J. Control Optim., **37** (1999), 543–565.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

EXISTENCE AND CONTINUITY OF GLOBAL ATTRACTORS AND NONHOMOGENEOUS EQUILIBRIA FOR A CLASS OF EVOLUTION EQUATION WITH NON LOCAL TERMS

FLANK D. M. BEZERRA,* ANTÔNIO L. PEREIRA,† & SEVERINO H. DA SILVA‡

1 Introduction

In this work we are concerned with some aspects of the asymptotic behavior of the dynamical system generated by evolution equations with nonlocal terms of the type

$$
\begin{array}{ll}
\partial_t u(x,t) = -u(x,t) + g\left(\beta(Ku)(x,t)\right), & x \in \Omega, t > 0 \\
u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \\
u(x,t) = 0, & x \notin \Omega,\ t > 0
\end{array}
\tag{1.1}
$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ is a bounded smooth domain, $u(x,t)$ is a real function on $\mathbb{R}^N \times [0,+\infty)$, $\beta > 0$ and K is an integral operator with symmetric kernel

$$(Ku)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} J(x,y)u(y)dy.$$

Here, J is an even non negative function of class C^2 with $\int_{\mathbb{R}^N} J(x,y)dy = 1$, and $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a non linear real function of class C^1 with $g(0) = 0$, see [1].

We collect here the conditions on g which will be used as hypotheses when needed.

(H1) The function $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, is globally Lipschitz, with $g(0) = 0$. That is, there exists a positive constant k_1 such that

$$|g(x) - g(y)| \leq k_1|x - y|,\ \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

(H2) The function $g \in C^1(\mathbb{R})$ and g' is Lipschitz with constant k_2. In particular

$$|g'(x)| \leq k_2|x| + k_3\ \ \forall\, x \in \mathbb{R},$$

for some $k_3 > 0$.

(H3) The function g has positive derivative. In particular it is strictly increasing.

(H4) There exists $a > 0$ such that $|g(x)| < a < \infty$, for all $x \in \mathbb{R}$.

2 Mathematical Results

In order to obtain well posedness of (1.1), we initially consider the following Cauchy problem in the space $L^2(\mathbb{R}^N)$

$$
\begin{cases}
\partial_t u(x,t) = (Fu)(x,t) \\
u(x,0) = u_0
\end{cases}
\tag{2.1}
$$

*Departamento de Matemática , UFPB, PB, Brasil, flank@mat.ufpb.br
†IME, USP, SP, Brasil, alpereira@ime.usp.br
‡UAME, UFCG, PB, Brasil, e-mail: horacio@dme.ufcg.edu.br

where $F : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ is given by

$$[F(u)](x) = \begin{cases} -u(x) + g(\beta(Ku)(x)), \ x \in \Omega \\ 0, x \notin \Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

Suppose that the hypothesis (H1) holds, we prove that the problem (1.1) has a unique solution for any initial condition in $L^2 = L^2(\mathbb{R}^N)$, which is globally defined.

Consider the subspace X of $L^2(\mathbb{R}^N)$ given by

$$X = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) \mid u(x) = 0, \text{ if } x \notin \Omega \right\}.$$

Since the range of F is X, this is an invariant subspace for the flow generated by (2.1). Suppose that the hypothesis (H1)-(H4) holds, we prove the existence of a global maximal invariant compact set $\mathcal{A}_\beta$ in $X \subset L^2(\mathbb{R}^N)$ for the flow of (1.1), which attracts each bounded set of X. Also, we prove a comparison result of solutions and that the global attractor $\mathcal{A}_\beta$ belongs to the ball $\| \cdot \|_\infty \leq a$ in $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Under the hypothesis (H1)-(H4) we exhibit a Lyapunov's functional that decreases along the solutions of (1.1), and use it to show the existence of nonhomogeneous equilibria for (1.1), via La Salle's Invariance Principle.

Finally, we study the continuity of the global attractors with respect to the parameter β at $\beta = \beta_0$. In order to obtain the existence and continuity of the local unstable manifolds we will need the following additional hypotheses:
(H5) For each $\beta_0 \geq 1$, the set E_{β_0}, of the equilibria of $T_{\beta_0}(t)$, has only hyperbolic equilibria;
(H6) The function $g \in C^2(\mathbb{R})$.

We need to assume that the equilibrium points of (2.1) with β_0 are stable under perturbation. This stability under perturbation will follow from the hyperbolicity of the equilibrium points.

We prove the following result ([1]).

Teorema 2.1. *Assume the hypotheses (H1) and (H4). Then, the family of global attractors $\mathcal{A}_\beta$ is continuous with respect to β.*

References

[1] BEZERRA, F. D. M., PEREIRA A. L., DA SILVA, S. H. - *Existence and continuity of global attractors and nonhomogeneous equilibria for a class of evolution equation with non local terms.* To appear in J. Math. Anal. and Appl. 2012.

[2] ROSSI, J. D. - *Asymptotic behaviour of solutions to evolution problems with nonlocal diffusion.* Course in, CIEM, Castro Urdiales, Cantabra, Spain, July 6-17, 2009. Available in http://mate.dm.uba.ar/ jrossi/.

[3] PEREIRA, A. L. - *Global attractor and nonhomogeneous equilibria for a non local evolution equation in an unbounded domain,* J. Diff. Equations, 226, (2006) 352-372.

[4] PEREIRA, A. L., DA SILVA, S. H. - *Existence of global attractors and gradient property for a class of non local evolution equations.*, São Paulo Journal of Mathematical Sciences **2** (2008) 1-20.

[5] PEREIRA, A. L., DA SILVA, S. H. - *Continuity of global attractors for a class of non local evolution equations,* Discrete and Continuous Dynamical Systems **26** (2010) 1073-1100.

[6] DA SILVA, S. H., PEREIRA, A. L. - *Exponential trichotomies and continuity of invariant manifolds.* São Paulo Journal of Mathematical Sciences **5** 2 (2011) 124.

[7] TEMAN, R. - *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics.* Springer, 1988.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

DETERMINAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE COLAPSO DE SOLUÇÕES DE UM MODELO MORFOGENÉTICO DE QUIMIOTAXIA PARA DUAS ESPÉCIES.

FLÁVIO DICKSTEIN*

Neste trabalho, estudamos as soluções $w(t,r) = (m(t,r), n(t,r))$ do sistema de tipo Keller-Segel para a evolução de duas espécies

$$\partial_t m - 4r\partial_{rr}m - \frac{\chi_1}{\pi}(m+n)\partial_r m = 0 \text{ em } (0,T)\times(0,\infty), \tag{0.1}$$

$$\partial_t n - 4r\partial_{rr}n - \frac{\chi_2}{\pi}(m+n)\partial_r n = 0 \text{ em } (0,T)\times(0,\infty), \tag{0.2}$$

$$w(t,\infty) = w_\infty \text{ em } (0,T), \tag{0.3}$$

$$w(0,r) = w_0(r) \text{ em } (0,\infty), \tag{0.4}$$

onde $\chi_1 > 0$, $\chi_2 > 0$, $w_0 \in (C(0,\infty))^2$ é não-negativa, não-decrescente e satisfaz $w_0(\infty) = w_\infty$.

O sistema (0.1)-(0.4) é um model de evolução de duas espécies com distribuições espaciais radialmente simétricas no plano, sob a ação de mecanismos de quimiotaxia e de difusão. Aqui, χ_1, χ_2 são coeficientes de intensidade quimiotáxica e $w(t,r)$ representa o vetor de massas das espécies em uma bola de raio $\sqrt{r}$.

A quimiotaxia age no sentido da concentração dos organismos, enquanto que a difusão tende a espalhá-los. Tratam-se, portanto, de dois efeitos opostos. A prevalência da quimiotaxia pode levar à explosão (colapso) da solução em tempo finito, ao passo que soluções globais persistem quando a difusão é dominante. No caso de uma espécie orgânica, é bem conhecida a caracterização de colapso. Uma solução explode em tempo finito se e somente se sua massa total m_∞ satisfaz $m_\infty > 8\pi/\chi$, veja [1], [2], [3]. Para discutir a extensão desta caracterização para o caso de duas espécies, definimos

$$P(w_\infty) = 8\pi\left(\frac{m_\infty}{\chi_1} + \frac{n_\infty}{\chi_2}\right) - (m_\infty + n_\infty)^2,$$

$$Q(w_\infty) = 8\pi - \max\{\chi_1\, m, \chi_2\, n\},$$

e denotamos $P^+ = \{w_\infty \in, P(w_\infty) \geq 0\}$, $P^- = \{w_\infty \in \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+, P(w_\infty) < 0\}$, $\mathring{P}^+ = \{w_\infty \in \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+, P(w_\infty) > 0\}$.

Em [4], mostramos os seguintes resultados.

Teorema 0.1. *Suponha que $w_\infty \in P^-$ ou que $w_\infty \in Q^-$. Então, w explode em tempo finito.*

Teorema 0.2. *Suponha que existe $C > 0$ tal que $w_0 \leq Cr$. Suponha ainda que $w_\infty \in P^+$ e que $w_\infty \in Q^+$. Então, w é global.*

Os teoremas acima completam resultados parciais obtidos em [5].

Estudamos ainda o comportamento para tempos longos das soluções globais para as quais $w_\infty \in \mathring{P}^+ \cap Q^+$. Primeiramente, mostramos a existência de uma única solução auto-similar w_s (i.e., da forma $w(t,r) = f(r/t)$) tal que $w_s(t,0) = 0$ and $w(t,\infty) = w_\infty$ para todo $t > 0$. Em seguida, mostramos que w_s é um atrator para as soluções globais do problema.

*Instituto de Matemática ,UFRJ, RJ, Brasil, fdickstein@ufrj.br

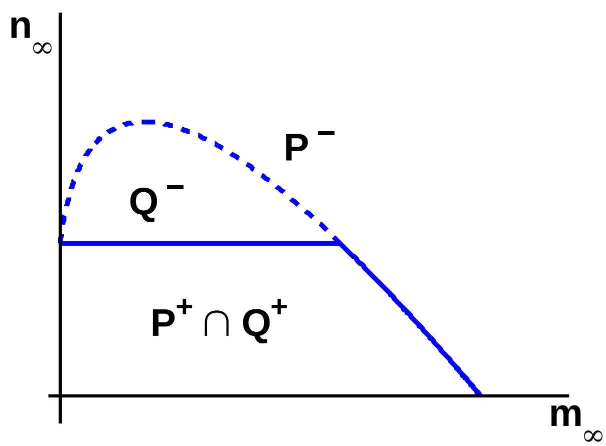

Figura 1: As curvas de nível $Q = 0$ e $P = 0$

Teorema 0.3. *Seja* $w_\infty \in \mathring{P}^+ \cap Q^+$ *e seja* w_0 *satisfazendo* $w_0(r) \leq Cr$ *para algum* $C > 0$ *e tal que* $w_0(\infty) = w_\infty$*. Seja* $w(t)$ *a solução global correspondente. Então,*

$$\lim_{t\to\infty} \|w(t) - w_s(t)\|_\infty = 0.$$

Referências

[1] Blanchet A., Dolbeault J., Perthame B. - *Two-dimensional Keller-Segel model: Optimal critical mass and qualitative properties of the solutions*, Elect. J. Diff. Eq., 44, 1–33, 2006.

[2] Biler P., Karch G., Laurençot P., Nadzieja T. - *The* 8π*-problem for radially symmetric solutions of a chemotaxis model in the disc*, Top. Meth. Nonlin. Anal., 27, 133–147, 2006.

[3] Biler P., Karch G., Laurençot P., Nadzieja T. - *The* 8π*-problem for radially symmetric solutions of a chemotaxis model in the plane*, Math. Meth. in Applied Sciences, vol. 29, n.13, 1563–1583, 2006.

[4] Dickstein, F. - *Sharp conditions for blowup of solutions of a chemotactical model for two species in* $\mathbb{R}^2$, a ser publicado em J. Math. Anal. Appl., doi: 10.1016/j.jmaa.2012.08.001.

[5] Conca C., Espejo E., Vilches K - *Remarks on the blowup and global existence for a two species chemotactic Keller-Segel system in* $\mathbb{R}^2$, Euro. J. of Applied Math., 22, 553–580, 2011.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

THE WAVE EQUATION WITH NONLINEAR SOURCE IN GENERALIZED LEBESGUE SPACES

GABRIEL RODRIGUEZ V. * & WILLY BARAHONA M † & BENIGNO GODOY T. ‡

Abstract

This paper studies the existence of global solutions to the initial-boundary value problem for a semilinear wave equation in generalized Lebesgue Spaces by means of compactness method and the potential well idea. Meanwhile, we investigate the decay estimate of the energy of the global solutions to this problem by using differential inequalities.

1 Introduction

Consider the following semilinear wave equation

$$\begin{gathered} u_{tt} - \Delta u + u_t = |u|^{p(x)-1}u \quad \text{in } \Omega \times]0, T[\\ u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \\ u(x,0) = u^0(x) \quad u_t(x,0) = u^1(x) \quad x \in \Omega \end{gathered} \tag{1.1}$$

where Ω is a bounded smooth domain of $\mathbb{R}^n$, Δ denotes the Laplacian operator, with respect to the variable x, the function $p : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ is a continuous function with $p(x) + 1 < 2N/(N-2)$ for all $x \in \overline{\Omega}$
Set

$$C_+(\overline{\Omega}) = \{h;\ h \in C(\overline{\Omega}),\ h(x) > 1 \text{ for all } x \in \overline{\Omega}\}$$

For any $p(x) \in C_+(\overline{\Omega})$ we define the variable exponent space

$$L^{p(x)}(\Omega) = \{u : \text{is a measurable real-valued function such that } \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx < \infty\}$$

When $p = constante$, (1.1) is converted into the form

$$u_{tt} - \Delta u + u_t = |u|^{p-1}u$$

The global existence, the decay property of weak solutions, and the blow up of solutions to the initial-boundary value problem for the semilinear wave equations related to above equation, under suitable assumptive conditions, have been investigated by many people through various approaches [14]. However, little attention is paid to problem (1.1). Because the term $|u|^{p(x)-1}u$, the reasonable proof and computation are greatly different from the case $p = constante$; thus, the investigation of problem((1.1) becomes more complicated. In this paper, on the one hand, by a Galerkin approximation scheme , as well as combining it with the potential well method, we prove the global existence of solutions to problem ((1.1). On the other hand, we obtain the asymptotic behavior of the global solutions to this problem by using differential inequalities.

*Instituto de Investigación, Facultad de Ciencias Matemáticas-UNMSM, Lima-Perú, grodriguezv@unmsm.edu.pe,
†Instituto de Investigación, Facultad de Ciencias Matemáticas-UNMSM, Lima-Perú, wilbara_73@yahoo.es,
‡Instituto de Investigación, Facultad de Ciencias Matemáticas-UNMSM, Lima-Perú, bgodoyt@unmsm.edu.pe

2 Mathematical Results

We establish now the result that treats the existence of solutions for the wave equation with nonlinear source in generalized Lebesgue spaces.

Teorema 2.1. *Let us assume that* $u^0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^{p(x)}(\Omega), u^1 \in L^2(\Omega)$*. Let us assume in addition that* $E(u^0, u^1)$ *is sufficiently small. Then there exists a weak solution of (1.1). Furthermore,the energy* $E(t)$ *of the problem satisfies*

$$E(t) \leq \beta_0 \ E(0)e^{-\beta t}$$

where β_0*,*β *are positive constants.*

Proof The solution of (1.1) is obtained by a Galerkin approximation scheme , as well as combining it with the potential well method, and the asymptotic behavior by using differential inequalities. $\square$

References

[1] M. Aassila, Global existence and global nonexistence of solutions to a wave equation with non- linear damping and source terms, *Asymptotic Analysis.* **30**(3-4)(2002) 301-311

[2] O. Buhrii , G. Domanska ,N. Protsakh . Initial boundary value problem for nonlinear differential equation of the third order in generalized Sobolev spaces ,*Visn. Lviv Univ. (Herald of Lviv University). Ser. Mech.-Math.* **64**(2005) 44-61 (in Ukrainian)

[3] S. Lavrenyuk, Panat O. The mixed problem for a semilinear hyperbolic equation in generalized Lebesgue spaces, *Visn. Lviv Univ. (Herald of Lviv University). Ser. Mech.-Math.* **66**(2006) 243-260

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

When the adjoint of a homogeneous polynomial belongs to a given operator ideal

Geraldo Botelho*, Erhan Çaliskan† & Giselle Moraes‡

Let E and F be Banach spaces over $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$ and $P\colon E \longrightarrow F$ be a continuous n-homogeneous polynomial (in symbols, $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$. The adjoint of P, defined by R. Aron and M. Schottenloher [1], is the following continuous linear operator:

$$P^*\colon F^* \longrightarrow \mathcal{P}(^nE)\ ,\ P^*(\varphi)(x) = \varphi(P(x)),$$

where $\mathcal{P}(^nE) := \mathcal{P}(^nE; \mathbb{K})$.

Given an operator ideal $\mathcal{I}$ in the sense of Pietsch [5, 7], when is it true that P^* belongs to $\mathcal{I}$? The aim of this work is to prove that P^* belongs to $\mathcal{I}$ if and only if P admits a factorization $P = u \circ Q$ where u is a linear operator whose adjoint u^* belongs to $\mathcal{I}$ and Q is a continuous n-homogeneous polynomial.

1 The factorization theorem

Theorem 1.1. *Let $\mathcal{I}$ be an operator ideal, $n \in \mathbb{N}$, E, F be Banach spaces and $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$. Then $P^* \in \mathcal{I}(F^*; \mathcal{P}(^nE))$ if and only if there are a Banach space G, a continuous linear operator $u\colon G \longrightarrow F$ and a polynomial $Q \in \mathcal{P}(^nG; F)$ such that $u^* \in \mathcal{I}(F; G)$ and $P = u \circ Q$.*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "P"] \arrow[d, "Q"'] & F \\ G \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

The proof relies heavily on the fact that $\mathcal{P}(^nE)$ is canonically isometrically isomorphic to $\left(\widehat{\otimes}_n^{\pi_s} E\right)^*$, where $\widehat{\otimes}_n^{\pi_s} E$ is the completed n-fold π_s-projective symmetric tensor product of E.

Let us rewrite the theorem above in the language of dual and composition ideals.

• The *dual* of a given operator ideal $\mathcal{I}$ is defined in the following fashion: for Banach spaces E and F,

$$\mathcal{I}^{\mathrm{dual}}(E; F) := \{u \in \mathcal{L}(E; F) : u^* \in \mathcal{I}(F^*; E^*)\}.$$

It is well known that $\mathcal{I}^{\mathrm{dual}}$ is an operator ideal (see [7, 4.4.3]).

• The *polynomial dual* of a given operator ideal $\mathcal{I}$ is defined by

$$\mathcal{I}^{\mathcal{P}-\mathrm{dual}}(^nE; F) := \{P \in \mathcal{P}(^nE; F) : P^* \in \mathcal{I}(F^*; \mathcal{P}(^nE))\}.$$

• Given an operator ideal $\mathcal{I}$, an n-homogeneous polynomial $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$ belongs to the *composition polynomial ideal* $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$, denoted $P \in \mathcal{I} \circ \mathcal{P}(^nE; F)$, if there are a Banach space G, a polynomial $Q \in \mathcal{P}(^nE; G)$ and an operator $u \in \mathcal{I}(G; F)$ such that $P = u \circ Q$.

It is well known that $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$ is a polynomial ideal in the sense of ([6, Definition 4.1], [3, Definition 1.4]) (see [4, Proposition 3.3(b)]).

*Universidade Federal de Uberlndia, e-mail: botelho@ufu.br.
†Yıldız Teknik Üniversitesi, Istanbul, Turkey, e-mail: ercalis@yahoo.com.tr.
‡Universidade Federal de Uberlndia e-mail: gisellemoraes@famat.ufu.br.

Thus Theorem 1.1 can be rewritten as: the following equlity holds for every operator ideal $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I}^{\mathcal{P}-\text{dual}} = \mathcal{I}^{\text{dual}} \circ \mathcal{P}.$$

We also have a factorization formula for the polynomial bidual of an operator ideal $\mathcal{I}$, which is defined by

$$\mathcal{I}^{\mathcal{P}-\text{bidual}}(^n E; F) := \{P \in \mathcal{P}(^n E; F) : P^{**} \in \mathcal{I}(\mathcal{P}(^n E)^*; F^{**})\}.$$

Directly from Theorem 1.1 we have:

Corollary 1.1. *For every operator ideal $\mathcal{I}$,*

$$\mathcal{I}^{\mathcal{P}-\text{bidual}} = \left(\mathcal{I}^{\text{dual}}\right)^{\mathcal{P}-\text{dual}} = \left(\mathcal{I}^{\text{dual}}\right)^{\text{dual}} \circ \mathcal{P}.$$

An operator ideal $\mathcal{I}$ is said to be *symmetric* if $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\text{dual}}$. Lists of symmetric ideals can be found in [5, 1.20] and [2, Example 2.6(ii)]. Now we are interested when the adjoint of a polynomial factors through $\mathcal{I}$, and not through $\mathcal{I}^{\text{dual}}$. That is, when $\mathcal{I}^{\mathcal{P}-\text{dual}} = \mathcal{I} \circ \mathcal{P}$? Of course this happens if $\mathcal{I}$ is symmetric; but only in this case? We settled this question in the affirmative:

Proposition 1.1. *The following are equivalent for an operator ideal $\mathcal{I}$:*
(a) *$\mathcal{I}$ is symmetric.*
(b) $\mathcal{I}^{\mathcal{P}-\text{dual}} = \mathcal{I} \circ \mathcal{P}$.
(c) *There is $n \in \mathbb{N}$ such that $\mathcal{I}^{\mathcal{P}-\text{dual}}(^n E; F) = \mathcal{I} \circ \mathcal{P}(^n E; F)$ for all Banach spaces E and F.*

As to the coincidence of the polynomial dual with the polynomial bidual of an operator ideal we have:

Corollary 1.2. *Let $\mathcal{I}$ be an operator ideal. Then*
(a) $\mathcal{I}^{\mathcal{P}-\text{bidual}} = \mathcal{I}^{\mathcal{P}-\text{dual}}$ *if and only if* $\left(\mathcal{I}^{\text{dual}}\right)^{\text{dual}} = \mathcal{I}^{\text{dual}}$.
(b) $\mathcal{I}^{\mathcal{P}-\text{bidual}} = \mathcal{I} \circ \mathcal{P}$ *if and only if* $\left(\mathcal{I}^{\text{dual}}\right)^{\text{dual}} = \mathcal{I}$.

So $\mathcal{I}^{\mathcal{P}-\text{bidual}} = \mathcal{I}^{\mathcal{P}-\text{dual}}$ if $\mathcal{I}$ is symmetric, but this can also happen for nonsymmetric ideals as the following proposition shows, which actually was told us by A. Pietsch:

Proposition 1.2. *Let $\mathcal{I}$ be an operator such that $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^{\text{dual}}$. Then $\mathcal{I}^{\mathcal{P}-\text{bidual}} = \mathcal{I}^{\mathcal{P}-\text{dual}}$.*

For example, the ideal $\mathcal{N}$ of nuclear operators satisfies $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}^{\text{dual}}$ but fails to be symmetric.

References

[1] R. Aron and M. Schottenloher, *Compact holomorphic mappings on Banach spaces and the approximation property*, J. Funct. Anal. **21** (1976), 7–30.

[2] S. Berrios and G. Botelho, *Approximation properties determined by operator ideals and approximability of homogeneous polynomials and holomorphic functions*, Studia Math. **208** (2012), 97–116.

[3] G. Botelho, H.-A. Braunss, H. Junek and D. Pellegrino, *Holomorphy types and ideals of multilinear mappings*, Studia Math. **177** (2006), 43–65.

[4] G. Botelho, D. Pellegrino and P. Rueda, *On composition ideals of multilinear mappings and homogeneous polynomials*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **43** (2007), 1139–1155.

[5] J. Diestel, H. Jarchow and A. Pietsch, *Operator Ideals*, *in*: Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. I, 437–496, North-Holland, Amsterdam, 2001.

[6] K. Floret and S. Hunfeld, *Ultrastability of ideals of homogeneous polynomials and multilinear mappings on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 1425–1435.

[7] A. Pietsch, *Operator Ideals*, North-Holland, 1980.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

Extensões biduais de operadores multilineares

Geraldo Botelho* e Kuo Po Ling†

Sejam E, F e G espaços de Banach, $m \in \mathbb{N}$ e $A: E \times \cdots \times E \to G$ uma aplicação $m-$linear contínua. Por J_E denotamos o mergulho canônico de E no seu bidual E'', por u' o adjunto de um operador linear contínuo u, por $\mathcal{L}(E;F)$ o espaço dos operadores lineares e contínuos de E em F e por E' o dual topológico de E. Diremos que uma aplicação $m-$linear contínua $\widetilde{A}: E'' \times \cdots \times E'' \to G''$ é uma *extensão bidual* de A se $J_G \circ A = \widetilde{A} \circ (J_E, ..., J_E)$.

Consideramos, neste trabalho, seis maneiras diferentes para construir extensões biduais de um operador $m-$linear contínuo dado $A \in \mathcal{L}(^mE;G)$, que são denotadas por $BE_m^i(A), BE_m^{ii}(A), ..., BE_m^v(A)$ e $BE_m^{vi}(A)$. Vejamos suas definições:

• (i) $BE_m^i(A) := AB_m(A)$ é a extensão de Aron-Berner de A (veja [1]).

• (ii) Consideramos o operador linear e contínuo

$$N_1 : \mathcal{L}(E;G'') \to \mathcal{L}(E'';G''),\ N_1(u) = (u' \circ J_{G'})'.$$

Seja $(N_m)_{m=1}^{\infty}$ a sequência de Nicodemi começando com N_1 (veja [2,4]). Definimos $BE_m^{ii}(A) := N_m(J_G \circ A)$.

Para definir a terceira e a quarta extensões biduais de A, precisamos de alguns isomorfismos isométricos. O primeiro é o seguinte:

$$\alpha_{EF} : E \longrightarrow \alpha_{EF}(E) \subset G_{EF},\ \alpha_{EF}(x)(u) = u(x),$$

onde $G_{EF} = \mathcal{L}(\mathcal{L}(E;F);F)$. Denotamos por $\mathcal{W}(E;F)$ o espaço de todos os operadores lineares fracamente compactos de E em F. Se $\mathcal{L}(E;F) = \mathcal{W}(E;F)$, então

$$\widetilde{\alpha}_{EF} : E'' \longrightarrow \widetilde{\alpha}_{EF}(E'') \subset G_{EF},\ \widetilde{\alpha}_{EF}(x'')(u) = J_F^{-1}(u''(x'')),$$

é um outro isomorfismo isométrico que estende α_{EF} no sentido de que $\alpha_{EF} = \widetilde{\alpha}_{EF} \circ J_E$.

• (iii) Suponhamos que $\mathcal{L}(E;G'') = \mathcal{W}(E;G'')$. Considere o operador linear e contínuo

$$R_1 : \mathcal{L}(E;G'') \to \mathcal{L}(G_{EG''};G''),\ R_1(u)(T) = T(u),$$

(veja [3, p. 450), e seja $(R_m)_{m=1}^{\infty}$ a sequência de Nicodemi começando com R_1 (veja [2]). Definimos

$$BE_m^{iii}(A) := R_m(J_G \circ A) \circ (\widetilde{\alpha}_{EG''}, ..., \widetilde{\alpha}_{EG''}).$$

• (iv) Suponhamos que $\mathcal{L}(E;G) = \mathcal{W}(E;G)$. Considere o operador linear e contínuo

$$S_1 : \mathcal{L}(E;G) \to \mathcal{L}(G_{EG};G),\ S_1(u)(T) = T(u),$$

(veja [3], p. 450), e seja $(S_m)_{m=1}^{\infty}$ a sequência de Nicodemi começando com S_1 (veja [2]). Definimos

$$BE_m^{vi}(A) := J_G \circ S_m(A) \circ (\widetilde{\alpha}_{EG}, ..., \widetilde{\alpha}_{EG}).$$

*Universidade Federal de Uberlândia, e-mail: botelho@ufu.br. The author is supported by CNPq Grant 306981/2008-4.
2010 Mathematics Subject Classification: 46G25.
†Universidade Federal de Uberlândia, e-mail: kuo@famat.ufu.br. The author acknowledges support given by FAPEMIG - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais.

• (v) Suponhamos que $\mathcal{L}(E;G'') = \mathcal{W}(E;G'')$. Seja $(Z_m : \mathcal{L}(^mE;G'') \longrightarrow \mathcal{L}(^mG_{EG''};G''))_{m=1}^{\infty}$ a sequência de Zalduendo (veja [7, 3]). Para qualquer $B \in \mathcal{L}(E;G'')$, $Z_m(B) \in \mathcal{L}(^mG_{EG''};G'')$ é uma extensão de B no sentido que $B = Z_m(B) \circ (\alpha_{EG''}, ..., \alpha_{EG''})$. Definimos $BE_m^v(A) := Z_m(J_G \circ A) \circ (\widetilde{\alpha}_{EG''}, ..., \widetilde{\alpha}_{EG''})$.

• (vi) Suponhamos que $\mathcal{L}(E;G) = \mathcal{W}(E;G)$. Seja $(Zal_m : \mathcal{L}(^mE;G) \longrightarrow \mathcal{L}(^mG_{EG};G))_{m=1}^{\infty}$ a sequência de Zalduendo (veja [7, 3]). Definimos $BE_m^{vi}(A) := J_G \circ Zal_m(A) \circ (\widetilde{\alpha}_{EG}, ..., \widetilde{\alpha}_{EG})$.

É fácil verificar que, com as condições impostas sobre os operadores serem fracamente compactos, todas essas seis aplicações m-lineares são extensões biduais de A.

O objetivo deste trabalho é mostrar que essas seis extensões biduais de A definidas acima coincidem se $\mathcal{L}(E;G'') = \mathcal{W}(E;G'')$.

Resultados Principais

Teorema 0.1. *Se $\mathcal{L}(E;G) = \mathcal{W}(E;G)$, então $BE_m^{iv}(A) = BE_m^{vi}(A)$ para todos $A \in \mathcal{L}(^mE;G)$ e $m \in \mathbb{N}$.*

Teorema 0.2. *Se $\mathcal{L}(E;G'') = \mathcal{W}(E;G'')$, então $BE_m^{iii}(A) = BE_m^{iv}(A) = BE_m^{v}(A) = BE_m^{vi}(A)$ para todos $A \in \mathcal{L}(^mE;G)$ e $m \in \mathbb{N}$.*

Corolário 0.1. *Se $\mathcal{L}(E;G'') = \mathcal{W}(E;G'')$, então $BE_m^{i}(A) = BE_m^{ii}(A) = BE_m^{iii}(A) = BE_m^{iv}(A) = BE_m^{v}(A) = BE_m^{vi}(A)$ para todos $A \in \mathcal{L}(^mE;G)$ e $m \in \mathbb{N}$.*

Referências

[1] R. M. Aron and P. D. Berner - *A Hahn–Banach extension theorem for analytic mappings*, Bull. Soc. Math. France **106** (1978), 3–24.

[2] P. Galindo, D. García, M. Maestre and J. Mujica - *Extension of multilinear mappings on Banach spaces*, Studia Math. **108** (1994), 55–76.

[3] D. García, M. Lilian Lourenço, M. Maestre and L. A. Moraes - *The Spectrum of Analytic Mappings of Bounded Type*, J. Math. Anal. Appl. **245** (2000),447–470.

[4] Geraldo Botelho and Kuo Po Ling - *Nicodemi sequences of operators between spaces of multilinear mappings*, Arch. Math. **98** (2012), 341–251.

[5] O. Nicodemi - *Homomorphisms of algebras of germs of holomorphic functions*, in: Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory, S. Machado (ed.), Lecture Notes in Math. 843, Springer, 1981, 534–546.

[6] I. Zalduendo - *Extending polynomials on Banach spaces – A survey*, Rev. Un. Mat. Argentina **46** (2005), 45–72.

[7] I. Zalduendo - *A canonical extension for analytic functions on Banach spaces* , Trans. Amer. Math. **320** (1990), 747–763.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

ON A NONLINEAR PARABOLIC EQUATION ON MANIFOLDS

G. O. ANTUNES[1], I. F. LOPEZ[2], M. D. G. DA SILVA[2], L. A. MEDEIROS[2] and A. C. BIAZUTTI[2]

Let Ω be a bounded open set of $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ with smooth boundary Γ. Let ν be the outward normal unit vector field defined on Γ and T a positive real number. We consider the cylindrical domain $Q = \Omega \times]0, T[$ with lateral boundary $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$.

The purpose of the present article is to investigate existence and uniqueness of solution for the following problem:

$$\left| \begin{array}{l} \Delta w = 0 \text{ in } Q \\ w_t + a\left(\displaystyle\int_\Gamma w d\Gamma\right) \frac{\partial w}{\partial \nu} - \Delta_\Gamma w + w^{2k+1} = f \text{ on } \Sigma \\ w(x,0) = w_0(x) \text{ on } \Gamma, \end{array} \right. \tag{0.1}$$

where k is a positive integer, the derivatives are in the sense of the theory of distributions, $\frac{\partial w}{\partial \nu}$ is the normal derivative of w, Δ_Γ denotes the Laplace Beltrami operator on Γ, the Laplace operator Δ acts only on spatial variables and $w = w(x,t)$, $x \in \Omega$, $0 < t < T$. The idea employed in this work comes from J. L. Lions who has considered, in [7], the existence and the uniqueness of solution for nonlinear problems on manifolds whose the unknown function satisfies the Laplace equation in Ω and a nonlinear evolution equation on its lateral boundary Σ.

The nonlinearity of the type $a\left(\displaystyle\int_\Gamma w d\Gamma\right)$ was motivated by the study of problems of diffusion of population cf. [4, Chapters 1 and 12] and [10].

If we replace w_t by Δw in $(0.1)_2$ and consider a constant, we have a condition known as generalized Wentzell boundary condition, for other problems related to Wentzell boundary conditions see [5], [11], [12], and [13].

Similar problems on manifolds, also motivated by Lions [7], can be seen in [1], [2], [3] and [6].

In our arguments we need the embedding of the space $H^s(\Gamma)$ into $L^{4k+2}(\Gamma)$, with $s \geq 1$ and k a positive integer. By Sobolev´s embedding theorem, cf.[8] or [9], if $s \geq 1$ such that $s > \frac{k(n-1)}{(2k+1)}$, we have $H^s(\Gamma) \hookrightarrow L^{4k+2}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$, where $\hookrightarrow$ means continuous embedding.

About the continuous function $a(s)$, $s \in \mathbb{R}$, we suppose $a(s) \geq a_0 > 0$ with bounded derivatives in $\mathbb{R}$.

Formulation of the Problem (0.1) **on** Σ

In [2] we defined an operator $\mathcal{A} \in \mathcal{L}\left(H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)\right)$ which is a composition of traces γ_0, γ_1, these are, roughly speaking, respectively $\frac{\partial w}{\partial \nu}$ and w restricted to Γ. To avoid duality pairing in the process of approximation we define, in the present paper, an operator $\mathcal{A} : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ and we obtain a scalar product in the process of approximation.

In fact, our argument can be found in [9] Chapter 3 and [8] Section 2.

We have the Dirichlet problem

$$\left| \begin{array}{l} \Delta w = 0, \text{ in } \Omega \\ w = u \text{ on } \Gamma. \end{array} \right. \tag{0.2}$$

If $u \in H^1(\Gamma)$, it has a unique solution $w \in H^{3/2}(\Omega)$. We have $\gamma_0 : H^{3/2}(\Omega) \longrightarrow H^1(\Gamma)$ and $\gamma_1 : H^{3/2}(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$, the mapping γ_0, γ_1 are continuous. The composition $\gamma_1 \circ \gamma_0^{-1}$ is a bounded linear mapping from $H^1(\Gamma)$ in $L^2(\Gamma)$. We define $\mathcal{A} : H^1(\Gamma) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ by $\mathcal{A} = \gamma_1 \circ \gamma_0^{-1}$. This bounded operator will be the "substitute" of the normal derivative in (0.1).

We formulate now the equivalent problem to (0.1) on Σ. For this, we define $w(t)|_\Gamma = u(t)$ and $\left.\frac{\partial w(t)}{\partial \nu}\right|_\Gamma = \mathcal{A}u(t)$.

[1]DME - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO), Rio de Janeiro, Brasil
[2]IM - Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Rio de Janeiro, Brasil

In this way, problem (0.1) can be rewritten as follows

$$\left| \begin{array}{l} u_t + a\left(\displaystyle\int_\Gamma u d\Gamma\right)\mathcal{A}u - \Delta_\Gamma u + u^{2k+1} = f \text{ on } \Sigma \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ on } \Gamma. \end{array} \right. \tag{0.3}$$

1 Mathematical Results

Theorem 1.1. *Let us consider* $u_0 \in H^1(\Gamma) \cap L^{2k+2}(\Gamma)$*,* $f \in L^2\left(0,T;L^2(\Gamma)\right)$ *and the operator* $\mathcal{A}$ *as defined above. Then there exists a unique weak solution* u *for the problem* (0.3) *such that* $u \in L^2\left(0,T;H^2(\Gamma)\right) \cap L^\infty\left(0,T;H^1(\Gamma) \cap L^{2k+2}(\Gamma)\right)$ *and* $u' \in L^2\left(0,T;L^2(\Gamma)\right)$*.*

Proof The proof of the existence of solution is done by the Faedo-Galerkin procedure.

References

[1] Antunes, G. O., Araruna, F. D., Medeiros, L. A., *Semilinear wave equation on manifolds*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, Vol. XI, n^0 1, pp. 7-18, 2002.

[2] Antunes, G. O., Lopez, I. F., Silva, M. G., Araújo, G. M., *Nonlinear wave equations of Carrier type on manifolds*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, to appear 2012.

[3] Cavalcanti, M. M., Domingos Cavalcanti, V. N., *Existence and asymptotic stability for evolution problems on manifolds with damping and source terms*, J. Math. Anal. Appl., Vol. 291, n^0 1, pp. 109-127, 2004.

[4] Chipot, M., *Elements of nonlinear analysis*, Birkhauser advanced texts, Basel; Boston; Berlin, Birkhauser Verlag, 2000.

[5] Coclite, G. M., Goldstein, G. R., Goldstein, J. A. and Romanelli, S., *Continuous dependence on the boundary conditions for the Wentzell laplacian*, Semigroup Forum 77, n^0 1, pp. 101-108, 2008.

[6] Larkin, N. A., Doronin, G. G. and Souza, A. J., *Hyperbolic-parabolic problem with degenerate second-order boundary conditions*, Matemática Contemporânea, Vol. 18, pp. 123-135, 2000.

[7] Lions, J.-L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéares.*, Dunod-Gauthier Villars, Paris, First edition, 1969.

[8] Lions, J.-L., *Problèmes aux limites dans les équations aux derivèes partiéles - Oeuvres Choisies de Jacques-Louis Lions*, Vol I, EDP Sciences Ed., Paris, pp. 431-536, 2003.

[9] Medeiros, L. A., Miranda, M. M., *Espaços de Sobolev e introdução aos problemas elípticos não homogêneos*, Editora UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.

[10] Menezes, S. B., *Remarks on weak solutions for a nonlocal parabolic problem*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, pp. 1-10, 2006.

[11] Vázquez, J. L. and Vitillaro, E., *On the Laplace equation with dynamical boundary conditions of reactive-diffusive type*, J. Math. Anal. Appl. 354, n^0, 2, pp. 674-688, 2009.

[12] Vicente, A., *Equações de ondas com condições de fronteira da acústica*, PhD Thesis, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, Brasil, 2010.

[13] Wentzell, J. D., *On boundary conditions for multidimensional diffusion processes - Theory of Probability and its applications*, vol. IV, n^0. 2, pp. 164-177, 1939.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

Exponential Decay for a Nonlinear Bernoulli-Euler Equation with Localized Damping

G. O. ANTUNES[1] and H. R. CRIPPA[2]

1 Introduction

In this paper we establish the exponential decay of the energy of solutions for the localized damped nonlinear equation

$$u_{tt} + \Delta^2 u - M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)\Delta u + a(x)\,u_t = 0, \tag{1.1}$$

where $M(s)$, $s > 0$, is a nonnegative real function and Ω is a bounded open set of $\mathbb{R}^n$ with smooth boundary $\partial\Omega$. We fix $x_0 \in \mathbb{R}^n$ and we set $m(x) = x - x_0$, $\quad \Gamma_0 = \{x \in \partial\Omega;\, m(x)\cdot\nu(x) > 0\}$ and $\Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma_0$, where $\nu = \nu(x)$ is the outward normal on $\partial\Omega$. Let us consider $a \in L^\infty(\Omega)$ be a nonnegative function such that $a(x) \geq a_0 > 0$ a. e. in ω, where ω is a neighborhood of Γ_0 and a_0 is a positive constant.

When $n = 1$, $M(s) = m_0 + ms$, $m > 0$, equation (1.1) represent the model originally proposed by Woinowsky-Kriger [16], for the transversal vibrations of an extensible beam subject to an axial internal force and $u(x,t)$ is the transverse deflection. If $n = 2$ the equation (1.1) represent the "Berger approximation" of the Von Kárman equations, modelling the nonlinear vibrations of a plate [11], pg. $501 - 507$.

We study (1.1) submitted to boundary clamped conditions described by $u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ on $\Gamma \times \mathbb{R}^+$.

Decay rates of energy of the wave equations with localized damping was studied by Zuazua [15], Nakao [10], Tébou [13] and Martinez [7] by differents methods. The same problem in the context of a Bernoulli-Euler equation (1.1) was investigated by Tucsnak [12], with a linear damping and by Charão [2] considering a nonlinear damping. Both authors obtained estimates of decay considering the local damping effetive in a neighborhood of the whole boundary $\partial\Omega$ and $M(s) = \alpha s$, $\alpha > 0$. In the proof they used a unique continuation result of Kim [6] and a compactness argument, a technique developed by Zuazua [15]. This technique introduce in the estimates constants that are not controllable.

We solve the problem through a method introduced by Tébou [13] for the study of the wave equation which is based on the multipliers technique and on some integral inequalities due to Haraux [4], [5]. As in the proof does not use "compactness-uniqueness" argument the constants that appear in the decay rate are explicit and do not depend on the initial data. Furthermore the damping is effective only in a neighborhood of Γ_0.

The existence and uniqueness of the solutions for (1.1) or similar models has been studied by Medeiros [8] and Menzala [9]. Decay estimates of solutions when the damping term is effective everywhere in Ω has been studied by Brito [1], Pereira [3] and Vasconcelos [14] among others authors.

2 Mathematical Results

Theorem 2.1. *Consider $\{u_0, u_1\} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Let ω be a neighborhood of Γ_0 and $a \in L^\infty(\Omega)$ satisfying $a(x) \geq a_0 > 0$ a. e. in ω. Then there exists a positive constant τ_0, such that*

$$E(t) \leq \left[\exp\left(1 - \frac{t}{\tau_0}\right)\right] E(0)\,,\ \forall\ t \geq 0, \tag{2.1}$$

[1]Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO), Rio de Janeiro, Brasil
[2]Universidade do Estado do Rio de Janeiro (Uerj), Rio de Janeiro, Brasil

where τ_0 *is independent of the initial data and* $E(t)$ *is given by*

$$E(t) = \frac{1}{2}\left|u'(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\Delta u(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\left|\nabla u(t)\right|^2\right),$$

where $\widehat{M}(\lambda) = \displaystyle\int_0^\lambda M(\xi)\,d\xi$ *and* M *is a increasing function that satisfies* $M(\lambda) \geq m_0 > 0$ *for all* $\lambda \in (0, \infty)$.

References

[1] Brito, E. H., Decay Estimates for generalized damped extensible string and beam equation, *Nonlinear Analysis* 8 (1984), 1489-1496.

[2] Charão, R. C., Bisognin, E., Bisognin, V, Pazoto, A. F., Asymptotic behavior of a Bernoulli-Euler type equation with nonlinear localized damping, *Progress in Nonlinear Diff. Equations and Their Applications* 66 (2005), 67-91.

[3] Pereira, D. C., Existence, Uniqueness and Asymptotic Behavior for solutions of the Nonlinear Beam Equation, *Nonlinear Analysis* vol. 14 n^0 8 (1990), 113-123.

[4] Haraux, H., Oscillations forcées pour certains systemes dissipatifs nonlinéaries, *Publications du Laboratoire d' Analyse Numerique.* N*o* 78010 Université Pierre et Marie Curie, Paris, (1978).

[5] Haraux, H., Semi-groupes linéaires equations d'évolution linéaires périodiques, *Publications du Laboratoire d'Analyse Numerique.* N*o* 78011 Université Pierre et Marie Curie, Paris, (1978).

[6] Kim, J. U., Exact semi-internal controllability of an Euler-Bernoulli equation, *SIAM Journal on Control and Optimization* 30 (1992), 1001-1023.

[7] Martinez P., A new method to obtain decay estimates for dissipative systems with localized damping, Revista Matematica Complutense 12 (1) (1999), 251-283.

[8] Medeiros, L. A., On a new class of nonlinear wave equations, *J. math. Applic.* 69 (1979), 252-262.

[9] Menzala G. P., On global classical solutions of a non-linear wave equation, *J. appl. Analysis* 10 (1980), 179-195.

[10] Nakao, M., Decay of solutions of the wave equation with a local nonlinear dissipation, *Math. Ann.* 305 (3) (1996), 403-417.

[11] Nayfeh, A. H., Mook, D. T., Nonlinear Oscilations, Willy Interscience, New York, (1979).

[12] Tucsnak, M., Stabilization for a Nonlinear Bernoulli-Euler Equation with Localized Damping, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 19 n^0 11 (1996), 897-907.

[13] Tcheugoué Tébou, L. R., Stabilization of the Wave Equation with Localized Nonlinear Damping, *Journal of Differential Equations* 145 (1998), 502-524.

[14] Vasconcelos, C. F., Teixeira, L. M., Existence, Uniqueness and stabilization for a nonlinear plate system with nonlinear damping, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* vol. VIII, n^0 1, (1999) 173-193.

[15] Zuazua, E., Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distribuited damping, *Comm. Partial Differential Equations* 15 (1990), 205-235.

[16] Woinowsky, W., Krieger, The effect of Axial Force on the Vibration of Higed Bars, *J. Appl. Mech.* 17 (1950), 35-36.

INTERNAL CONTROLLABILITY FOR THE MINDLIN-TIMOSHENKO SYSTEM WITH ONE CONTROL FORCE

G. O. ANTUNES*, F. D. ARARUNA† & A. MERCADO‡

The objective of this work is to study the exact controllability for the Mindlin-Timoshenko system of vibrations of thin beams of uniform thickness h and length L:

$$\begin{cases} \frac{\rho h^3}{12}u'' - u_{xx} + k\left(u + v_x\right) + f\left(u\right) = 0 & \text{in} \quad Q = (0,L)\times(0,T)\,, \\ \rho h v'' - k\left(u+v_x\right)_x + g\left(v\right) = \Psi\ 1_{(l_1,l_2)} & \text{in} \quad Q. \end{cases} \tag{1}$$

This model can be seen in Lagnese-Lions [4] and takes into account the effects of rotatory inertia and shearing deformations for thin plates or beams. The function u is the rotation angle of a filament of the plate or beam, v is the transverse displacement, ρ is a the mass density per unit volume and k is called the shear correction coefficient. The subset $(l_1, l_2) \subset (0, L)$ is the control domain, which is supposed to be as small as desired, and Ψ stands for control function which act over the system. The nonlinearity satisfies the following growth condition:

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{f\left(s\right)}{|s|\log^2|s|} = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{|s|\to\infty} \frac{g\left(s\right)}{|s|\log^2|s|} = 0. \tag{2}$$

We impose the following boundary conditions:

$$u(0,\cdot) = u(L,\cdot) = v(0,\cdot) = v(L,\cdot) = 0 \quad \text{on} \quad (0,T). \tag{3}$$

and, to make the system complete, let us include the initial conditions

$$u\left(\cdot,0\right) = u_0,\ u'\left(\cdot,0\right) = u_1,\ v\left(\cdot,0\right) = v_0,\ v'\left(\cdot,0\right) = v_1 \quad \text{in} \quad (0,L)\,. \tag{4}$$

Exact boundary controllability for the linear Mindlin-Timoshenko system (i.e. (1) with $f \equiv g \equiv 0$) was analyzed in [1, 4]. However, in [1] this property was obtained using only one control. Controllability properties for semilinear hyperbolic equations has been a topic of intense research (e.g. [2, 3, 6]).

The problem of exact controllability for the Mindlin-Timoshenko system can be formulated as follows: given $T > 0$, large enough, initial data $\{u_0, u_1, v_0, v_1\}$ and final data $\{\hat{u}_0, \hat{u}_1, \hat{v}_0, \hat{v}_1\}$, to find a control Ψ such that the solution of system $(1), (3), (4)$ satisfies the conditions

$$u\left(\cdot,T\right) = \hat{u}_0,\ u'\left(\cdot,T\right) = \hat{u}_1,\ v\left(\cdot,T\right) = \hat{v}_0,\ v'\left(\cdot,T\right) = \hat{v}_1 \quad \text{in} \quad (0,L)\,. \tag{5}$$

In order to obtain the exact controllability of $(1), (3), (4)$, one considers, by the well-known duality argument, the following dual system of the linearized system of $(1) - (4)$:

$$\begin{cases} \frac{\rho h^3}{12}\phi'' - \phi_{xx} + k\left(\phi+\psi_x\right) + a\phi = 0 & \text{in} \quad Q, \\ \rho h\psi'' - k\left(\phi+\psi_x\right)_x + b\psi = 0 & \text{in} \quad Q, \\ \phi\left(0,\cdot\right) = \phi\left(L,\cdot\right) = \psi\left(0,\cdot\right) = \psi\left(L,\cdot\right) = 0 & \text{on} \quad (0,T)\,, \\ \phi\left(\cdot,0\right) = \phi_0,\ \phi'\left(\cdot,0\right) = \phi_1,\ \psi\left(\cdot,0\right) = \psi_0,\ \psi'\left(\cdot,0\right) = \psi_1 & \text{in} \quad (0,L)\,, \end{cases} \tag{6}$$

with $a = a(x,t)$ and $b = b(x,t)$ being bounded potentials.

*Departamento de Matemática e Estatística, UNIRIO, RJ, Brasil, gladson.antunes@uniriotec.br
†Departamento de Matemática, UFPB, PB, Brasil, fagner@mat.ufpb.br
‡Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María, Vaparaíso, Chile, alberto.mercado@usm.cl

According to the Hilbert uniqueness method (HUM) introduced by J.-L. Lions (see [5]), the above controllability problem may be reduced to an explicit observability estimate for the adjoint system (6). Namely, we expect to find a constant $C_0 = C_0(\{a,b\}) > 0$ such that all weak solutions $\{\phi,\psi\}$ of (6) satisfy

$$\|\{\phi_0,\phi_1,\psi_0,\psi_1\}\|^2_{(L^2(0,L)\times H^{-1}(0,L))^2} \leq C_0 \int_0^T \int_\omega |\psi(x,t)|^2\, dxdt, \tag{7}$$

for all $\{\phi_0,\phi_1,\psi_0,\psi_1\} \in \left(L^2(0,L)\times H^{-1}(0,L)\right)^2$.

The explicit estimate of $C_0 = C_0(\{a,b\})$ in terms of a suitable norm of the potentials a and b is an indispensable part of the problem. We have achieved this by means of the following Carleman estimate for the solutions of (6):

Theorem 1. *For any $\lambda \geq \lambda_0 \geq 1$, and any $\{\phi,\psi\} \in \left[C\left([0,T];L^2(0,L)\right)\right]^2$ satisfying*

$$\phi(x,0) = \phi(x,T) = \psi(x,0) = \psi(x,T) = 0,\ \forall x \in (0,L),\ \mathcal{P}\{\phi,\psi\} \in \left[H^{-1}(Q)\right]^2$$

and

$$(\{\phi,\psi\},\mathcal{P}\{\eta,\theta\})_{[L^2(Q)]^2} = \langle \mathcal{P}\{\phi,\psi\},\{\eta,\theta\}\rangle_{[H^{-1}(Q)]^2\times[H_0^1(Q)]^2},\ \forall \{\eta,\theta\} \in [H_0^1(Q)]^2,\ \mathcal{P}\{\eta,\theta\} \in [L^2(Q)]^2, \tag{8}$$

it holds that

$$\lambda \int_Q \left(|\phi|^2 + |\psi|^2\right) e^{2\lambda\alpha} dxdt \leq C\left(\left\|e^{\lambda\alpha}\mathcal{P}\{\phi,\psi\}\right\|^2_{[H^{-1}(Q)]^2} + \lambda^2 \int_0^T \int_\omega |\psi|^2 e^{2\lambda\alpha} dxdt\right), \tag{9}$$

where $\mathcal{P}\{\phi,\psi\} = \{\frac{\rho h^3}{12}\phi'' - \phi_{xx} + k(\phi+\psi_x),\rho h\psi'' - k(\phi+\psi_x)_x\}$ and $\alpha = \alpha(x,t) := (x-x_0)^2 - c(t-\frac{T}{2})^2$, for any given $x_0 \in \mathbb{R}\setminus[0,L]$ and $c \in (0,1)$.

The above observability inequality give us a exact controllability result for a linearized system of (1), (3), (4) (with $\{au, bv\}$ instead of $\{f(u), g(v)\}$). This controllability property together a fixed point argument allow us to prove the following result:

Theorem 2. *If $T > 2R$, with $R = R(l_1,l_2) = \max\{l_1, L-l_2\}$, then system (1), (3), (4) is exactly controllable in time T.*

References

[1] ARARUNA, F. D. AND ZUAZUA, E. - *Controllability of the Kirchhoff System for Beams as a Limit of the Mindlin–Timoshenko System,* SIAM J. Control Optim., 47 (4) (2008), 1909–1938.

[2] FU, X., YONG, J. AND ZHANG, X., *Exact controllability for multidimensional semilinear hyperbolic equations,* SIAM J. Control Optim., 46 (5) (2007), 1578–1614.

[3] IMANUVILOV, O. Y. - *On Carleman estimates for hyperbolic equations,* Asymptot. Anal., 32 (3-4) (2002), 185–220.

[4] LAGNESE, J. E. AND LIONS, J.-L. - *Modelling Analysis and Control of Thin Plates*, RMA 6, Masson, Paris, 1988.

[5] LIONS, J.-L. - *Contrôlabilité Exacte, Pertubation et Estabilization de Systèmes Distribuées, Tome I, Contrôlabilité Exacte*, RMA 8, Masson, Paris, 1988.

[6] ZUAZUA, E., *Exact Controllability for the Semilinear Wave Equation in One Space Dimensional,* Ann. Inst. H. Poincaré Analyse Non Linéaire, 10 (1993), 109–129.

EXISTENCE OF COMBUSTION WAVES IN POROUS MEDIA

GRIGORI CHAPIRO *

There is renewed interest using combustion for the recovery of medium viscosity oil. We consider the combustion process when air in injected into the porous medium containing some fuel and inert gas to enable the combustion of oil and other consecutive reactions within the reservoir formation leading to the release of heat. Heat is conducted ahead of the combustion front, reduces the oil viscosity and enhancing flow.

In this work one dimensional gas-solid combustion is studied with the combustion rate described by the first order mass action law combined with the modified Arrhenius' law. We consider a cylindrical porous rock containing solid fuel. Standard simplifications are made in order to formulate the physical model, for example, the gas thermal capacity is considered small.

There are many analytical studies of steady co-flow and counter-flow combustion waves in high-temperature regimes, e.g., [1, 2, 3, 4, 9, 12]. These papers usually exploit the strong nonlinearity of the Arrhenius factor in the reaction rate, which allows one to neglect the reaction rate as soon as the temperature decreases [13]. This method is valid provided most of the reaction occurs at the highest temperatures; however it is based on existence of a combustion wave, which is not proved.

Some recent papers address this issue. For example in [10] the authors use the method of upper and lower solutions to prove existence and uniqueness of the combustion wave for a simple model of two equations.

In [11] the existence of a combustion wave was addressed using Geometrical Singular Perturbation Theory. In [8] a stability analysis was made of the combustion wave in a simple model with two equations.

In previous works [4, 7] some similar models were analyzed and combustion wave profile was obtained using different techniques. Different numerical approaches were used, see [5, 6] and evidences of the existence of stable solution in the form of traveling wave were obtained.

In this work we analyze the model consisting of three equations representing temperature, oxygen and fuel balance laws. The system of PDEs in dimensionless form can be written as follows. The dependent variables are temperature θ, oxygen fraction Y (changing from 0 - no oxygen to 1 - full of oxygen) and fuel ρ (changing from 0 - no fuel to 1 - full of fuel):

$$
\begin{aligned}
&\partial_t\theta + v_\theta\partial_x\theta = \partial_{xx}\theta + \rho Y\Phi,\\
&\partial_t\rho = -\rho Y\Phi,\\
&\partial_t Y + v_Y\partial_x Y = -\rho Y\Phi,\\
&\Phi = \begin{cases} \exp\left(-1/\theta\right), & \theta > 0\\ 0, & \theta \le 0\end{cases}
\end{aligned}
$$

We solve the corresponding Riemann problem and obtain the solution as wave sequence. We prove the existence of various combustion waves using planar dynamical systems analysis. All wave sequences were verifies with numerical simulations.

References

[1] I.Y. Akkutlu and Y.C. Yortsos. The dynamics of in-situ combustion fronts in porous media. *J. of Combustion and Flame*, 134:229–247, 2003.

*Departamento de Matemática , UFJF, MG, Brasil, grigori@ice.ufjf.br. Agradecimentos a FAPEMIG pelo suporte financeiro.

[2] A.P. Aldushin, I.E. Rumanov, and B.J Matkowsky. Maximal energy accumulation in a superadiabatic filtration combustion wave. *J. of Combustion and Flame*, 118:76–90, 1999.

[3] A.P Aldushin and B.S Seplyarsky. Propagation of exothermic reaction in a porous-medium during gas blowing. *Sov. Phys. Dokl.*, 23:483–485, 1978.

[4] J. Bruining, A.A. Mailybaev, and D. Marchesin. Filtration combustion in wet porous medium. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 70:1157–1177, 2009.

[5] G. Chapiro. *Gas-Solid Combustion in Insulated Porous Media.* PhD thesis, IMPA, 2009. http://www.preprint.impa.br.

[6] G. Chapiro, G. Hime, A.A. Mailybaev, D. Marchesin, and A.J. de Souza. Global asymptotic effects of the structure of combustion waves in porous media. In *Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, and Applications: Plenary and Invited Talks: Twelfth International Conference on Hyperbolic Problems, June 9-13, 2008*, volume 67, pages 487–496. AMS, 2009.

[7] G. Chapiro, A. A. Mailybaev, A.J. Souza, D. Marchesin, and J. Bruining. Asymptotic approximation of long-time solution for low-temperature filtration combustion. *Computational Geosciences (Amsterdam)*, 16:799–808, 2012.

[8] A. Ghazaryan, Y. Latushkin, S. Schecter, and A.J. de Souza. Stability of gasless combustion fronts in one-dimensional solids. *Archive for rational mechanics and analysis*, 198(3):981–1030, 2010.

[9] A.A. Mailybaev, J. Bruining, and D. Marchesin. Analysis of in situ combustion of oil with pyrolysis and vaporization. *Combustion and Flame*, 158(6):1097–1108, 2011.

[10] J.C. Mota and M.M. Santos. An application of the monotone iterative method to a combustion problem in porous media. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 12(2):1192–1201, 2011.

[11] J.C. Mota and S. Schecter. Combustion fronts in a porous medium with two layers. *Journal of dynamics and differential equations*, 18(3):615–665, 2006.

[12] D.A. Schult, B.J. Matkowsky, V.A. Volpert, and A.C. Fernandez-Pello. Forced forward smolder combustion. *Combustion and Flame*, 104(1-2):1–26, 1996.

[13] Y. B. Zeldovich, G. I. Barenblatt, V. B. Librovich, and G. M. Makhviladze. *The mathematical theory of combustion and explosion.* Consultants Bureau, New York, 1985.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

ON A THERMOELASTIC SYSTEM WITH BOUNDARY FEEDBACK CONTROL

H. R. CLARK[*], M. R. CLARK[†], A. T. LOUREDO[‡] & A. M. OLIVEIRA[§]

In this work we analyze from the mathematical point of view a model for small vertical vibrations of an elastic string coupled with a diffusion equation and mixed boundaries equations.

The main goals of this paper is improving article [3] in the sense that all equations of the thermoelastic system considered in this paper are linear.

Let Ω be an open, bounded and connect set of $\mathbb{R}^n$. The smooth boundary of Ω is denoted by Γ. Suppose Γ with two partitions Γ_0 and Γ_1 both with positive measure and $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1$ empty.

This paper is concerned with the existence, uniqueness, and asymptotic behavior of the global solutions to the nonlinear thermoelastic coupled system:

$$\left|\begin{array}{l} u''(x,t) - \alpha(t)\Delta u(x,t) + \lambda(u(x,t)) + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(x,t) = 0 \text{ in } \Omega\times]0,\infty[, \\ \theta'(x,t) - \beta\Big(\displaystyle\int_\Omega \theta(t)dx\Big)\Delta\theta(x,t) + (\mathbf{a}\cdot\nabla)u'(x,t) = 0 \text{ in } \Omega\times]0,\infty[, \\ u(x,t) = 0 \text{ on } \Gamma_0\times]0,\infty[; \quad \theta(x,t) = 0 \text{ on } \Gamma\times]0,\infty[, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) + g(x)h(\cdot, u'(x,t)) = 0 \text{ on } \Gamma_1\times]0,\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x), \;\; u'(x,0) = u_1(x), \;\; \theta(x,0) = \theta_0(x) \text{ in } \Omega, \end{array}\right. \tag{0.1}$$

where all derivatives of system (0.1) are in the sense of the distributions of Laurent Schwartz.

A brief commentary on works associated with (0.1), in addition to the previously cited [3]: In [4] was investigated the existence, uniqueness of solutions and asymptotic stabilization of the total energy associated with the linear wave equation

$$u''(x,t) - \alpha(t)\Delta u(x,t) = 0 \tag{0.2}$$

and condition $(0.1)_4$ linear. That paper, say [4], has been improved in [1] by adding to (0.2) the non-linearity $\lambda(u(x,t))$. About the diffusion equation

$$\theta'(x,t) - \beta\Big(\int_\Omega \theta(t)dx\Big)\Delta\theta(x,t) = 0$$

we cite the work [5] in which is established existence and uniqueness of solutions, and the exponential decay of the energy associated.

[*]IME, UFF, RJ, Brasil, hclark@vm.uff.br
[†]DM, UFPI, PI, Brasil, mclark@ufpi.br
[‡]DM, UEPB, PB, Brasil, aldotl@cct.uepb.edu.br
[§]DM, UFPI, PI, Brasil, alex@ufpi.br

1 Mathematical Results

In order to state the results of this article for the system (0.1) we will fix some hypotheses:

$$\left|\begin{array}{l}\alpha \text{ is a } C^1([0,\infty);\mathbb{R}) \text{ function with } \alpha' \in L^1(0,\infty)\cap L^\infty(0,\infty) \quad \text{and } \alpha(t)\geq \alpha_0>0;\\ \beta \text{ is a } C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}) \text{ Lipschitz function with } \beta(\vartheta)\geq\beta_0>0;\\ \lambda \text{ is a } C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ Lipschitz function such that } \lambda(0)=0 \text{ and } \lambda(s)s\geq 0;\\ g\in W^{1,\infty}(\Gamma_1),\ \ g(x)\geq g_0>0;\\ h\in C^1(\overline{\Gamma}_1\times\mathbb{R};\mathbb{R}) \text{ with } h(x,0)=0 \text{ a.e. and}\\ [h(x,s)-h(x,r)](s-r)\geq d_0(s-r)^2 \text{ for } x\in\Gamma_1 \text{ a.e. and } \quad d_0>0 \text{ is a constant.}\end{array}\right. \tag{1.1}$$

Definition 1.1. *A global solution for the nonlinear initial-boundary value problem (0.1) is a pair of real-valued functions $\{u,\,\theta\}$ defined on $\big(\Omega\times]0,\infty[\big)^2$ such that*

$$u\in L^\infty_{\text{loc}}\big(0,\infty;\,V\cap H^2(\Omega)\big),\ \ u'\in L^\infty_{\text{loc}}\big(0,\infty;\,V\big)\cap L^2_{\text{loc}}\big(0,\infty;\,L^2(\Gamma)\big),$$
$$u''\in L^\infty_{\text{loc}}\big(0,\infty;L^2(\Omega)\big)\cap L^2_{\text{loc}}\big(0,\infty;\,L^2(\Gamma)\big),\ \ \theta,\ \theta'\in L^2_{\text{loc}}(0,\infty;H^1_0(\Omega)).$$

The pair $\{u,\,\theta\}$ satisfies the identities integrals

$$\int_0^\infty\int_\Omega[u''\phi+\alpha\nabla u\cdot\nabla\phi+\lambda(u)\phi+(\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta\phi]\;dxdt+\int_0^\infty\int_\Gamma \alpha g h(u')\phi\,dxdt=0,$$
$$\int_0^\infty\Big[\int_\Omega\theta'\varphi dx+\beta\Big(\int_\Omega\theta dx\Big)\int_\Omega\nabla\theta\cdot\nabla\varphi dx+\int_\Omega(\mathbf{a}\cdot\nabla)u'\varphi dx\Big]dt=0,$$
$$\int_0^\infty\int_\Gamma\Big[\frac{\partial u}{\partial\nu}+g\,h(u')\Big]\psi dxdt=0,$$

for all $\phi\in L^2\left(0,T;V\right)$, $\varphi\in L^2\left(0,T;H^1_0(\Omega)\right)$ and $\psi\in L^2\left(0,T;L^2(\Gamma)\right)$. Moreover, $\{u,\,\theta\}$ satisfy the initial conditions (0.1)$_4$.

Theorem 1.1. *Suppose $u_0\in V\cap H^2(\Omega)$, $u_1\in V$, $\theta_0\in H^1_0(\Omega)$ and $\dfrac{\partial u^0}{\partial\nu}+gh(u^1)=0$ on Γ_1 then there exists a unique global solution of (0.1) in the sense of Definition 1.1, provided the hypotheses in (1.1) hold, and $V=\left\{v\in H^1(\Omega);\ \gamma_0(v)=0\ \text{a.e. on}\ \Gamma_0\right\}$.*

References

[1] ARARUNA, F. D. & MACIEL, A. B. - *Existence and boundary stabilization of the semilinear wave equation*, Nonlinear Analysis, TMA, 67 (2007), pp. 1288-1305.

[2] BRÉZIS, H. - *Analise Fonctionnelle. Théorie et applications.* DUNOD, Paris (1999).

[3] CLARK, H. R., SAN GIL JUTUCA, L. P. & MILLA MIRANDA, M. - On a mixed problem for a linear coupled system with variable coefficients, Eletronic Journal of Differential Equations, 1 (04) (1998), 1-20.

[4] MEDEIROS, L. A., MILLA MIRANDA, M. - On a boundary value problem for wave equations: Existence, uniqueness-asymptotic behavior, Revista de Matemáticas Aplicadas, Univerdidade de Chile, 17 (1996), 47-73.

[5] CHIPOT, M. & LOVAT, B. - On the asymptotic behaviour of some nonlocal problems, Positivity, 3 (1) (1999), 6581.

[6] LIONS, J. L. - *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéares.*, Dunod-Gauthier Villars, Paris, First edition, 1969.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

RESULTADOS DE MÁ COLOCAÇÃO PARA OS SISTEMAS DE BENNEY E DE SCHRÖDINGER-DEBYE

ISNALDO ISAAC BARBOSA* & ADÁN J. CORCHO†

1 Introdução

Neste trabalho apresentaremos resultados de *má colocação* para os Sistemas de Benney e de Schrödinger-Debye. Mostraremos que a aplicação dado-solução não é C^2 na origem. Os resultados obtidos neste trabalhos foram inspirados no trabalho de Holmer [6].

Apresentamos abaixo os dois Sistemas objeto de estudo deste trabalho.

O Sistema de Benney, primeiro abaixo, modela a interação de ondas aquáticas, para mais detalhes ver [1] e [2].

$$\textbf{Sistema de Benney} \quad \begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = & \alpha uv + \beta |u|^2 u, \quad x, t \in \mathbb{R}, \\ \partial_t v + \lambda \partial_x v = & \gamma \partial_x |u|^2, \quad u(x,0) = u_0(x) \quad\quad v(x,0) = v_0(x). \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\textbf{Sistema de Schrödinger-Debye} \quad \begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x^2 u & = & uv, \ x, t \in \mathbb{R}, \\ \sigma \partial_t v + v & = & \epsilon |u|^2, \quad u(x,0) = u_0(x) \quad\quad v(x,0) = v_0(x), \end{cases} \tag{1.2}$$

onde (u_0, v_0) é considerado no espaço clássico de Sobolev $H^k(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$.

Já o segundo sistema, o Sistema de Schrödinger-Debye, modela problemas de ótica não-linear, ver [8].

2 Resultados

O resultado mais geral de *boa colocação local* para o sistema (1.1) foi apresentado em 1997 por Ginibre, Tsutsumi e Velo em [3]. Neste trabalho foi provado o seguinte teorema:

Teorema 2.1. *O Sistema de Benney (1.1) é localmente bem-posto com dados iniciais* $(u_0, v_0) \in H^k(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ *satisfazendo*

$$-\frac{1}{2} < k - s \leq 1 \quad\quad e \quad\quad 2k \geq s + \frac{1}{2} \geq 0.$$

Este resultado foi obtido utilizando o método do ponto fixo de Banach em espaços de Bourgain. Mais tarde, em [5], Corcho provou que o resultado obtido por Ginibre, Tsutsumi e Velo é o melhor possível quando $\beta < 0$. Especificamente foi obtido o seguinte teorema:

Teorema 2.2. *O Sistema de Benney (1.1) não possui fluxo uniformemente contínuo em* $H^k(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ *para* $\beta < 0$ *nos casos*

$$-\frac{1}{3} \leq k < 0 \quad\quad e \quad\quad k(2s+1) \geq -1.$$

O método usado baseou-se no artigo [7] de Kenig-Ponce-Vega, onde foi feito uso da existência de soluções tipo ondas viajantes e nesta técnica foi essencial a hipótese $\beta < 0$.

*Instituto de Matemática , UFAL, AL, Brasil, isnaldo.isaac@gmail.com
†Instituto de Matemática , UFRJ, RJ, Brasil, adan.corcho@gmail.com

O resultado deste trabalho generaliza o Teorema provado por Corcho no sentido que provaremos que o fluxo associado ao sistema não é C^2 na origem para uma classe mais geral de indices (k, s) de Sobolev, o que é suficiente para garantir que não é possível se obter solução para o sistema (1.1) via o método de ponto fixo de Banach. Fica claro neste resultado que a região de boa colocação obtida por Ginibre, Tsutsumi e Velo é o melhor possível via Ponto Fixo.

Nosso primeiro resultado é o seguinte:

Teorema 2.3. *O Sistema de Benney (1.1) não admite fluxo de classe C^2 em $H^k(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ para $\beta \in \mathbb{R}$ para qualquer $k \in \mathbb{R}$ e s satisfazendo:*

$$s > 2k - \frac{1}{2} \quad ou \quad s < -\frac{1}{2}.$$

Para (1.2) Corcho e Matheus, [4], exibiram o seguinte resultado de boa colocação local:

Teorema 2.4. *O Sistema de Schrödinger-Debye (1.2) é localmente bem-posto com dados iniciais $(u_0, v_0) \in H^k(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ satisfazendo*

$$|k| - 1/2 \leq s < \ min\ \{k + 1/2,\ 2k + 1/2\} \qquad e \qquad k > -1/4.$$

Fazendo uso da mesma técnica utilizada no Sistema de Benney, obtemos nosso segundo resultado, o qual diz o seguinte:

Teorema 2.5. *O Sistema de Schrödinger-Debye (1.2) não admite fluxo de classe C^2 em $H^k(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ para k qualquer e s satisfazendo:*

$$s > 2k + \frac{1}{2} \quad ou \quad s < -\frac{1}{2}.$$

Referências

[1] Benney, D.J. - *Significant interactions between small and large scale surface waves.*, Stud. Appl. Math., **55**, 93-106 (1976).

[2] Benney, D.J. - *A general theory for interactions between short and long waves.* Stud. Appl. Math., **56**, 81-94 (1977).

[3] Corcho, A. J. - *Ill-posedness for the Benney System.* Discrete and Continuous Dynamical Systems, **15** (3), 965-972 (2006).

[4] Corcho, A. J. and Matheus, C. *Sharp bilinear estimates and well posedness for the 1-D Schrödinger-Debye system.* Differential and Integral Equations, **22** (3-4), 357-391 (2009).

[5] Ginibre, J., Tsutsumi, Y. and Velo, G. *On the Cauchy Problem for the Zakharov system.* J. Funct. Anal., **151**, 384-436 (1997).

[6] Holmer, J. *Local ill-posedness of the 1D Zakharov System.* Electronic Journal of Differential Equations. **2007** (24), 1-22 (2007).

[7] Kenig, C.E., Ponce, G. and Vega, L. *On ill-posedness of some canonical dispersive equations.* Duke Math. J., **106**, 617-633 (2001).

[8] Newell, A. C., Moloney, J. V. *Nonlinear Optics* (Addison Wesley, 1992)

A class of biorthogonal functions

J.H. McCabe* & A. Sri Ranga†

Let Ω_m be the linear space of functions defined as follows.

$\Omega_0 \equiv \mathbb{P}_0$ and Ω_m for $m \geq 1$ is such that if $F \in \Omega_m$ then $F(x) = B^{(0)}(x) + \sqrt{1-x^2}\, B^{(1)}(x)$, where $B^{(0)}(x) \in \mathbb{P}_m$ and $B^{(1)}(x) \in \mathbb{P}_{m-1}$ satisfy

$$B^{(0)}(-x) = (-1)^m B^{(0)}(x) \quad \text{and} \quad B^{(1)}(-x) = (-1)^{m-1} B^{(1)}(x).$$

Here $\mathbb{P}_m(x)$ represents the linear space of polynomials of degree at most m.

This means, if $F \in \Omega_{2n}$ then $B^{(0)}$ is an even polynomial of degree at most $2n$ and $B^{(1)}$ is an odd polynomial of degree at most $2n-1$. Likewise, if $F \in \Omega_{2n+1}$ then $B^{(0)}$ is an odd polynomial of degree at most $2n+1$ and $B^{(1)}$ is an even polynomial of degree at most $2n$. Note that the dimension of Ω_m is $m+1$.

Functions belonging to Ω_m are connected to self inversive polynomials of degree m. That is, given $F \in \Omega_m$ then associated with it there exists a unique Q which is a self inversive polynomials of degree (at most) m. Precisely, $e^{-im\theta/2} Q(e^{i\theta}) = F(x)$, where $x = \cos(\theta/2)$.

The objective of this talk is to present some properties and applications of the sequence of functions $\{\mathcal{W}_m(x)\}$, where $\mathcal{W}_m(x) \in \Omega_m$, given by

$$\begin{aligned} &\mathcal{W}_0(x) = 1, \quad \mathcal{W}_1(x) = x - \beta_1\sqrt{1-x^2}, \\ &\mathcal{W}_{m+1}(x) = \big[x - \beta_{m+1}\sqrt{1-x^2}\big]\mathcal{W}_m(x) - \alpha_{m+1}\mathcal{W}_{m-1}(x), \quad m \geq 1. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Here, $\{\beta_m\}_{m=1}^{\infty}$ and $\{\alpha_{m+1}\}_{m=1}^{\infty}$ are sequence of real numbers.

We have recently observed that these functions are very important from the point of view of orthogonal polynomials on the unit circle.

1 Mathematical Results

Setting $\mathcal{W}_m(x) = A_m^{(0)}(x) + \sqrt{1-x^2} A_m^{(1)}(x)$, where

$$A_m^{(0)}(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} = a_{m,\,2j}^{(0)}\, x^{m-2j} \quad \text{and} \quad A_m^{(1)}(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor (m-1)/2 \rfloor} a_{m,\,2j}^{(1)}\, x^{m-1-2j}, \tag{1.2}$$

we refer to $a_{m,\,0}^{(0)}$ and $a_{m,\,0}^{(1)}$ as the first and second leading coefficients of $\mathcal{W}_m$, respectively.

Teorema 1.1. *For the leading coefficients of $\mathcal{W}_m$ obtained from* (0.1) *the following hold.*

$$\begin{bmatrix} a_{m,0}^{(0)} \\ a_{m,0}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \beta_m \\ -\beta_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{m-1,0}^{(0)} \\ a_{m-1,0}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad m \geq 1,$$

with $a_{0,0}^{(0)} = 1$ and $a_{0,0}^{(1)} = 0$. Consequently, with $\lambda_m = (a_{m,0}^{(0)})^2 + (a_{m,0}^{(1)})^2$, there hold

$$a_{m+1,0}^{(0)}\, a_{m,0}^{(0)} + a_{m+1,0}^{(1)}\, a_{m,0}^{(1)} \quad = \lambda_m = (1+\beta_m^2)\lambda_{m-1}, \quad m \geq 1,$$

*School of Mathematics, University of St. Andrews, Scotland
†Departamento de Matemática Aplicada, IBILCE, UNESP, SP, Brazil, ranga@ibilce.unesp.br

$$a_{m+1,0}^{(0)}\,a_{m-1,0}^{(0)} + a_{m+1,0}^{(1)}\,a_{m-1,0}^{(1)} = (1-\beta_m\beta_{m+1})\lambda_{m-1}, \quad m \geq 1$$

and

$$a_{m+1,0}^{(0)}\,a_{m-1,0}^{(1)} - a_{m+1,0}^{(1)}\,a_{m-1,0}^{(0)} = (\beta_m+\beta_{m+1})\lambda_{m-1}, \quad m \geq 1.$$

In this talk, interpolatory properties of functions in Ω_m, properties of the zeros of $\mathcal{W}_m$ and associated quadrature rules will be discussed. With respect to the orthogonality properties of $\mathcal{W}_m$, we show that

Teorema 1.2. *Given a positive measure ψ on $[-1,1]$ let the sequence of functions $\{\mathcal{W}_m(x)\}$ be given by* (0.1), *where $\beta_1 = \gamma_0^{-1}\int_{-1}^{1} x\,\mathcal{W}_0^2(x)\,d\psi(x)$ and*

$$\left.\begin{aligned}\beta_{m+1} &= \frac{1}{\gamma_m}\int_{-1}^{1} x\,\mathcal{W}_m^2(x)\,d\psi(x),\\ \alpha_{m+1} &= \frac{1}{\gamma_{m-1}}\int_{-1}^{1}\big[x-\beta_{m+1}\sqrt{1-x^2}\big]\,\mathcal{W}_{m-1}(x)\,\mathcal{W}_m(x)\sqrt{1-x^2}\,d\psi(x),\end{aligned}\right\} \quad m \geq 1.$$

Here, $\gamma_m = \int_{-1}^{1}\mathcal{W}_m^2(x)\,\sqrt{1-x^2}\,d\psi(x)$, $m \geq 0$. Then the sequence $\{\mathcal{W}_m(x)\}$ satisfies the biorthogonality property

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\mathcal{W}_{2n}(x)\,\mathcal{W}_{2m}(x)\,\sqrt{1-x^2}\,d\psi(x) &= \gamma_{2m}\,\delta_{n,m},\\ \int_{-1}^{1}\mathcal{W}_{2n+1}(x)\,\mathcal{W}_{2m+1}(x)\,\sqrt{1-x^2}\,d\psi(x) &= \gamma_{2m+1}\,\delta_{n,m},\end{aligned}$$

and

$$\int_{-1}^{1}\mathcal{W}_{2n+1}(x)\,\mathcal{W}_{2m}(x)\,d\psi(x) = 0,$$

for $n,m = 0,1,2,\ldots$.

We also show that the coefficients α_m that appear in Theorem 1.2 are all positive and that the biorthogonal function $\mathcal{W}_m$ has m simple zeros in $(-1,1)$.

However, results that we have observed form the theory of orthogonal polynomials on the unit circle suggest that $\{\alpha_m\}$ is a positive chain sequence and that, within $[-1,1]$, the zeros of $\mathcal{W}_m$ also interlace with the zeros of $\mathcal{W}_{m-1}$. For basic information on orthogonal polynomials on the real line and on chain sequences we cite [1].

References

[1] T.S. Chihara, "An Introduction to Orthogonal Polynomials", Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, 1978.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

CONTINUITY OF THE FLOWS AND UPPER SEMICONTINUITY OF GLOBAL ATTRACTORS FOR $p_s(x)$-LAPLACIAN PARABOLIC PROBLEMS*

JACSON SIMSEN†, MARIZA S. SIMSEN‡ & MARCOS R. T. PRIMO§

Partial differential equations with variable exponent have attracted a lot of interest of mathematicians around the world in recent years. A lot of researchers have spent some efforts to obtain results on variable exponent spaces. The theory of problems with variable exponent spaces has application in electrorheological fluids, thermo-rheological fluids, image restoration and image process (see for example [3, 8, 9, 10, 11] and references therein).

In the recent years, S. Antontsev and S. Shmarev considered anisotropic parabolic equations and studied questions as existence and uniqueness of weak solutions, localization of solutions, vanishing solutions and blow-up phenomena (see [4, 5, 6, 7]). The authors in [4] prove existence and uniqueness of weak solutions using Galerkin's approximations. J. Simsen and M.S. Simsen also proved results on existence and uniqueness of weak solutions for $p(x)$-Laplacian parabolic problems using monotone operator theory (see [18]). Moreover, J. Simsen and C.B. Gentile get results on existence and upper semicontinuity of global attractors for $p-$Laplacian parabolic problems as the diffusion parameter varies (see [14, 15, 16]). More recently, J. Simsen and M.S. Simsen get results on upper semicontinuity of global attractors for the following $p(x)$-Laplacian parabolic equations

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(t) - \operatorname{div}(D^\lambda |\nabla u_\lambda(t)|^{p(x)-2}\nabla u_\lambda(t)) = B(u_\lambda(t)),$$

under Dirichlet homogeneous boundary conditions varying the diffusion parameters D^λ (see [19]).

With all of this, it is interesting to investigate in which way the parameter $p(x)$ affects the dynamic of problems involving the $p(x)$-Laplacian, analyzing the continuity properties of the flows and the global attractors with respect the parameter $p(x)$. B. Amaziane, L. Pankratov and V. Prytula studied homogenization of $p_\epsilon(x)$-Laplacian elliptic equations (see [1]) and B. Amaziane, L. Pankratov and A. Piatnitski studied nonlinear flow through double porosity media in variable exponent Sobolev spaces (see [2]) where the authors considered the following initial boundary value problem

$$\begin{cases} \omega^\epsilon(x)\frac{\partial u^\epsilon}{\partial t}(t) - \operatorname{div}(k^\epsilon(x)\nabla u^\epsilon |\nabla u^\epsilon|^{p_\epsilon(x)-2}) = g(t,x) \quad \text{in} \quad Q \\ u^\epsilon = 0 \quad \text{on} \quad]0,t[\times\partial\Omega, \\ u^\epsilon(0,x) = u_0(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ is a bounded domain, Q denotes the cylinder $]0, T[\times\Omega$, $T > 0$ is given, $g \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ and $u_0 \in H^2(\Omega)$ are given functions. They studied the minimization problem for functionals in the limit of small ϵ and obtained the homogenized functional.

In this work we consider the following nonlinear PDE problem

$$\begin{cases} \frac{\partial u_s}{\partial t}(t) - \frac{\partial}{\partial x}\left(|\frac{\partial u_s}{\partial x}|^{p_s(x)-2}\frac{\partial u_s}{\partial x}\right) = B(u_s(t)), \quad t > 0 \\ u_s(0) = u_{0s}, \end{cases} \tag{0.1}$$

under Dirichlet homogeneous boundary conditions, where $u_{0s} \in H := L^2(I)$, $I := (c, d)$, $B : H \to H$ is a globally Lipschitz map with Lipschitz constant $L \geq 0$, $p_s(x) \in C^1(\bar{I})$, $p_s^- :=$ ess inf $p_s > 2$ $\forall$ $s \in \mathbb{N}$, and $p_s(\cdot) \to p$ in $L^\infty(I)$

*This work was partially supported by the Brazilian research agency FAPEMIG grant CEX-APQ-04098-10.
†Departamento de Matemática e Computação - Universidade Federal de Itajubá, 37500-903 - Itajubá - Minas Gerais - Brazil
‡Departamento de Matemática e Computação - Universidade Federal de Itajubá, 37500-903 - Itajubá - Minas Gerais - Brazil
§Departamento de Matemática - Universidade Estadual de Maringá, 87020-900 - Maringá - Paraná - Brazil

($p > 2$ constant) as $s \to \infty$. We observe that in the problem (0.1) the external forcing term B depends on the solution and the initial values are in the space $L^2(I)$ which is less regular that $H^2(I)$, i.e., $H^2(I) \subset L^2(I)$. We prove in this work the continuity of the flows and we prove upper semicontinuity of the family of global attractors $\{\mathcal{A}_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ as s goes to infinity.

References

[1] B. Amaziane, L. Pankratov, V. Prytula, Homogenization of $p_\epsilon(x)$-Laplacian in perforated domains with a nonlocal transmission condition, *C. R. Mécanique* 337 (2009) 173–178.

[2] B. Amaziane, L. Pankratov, A. Piatnitski, Nonlinear flow through double porosity media in variable exponent Sobolev spaces, *Nonlinear Analysis : Real World Applications* 10 (2009) 2521–2530.

[3] S.N. Antontsev, J.F. Rodrigues, On stationary thermo-rheological viscous flows, *Annali dell'Università di Ferrara* 52 (2006) 19–36.

[4] S.N. Antontsev, S. Shmarev, Anisotropic parabolic equations with variable nonlinearity, *Publications Mathematiques* 53 (2) (2009) 355–399.

[5] S.N. Antontsev, S. Shmarev, Blow-up of solutions to parabolic equations with nonstandard growth conditions, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 234 (2010) 2633–2645.

[6] S.N. Antontsev, S. Shmarev, Localization of solutions of anisotropic equations, *Nonlinear Analysis* 71 (2009) 725–737.

[7] S.N. Antontsev, S. Shmarev, Vanishing solutions of anisotropic parabolic equations with variable nonlinearity, *J. Math. Anal. Appl.* 361 (2010) 371–391.

[8] Y. Chen, S. Levine, M. Rao, Variable exponent, linear growth functionals in image restoration, *SIAM J. Appl. Math.* 66 (4) (2006) 1383–1406.

[9] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Růžička, *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents,* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2011.

[10] K. Rajagopal, M. Růžička, *Mathematical modelling of electrorheological fluids,* Contin. Mech. Thermodyn. 13 (2001) 59–78.

[11] M. Růžička, *Electrorheological fluids: Modeling and Mathematical Theory,* Lectures Notes in Mathematics, vol. 1748, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[12] J. Simsen, A Global attractor for a $p(x)$-Laplacian problem,*Nonlinear Analysis.* 73 (2010) 3278–3283.

[13] J. Simsen, C.B. Gentile, On attractors for multivalued semigroups defined by generalized semiflows, *Set-Valued Anal.* 16 (1) (2008) 105–124.

[14] J. Simsen, C.B. Gentile, On p-laplacian differential inclusions - Global existence, compactness properties and asymptotic behavior,*Nonlinear Analysis* 71 (2009) 3488–3500.

[15] J. Simsen, C.B. Gentile, Systems of p-laplacian differential inclusions with large diffusion, *J. Math. Anal. Appl.* 368 (2010) 525–537.

[16] J. Simsen, C.B. Gentile, Well-posed p-laplacian problems with large diffusion, *Nonlinear Analysis* 71 (2009) 4609–4617.

[17] J. Simsen, M.S. Simsen, Existence and upper semicontinuity of global attractors for $p(x)$-Laplacian systems,*J. Math. Anal. Appl.* 388 (2012) 23–38.

[18] J. Simsen, M.S. Simsen, On $p(x)$-Laplacian parabolic problems, *Nonlinear Stud.* 18 (3) (2011) 393–403.

[19] J. Simsen, M.S. Simsen, PDE and ODE Limit Problems for $p(x)$-Laplacian Parabolic Equations,*J. Math. Anal. Appl.* 383 (2011) 71–81.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

LOWER BOUNDS ON BLOW UP SOLUTIONS OF THE THREE-DIMENSIONAL NAVIER-STOKES EQUATIONS

JAMES C. ROBINSON* & WITOLD SADOWSKI† & RICARDO P. SILVA‡

Abstract

Suppose that $u(t)$ is a solution of the three-dimensional Navier–Stokes equations, either on the whole space or with periodic boundary conditions, that has a singularity at time T. In this work we show that the norm of $u(T-t)$ in the homogeneous Sobolev space $\dot{H}^s$ must be bounded below by $c_s t^{-(2s-1)/4}$ for $1/2 < s < 5/2$ $(s \neq 3/2)$, where c_s is an absolute constant depending only on s; and by $c_s \|u_0\|_{L^2}^{(5-2s)/5} t^{-2s/5}$ for $s > 5/2$.

This paper concerns local existence times and lower bounds on putative blow-up solutions for the three-dimensional incompressible Navier–Stokes equations

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0, \qquad \nabla \cdot u = 0,$$

posed either on $\mathbb{R}^3$ or on a periodic cube $Q = [0, 2\pi]^3$ with $\displaystyle\int_Q u = 0$.

In his seminal paper on the three-dimensional Navier–Stokes equations, [6] showed that if a smooth solution loses regularity at time T then necessarily the $\dot{H}^1$-norm must blow up with the lower bound

$$\|u(T-t)\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)} \geq c_1 t^{-1/4}.$$

He also gave (without proof) lower bounds for such 'blowing up' solutions in the Lebesgue spaces, namely

$$\|u(T-t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \geq \kappa_p t^{-(p-3)/2p} \qquad 3 < p < \infty;$$

proofs of this lower bound have been given by [5] using the semigroup approach and [10] using elementary energy estimates. If one combines this L^p blowup with the Sobolev embedding $\dot{H}^s(\mathbb{R}^3) \subset L^{6/(3-2s)}(\mathbb{R}^3)$ then one can deduce that

$$\|u(T-t)\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)} \geq c_s t^{-(2s-1)/4} \tag{1.1}$$

for any $1/2 < s < 3/2$. These are all examples of 'optimal' blowup rates, having the 'correct' rate of blowup with respect to the scaling of the various norms under the transformation $u(x,t) \mapsto \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)$ which maps any solution of the Navier–Stokes equations to another solution; under rescaling $\|u\|_{\dot{H}^s} \sim \lambda^{s-(1/2)}$ and $t \sim \lambda^{-2}$. We extend the lower bound in (1.1) to cover $3/2 < s < 5/2$, and give an argument which shows that this rate of blowup also occurs in the case of periodic boundary conditions.

Recently, [1] investigated lower bounds on blowup solutions in $\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ for $s > 5/2$, and obtained the result

$$\|u(T-t)\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)} \geq \gamma_s \|u(T-t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1-(2s/3)} t^{-s/3}.$$

In this work we obtain an improved lower bound for this range of s, namely

$$\|u(T-t)\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)} \geq c_s \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{(5-2s)/5} t^{-2s/5}. \tag{1.2}$$

Note that these both respect the rescaling of solutions, but the new lower bound is asymptotically greater than the first.

*University of Warwick, UK, e-mail: j.c.robinson@warwick.ac.uk
†Warsaw University, Poland, e-mail: W.Sadowski@mimuw.edu.pl
‡IGCE, UNESP - Rio Claro, Brasil, e-mail: rpsilva@rc.unesp.br, partially supported by FAPESP n^0 2012/06753 − 8

References

[1] Benameur, J. (2010) *On the blow-up criterion of 3D Navier–Stokes equations. J. Math. Anal. Appl.* **371**, 719–727.

[2] Cannone, M. (2003) *Harmonic analysis tools for solving the incompressible Navier-Stokes equations*, in: Friedlander, S. & Serre, D. (eds.) *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics, vol 3*, Elsevier.

[3] Constantin, P. & Foias, C. (1988) *Navier–Stokes equations.* University of Chicago Press, Chicago.

[4] Fujita, H. & Kato, T. (1964) *On the Navier–Stokes initial value problem. I. Arch. Rational Mech. Anal.* **16**, 269–315.

[5] Giga, Y. (1986) *Solutions for semilinear parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system. J. Differential Equations* **62**, 182–212.

[6] Leray, J. (1934) *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. Acta Math.* **63**, 193–248.

[7] Majda, A.J. & Bertozzi, A.L. (2002) *Vorticity and incompressible flow.* Cambridge Texts in Applied Mathematics, 27. Cambridge University Press, Cambridge, 2002

[8] Marín-Rubio, P., Robinson, J.C., & Sadowski, W. (2011) *Solutions of the 3D Navier–Stokes equations for initial data in $H^{1/2}$: robustness of regularity and numerical verification of regularity for bounded sets of initial data in H^1.* Submitted.

[9] Necas, J., Ružicka, M., & Šerák, V. (1996) *On Leray's self-similar solutions of the Navier–Stokes equations. Acta Math.* **176**, 283–294.

[10] Robinson, J.C. & Sadowski, W. (2012) *An elementary proof of local existence in L^3 for the three-dimensional Navier–Stokes equations.* Submitted.

[11] Robinson, J.C. & Sadowski, W. & Silva, R.P. (2012) *Lower bounds on blow up solutions of the three-dimensional Navier–Stokes equations in homogeneous Sobolev spaces.* Submitted

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

MULTIPLE COHEN STRONGLY p-SUMMING OPERATORS, IDEALS, COHERENCE AND COMPATIBILITY

JAMILSON R. CAMPOS*

Considering the successful theory of multiple summing multilinear operators as a prototype, we introduce the classes of multiple Cohen strongly p-summing multilinear operators and polynomials. The adequacy of these classes under the viewpoint of the theory of multilinear and polynomial ideals is also discussed.

1 Mathematical Results

J. S. Cohen [5] introduced the class of strongly p-summing linear operators motivated by the fact that the class of absolutely p-summing linear operators is not closed under conjugation. A. Pietsch ([7], page 338) shows that the identity operator from l_1 to l_2 is absolutely 2-summing but its conjugate, from l_2 to l_∞, is not absolutely 2-summing. In his work Cohen shows that the class of strongly p-summing operators characterizes the conjugates of absolutely p^*-summing operators, with $1/p + 1/p^* = 1$.

In the context of the theory of operator ideals ([8]), it is a natural question whether the class of Cohen (linear) operators forms a complete ideal and also how to generalize this class to multi-ideals and polynomial ideals without loosing the essence of the original ideal. We mention [2], [4] and [6] as attempts to establish general criteria that the ideals should possess to preserve properties of the linear ideal.

We introduce the definition of multiple Cohen strongly p-summing operators in terms of sequences and next prove its characterizations by inequalities.

Let us denote by $l_p(E)$ the space of absolutely p-summing sequences in a Banach space E, that is, sequences which $\sum_{i=1}^{\infty} ||x_i||^p < \infty$ and by $l_p^w(E)$ the space of sequences in E which $(\varphi(x_i))_{i=1}^{\infty} \in l_p$ for all $\varphi \in E'$. We also denote by $l_p\langle E\rangle$ the space of sequences Cohen strongly p-summing in E, that is, sequences which $\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(x_i)| < \infty$, for all $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in l_{p^*}^w(E')$, with $1/p + 1/p^* = 1$.

Definition 1.1. *Let $1 < p \leq \infty$ and E_i, F be Banach spaces, $i = 1, ..., n$, with $1/p + 1/p^* = 1$. A continuous n-linear operator T is multiple Cohen strongly p-summing if*

$$\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, ..., x_{j_n}^{(n)}\right)\right)_{j_1,...,j_n \in \mathbb{N}} \in l_p\langle F\rangle \ , \text{ for any } \left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_p(E_i) \ , \ i = 1, ..., n.$$

The class of all multiple Cohen strongly p-summing multilinear operators is a subspace of $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$, space of all continuous n-linear operators, and will be denoted by $\mathcal{L}_{mCoh,p}(E_1, ..., E_n; F)$.

Proposition 1.1. *For $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ and $1/p + 1/p^* = 1$, the following statements are equivalent:*

(i) T is multiple Cohen strongly p-summing;

(ii) there is a $C > 0$ such that

$$\sum_{j_1,...,j_n=1}^{\infty} \left|\varphi_{j_1,...,j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)}, ..., x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right| \leq C \left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_p \cdots \left\|\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_p \left\|(\varphi_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n \in \mathbb{N}}\right\|_{w,p^*} ,$$

for any $(\varphi_{j_1,...,j_n})_{j_1,...,j_n \in \mathbb{N}} \in l_{p^*}^w(F')$ and $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_p(E_i)$, $i = 1, ..., n$;

*Universidade Federal da Paraíba - Campus IV , UFPB, PB, Brasil, jamilson@dce.ufpb.br

(iii) there is a $C > 0$ such that

$$\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m} \left|\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\left(T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right)\right| \le C \left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_p \cdots \left\|\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_p \left\|\left(\varphi_{j_1,\ldots,j_n}\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m}\right\|_{w,p^*} ,$$

for all $m \in \mathbb{N},\ \varphi_{j_1,\ldots,j_n} \in F^{'}$ *and* $x_j^{(i)} \in E_i,\ i = 1,\ldots,n,\ j_i = 1,\ldots,m,\quad j = 1,\ldots,m.$

In addition, the smallest of the constants C satisfying (1.1), denoted by $||T||_{mCoh,p}$, defines a norm in $\mathcal{L}_{mCoh,p}(E_1,\ldots,E_n;F)$.

The following result shows that the definition of multiple Cohen strongly p-summing operator englobes the concept of Cohen strongly p-summing operators.

Proposition 1.2. *Every Cohen strongly p-summing multilinear operator is multiple Cohen strongly p-summing and $||\cdot||_{mCoh,p} \le ||\cdot||_{Coh,p}$.*

The paper [3] shows that the classes of Cohen strongly p-summing linear operators (as defined in [5]) and Cohen strongly p-summing multilinear operators and polynomials (as defined in [1]) form complete normed ideals. The same occurs with the multiple Cohen strongly p-summing multilinear operators:

Theorem 1.1. *Let $n \in \mathbb{N}$. Then $\mathcal{L}_{mCoh,p}^n$ is a complete normed ideal of n-linear operators.*

Definition 1.2. *The class of multiple Cohen strongly p-summing n-homogeneous polynomials is the class*

$$\mathcal{P}_{mCoh,p}^n := \left\{P \in \mathcal{P}^n; \check{P} \in \mathcal{L}_{mCoh,p}^n\right\} .$$

Furthermore, with the norm given by

$$||P||_{\mathcal{P}_{mCoh,p}} := ||\check{P}||_{mCoh,p} ,$$

we obtain a (complete) ideal generated by the ideal $\mathcal{L}_{mCoh,p}$.

It is also presented in the paper [3] a proof that the ideals of polynomials and multilinear Cohen strongly p-summing operators are coherent and compatible, according Pellegrino and Ribeiro [6], with the ideal of Cohen strongly p-summing linear operators. We show the analogous result for the multiple Cohen strongly p-summing multilinear operators and polynomials:

Theorem 1.2. *The sequence $(\mathcal{P}_{mCoh,p}^n, \mathcal{L}_{mCoh,p}^n)_{n=1}^{\infty}$ is coherent and compatible with the ideal $\mathcal{D}_p$ of Cohen strongly p-summing linear operators.*

References

[1] ACHOUR, D. AND MEZRAG, L. - *On the Cohen strongly p-summing multilinear operators*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **327**, 550-563, 2007.

[2] BOTELHO, G. , BRAUNSS, H.-A. , JUNEK, H. AND PELLEGRINO, D. - *Holomorphy types and ideals of multilinear mappings*, Studia Mathematica, **177**, 43-65, 2006.

[3] CAMPOS, J. R. - *Multiple Cohen strongly p-summing operators, ideals, coherence and compatibility*, arXiv:1207.6664v2 [math.FA].

[4] CARANDO, D., DIMANT, V. AND MURO, S. - *Coherent sequences of polinomial ideals on Banach spaces*, Math. Nachr. **282**, 1111-1133, 2009.

[5] COHEN, J. S. - *Absolutely p-summing, p-nuclear operators and their conjugates*, Math. Ann., **201**, 177-200, 1973.

[6] PELLEGRINO, D. AND RIBEIRO, J. O. - *On multi-ideals and polynomial ideals of Banach spaces: a new approach to coherence and compatibility*, arXiv:1101.1992v3 [math.FA].

[7] PIETSCH, A. - *Absolut p-summierende abbildungen in normiertn rumen*, Studia Math., **28**, 333-353, 1967.

[8] PIETSCH, A. - *Operator Ideals*, North-Holland Holland Math. Library, Amsterdam, 1980.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

UMA VERSÃO DO TEOREMA DAS FUNÇÕES IMPLÍCITAS PARA VARIEDADES ALGÉBRICAS REAIS

JEAN F. BARROS *

Neste trabalho, nós apresentamos uma versão não-diferenciável do Teorema das Funções Implícitas para variedades algébricas reais, cuja demonstração é uma aplicação da Regra de Sinais de Descartes, via Transformações de Möbius, e sob a inspiração do Teorema de Vincent.

Pela versão clássica do Teorema das Funções Implícitas (TFI), dada uma função $P : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é um conjunto aberto, que supomos de classe $\mathcal{C}^k$, para $k \geq 1$, e que, para $(x_0, t_0) \in U$,

$$P(x_0, t_0) = 0 \;\; e \;\; \frac{\partial P}{\partial t}(x_0, t_0) \neq 0,$$

segue-se que existe um aberto $V \times I \subset U$, com $(x_0, t_0) \in V \times I$, tal que $P^{-1}(0) \cap (V \times I)$ é o gráfico de uma função real $f : V \longrightarrow I$ de classe $\mathcal{C}^k$. Isto é, $P(x, t) = 0$ define implicitamente uma função em $V \times I$. Agora, para $P \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, nós chegamos a mesma conclusão da versão clássica, sem usarmos condições de diferenciabilidade. É isto que nós consideramos como uma versão não-diferenciável do TFI. Diferentemente da versão clássica, esta versão tem um caráter global. De fato, sob as condições mencionadas, o que se tem na versão clássica é que a equação $P(x, t) = 0$ define o gráfico de uma função numa vizinhança do ponto (x_0, t_0), sem que se tenha explicitamente uma tal vizinhança. Conforme a versão que propomos, para um certo retângulo n-dimensional, que é o de interesse para o problema, pode-se demonstrar que a equação $P(x, t) = 0$ define o gráfico de uma função neste retângulo. É claro que, sob certas condições de diferenciabilidade, por exemplo, se soubermos que uma das funções derivadas parciais de P no retângulo considerado não se anula, a versão mencionada permite concluir que a função dada implicitamente pela equação $P(x, t) = 0$ é uma função analítica.

O método que utilizamos na demonstração da nossa versão é inspirado em Vincent [4]. O Teorema de Vincent proporciona um método para a separação dos zeros de um polinômio em uma variável, como pode-se constatar em [1, 2, 3]. A versão que apresentamos é devida a Alesina e Galuzzi, como em [2].

Para o que se segue, considerando $\mathfrak{R} = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n)$, dado $P \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, denotamos por $P\big|_{\mathfrak{R}}$ o numerador da função racional $P \circ \phi$, onde $\phi : (0, +\infty)^n \longrightarrow \mathfrak{R}$ é definida por

$$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Big(\frac{a_1 x_1 + b_1}{x_1 + 1}, \frac{a_2 x_2 + b_2}{x_2 + 1}, \ldots, \frac{a_n x_n + b_n}{x_n + 1}\Big).$$

Além disso, dado um polinômio $P \in \mathbb{R}[x]$, considerando a sequência dos seus coeficientes, em ordem decrescente ou crescente dos graus dos monômios, denotamos por $V(P)$ o número de variações de sinal desta sequência.

Teorema 0.1. *(Vincent-Alesina-Galuzzi) Sejam $P \in \mathbb{R}[x]$, de grau $n > 1$ e sem raízes múltiplas, e $\Delta > 0$ a menor distância entre quaisquer dois zeros de P. Considere $\frac{p_k}{q_k}$ como o k-ésimo convergente da fração contínua*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}},$$

onde $a_i \in \mathbb{Z}$ é tal que $a_i > 0$, para cada $i \geq 1$, e $a_0 \geq 0$. Se h é tal que

$$F_{h-1} F_h \Delta > \frac{2}{\sqrt{3}},$$

*Departamento de Ciências Exatas (DEXA), UEFS, BA, Brasil, jfb@uefs.br

onde F_k *é o k-ésimo termo da sequência de Fibonacci* $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$, *então* $V\big(P|_{(a,b)}\big) \leq 1$, *onde* $a = \frac{p_{h-1}}{q_{h-1}}$ *e* $b = \frac{p_h}{q_h}$.

Oportunamente, apresentamos um enunciado da Regra de Sinais de Descartes, como vemos em [5], onde $Z(P)$ representa o número de zeros positivos de P, contados com multiplicidades.

Teorema 0.2. *(Regra de Sinais de Descartes) Seja* $P(x) := a_n x^{b_n} + \ldots + a_1 x^{b_1} + a_0 x^{b_0}$ *um polinômio real cujos coeficientes são não nulos, onde* $b_i \in \mathbb{Z}$, *para* $i = 0, 1, \ldots, n$, *são tais que* $0 \leq b_0 < b_1 < \ldots < b_n$. *Então,*

$$Z(P) \leq V(P) \text{ e } V(P) \equiv_2 Z(P),$$

isto é, $V(P)$ *e* $Z(P)$ *têm a mesma paridade.*

1 Uma versão não-diferenciável do Teorema das Funções Implícitas

A seguir, vemos a versão não-diferenciável do TFI.

Teorema 1.1. *Seja* $P \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. *Considerando*

$$\Phi = P\Big|_{(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\ldots\times(a_n,b_n)},$$

tem-se que se $\mathrm{V}(\Phi(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, w)) = 1$, *para cada* $(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) \in (0, \infty)^{n-1}$, *então* $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ *define implicitamente uma função*

$$f : (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_{n-1}, b_{n-1}) \longrightarrow (a_n, b_n).$$

Além disso, se existem $\alpha, \beta \in (a_n, b_n)$ *tais que*

$$f((a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_{n-1}, b_{n-1})) \subset [\alpha, \beta],$$

então f *é contínua. Ademais, se*

$$\mathrm{V}\Big(\frac{\partial P}{\partial x_n}\big|_{(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\ldots\times(a_n,b_n)}\Big) = 0,$$

então f *é analítica.*

Confirmando o que mencionamos acima, o que torna esta versão tão significativa é o seu caráter global, possibilitando-nos determinar em que região a pré-imagem de zero, $P^{-1}(0)$, é o gráfico de uma função. É claro que de antemão, quando vamos aplicá-la, já temos a região que pretendemos examinar.

Referências

[1] AKRITAS, A. G. - *Vincent's forgotten theorem, its extension and application*, Comp. & Maths. with Appls. 7 (1981) 309-317.

[2] ALESINA, A. AND GALUZZI, M. - *A new proof of Vincent's theorem*, L'Enseignement Matématique, t. 44 (1998) 219-256.

[3] USPENSKY, J. V. - *Theory of Equations, McGraw-Hill*, New York, 1948.

[4] VINCENT, A. J. H. - *Sur la résolution des equations numériques*, Mémories de La Société Royale de Lille (1834) 1-34. Also in J. Math. Pures Appl. 1 (1836) 341-372.

[5] WANG, X. - *A simple proof of Descartes's rule of signs*, The American Mathematical Monthly 111 (2004) 525-526.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

VIBRATIONS OF BEAMS WITH NONLINEAR DISSIPATIONS: EXISTENCE, UNIQUENESS AND DECAY

J. L. G. DE ARAUJO[1], IVO F. LOPEZ[1], L. A. MEDEIROS[1], M. MILLA MIRANDA[2]

This paper is motivated by the physical problem of torsion or by displacement of a mass. The mathematical model for this physical problem is the following

$$\left| \begin{array}{l} u'' - \Delta u + a(x)|u|^{\sigma}|u| + b(x)|u'|^{\lambda}u' = 0, \text{ in } Q; \\ u = 0, \text{ on } \Sigma_0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x)u'' + h(x,u') = 0, \text{ on } \Sigma_1; \\ u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \text{ in } \Omega. \end{array} \right. \tag{1}$$

Observe that Ω is an open, non empty regular bounded subset of $\mathbb{R}^n$, whose boundary $\partial\Omega$ is decomposed in Γ_0 and Γ_1 in a special way. By Q we denote the cylinder $\Omega \times (0,\infty)$. The lateral boundary of Q is represented by Σ, decomposed in Σ_0 and Σ_1.

The objective of this communication is to prove existence, uniqueness and assymptotic behavior of the "energy" for the weak solution of (1) with convenient conditions on a, b, α, h, u^0 and u^1.

We introduce the following hypotheses:

$$\text{(H1)} \left| \begin{array}{l} a, b \in L^{\infty}(\Omega) \text{ and } \alpha \in L^{\infty}(\Gamma_1) \text{ such that} \\ a(x) \geq 0, \quad b(x) \geq 0 \text{ a.e. } x \in \Omega \text{ and } \alpha(x) \geq 0 \text{ a.e. } x \in \Gamma_1; \end{array} \right.$$

$$\text{(H2)} \left| \begin{array}{l} h \in C^0(\mathbb{R}, L^{\infty}(\Gamma_1)), \\ h(x,0) = 0 \quad \text{ a.e. } x \in \Gamma_1; \\ \left[h(x,s) - h(x,r)\right](s-r) \geq d(s-r)^2, \quad \forall s,r \in \mathbb{R}, \quad \text{ a.e. } x \in \Gamma_1 \\ (d \text{ a positive constant}). \end{array} \right.$$

(H3) σ , $\lambda \in \mathbb{R}$ satisty:

$$\left| \begin{array}{ll} \dfrac{1}{n} < \sigma \leq \dfrac{2}{n-2} & \text{if } n \geq 3; \\ \sigma > \dfrac{1}{n} & \text{if } n = 1,2; \end{array} \right. \quad \text{and} \quad \left| \begin{array}{ll} 0 \leq \lambda \leq \dfrac{2}{n-2} & \text{if } n \geq 3; \\ \lambda \geq 0 & \text{if } n = 1,2; \end{array} \right.$$

(H4) $u^0 \in D(-\Delta)$ and $u^1 \in H_0^1(\Omega)$

The main results obtained are

Theorem 1. *Assume hypotheses (H1)-(H4). Then there exists a function u in the class*

$$\begin{array}{l} u \in L^{\infty}(0,\infty,V), \\ u' \in L^{\infty}(0,\infty,L^2(\Omega)) \cap L^{\infty}_{loc}(0,\infty,V), \\ u'' \in L^{\infty}_{loc}(0,\infty,L^2(\Omega)), \\ \alpha^{1/2}u' \in L^{\infty}(0,\infty,L^2(\Gamma_1)), \\ u' \in L^{\infty}(0,\infty,L^2(\Gamma_1)), \\ \alpha^{1/2}u'' \in L^{\infty}_{loc}(0,\infty,L^2(\Gamma_1)), \\ u'' \in L^{\infty}_{loc}(0,\infty,L^2(\Gamma_1)), \end{array} \tag{2}$$

[1]IM - Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Rio de Janeiro, Brasil
[2]DM - Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), Campina Grande, Paraí, Brasil

and u *verifies*

$$\begin{aligned}
&u'' - \Delta u + a|u|^{\sigma} u + b|u'|^{\lambda} u' = 0 \ \text{in} \ L^2_{loc}(0, \infty, L^2(\Omega)), \\
&\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u'' + h(\cdot, u') = 0 \ \text{in} \ L^1_{loc}(0, \infty, L^1(\Gamma_1)), \\
&u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1.
\end{aligned} \tag{3}$$

Theorem 2. *With the above conditions and* $b(x) \geqslant b_0 > 0$*, a.e. in* Ω*, we have that there exist positive constants* M *and* β *such that the energy*

$$E(t) = \int_\Omega u_t^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{2}{\sigma + 2} \int_\Omega a(x)|u|^{\sigma+2} dx + \int_{\Gamma_1} \alpha(x) u_t^2 d\Gamma,$$

satisfies

$$E(t) \leqslant M(1+t)^{-\beta}, \quad \forall t \geqslant 0.$$

References

[1] F. D. Araruna - A. B. Maciel, *Existence and boundary stabilization of the semilinear wave equation*, Nonlinear Analysis, 67 (2007), p. 1288-1305.

[2] J. L. G. Araujo, M. Milla Miranda and L. A. Medeiros, *Vibrations of beams by torsion or impact*, Mat. Contemporanea, 36 (2009), p. 29-50.

[3] M. M. Cavalcanti, V. N. Cavalcanti, P. Martinez, *Existence and decay rate estimates for the wave equation with nonlinear boundary damping source term*, J. Differential Equations, 203 (2004), p. 119-158

[4] M. M. Cavalcanti, N. A. Larkin, J. A. Soriano, *On solvability and stability of nonlinear degenerate hyperbolic equations with boundary damping*, Funkcal. Ekvac, 41 (2) (1999), p. 271-289.

[5] J.-L. Lions, *Problemes aux Limites dans les Equations aux Derives Partielles*, Oeuvres Choisies de Jacques-Louis Lions, VI, EDP Sciences (2003), p. 431-588, Paris, France.

[6] A. I. Louredo, M. Milla Miranda, *Nonlinear boundary dissipation for a coupled system of Klein-Gordon equations*, Electronic J. Differential Equations, 120 (2010) .

[7] N. Mitsuhiro, *Asymptotic Stability of the Bounded or Almost Periodic Solution of the Wave Equation with Nonlinear Dissipative Term*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 58 (1977), p. 336-343.

[8] N. Mitsuhiro, *Decay of Solutions of the Wave Equation with a Local Nonlinear Dissipation*, Math. Ann., 305 (1996), p. 403-417.

Ufologia nos espaços de Banach

JESUS CASTILLO [*] & VALENTIN FERENCZI [†] & YOLANDA MORENO [‡]

Espaços Uniformemente Finitamente Extensíveis (ou UFOs) são espaços onde cada operator t definido num subespaço de dimensão finita de X extende-se a um operador T definido em X, com $\|T\| \leq \lambda\|t\|$, onde λ é uma constante uniforme. Essa noção está relacionada com o Problema do Espaço Automorfo de Lindenstrauss e Rosenthal. Mostra-se que espaços UFOs têm a Propriedade de Aproximação, e que a propriedade UFO é equivalente à propriedade compactamente extensível: cada operador compacto definido num subespaço de X extende-se a um operador em X.

1 Introdução

Na teoria clássica dos espaços de Banach, um espaço X é *automorfo* se qualquer mergulho isomorfo de um subespaço de X em X pode ser extendido em um automorfismo de X (sendo respeitadas condições evidentes de codimensão). O maior problema aberto nessa área é de saber se c_0 e ℓ_2 são os únicos espaços automorfos separáveis, ver por exemplo [3].

Problema 1.1 (Lindenstrauss-Rosenthal)**.** *Seja X um espaço de Banach automorfo separável. X deve ser isomorfo a c_0 ou ℓ_2?*

Um espaço é chamado de *extensível* se qualquer operador definido de um subespaço de X em X pode ser extendido a um operador definido em X. Ele é *compactamente extensível* se qualquer operador compacto definido de um subespaço de X em X pode ser extendido a um operador definido em X.

Y. Moreno e A. Plichko [4] também consideram a noção de espaço *Uniformemente Finitamente Extensível (ou UFO).*

Definição 1.1. *Um espaço X é Uniformemente Finitamente Extensível (ou UFO) se existe $\lambda \geq 1$ tal que todo operator t definido num subespaço de dimensão finita de X extende-se a um operador T definido em X, com $\|T\| \leq \lambda\|t\|$.*

Segue dos trabalhos de Moreno-Plichko [4] que

Teorema 1.1 (Moreno-Plichko)**.** *Automorfo $\Rightarrow$ Extensível $\Rightarrow$ Compactamente Extensível $\Rightarrow$ UFO.*

Castillo e Plichko mostram que espaços UFOs são ou (A) $\mathcal{L}_\infty$ (ou seja, localmente próximos de c_0, como por exemplo os espaços $C(K)$), ou (B) quase-hilbertianos (ou seja, localmente próximos de ℓ_2, como por exemplo o 2-convexificado do espaço de Tsirelson). Reciprocamente espaços $\mathcal{L}_\infty$ já foram estudados nos anos 80 e é bem conhecido que são UFOs, ver [5]. Não se sabe se UFOs quase-hilbertianos devem ser hilbertianos.

[*]Departamento de Matemáticas , Universidad de Extremadura, Espanha, castillo@unex.es
[†]Instituto de Matemática e Estatística , USP, São Paulo, Brasil, ferenczi@ime.usp.br
[‡]Departamento de Matemática, Universidad de Extremadura, Espanha, e-mail: ymoreno@unex.es

2 Resultados

Nesse trabalho, são provados dois resultados sobre espaços UFOs.

Teorema 2.1. *Qualquer espaço UFO tem a Propriedade de Aproximação Uniforme.*

Como consequência, a propriedade UFO e a propriedade compactamente extensível são equivalentes:

Teorema 2.2. *Seja X um espaço de Banach. São equivalentes:*

1. *X é UFO,*
2. *existe $\lambda \geq 1$ tal que qualquer operador t definido num subespaço de dimensão finita de X extende-se a um operador T definido em X, de posto finito, com $\|T\| \leq \lambda\|t\|$,*
3. *existe $\lambda \geq 1$ tal que qualquer operador t de posto finito, definido num subespaço de X, extende-se a um operador T definido em X, de posto finito, com $\|T\| \leq \lambda\|t\|$,*
4. *X é compactamente extensível,*
5. *X é uniformemente compactamente extensível, ou seja existe $\lambda \geq 1$, tal que qualquer operador compacto t, definido num subespaço de X, extende-se a um operador T definido em X, com $\|T\| \leq \lambda\|t\|$.*
6. *qualquer operador compacto, definido num subespaço de X, extende-se a um operador compacto definido em X,*
7. *existe $\lambda \geq 1$, tal que qualquer operador compacto t, definido num subespaço de X, extende-se a um operador compacto T definido em X, com $\|T\| \leq \lambda\|t\|$.*

Vale destacar algumas relações entre as constantes aparecendo nas propriedades acima. Por exemplo, se (1) vale para $\lambda \geq 1$, então (7) vale para $\lambda^2 + \epsilon$.

Referências

[1] CASTILLO, J.M., FERENCZI, V., AND MORENO, Y. - *On uniformly finitely extensible Banach spaces*, preprint 2012.

[2] CASTILLO, J.M., AND MORENO, Y. - *On the Lindenstrauss-Rosenthal theorem.*, Israel J. Math. 140 (2004) 253-270.

[3] CASTILLO, J.M, AND PLICHKO, A. - *Banach spaces in various positions*, J. Funct. Anal. 259 (2010) 2098-2138.

[4] MORENO, Y. AND PLICHKO, A. - *On automorphic Banach spaces*, Israel J. Math. 169 (2009) 2945.

[5] ZIPPIN, M. - *Extension of bounded linear operators*, in Handbook of the Geometry of Banach spaces vol 2 (W.B. Johnson and J. Lindenstrauss eds.), Elsevier, 2003; pp. 1703-1741.

ANÁLISE E SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO CRESCIMENTO DE UM TUMOR

J. A. J. AVILA* & G. LOZADA-CRUZ†

Crescimento de tumores são modelados por equações diferenciais parciais parabólicas. Os tumores avasculares invasivos, onde a divisão celular, morte e motilidade são as variáveis essenciais para o comportamento dinâmico da densidade celular e concentração de nutrientes, são governados pela equação de difusão-reação. Um estudo de auto-ondas para um tumor avascular invasivo, com resultados numéricos 1D, é encontrado em Kolobov *et al.* [1]. Na Figura 1 mostramos uma ilustração esquemática de um tumor avascular 2D com região necrótica no centro.

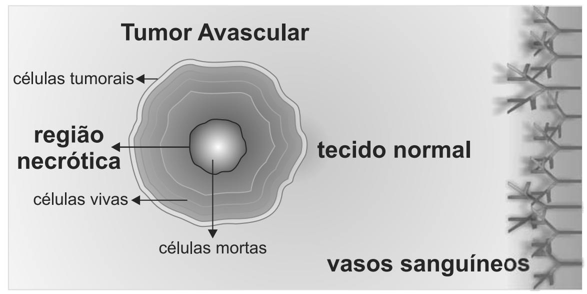

Figura 1. Ilustração de um tumor avascular 2D.

Este trabalho é a continuação de [1] e acrescenta análise matemático não linear: existência e unicidade da solução, e dependência contínua dos dados iniciais. Assim, como também, apresentam outros resultados numéricos.

1 O Modelo

Segundo [1] o modelo do crescimento de um tumor avascular invasivo 1D é governado pelo sistema de equações de difusão-reação.

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} &= D_a \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - P(s)a + Ba, \qquad -\infty < x < +\infty,\ t \geqslant 0 \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= D_s \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - qa, \qquad -\infty < x < +\infty,\ t \geqslant 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

com as condições de contorno

$$\begin{aligned} a = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \quad &: \quad \text{quando } x \to -\infty \\ a = 0, \quad s = 1 \quad &: \quad \text{quando } x \to +\infty, \end{aligned} \tag{1.2}$$

onde

$$\begin{aligned} a &= a(x,t) : \text{densidade celular (densidade de células tumorais vivas)} \\ s &= s(x,t) : \text{concentração de nutrientes} \end{aligned}$$

e os parâmetros são definidos por

D_a : Coeficiente de difusão de células tumorais
D_s : Coeficiente de difusão de oxigênio
B : Taxa de divisão de células vivas
P_m : Taxa máxima de células mortas
s_{crit} : Concentração de nutrientes crítico
ϵ : Desvio característico de s desde s_{crit}
q : Taxa de consumo de nutrientes das células tumorais vivas
$P(s)$: Taxa de células mortas. $P(s) = \frac{P_m}{2}\left[1 - \tanh(\frac{s - s_{\text{crit}}}{\epsilon})\right]$.

*Departamento de Matemática e Estatística , UFSJ, MG, Brasil, e-mail: avila_jaj@ufsj.edu.br
†Departamento de Matemática , IBILCE , UNESP, SP, Brasil, e-mail: german.lozada@sjrp.unesp.br

2 Análise

Consideremos o sistema (1.1) com os dados iniciais

$$a(x,0) = a_0(x) \geqslant 0, \quad s(x,0) = s_0(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Para $1 \leqslant p < \infty$ definamos o espaço de Banach X_p dado por

$$X_p = \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; u \text{ é limitada, uniformemente contínua e } u \in L^p(\mathbb{R})\}$$

A equação (1.1) junto com (2.3) pode ser escrita no espaço $X = X_p \times X_p$ como uma equação de evolução abstrata

$$u_t \;=\; Au + F(u)\,, \qquad u(0) = u_0 \tag{2.4}$$

onde $F : X \to X$ é uma função não linear dada por $F(u) = (-P(s)a, -qa)$, $u = (a,s)$, $u_0 = (a_0, s_0)$ e $A : D(A) \subset X \to X$, onde $D(A) = \{(a,s) \in X : a, s \in X_p^{(2)},\ (a, s_x) \to (0,0), x \to -\infty, \text{e } (a,s) \to (0,1), x \to +\infty\}$, e $Au = (D_a a_{xx} + Ba, D_s s_{xx})$. Da fórmula de variação de constantes segue que a solução de (2.4) é dada por

$$u(t) = e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A} F(u(\tau))d\tau,\ t \geqslant 0 \tag{2.5}$$

Definição 2.1. *Dizemos que $u : [0, +\infty) \to X$ é uma solução fraca de (2.4) se $u \in C([0,\infty), X)$ e satisfaz (2.5).*

Teorema 2.1. *Suponhamos que F é Lipschitz contínua globalmente. Então para todo $u_0 = (a_0, s_0) \in X$ o sistema (1.1)-(1.2) tem uma única solução fraca $u(x,t,u_0) = (a(x,t,u_0),\ s(x,t,u_0))$ para todo $t \geq 0$ com $u(\cdot, 0, u_0) = u_0$.*

3 Solução Numérica

Para encontrar uma solução numérica do sistema (1.1) e (1.2), usamos o clássico e incondicionalmente estável Método de Crank-Nicolson. O domínio $(-L, L)$ é discretizado com uma malha uniforme de $N = 1200$ elementos e $L = 2000$. Os tamanhos de passos espacial e temporal são, respectivamente, $h = 2L/N$ e $k = v_0 h/c$, onde $v_0 = 0,26$. A condições iniciais são dadas pela função gaussiana $a(x,0) = 0.1\, e^{-0.0025x^2}$ e a função constante $s(x,0) = 1$.

Nas Figuras 2 e 3 são mostradas, em 3D, o perfil de densidade das células tumorais vivas e o perfil da concentração de nutrientes, respectivamente, ao longo do tempo. Note que o estado estável do perfil das células tumorais vivas aproxima-se da solução tipo onda viajante.

4 Conclusão

Mostramos que o problema do crescimento de um tumor avascular invasivo é bem bem posto. Observamos nas simulações numéricas que o tumor cresce na direção onde existem os nutrientes, que eles são agressivos e invasivos desde o início até aproximadamente $t = 60$ (2 anos), imediatamente depois sofrem uma relaxação até atingir o estado estável, em aproximadamente $t = 200$ $(6,5$ anos).

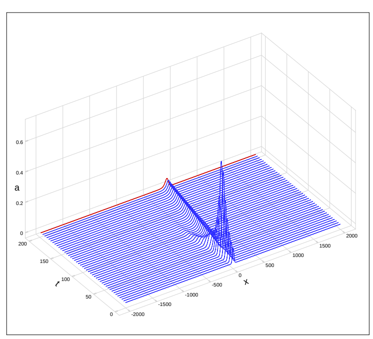

Figura 2. Perfil densidade de células vivas no tempo.

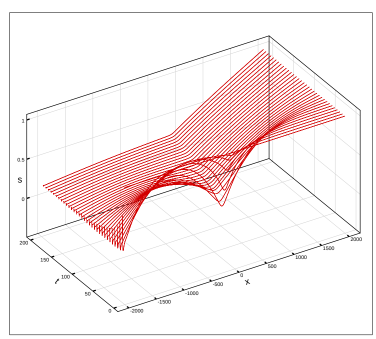

Figura 3. Perfil concentração de nutrientes no tempo.

Referências

[1] Kolobov, A.V.; Gubernov, V.V. and Polezhaev, A.A. - Autowaves in a model of invasive tumor growth. *Biophysics*, **54, no 2**, 232-237, 2009.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

ON HILBERT SPACE REPRODUCING PROPERTIES OF THE USUAL FOURIER TRANSFORM

JOSÉ C. FERREIRA* & VALDIR A. MENEGATTO†

We are mainly concerned with integral operators $\mathcal{K} : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ of the form

$$\mathcal{K}(f)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y)f(y)\,d\nu(y), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

which are positive in the sense that

$$\langle \mathcal{K}(f), f\rangle_{L^2} \geq 0, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

generated by a continuous kernel $K : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. This setting implies that the kernel K is positive definite in the usual sense, that is,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \overline{c_i} c_j K(x_i, x_j) \geq 0,$$

for all $n \geq 1$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$ and $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ ([2]). The reproducing kernel Hilbert space $\mathcal{H}_K$ of K is the Hilbert space containing $\{K^x := K(\cdot, x) : x \in \mathbb{R}^d\}$ as a dense subset with respect to the inner product given by the formula

$$\langle K^x, K^y\rangle_K := K(y,x), \quad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

The *reproducing property* in $\mathcal{H}_K$ is the relation

$$f(x) = \langle f, K^x\rangle_K, \quad f \in \mathcal{H}_K, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Among other things, this property ensures that $\mathcal{H}_K$ is composed of continuous functions only. The structure of the Hilbert space $\mathcal{H}_K$ itself and its relation to positive integral operators enter in the solution of many problems as one can ratify in [1, 5].

The Results

Let $\hat{f}$ denote the Fourier transform of $f \in L^2$ and write

$$\tilde{K}(u,v) := \hat{K}(u,-v), \quad u, v \in \mathbb{R}^d,$$

whenever K belongs to $L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. In addition, consider the integral operator $\tilde{\mathcal{K}}$ generated by $\tilde{K}$. We prove:

Teorema 0.1. *If K belongs to $L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ then it holds*

$$\widehat{\mathcal{K}(f)} = \tilde{\mathcal{K}}(\hat{f}), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

Proof. If $K \in L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, it is easily seen that $\mathcal{K}$ is compact and self-adjoint operator. Using its spectral decomposition

$$\mathcal{K}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})\langle f, \phi_n\rangle_2 \phi_n, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

*Instituto de Ciências Exatas , UNIFAL-MG, Alfenas, MG, Brasil, jose.ferreira@unifal-mg.edu.br
†ICMC-USP, SP, Brasil, e-mail: menegatt@icmc.usp.br

we can deduce that

$$\widehat{\mathcal{K}(f)} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})\langle \hat{f}, \hat{\phi_n}\rangle_2 \hat{\phi_n}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

The continuity of K enables us to use Mercer's theorem ([2, 3, 4]) to deduce that

$$K(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})\phi_n(x)\overline{\phi_n(y)}, \quad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

A simple calculation produces the formula

$$\hat{K}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})\hat{\phi_n}(x)\overline{\hat{\phi_n}(-y)}, \quad x, y \in \mathbb{R}^d \text{ a.e.},$$

and, consequently, $\widehat{\mathcal{K}(f)} = \tilde{\mathcal{K}}(\hat{f})$, $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. □

The second result in this note requires the notation $\kappa(x) = K(x,x)$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Teorema 0.2. *If $\kappa^{1/2}$ belongs to $L^1(\mathbb{R}^d)$ then*

$$\langle \mathcal{K}(f), g\rangle_K = \langle f, g\rangle_2 = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle_2 = \langle \tilde{\mathcal{K}}(\hat{f}), \hat{g}\rangle_{\tilde{K}}, \quad f \in L^2(X,\nu), \quad g \in \mathcal{H}_K.$$

Also,

$$\mathcal{H}_{\tilde{K}} = \{\hat{f} : f \in \mathcal{H}_K\}.$$

Proof. Results in [2] guarantee the reproducing property

$$\langle \mathcal{K}(f), g\rangle_K = \langle f, g\rangle_2, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad g \in \mathcal{H}_K.$$

In addition, if $f \in \mathcal{H}_K$, there exists $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ such that

$$f(x) = \mathcal{K}^{1/2}(g)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})^{1/2}\langle g, \phi_n\rangle_2 \phi_n(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

It follows that

$$\hat{f} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})^{1/2}\langle \hat{g}, \hat{\phi_n}\rangle_2 \hat{\phi_n} = \tilde{\mathcal{K}}^{1/2}(\hat{g})$$

and, consequently, $\hat{f} \in \mathcal{H}_{\tilde{K}}$. The remaining inclusion is due to the fact that the Fourier transform defines an isometric isomorphism from $L^2(\mathbb{R}^d)$ into itself. □

Acknowledgement: First author partially supported by FAPEMIG, Grant APQ-03911-10. Second one, by FAPESP, Grant 2010/19734-6.

References

[1] CUCKER, F.; SMALE, S. - On the mathematical foundations of learning, *Bull. Amer. Math. Soc. (New Series)* 39, no. 1, 1–49, 2001.

[2] FERREIRA, J. C.; MENEGATTO, V. A. - Reproducing kernel Hilbert spaces associated with kernels on topological spaces, *Funct. Anal. Appl.*, 46, no. 2, 152–154, 2012.

[3] — - Reproducing properties of differentiable Mercer-like kernels, *Math. Nach.*, 285, no. 8-9, 959–973, 2012.

[4] — - An extension of Mercer's theory to L^p, *Positivity*, 16, 197–212, 2012.

[5] SUN, H.; WU, Q. - Application of integral operator for regularized least-square regression, *Math. Comput. Modelling*, 49, 276–285, 2009.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

SHARP TRUDINGER-MOSER TYPE INEQUALITY FOR RADIAL OPERATORS

J.F DE OLIVEIRA* & J.M DO Ó†

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a smooth bounded domain and $W_0^{1,p}(\Omega)$ the Sobolev space endowed with the Dirichlet norm $\|\nabla u\|_p$. Investigating the Sobolev embedding in the limit case $p = n$, N. Trudinger [5] proved that there exists $\mu > 0$ such that $W_0^{1,n}(\Omega)$ is embedded in the Orlicz space $L_\phi(\Omega)$ determined by $\phi(t) = e^{\mu|t|^{n/(n-1)}} - 1$. This result was sharpened by J. Moser [4], who found the best exponent μ and proved the following result:

$$\sup_{u\in W_0^{1,n}(\Omega)\,:\,\|\nabla u\|_n=1} \int_\Omega e^{\mu|u|^{\frac{n}{n-1}}}\,\mathrm{d}x \quad \begin{cases} \le C_n|\Omega| & \text{if} \quad \mu \le \mu_n \\ = \infty & \text{if} \quad \mu > \mu_n, \end{cases} \tag{0.1}$$

where $\mu_n := n\omega_{n-1}^{1/(n-1)}$, $|\Omega|$ denotes the Lebesgue measure of a set Ω in $\mathbb{R}^n$ and ω_{n-1} is the measure of the unit sphere in $\mathbb{R}^n$. For works related with this class of estimates and applications, we refer to [3] and references therein.

We establish the analogous of Trudinger–Moser inequality associated to the following class of quasilinear elliptic operators (which includes in particular the $p-$Laplacian and $k-$Hessian) when considered acting in radial symmetric functions defined in a ball of $\mathbb{R}^n$ with Dirichlet boundary conditions:

$$Lu := r^{-\theta}\left(r^\alpha|u'(r)|^\beta u'(r)\right)' \quad \text{with} \quad u'(0) = u(R) = 0. \tag{0.2}$$

Furthermore, we prove the existence of extremal functions for the resulting Trudinger–Moser type inequality.

1 Mathematical Results

Let $R > 0$, $\alpha \ge 0$ and $\beta \ge 0$ be real numbers. If $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesque integrable and $I \subset \mathbb{R}$ Lebesgue measurable, we set $\int_I u(r)\,\mathrm{d}\lambda_\alpha = \omega_\alpha \int_I r^\alpha u(r)\,\mathrm{d}r$ for all $\alpha \ge 0$ where; for each real number $\ell \ge 1$ we set $\omega_{\ell-1} = 2\pi^{\frac{\ell}{2}}/\Gamma\left(\frac{\ell}{2}\right)$ and $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$. We define the Banach space X_R that consists $u \in AC(0,R]$ absolutely continuous function such that $u(R) = 0$ and $\| u \|_{X_R} := \left(\int_0^R |u'(r)|^{\beta+2}\mathrm{d}\lambda_\alpha\right)^{\frac{1}{\beta+2}} < \infty$. If $q \ge 1$ and $\theta \ge 0$, let $L^q_\theta = L^q_\theta(0,R)$ the space of Lebesgue measurable functions $u : (0,R) \to \mathbb{R}$ such that $\|u\|_{L^q_\theta} = \left(\int_0^R |u|^q\,\mathrm{d}\lambda_\theta\right)^{1/q} < \infty$. In the *the Sobolev case*, that is, $\alpha - \beta - 1 > 0$ the embedding $X_R \hookrightarrow L^q_\theta$ is continuous if $1 \le q \le q^*$ and compact if $q < q^*$, where $q^*_\beta := \frac{(\theta+1)(\beta+2)}{\alpha-\beta-1}$ is the Sobolev exponent for X_R spaces (cf. [2]). We investigate the *Trudinger-Moser case*:

$$\boxed{\alpha - \beta - 1 = 0} \tag{1.3}$$

In this case, we have the continuous embedding $X_R \hookrightarrow L^q_\theta,\ 1 \le q < \infty$, but one can see that $X_R \not\hookrightarrow L^\infty_\theta$. Instead, we prove that X_R is embedded in the weighted Orlicz space L_ϕ determined by $\phi(t) = e^{\mu t^{\frac{\beta+2}{\beta+1}}} - 1$. More precisely,

Theorem 1.1. *Let $\alpha \ge 1$, $\beta \ge 0$ be real numbers such that (1.3) holds. Then*

$$\sup_{u\in X_R\,:\,\|u\|_{X_R}\le 1} \int_0^R e^{\mu|u|^{\frac{\beta+2}{\beta+1}}}\,\mathrm{d}\lambda_\alpha \quad \begin{cases} \le C_\beta|B_R|_\alpha & \text{if} \quad \mu \le \mu_\beta := (\beta+2)\omega_{\beta+1}^{1/(\beta+1)} \\ = \infty & \text{if} \quad \mu > \mu_\beta, \quad |B_R|_\alpha = \int_0^R \mathrm{d}\lambda_\alpha. \end{cases} \tag{1.4}$$

*Capes and CNPq grant 141853/2012-3 DmatUFPE, PE, Brazil, e-mail: oliveira@dmat.ufpe.br
†Research partially supported by the National Institute of Science and Technology of Mathematics INCT-Mat, CAPES and CNPq grant 307400/2009 e-mail: jmbo@pq.cnpq.br

We also studied the question attainability for (1.4):

Theorem 1.2. *Let $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 0$ be real numbers satisfying (1.3). Then there exists extremals for (1.4) if $\mu \leq \mu_\beta$.*

We will give only a sketch of the proofs of our results. Previously, we can reduce our problems to analysis of the supremum

$$\sup_{w\in\mathcal{H}_1}\int_0^\infty e^{\frac{\mu}{\mu_\beta}|w|^{p/(p-1)}-t}\mathrm{d}t, \quad p=\beta+2 \tag{1.5}$$

where $\mathcal{H}_1$ is the set of $w \in C^1[0,\infty)$ with $w \geq 0$ and $\int_0^\infty |w'(t)|^p \mathrm{d}t \leq 1$. We focus on only the critical case $\mu = \mu_\beta$ in (1.5). Next, we use the psi-function defined by $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$, $x > 0$.

Lemma 1.1. *Let $a > 0$, $p \geq 2$ and $\delta > 0$. If $w \in C^1[a,\infty)$ with $w \geq 0$ and $\int_a^\infty |w'(t)|^p \mathrm{d}t \leq \delta$ then*

$$\int_a^\infty e^{w^q(t)-t}\mathrm{d}t \leq e^{w^q(a)-a}\frac{1}{1-\delta^{q/p}}\exp\left\{\frac{c^p\gamma_p q^{1-p}}{p}+\psi(p)-\psi(1)\right\}, \tag{1.6}$$

where $\gamma_p = \delta(1-\delta^{1/(p-1)})^{1-p}$, $c = qw^{q-1}(a)$ and $q = p/(p-1)$.

Proof of Theorem 1.1: Take $a \in [1,\infty)$, smallest point, such that $w^q(a) = a - 2\ln^+ a$. By Lemma 1.1

$$\int_a^\infty e^{w^q(t)-t}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{1-\delta^{1/(p-1)}}e^{K+\psi(p)-\psi(1)}, \quad \delta = \int_a^\infty |w'(t)|^p \mathrm{d}t \tag{1.7}$$

where

$$K = w^q(a)\left[1+\frac{1}{p-1}\frac{\delta}{(1-\delta^{1/(p-1)})^{p-1}}\right]-a.$$

Also, $w^q(a) = a - 2\ln^+ a$ implies $\delta \leq (p-1)\frac{2\ln^+ a}{a}$. Thus, since $e\ln a \leq a$ for all $a > 0$, we get

$$\frac{1}{1-\delta^{1/(p-1)}} \leq \frac{1}{1-{d_p}^{1/(p-1)}} \tag{1.8}$$

for some constant d_p depending only on p. On the other hand

$$K \leq \frac{(p-1)^q}{(1-\delta^{1/(p-1)})^{p-1}}\cdot a\left(\frac{2\ln^+ a}{a}\right)^q \tag{1.9}$$

and $g(x) = x\left(\frac{\ln x}{x}\right)^q$ is uniformly bounded in $[1,\infty)$. Therefore, (1.7), (1.8) and(1.9) imply $\int_a^\infty e^{w^q(t)-t}\mathrm{d}t \leq c_1$. This estimate and $\int_0^a e^{w^q(t)-t}\mathrm{d}t \leq 2$ completes the part of boundedness in (1.4). The optimality of μ_β is given by Moser's functions. $\square$

Proof of Theorem 1.2: Set $J(w) = \int_0^\infty e^{|w|^{p/(p-1)}-t}\mathrm{d}t$, $w \in \mathcal{H}_1$ and $\mathcal{I}_p := \sup_{w\in\mathcal{H}_1} J(w)$. We use the two-step strategy of L. Carleson and A. Chang [1]: In the step one, assuming has no extremal for the supreme in $\mathcal{I}_p$ and using the Lemma 1.1, we prove that $\mathcal{I}_p \leq 1 + e^{\psi(p)-\psi(1)}$. In the step two; for each $p \geq 2$, we find a function $f_p \in \mathcal{H}_1$ such that $J(f_p) > 1 + e^{\psi(p)-\psi(1)}$, which is a contraction. $\square$

References

[1] L. Carleson, S. Y. A. Chang, *On the existence of an extremal function for an inequality of J. Moser*, Bull. Sci. Math. **110** (1986), 113–127.

[2] P. Clément, D. G. de Figueiredo, E. Mitidieri, *Quasilinear elliptic equations with critical exponents*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **7** (1996), 133–170.

[3] D. G. de Figueiredo, J. M. do Ó, B. Ruf, *On an inequality by N. Trudinger and J. Moser and related elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **55** (2002), 135-152.

[4] J. Moser, *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Indiana Univ. Math. J. **20** (1970/71), 1077–1092.

[5] N. Trudinger, *On imbeddings into Orlicz spaces and some applications*, J. Math. Mech. **17** (1967), 473–483.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

EXPONENTIAL DECAY FOR THE KDV-BURGERS EQUATION WITH INDEFINITE DAMPING

JOSÉ H. RODRIGUES* & MARCELO M. CAVALCANTI†
VALÉRIA N. DOMINGOS CAVALCANTI‡ & VILMOS KOMORNIK§

In this work we consider a nonlinear KdV-Burguers equation in the presence of indefinite damping as presented below

$$u_t + u_{xxx} - u_{xx} + \lambda(x)u + uu_x = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}\times]0,\infty[, \tag{1}$$

where λ stands for a $L^\infty(\mathbb{R})$ function and with initial conditions

$$u(0) = u_0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}. \tag{2}$$

Some results on the well posedness and asymptotic stability for its solutions are established when assuming λ is a functions which may change sign.

1 Main Results

The main results which were established come in the sequel.

Theorem 1.1 (Global Well-Posedness)**.** *Let $\lambda \in L^\infty(\mathbb{R})$. Given any initial data $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, there exists a unique solution u of (1)-(2) in the class $C_{loc}(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R})) \cap C_{loc}(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}))$.*

Theorem 1.2 (Exponential Stability)**.** *Let $\lambda \in L^\infty(\mathbb{R})$ and $1 \leq p < \infty$. Suppose that there exists a positive constant λ_0 and a function $\lambda_1 \in L^p(\mathbb{R})$ such that*

$$\lambda(x) \geq \lambda_0 + \lambda_1(x), \text{ for almost every } x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

and

$$\|\lambda_1\|_p < \left(\frac{2\lambda_0}{c_p}\right)^{1-\frac{1}{2p}} \tag{4}$$

where $c_p = (2p-1)(2p)^{\frac{-2p}{2p-1}}$. Then, for any initial data $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, the respective solution u of (1)-(2) satisfies the following decay estimate:

$$\|u(t)\|_2 \leq \|u_0\|_2 \, e^{-\lambda_0' t} \tag{5}$$

where $\lambda_0' := \lambda_0 - \frac{c_p}{2} \|\lambda_1\|_p^{\frac{2p}{2p-1}}$.

*Departamento de matemática , UEM, PR, Brasil, e-mail: jh.rodrigues@ymail.com
†Departamento de matemática , UEM, PR, Brasil, e-mail: mmcavalcanti@uem.br
‡Departamento de matemática , UEM, PR, Brasil, e-mail: vndcavalcanti@uem.br
§Départment de mathmatique, Universit de Strasbourg, France, e-mail: vilmos.komornik@math.unistra.fr

References

[1] ROSIER, L., PAZOTO, A. F., *Uniform stabilization in weighted sobolev spaces for the KdV equation posed on the half-line* Discrete Contin. Dyn. Syst., Series B, v. 14 (2010), 1511–1535.

[2] MUÑOZ RIVERA, J. E., RACKE, R., *Exponential stability for wave equations with non-dissipative damping*, Nonlinear Anal., 68 (2008), no. 9, 2531–2551.

[3] KARCH, G., *Self-similar large time behavior of solutions to Korteweg-de Vries-Burgers equation*, Nonlinear Anal., 35 (1999), no. 2, Ser. A: Theory Methods, 199–219.

[4] ROSIER, L., PAZOTO, A. F., *Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 2 (1997), 33–55 (electronic).

[5] AMICK, C. J., BONA, J. L., SCHONBEK, M. E., *Decay of solutions of some nonlinear wave equations*, J. Differential Equations, 81 (1989), no. 1, 1–49.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

ESTABILIDADE ASSINTÓTICA PARA SISTEMAS DE BRESSE

JUAN A. SORIANO [*], WENDEN CHARLES[†] & RODRIGO A. SCHULZ[‡]

1 Introdução

No presente trabalho, estudamos a estabilidade assintótica para o sistema de Bresse com dissipação não linear:

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) + a(x)g_1(\varphi_t) = 0 \quad \text{em} \quad (0, L) \times (0, \infty), \tag{1.1}$$
$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + g_2(\psi_t) = 0 \quad \text{em} \quad (0, L) \times (0, \infty), \tag{1.2}$$
$$\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) + b(x)g_3(w_t) = 0 \quad \text{em} \ \times (0, L) \times (0, \infty), \tag{1.3}$$
$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = w(0, t) = w(L, t) = 0, t > 0 \tag{1.4}$$
$$\varphi(x, 0) = \varphi_0, \varphi_t(x, 0) = \varphi_1, \psi(x, 0) = \psi_0, \psi_t(x, 0) = \psi_1, w(x, 0) = w_0, w_t(x, 0) = w_1, x \in (0, L) \tag{1.5}$$

onde ρ_1, k, ρ_2, b, l e k_0 são constantes positivas.

O sistema de Bresse, também é conhecido como o problema do arco circular, é dada pelas seguintes equações:

$$\rho_1\varphi_{tt} = Q_x + lN + F_1, \tag{1.6}$$
$$\rho_2\psi_{tt} = M_x - Q + F_2, \tag{1.7}$$
$$\rho_1 w_{tt} = N_x - lQ + F_3, \tag{1.8}$$

onde

$$N = K_0(w_x - l\varphi), \qquad Q = k(\varphi_x + lw + \psi), \qquad \text{e} \quad M = b\psi_x. \tag{1.9}$$

Usamos N, Q e M para denotarmos a força axial, a força de cisalhamento e o momento de flexão, respectivamente. Denotamos por w o deslocamento ângular longitudinal, φ deslocamento ângular vertical e ψ o deslocamento ângular de cisalhamento.

A energia do sistema $(1.1) - (1.5)$ é dado por

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^L (\rho_1|\varphi_t|^2 + \rho_2|\psi_t|^2 + \rho_1|w_t|^2 + b|\psi_x|^2 + k|\varphi_x + \psi + lw|^2 + k_0|w_x - l\varphi|^2)(x, t)\, dx. \tag{1.10}$$

2 Resultado

Consideremos as seguintes hipóteses:

Hipótese 1. A função feedback g_i, para cada $i = 1, 2, 3$, é contínua e monótona crescente, e satisfaz as seguintes condições:

(i) $g_i(s)s > 0$ para $s \neq 0$,

(ii) $k_i s \leq g_i(s) \leq K_i s$ para $|s| > 1$,

onde k_i e K_i são constantes positivas.

[*]UEM - DMA, PR, Brasil, jaspalomino@uem.br
[†]CCET, UFAC, AC, Brasil, e-mail: wenden@ufac.br
[‡]UEM - DMA, PR, Brasil, e-mail:schulz.rodrigo@gmail.com

Hipótese 2. Assumiremos que $a, b \in L^{\infty}(0, L)$ são funções não negativas tais que

$$a(x) \geq a_0 > 0 \text{ e } b \geq b_0 > 0 \text{ q.s. em } (L - \epsilon, L), \tag{2.1}$$

onde $\epsilon > 0$ é um número positivo arbitrário.

Nossa principal tarefa é provar que a seguinte desigualdade é satisfeita para cada solução fraca do problema $(1.1) - (1.5)$

$$E(T) :\leq C \int_0^T \int_0^L \Big(a(x)(\varphi_t^2 + g_1(\varphi_t)^2) + (\psi_t^2 + g_2(\psi_t)^2) + b(x)(w_t^2 + g_3(w_t)^2 \Big) \, dxdt, \tag{2.2}$$

para alguma constante $C = C(T, E(0)) > 0$ e para T suficientemente grande.

Assumindo que (2.2) ocorre e seguindo o mesmo processo considerado em Lasiecka e Tataru [1] a solução do problema $(1.1) - (1.5)$ satisfaz a seguinte taxa de decaimento:

$$E(T) :\leq S\Big(\frac{1}{T_0}\Big) E(0) \searrow 0, \text{ para todo } t \geq T_0, t \to \infty, \tag{2.3}$$

onde a função escalar $S(t)$ (Contração não-linear) é a solução da seguinte EDO:

$$\frac{d}{dt} S(t) + q(S(t)) = 0, \qquad S(0) = E(0), \tag{2.4}$$

onde a função q é definida em Lasiecka e Tataru [1].

Agora, estamos em condições de enunciar o nosso principal resultado:

Teorema 2.1. *Suponhamos que as hipóteses 1 e 2 sejam válidas. Então, o problema* $(1.1) - (1.5)$ *possui uma única solução fraca satisfazendo a taxa de decaimento dada em* (2.3).

Referências

[1] LASIECKA, I. AND TATARU, D. - Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary damping. *Differential and integral Equations* , **6**, 507-533, 1993.

[2] LIONS, J. L. - Controlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués, tome 1, ,*Masson* , 1988.

[3] LIONS, J. L. - Controlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués, tome 2, ,*Masson* , 1988.

[4] RUIZ, A. - Unique continuation for weak solutions of the wave equation plus a potencial. *J. math. Pures Appl.*, **71**, 455-467, 1992.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

ANÁLISE MULTIESCALAS PARA A OBTENÇÃO DE CORREÇÕES LOGARÍTMICAS NO DECAIMENTO DE SOLUÇÕES DE PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

JUSSARA M. MOREIRA & GASTÃO A. BRAGA *

A relação entre escalas, autossimilaridade e o limite assintótico de soluções de equações diferenciais parciais foi introduzida inicialmente por Barenblatt [1] no final da década de 70. No início dos anos 90, J. Bricmont, A. Kupiainen e colaboradores [2] adaptaram um método multiescalas anteriormente utilizado em teoria quântica de campos e mecânica estatística, o método do Grupo de Renormalização (RG), obtendo resultados rigorosos sobre o comportamento assintótico de soluções. Eles mostraram que, para uma extensa classe de perturbações da equação do calor e para um dado inicial suficientemente pequeno, a solução do problema de valor inicial se comporta em tempos longos como a solução fundamental da equação do calor. Sua ideia consistiu em relacionar o comportamento assintótico de soluções com a existência e estabilidade de pontos fixos de um operador apropriado, resolvendo iterativamente o problema, através de sucessivas aplicações desse operador ao dado inicial, evoluindo progressivamente a solução no tempo e simultaneamente renormalizando os termos da EDP, transformando o problema do limite assintótico em iterações de problemas definidos em intervalos de tempo fixo, seguidas por mudanças de escalas. Nesse contexto, o método permite a obtenção de classes de universalidade compostas por conjuntos de dados iniciais e equações distintas, mas que apresentam mesmo comportamento assintótico, isto é, as soluções de tais problemas se comportam como

$$u(x,t) \sim \frac{A}{t^{\alpha}}\ \phi\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right),$$

sendo os expoentes críticos α e β e a função $\phi(x)$ universais, isto é, não dependem nem do dado inicial e nem da não-linearidade, em certas condições. Bricmont et al. utilizaram uma abordagem de sistemas dinâmicos para o método do RG, analisando o domínio de atração do ponto fixo gaussiano para perturbações diversas da equação de difusão, classificando tais perturbações, através da análise de escalas, como irrelevantes, marginais ou relevantes.

1 Resultados

Utilizando as ideias acima, foram obtidos os comportamentos assintóticos de soluções de equações de difusão com coeficiente dependente do tempo, nos casos em que a perturbação não-linear é irrelevante e marginal e, no último caso, o método permitiu ainda a obtenção da correção logarítmica existente no decaimento da solução. De fato, foram considerados problemas envolvendo equações do tipo

$$u_t = c(t)u_{xx} + F(u), \quad c(t) \sim t^p \text{ quando } t \to \infty,\ \text{com } p > 0, \tag{1.1}$$

que modelam diversos processos físicos envolvendo o transporte passivo, em um campo de permeabilidade aleatório, de um escalar de concentração média u. Foi provado em Moreira [3] que, para $F(u) = \sum_{j\geq\alpha} a_j u^j$, com $\alpha > (p+3)/(p+1)$ (caso irrelevante), a solução se comporta como

$$u(x,t) \sim \frac{A}{t^{(p+1)/2}}\ f_p^*\left(\frac{x}{t^{(p+1)/2}}\right)$$

*Departamento de Matemática ,UFMG, MG, Brasil, jmoreira@mat.ufmg.br, gbraga@mat.ufmg.br

quando $t \to \infty$, sendo

$$f_p^*(x) = \sqrt{\frac{p+1}{4\pi}}\ e^{-\frac{(p+1)}{4}x^2} \tag{1.2}$$

e A um pré-fator dependente do dado inicial, da perturbação F e do expoente p. Nesse caso, observa-se que a difusão é o termo dominante na determinação da forma do decaimento das soluções, sendo que a contribuição do termo não linear da equação no comportamento assintótico da solução aparece apenas no pré-fator, não afetando os expoentes críticos nem a função perfil f_p^*.

No caso marginal (também chamado crítico), isto é, quando $\alpha = (p+3)/(p+1)$, nem a difusão nem a não-linearidade prevalecem e o regime observado apresenta algumas características do caso irrelevante, mas com um fator logarítmico extra na taxa de decaimento da solução. A obtenção de correções logarítmicas não é uma tarefa trivial e foi inicialmente verificada através da aplicação de uma versão numérica do método do grupo de renormalização à equação $u_t = t^p u_{xx} - u^{\frac{p+3}{p+1}}$ (veja Trivellato [4] para aplicação do método numérico ao problema difusivo com coeficiente periódico). Nesse caso, foi observado o comportamento

$$u(x,t) \sim \frac{A}{(t\ln t)^{(p+1)/2}}\ f_p^*\left(\frac{x}{t^{(p+1)/2}}\right)$$

quando $t \to \infty$. A demonstração analítica desse fato mostrou-se bem mais delicada e foi obtida para o problema

$$u_t = [t + o(t)]u_{xx} - \lambda u^2 + \mu \sum_{j\geq 3} a_j u^j. \tag{1.3}$$

O sinal negativo na equação acima é necessário para evitar blow-up de soluções em tempo finito (veja por exemplo Fujita [5]). Para enunciar o teorema no caso crítico, considere os espaços de Banach

$$\mathcal{B}_q \equiv \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \hat{f}(w) \in C^1(\mathbb{R}) \text{ e } \|f\| < \infty\}, \quad q > 1,$$

$$B^{(\infty)} \equiv \{u : \mathbb{R} \times [1, +\infty) \to \mathbb{R} \mid u(\cdot, t) \in \mathcal{B}_q \text{ para todo } t \geq 1 \text{ e } \|u\|_\infty < \infty\},$$

com normas dadas respectivamente por

$$\|f\| \equiv \sup_{w\in\mathbb{R}} \left[(1 + |w|^q)\left(\left|\hat{f}(w)\right| + \left|\hat{f}'(w)\right|\right)\right], \quad \|u\|_\infty \equiv \sup_{t\geq 1} \|u(\cdot, t)\|.$$

Teorema 1.1. *Considere a equação (1.3) com condição inicial $u(x,1) = f(x)$, $f \in \mathcal{B}_q$. Então, existem constantes positivas λ^*, ε e um espaço $B \subset B^{(\infty)}$ tais que, se $\|f\| < \varepsilon$, $\lambda > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, com $0 < \lambda + |\mu| < \lambda^*$, então o PVI possui uma única solução $u \in B$ que satisfaz*

$$\lim_{t\to\infty} \left\|tu(t\cdot, t) - 2\sqrt{\pi}(\lambda \ln t)^{-1} f_1^*\right\| = 0. \tag{1.4}$$

Referências

[1] BARENBLATT, G. I. - *Scaling, self-similarity and intermediate asymptotics.*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, Second edition, 1996.

[2] BRICMONT, J. AND KUPIAINEN, A. AND LIN, G. - Renormalization Group and Asymptotics of Solutions of Nonlinear Parabolic Equations. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, **47**, 893-922, 1994.

[3] MOREIRA, J. AND BRAGA, G. AND FURTADO, F. AND TRIVELLATO, L. - Renormalization Group Analysis of Nonlinear Diffusion Equations With Time Dependent Coefficients: Analytical Results. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B*, **7**, 699-715, 2007.

[4] TRIVELLATO, L. AND MOREIRA, J. AND BRAGA, G. AND FURTADO, F. - Renormalization Group Analysis of Nonlinear Diffusion Equations with Periodic Coefficients. *Multiscale Modeling and Simulation*, **1**, 630-644, 2003.

[5] FUJITA, H. - On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect IA*, **Math 13**, 109-124, 1966.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

DISTÂNCIAS DE BANACH-MAZUR ENTRE ESPAÇOS $C_0(K, X)$

LEANDRO CANDIDO* & ELÓI MEDINA GALEGO†

Neste trabalho, estudamos a distância de Banach-Mazur entre os espaços $C_0(\Gamma, X)$, onde Γ são conjuntos infinitos munidos da topologia discreta, e os espaços $C_0(K, X)$, onde K são espaços topológicos localmente compactos de Hausdorff. O resultados apresentados podem ser encontrados com todos os detalhes em [4].

1 Introdução

Dado um espaço de Banach X e um espaço topológico localmente compacto de Hausdorff K, denotamos por $C_0(K, X)$ o espaço das funções contínuas de K em X que se anulam no infinito, com a norma do supremo. Recordamos que dados espaços de Banach isomorfos X e Y (notação: $X \sim Y$), a distância de Banach-Mazur entre estes espaços é definida por

$$\mathrm{d}(X, Y) = \inf_T \left\{ \|T\| \|T^{-1}\| \right\},$$

onde T percorre todos os isomorfismos sobrejetores de X em Y.

A fonte de nossa pesquisa remonta a Banach. Em 1932, ele afirmou que $\mathrm{d}(c_0, c) \leq 4$; ver [1]. Banach chegou a essa conclusão utilizando o seguinte isomorfismo T_λ de c sobre c_0.

$$T_\lambda(x_1, x_2, x_3, ...) = (\lambda\, x, x_1 - x, x_2 - x, ...), \tag{1.1}$$

onde $\lambda = 1$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x. Uma melhor estimativa para essa distância pode ser obtida de (1.1) fixando-se $\lambda = 2$, a saber, $\mathrm{d}(c_0, c) \leq 3$. Finalmente, em 1970 Cambern [5], calculou o valor exato desta distância:

$$\mathrm{d}(c_0, c) = 3. \tag{1.2}$$

Pelo clássico teorema de Mazurkiewicz e Sierpiński, ver [6], e por um teorema de Bessaga e Pełczyński [3] deduzimos que se c_0 é isomorfo a algum espaço $C(K)$, então K é homeomorfo a um intervalo de ordinal $[1, \omega^n k]$ munido com a topologia da ordem para inteiros positivos n e k, onde ω denota o primeiro ordinal infinito. Assim, para determinar a distância de Banach-Mazur entre c_0 e cada um dos espaços $C(K)$, somos levados à seguinte pergunta natural:

Problema 1. Quais são os valores de $\mathrm{d}(c_0, C([1, \omega^n k])$, para $1 \leq n, k < \omega$?

O objetivo do presente trabalho é duplo. Em primeiro lugar, fornecer uma extensão vetorial de (1.2). Em segundo lugar, resolver completamente o Problema 1.

Para enunciar os principais resultados deste trabalho recordamos que o conjunto derivado de um espaço topológico K é o conjunto $K^{(1)}$ de todos os pontos de acumulação de K. Fixando-se $K^{(0)} = K$, se $1 \leq n \leq \omega$, definimos o $n-$ésimo conjunto derivado de K por indução:

$$K^{(r)} = \begin{cases} (K^{(r-1)})^{(1)} & \text{se } 1 \leq r < \omega, \\ \bigcap_{1\leq n<\omega} K^{(n)} & \text{se } r = \omega. \end{cases}$$

*Instituto de Matemática e Estatística , IME-USP, SP, Brasil, lc@ime.usp.br
†Instituto de Matemática e Estatística , IME-USP, SP, Brasil, eloi@ime.usp.br

2 Resultados

O primeiro resultado fornece cotas inferiores para distâncias de Banach-Mazur entre certos espaços $C_0(K,X)$. Se trata de uma generalização do principal resultado de [5], o caso onde $n=1$ e $X=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Teorema 1. *Seja* $1 \leq n < \omega$*,* Γ *um conjunto infinito munido da topologia discreta,* K *um espaço topológico localmente compacto de Hausdorff e* X *um espaço de Banach de cotipo finito. Então*

$$C_0(\Gamma,X) \sim C(K,X) \quad e \quad K^{(n)} \neq \emptyset \Longrightarrow \mathrm{d}(C_0(\Gamma,X),C_0(K,X)) \geq 2n+1.$$

Na tentativa de se obter cotas superiores para distâncias mencionadas no Problema 1 demonstramos:

Teorema 2. *Seja* $1 \leq n,k < \omega$ *e* X *um espaço de Banach. Então*

$$\mathrm{d}(C_0(\mathbb{N},X),C([1,\omega^n k],X) \leq 2n+1.$$

Então, como consequência imediata dos Teoremas 1 e 2 obtemos a seguinte generalização de (1.2) que ao mesmo tempo resolve o Problema 1.

Corolário 3. *Seja* $1 \leq n,k < \omega$ *e* X *um espaço de Banach de cotipo finito. Então*

$$\mathrm{d}(C_0(\mathbb{N},X),C([1,\omega^n\ k],X) = 2n+1.$$

Observamos que o Teorema 1 pode ser aplicado para se obter algumas generalizações de resultados clássicos sobre espaços $C_0(\Gamma)$. Por exemplo, é bem conhecido que se um espaço $C(K)$ é isomorfo a algum espaço $C_0(\Gamma)$, onde Γ é um conjunto discreto infinito, então $K^{(\omega)}=\emptyset$. Tal resultado pode ser obtido combinando-se teoremas de [2], [3] e [7]. Contudo, como consequência imediata do Teorema 1, temos a seguinte extensão vetorial deste resultado.

Corolário 4. *Seja* Γ *um conjunto discreto infinito,* K *um espaço localmente compacto de Hausdorff e* X *um espaço de Banach de cotipo finito. Então*

$$C_0(K,X) \sim C_0(\Gamma,X) \Longrightarrow K^{(\omega)} = \emptyset.$$

Finalmente, o clássico teorema de Milyutin mostra que a hipótese de cotipo finito, em geral, não pode ser removida no Corolário 4. De fato,

$$C_0\left(\mathbb{N},C([0,1])\right) \sim C([1,\omega],[0,1]) \sim C([1,\omega]\times[0,1]) \sim C([0,1]\times[0,1]) \sim C([0,1],C[0,1]),$$

entretanto, $[0,1]^{(\omega)} = [0,1]$.

Agradecimentos. O primeiro autor foi apoiado financeiramente pelo CNPq, processo 142423/2011-4.

Referências

[1] BANACH, S. - *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Warsawa, 1932.

[2] BAKER, J. W. - *Dispersed images of topological spaces and uncomplemented subspaces of $C(X)$* Proc. Amer. Math. Soc., **41** (1973), 309–314.

[3] BESSAGA, C.; PEŁCZYŃSKI, A. - *Spaces of continuous functions IV*, Studia Math. **19** (1960), 53–61.

[4] CANDIDO, L.; GALEGO, E. M. - *How far is $C_0(\Gamma,X)$ with Γ discrete from $C_0(K,X)$ spaces?*, Fund. Math. 218 (2012), 151–163.

[5] CAMBERN, M. - *On mappings of sequence spaces*, Studia Math. **30** (1968), 73–77.

[6] MAZURKIEWICZ, S.; SIERPIŃSKI, W. - *Contribution à la topologie des ensembles dénombrables*, Fund. Math., **1** (1920), 17–27.

[7] PEŁCZYŃSKI, A.; SEMADENI, Z. - *Spaces of continuous functions (III)*, Studia Math., **18** (1959), 211–222.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

SOME NUMERICAL METHODS IN SMALL-SIGNAL STABILITY ANALYSIS

LICIO H. BEZERRA*

We are interested in analyzing SISO dynamical systems (E, M, B, C, d) of the form

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) &= Mx(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C^T x(t) + Du(t) \end{cases}$$

where $M, E \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $E = diag([1, ..., 1, 0, ..., 0])$; $x(t) \in \mathbb{R}^N$ is composed by dynamical and algebraic variables, $x_d(t)$ and $x_a(t)$, which are respectively associated with the unit and the null diagonal entries of E; $B, C \in \mathbb{R}^{N\times 1}$ such that $B^T = \left(B_d^T\, B_a^T\right)$ and $C^T = \left(C_d^T\, C_a^T\right)$; $u(t) \in \mathbb{R}$ is the input, $y(t) \in \mathbb{R}$ is the output, and $D \in \mathbb{R}$. The corresponding transfer function $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ is defined as

$$h(s) = C^T\left(sE - M\right)^{-1} B + D.$$

Suppose that there are n dynamical variables in the system. If $M_{11} = M(1 : n, 1 : n)$, $M_{12} = M(1 : n, n + 1 : N)$, $M_{21} = M(n + 1 : N, 1 : n)$ and $M_{22} = M(n + 1 : N, n + 1 : N)$, then

$$h(s) = c^T\left(sI - \left(M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{21}\right)\right)^{-1} b + d,$$

where $b = B_d - M_{12}M_{22}^{-1}B_a$, $c = C_d - M_{21}^T M_{22}^{-T} C_a$ and $d = D - C_a^T M_{22}^{-1} B_a$. The matrix $A = M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{21}$ is called the state matrix of the system. From now on we suppose that $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is diagonalizable and every eigenvalue of A is simple.

1 Dominant Pole Spectrum Eigensolver (DPSE)

Let $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ and $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ defined respectively by

$$f(s) = \begin{cases} \frac{(A-sI)^{-1}b}{c^T(A-sI)^{-1}b} & \text{for } s \in \mathbb{C} - \lambda(A); \\ \frac{Pe_j}{c^T Pe_j} & \text{for } s = d_{jj}, j = 1 : n. \end{cases}$$

and

$$g(s) = \begin{cases} \frac{(A^T-sI)^{-1}c}{c^T(A-sI)^{-1}b} & \text{for } s \in \mathbb{C} - \lambda(A); \\ \frac{P^{-1}e_j}{e_j^T P^{-1}b} & \text{for } s = d_{jj}, j = 1 : n. \end{cases}$$

Let $S = (s_1 \dots s_p)^T \in \mathbb{C}^p$, $p \le n$, and suppose that $X(S), Y(S) \in C^{n\times p}$ are defined by $X(S)e_k = f(s_k)$ and $Y(S)e_k = g(s_k)$, for $k = 1 : p$, where $e_1, ..., e_n$ are the canonical vectors. Therefore, $Y(S)b = ones(n, 1)$. Note that, if S is a p-uple of distinct eigenvalues, e.g., $S = \left(d_{k_1,k_1} \dots d_{k_p,k_p}\right)$, where $1 \le k_1 < ... < k_p \le n$, then

$$Y(S)^T X(S) = \text{diag}\left(\left[\frac{1}{c^T Pe_{k_1}e_{k_1}^T P^{-1}b}, ..., \frac{1}{c^T Pe_{k_p}e_{k_p}^T P^{-1}b}\right]\right). \tag{1.1}$$

Hence, $Y(S)^T X(S)$ is invertible for any S belonging to an open neighborhood $\mathcal{O}$ of $\left(d_{k_1,k_1}, ..., d_{k_p,k_p}\right)$.

*Departamento de Matemática , UFSC, SC, Brasil, e-mail: licio@mtm.ufsc.br

Definition 1.1 (DPSE)**.** *The fixed-point iteration applied to the function*

$$G(S) = (\lambda_1(F(S)) \ldots \lambda_p(F(S))),$$

where $F(S) = \left(Y(S)^T X(S)\right)^{-1} \left(Y(S)^T AX(S)\right)$, *defines the Dominant Pole Spectrum Eigensolver.*

Theorem 1.1 (DPSE converges at least quadratically)**.** *Let λ_1, ..., λ_p be p distinct eigenvalues of A. Then, there is a neighborhood V of $(\lambda_1 \ldots \lambda_p)^T$ such that DPSE converges at least quadratically to $(\lambda_1 \ldots \lambda_p)^T$ for any $S_0 \in V$.*

2 Simultaneous Newton's Method (SNM)

The following Newton's method can be seen in [1]. Let $Y \in \mathbb{C}^{N\times n}$, $n \leq N$, a full rank matrix. Let $\mathcal{X}_Y = \{X \in \mathbb{C}^{N\times n} \mid Y^T X = I\}$. Let F be the function defined in $\mathcal{X}_Y$ by

$$F(X) = AX - XY^T AX \tag{2.2}$$

Then

$$F'(X)[H] = (I - XY^T)AH - HY^T AX \tag{2.3}$$

Hence, $F'(X)[X] = F(X) - XY^T AX = 2F(X) - AX$ and so,

$$(F'(X))^{-1}[F(X)] = X + (F'(X))^{-1}[XY^T AX] \tag{2.4}$$

Proposition 2.1. *If $X^{(0)}$ is such that $Y^T X^{(0)} = I$, then for $k \geq 1$ $X^{(k)}$ in $\mathcal{X}_Y$, where $X^{(k)}$ is the matrix corresponding to the kth step of the Newton's method to solve $F(X) = 0$.*

3 Conclusions after Numerical Results

SNM has rarely converged by starting from arbitrary initial vectors, which confirms its dependence on the initial conditions. A good strategy has been to choose initial shifts given in the desired region, and to precondition each one by performing some shift-invert iterations. This procedure has yielded good initial vectors. We have also utilized the same strategy with DPSE.

Summarizing,

- SNM depends a lot on the initial vectors;
- SNM and DPSE detected clustered eigenvalues;
- DPSE is very sensitive to perturbations: the computation is not stable.

References

[1] F. Chatelin - Simultaneous Newton's Iteration for the Eigenproblem. *Computing, Suppl.*, **5**, 67–74, 1984.

[2] G. H. Golub and C. F. Van Loan - *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 3rd. ed., 1996.

[3] N. Martins - The Dominant Pole Spectrum Eigensolver. *IEEE Trans. on Power Systems*, **12**, 245–254, 1997.

[4] N. Martins, L. T. G. Lima and H. J. C. P. Pinto - Computing Dominant Poles of Very High Order Transfer Functions. *IEEE Trans. on Power Systems*, **11**, 162–170, 1996.

[5] J. Rommes and G. L. G. Sleijpen - Convergence of the dominant pole algorithm and Rayleigh quotient iteration. *SIAM J. on Matrix Anal. and Appl.*, **30**, 346–363, 2008.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

Periodic solutions of the elliptic isosceles restricted three-body problem with collision.

Lúcia Brandão Dias* & Claudio Vidal†

1 Introduction

The elliptic isosceles restricted three body problem with collision (EIR3BP) is defined as follows: Two equal point masses $m_1 = m_2$ move under Newton's law of gravitational attraction in a collision elliptic orbit. A third massless particle moves on a plane passing through the center of mass of the primaries and perpendicular to their line of motion . The dynamics of the primaries is periodic and contains an infinite number of collisions. It represents a periodic forcing in the system causing it to be non-conservative. This problem is called elliptic isosceles problem with collision because the three bodies form an isosceles triangle at any time, and the primaries are in elliptic motion with collision in a line symmetric with respect to the plane that contains the massless.

We take the z–axis containing the line of the primaries and the x–y plane containing the motion of the massless particle. By symmetry, the component of the angular momentum of the massless particle along the direction of the line of the primaries (z-component) is conserved. We fixed it to a non–zero value in order to avoid total collision. Let $\rho(t) = z_1(t) - z_2(t)$ be the distance between the primaries. So, with these coordinates, the equations of motion of the infinitesimal particle are

$$\begin{aligned} \dot{x} = p_x, \quad \dot{p_x} &= -\frac{x}{\left(x^2+y^2+\frac{\rho^2(t)}{4}\right)^{3/2}} \\ \dot{y} = p_y, \quad \dot{p_y} &= -\frac{y}{\left(x^2+y^2+\frac{\rho^2(t)}{4}\right)^{3/2}} \end{aligned} \tag{1.1}$$

where $\rho(t) := \rho(E_\epsilon(t)) = \epsilon^2[1 - \cos E_\epsilon(t)]$ with $\epsilon^2 = -\frac{1}{2h}$ and h is the energy of the problem, E is the eccentric anomaly given by Kepler's equation $t = \epsilon^3(E - \sin E)$.

About the dynamic of this problem, we prove the existence of several families of periodic solutions. We use essentially the Continuation method due to Poincaré. To apply the Continuation method we need to introduce a parameter associated with the motion of the primaries, namely, the energy. After that, we took advantage of the symmetries of the system of differential equations that defines the elliptic isosceles restricted three body with collision. And finally, since the system of differential equations is not analytic as function of the parameter ϵ introduced, we need to use Arenstorf's Theorem (see details in [1]). We obtain periodic solutions of the first and second kinds, according to the definition in [4]. Similar arguments have been considered in [2] and [3] in the study of a new class of periodic orbits in the three-dimensional elliptic restricted three-body problem in the case of equal masses of the primaries. In these works, the orbit of each primary is elliptic without collision, and the parameter is obviously the eccentricity of the primaries orbit.

2 Results

The equations of motion (1.1) in Delaunay-Poincaré variables can be written as

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{F}(\mathbf{Z}) = \mathbf{F}_0(\mathbf{Z}) + \epsilon^4\mathbf{F}_1(\mathbf{Z}, t, \epsilon) + \epsilon^8\mathbf{F}_r(\mathbf{Z}, t, \epsilon) \tag{2.2}$$

*Universidade Federal de Sergipe, UFS, SE, Brasil, luciafadf@hotmail.com
†Universidad Del Bío Bío, Concepcion, Chile, clvidal@pegasus.dci.ubiobio.cl.

where $\mathbf{Z} = (Q_1, Q_2, P_1, P_2)$, $\mathbf{F}_0(\mathbf{Z}) = (P_1^{-3}, 0, 0, 0)$, $\mathbf{F}_1(\mathbf{Z}, t, \epsilon) = \left(\frac{\partial H_1}{\partial P_1}, \frac{\partial H_1}{\partial P_2}, -\frac{\partial H_1}{\partial Q_1}, -\frac{\partial H_1}{\partial Q_2}\right)$ with $H_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) = \frac{1}{8\|\mathbf{q}\|^3}[1 - \cos E_\epsilon(t)]^2$, and finally, $\mathbf{F}_r(\mathbf{Z}, t, \epsilon) = \left(\frac{\partial H_r}{\partial P_1}, \frac{\partial H_r}{\partial P_2}, -\frac{\partial H_r}{\partial Q_1}, -\frac{\partial H_r}{\partial Q_2}\right)$, with $H_r(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) = -\frac{3[1-\cos E_\epsilon(t)]^4}{128\|\mathbf{q}\|^5} + \mathcal{O}(\epsilon^4)$. Note that the system $\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{F}_0(\mathbf{Z})$ is the Kepler's problem in Delaunay-Poincaré variables. Let $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0^*)$ be a Keplerian circular orbit. Now, we will proceed to study the perturbed system. We look for initial conditions in a neighborhood of $\mathbf{z}_0^*$, of the type

$$\mathbf{z}_0 = ((m + \frac{1}{2})\pi,\ \triangle Q_2,\ s^{-1/3} + \triangle P_1,\ 0) = \mathbf{z}_0^* + (0,\ \triangle Q_2, \triangle P_1,\ 0),$$

where m can be either 0 or 1 and $s = \frac{\tilde{m}+1/2}{2\tilde{s}}$ with $\tilde{m}, \tilde{s} \in \mathbb{N}$, in such a way that a solution $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0)$ of (2.2), with $\epsilon \neq 0$ small enough, let be a doubly symmetric orbit. By standard argument, we have that the solution $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ of (2.2) is given by

$$\begin{array}{rcll} Q_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) & = & (\,((\tilde{m}+1/2)/2\tilde{s})^{-1/3} + \triangle P_1)^{-3}t + (m + \frac{1}{2})\pi & +\epsilon^4 Q_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ Q_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) & = & \triangle Q_2 & +\epsilon^4 Q_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ P_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) & = & s^{-1/3} + \triangle P_1 & +\epsilon^4 P_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ P_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) & = & 0 & +\epsilon^4 P_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8). \end{array} \tag{2.3}$$

In order to obtain a doubly symmetric orbit of the system (2.2), the two equations below

$$Q_1(T/4, \mathbf{z}_0, \epsilon) = (m + \tilde{m} + 1)\pi, \quad Q_2(T/4, \mathbf{z}_0, \epsilon) = 0, \tag{2.4}$$

must be satisfied. Defining $\Phi(\mathbf{X}, P) = (\Phi_1(\mathbf{X}, P), \Phi_2(\mathbf{X}, P)) = (Q_1(\mathbf{X}, P) - (\tilde{m}+m+1)\pi, Q_2(\mathbf{X}, P)) = (Q_1(T/4, \mathbf{z}_0, \epsilon) - (\tilde{m} + m + 1)\pi, Q_2(T/4, \mathbf{z}_0, \epsilon))$, where $\mathbf{X} = (\triangle Q_2, \triangle P_1), P = \epsilon$ and $T/4 = 2\pi\tilde{s}$, the system (2.4) is equivalent to

$$\begin{array}{rlll} \Phi_1(\mathbf{X}, P) = & (s^{-1/3} + \triangle P_1)^{-3}\frac{T}{4} - (\tilde{m} + \frac{1}{2})\pi & +\epsilon^4 Q_1^{(1)}(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) & = 0 \\ \Phi_2(\mathbf{X}, P) = & \triangle Q_2 & +\epsilon^4 Q_2^{(1)}(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) & = 0, \end{array} \tag{2.5}$$

called periodicity equations. The function $\Phi(\mathbf{X}, P) = (\Phi_1(\mathbf{X}, P), \Phi_2(\mathbf{X}, P))$ is such that $\Phi(\mathbf{0}, 0) = 0$ and satisfies the following lemma

Lema 2.1. *Let B^* be a ball around $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ and B a region containing $P = 0$. The function $\Phi(\mathbf{X}, P)$ is differentiable, with respect to $\mathbf{X} \in B^*$ for every $P \in B$, and satisfies the next three properties* **1)** $|(D_{\mathbf{X}}\Phi)^{-1}(\mathbf{0}, 0)| \leq b$, **2)** $|D_{\mathbf{X}}\Phi(\mathbf{X}, P) - D_{\mathbf{X}}\Phi(0, 0)| \leq c(\|\mathbf{X}\| + \epsilon^4)$ *and* **3)** $\|\Phi(\mathbf{0}, \epsilon)\| \leq d\epsilon^4$ *where b, c, d are constants independent of ϵ.*

So, using the Arenstorf's Implicit Function Theorem, we have the theorem

Teorema 2.1. *Consider the equations of motion (2.2) for the elliptic isosceles restricted three-body problem with collision, where the primaries move in an elliptic-collision orbit with energy $h = -1/2\ \epsilon^{-2}$. If $\epsilon = k^{-1/3}$ for k a large enough positive integer, then there exist initial conditions for the infinitesimal body such that its motion is a doubly-symmetric periodic solution, near a Keplerian circular orbit on the xy-plane whose period is $8\pi\tilde{s}$, where $\tilde{s} \in \mathbb{N}$.*

Referências

[1]ARENSTORF, R.- *A new method of perturbation theory and its application to the satellite problem of celestial mechanics*, J. Reine Angew. Math., **221**, 113-145, 1966.

[2] CORS J., PINYOL C., SOLER J.- *Periodic solutions in the spatial elliptic restricted three-body problem*, Physica D, **154**, 195-206, 2001.

[3]CORS J., PINYOL C., SOLER J.- *Analytic continuation in the case of non-regular dependency on a small parameter with an application to celestial mechanics*, Physica D, **219**, 1- 19, 2005.

[4] SZEBEHELY, V. - *Theory of orbits.*, New York, Academic Press, 1967.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

Uma versão do problema foco–centro para campos de vetores analíticos em $\mathbb{R}^3$

Luis Fernando Mello *

Considere a seguinte equação diferencial em $\mathbb{R}^3$

$$x' = P(x,y,z), \quad y' = Q(x,y,z), \quad z' = R(x,y,z), \tag{0.1}$$

onde P, Q e R são funções analíticas. Ao sistema (0.1) está associado o campo de vetores

$$\mathcal{X}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)).$$

Suponha que o sistema (0.1) tenha um ponto de equilíbrio (x_0, y_0, z_0) tal que $D\mathcal{X}(x_0, y_0, z_0)$ tenha autovalores da forma $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 \neq 0$ e $\lambda_3 = \lambda \neq 0$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que (0.1) tem a forma

$$x' = -y + \tilde{P}(x,y,z), \quad y' = x + \tilde{Q}(x,y,z), \quad z' = \tilde{\lambda} z + \tilde{R}(x,y,z), \tag{0.2}$$

onde $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ e $\tilde{R}$ são funções analíticas com expansões de Taylor na origem iniciando com, pelo menos, termos quadráticos e $\tilde{\lambda} < 0$.

Problema 0.1 (Problema foco–centro não degenerado)**.** *Dado um sistema em $\mathbb{R}^3$ da forma (0.2) com um ponto de equilíbrio $(0,0,0)$ tal que $D\mathcal{X}(0,0,0)$ tenha autovalores da forma $\lambda_{1,2} = \pm i$ e $\lambda_3 = \tilde{\lambda} \neq 0$, determinar se $(0,0,0)$ é um centro ou um foco para o fluxo de (0.2) restrito a uma variedade central.*

Uma integral primeira local de (0.2) é uma função diferenciável não constante $\Psi : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, U um conjunto aberto contendo a origem, a qual é constante sobre as trajetórias de (0.2), ou seja,

$$\mathcal{X}\Psi = P\Psi_x + Q\Psi_y + R\Psi_z \equiv 0. \tag{0.3}$$

Uma integral primeira formal de (0.2) é uma série de potências formal Ψ, nas variáveis x, y e z, tal que quando P, Q e R são expandidos em séries de potências em torno da origem, todo coeficiente em (0.3) é zero.

Teorema 0.1 (Teorema do Centro de Poincaré–Lyapunov)**.** *[1] O sistema analítico (0.2) tem um centro na origem para o fluxo restrito a uma variedade central local se, e somente se, ele admite uma integral primeira analítica local da forma*

$$\Psi(x,y,z) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \dots,$$

numa vizinhança da origem em $\mathbb{R}^3$. Ademais, a existência de uma integral primeira formal Ψ implica a existência de uma integral primeira local analítica da mesma forma. E ainda, quando existe um centro, a variedade central local é analítica e única.

Sejam $F(x,y,z)$ uma função polinomial não identicamente nula e $\mathcal{X} = (P,Q,R)$ um campo vetorial. A superfície $F(x,y,z) = 0$ é uma superfície algébrica invariante do sistema definido pelo campo $\mathcal{X}$ se para algum polinômio $K(x,y,z)$ temos

$$\mathcal{X}F = P\frac{\partial F}{\partial x} + Q\frac{\partial F}{\partial y} + R\frac{\partial F}{\partial z} \equiv KF.$$

O polinômio K é chamado de cofator da superfície algébrica invariante $F = 0$.

*Instituto de Ciências Exatas, UNIFEI, MG, Brasil, lfmelo@unifei.edu.br

Considere a equação diferencial escalar de terceira ordem [2]

$$x''' + f(x)\, x'' + g(x)x' + h(x) = 0, \tag{0.4}$$

onde $f(x) = a_1x + a_0$, $g(x) = b_1x + b_0$ e $h(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$, com $a_1, a_0, b_1, b_0, c_2, c_1, c_0 \in \mathbb{R}$, $c_2 \neq 0$. A equação diferencial (0.4) pode ser escrita como o seguinte sistema de equações diferenciais não lineares de primeira ordem

$$x' = y, \quad y' = z, \quad z' = -\left(\overbrace{(a_1x + a_0)}^{f(x)} z + \overbrace{(b_1x + b_0)}^{g(x)} y + \overbrace{c_2x^2 + c_1x + c_0}^{h(x)}\right), \tag{0.5}$$

onde $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ são as variáveis de estado e $(a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1, c_2) \in \mathbb{R}^7$, $c_2 \neq 0$, são parâmetros reais.

Teorema 0.2. *O sistema abaixo, obtido de (0.5) escolhendo adequadamente os parâmetros,*

$$x' = y, \quad y' = z, \quad z' = -\left(\frac{1}{b_0}z + (2b_0x + b_0)y + x(x + 1)\right). \tag{0.6}$$

tem uma superfície algébrica invariante $\mathcal{A}_{b_0} = F_{b_0}^{-1}(0)$, $b_0 > 0$, $F_{b_0}(x, y, z) = b_0x + z + b_0x^2$. Além disso, a variedade central $W_0^c \subset \mathcal{A}_{b_0}$ e o fluxo do sistema (0.6) restrito a $\mathcal{A}_{b_0}$ tem um centro em $E_0 = (0, 0, 0)$.

Prova: Para mais detalhes, veja [3]. De (0.6), considere o campo de vetores

$$\mathcal{X}_{b_0} = \left(y, z, -\left(x + b_0y + \frac{1}{b_0}z + x^2 + 2b_0xy\right)\right).$$

Temos que $\mathcal{X}_{b_0}F_{b_0} = KF_{b_0}$, para $F_{b_0} = b_0x + z + b_0x^2$ com cofator $K(x, y, z) = -1/b_0$. Portanto, $\mathcal{A}_{b_0} = F_{b_0}^{-1}(0)$ é uma superfície algébrica invariante do sistema (0.6) para cada $b_0 > 0$. Também é fácil ver que $E_0 \in \mathcal{A}_{b_0}$ e que $W_0^c \subset \mathcal{A}_{b_0}$. Resolvendo $F_{b_0} = 0$ na variável z em termos de x e substituindo na primeira e segunda equações do sistema (0.6), obtemos

$$x' = y, \quad y' = -b_0x - b_0x^2, \tag{0.7}$$

que é um sistema Hamiltoniano com função Hamiltoniana dada por

$$H(x, y) = \frac{b_0}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{b_0}{3}x^3,$$

o qual tem um centro na origem. □

Baseado no Teorema 0.2 e em outros casos já estudados, coloca–se a seguinte conjectura.

Conjectura 0.1. *Considere uma equação diferencial em $\mathbb{R}^3$ definida por um campo de vetores polinomial $\mathcal{X}$. Suponha que exista um equilíbrio isolado E_0 desta equação diferencial tal que $D\mathcal{X}(E_0)$ tenha autovalores da forma $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 \neq 0$ e $\lambda_3 \neq 0$. Se o fluxo desta equação diferencial restrito a uma variedade central local de E_0 tem um centro, então esta variedade central local está contida numa superfície algébrica invariante.*

Referências

[1] BIBIKOV, Y. N. - *Local Theory of nonlinear analytic ordinary differential equations*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 702, Springer–Verlag, New York, 1979.

[2] DIAS, F.S. AND MELLO, L.F., Analysis of a quadratic system obtained from a scalar third order differential equation. *Electron. J. Differential Equations*, **vol. 2010**, No. 161, 1–25, 2010.

[3] CUNHA, W.F., DIAS, F.S. AND MELLO, L.F., Centers on center manifolds in a quadratic system obtained from a scalar third-order differential equation. *Electron. J. Differential Equations*, **vol. 2011**, No. 136, 1–6, 2011.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

Topological properties and biduality of the space of Lorch analytic mappings

Luiza A. Moraes* & Alex F. Pereira†

In this work we are interested in studying topological properties and the bidual of the space of Lorch analytic mappings. For a commutative Banach algebra E with unit we say that $f : E \longrightarrow E$ is Lorch analytic (or **(L)-analytic**) in E if and only if there exist unique elements $a_n \in E$ such that $f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ for all $w \in E$. Consequently, $\lim \|a_n\|^{\frac{1}{n}} = 0$.

We denote by $\mathcal{H}_L(E)$ the space of Lorch analytic mappings from E into E. It is easy to verify that $\mathcal{H}_L(E) \subset \mathcal{H}_b(E,E)$ where $\mathcal{H}_b(E,E)$ denotes the space of holomorphic mappings from E into E which are bounded on the bounded subsets of E. In [6] we proved that $(\mathcal{H}_L(E), \tau_b)$ is a Fréchet space where τ_b denotes the topology of uniform convergence on the bounded subsets of E. We refer to [2] and [7] for background on holomorphic mappings between Banach spaces.

For every $n \in \mathbb{N}_0$ we denote by $\mathcal{P}_L(^nE)$ the space of the n-homogeneous polynomials from E into E which are (L)-analytic in E. We consider $\mathcal{P}_L(^nE)$ as a topological subspace of the space of n-homogeneous polynomials from E into E denoted by $\mathcal{P}(^nE, E)$.

It is easy to see that E is isometrically isomorphic to $\mathcal{P}_L(^nE)$. This isometry allows us to connect topological properties of E and $\mathcal{H}_L(E)$. We finish this note studying the bidual of $\mathcal{H}_L(E)$. If we consider the bidual E'' of E endowed with the Arens product we prove that if E is reflexive, then $\mathcal{H}_L(E)''$ is isomorphic to $\mathcal{H}_L(E'')$.

1 The Results

From results in [3] and [4] the first proposition is useful to prove some results on topological properties of $\mathcal{H}_L(E)$.

Proposition 1.1. *The following statements are true:*

(a) $\{\mathcal{P}_L(^nE)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *is an ∞-Schauder decomposition of* $(\mathcal{H}_L(E), \tau_b)$.

(b) $\{\mathcal{P}_L(^nE)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *is an $\mathcal{S}$-absolute decomposition of* $(\mathcal{H}_L(E), \tau_b)$.

(c) $\{\mathcal{P}_L(^nE)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *is shrinking.*

(d) $\{\mathcal{P}_L(^nE)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *is boundedly complete.*

Since E is isometrically isomorphic to $\mathcal{P}_L(^nE)$ using results from Kalton ([5], Theorem 3.2) and Botelho and Rueda ([1], Lemma 4.2) we get the following

Theorem 1.1. *E has the Schur property if and only if $(\mathcal{H}_L(E), \tau_b)$ has the Schur property.*

Theorem 1.2. *E is reflexive if and only if $(\mathcal{H}_L(E), \tau_b)$ is reflexive.*

It is known that $\mathcal{H}_b(\ell_2, \ell_2)$ is not a separable space despite ℓ_2 is a separable Banach space. In our case we have

Theorem 1.3. *E is separable if and only if $(\mathcal{H}_L(E), \tau_b)$ is separable.*

*Instituto de Matemática, UFRJ, RJ, Brasil, luiza@im.ufrj.br
†Instituto de Matemática , UFF, RJ, Brasil, alexpereira@id.uff.br

If E is Arens regular it is routine to verify that E'' is a commutative Banach algebra with unit. So in this case $\mathcal{H}_L(E'')$ is well defined. It easy to see that if E is reflexive, then E is Arens regular. To study the bidual of $\mathcal{H}_L(E)$ we proved the following

Theorem 1.4. *If E is reflexive, then $\mathcal{H}_L(E)''$ and $\mathcal{H}_L(E'')$ are isomorphic.*

References

[1] BOTELHO, G AND RUEDA, P. - *The Schur property on projective and injective tensor products,* Proc. Amer. Math. Soc. **137** (1) (2009), 219-225.

[2] DINEEN, S. - *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Springer Monogr. Math., Springer Verlag, London, Berlin, Heidelberg, 1999.

[3] DINEEN, S. - *Complex Analysis in Locally Convex Spaces*, North-Holland Math. Studies 57, Amsterdam, 1981.

[4] GALINDO, P., MAESTRE, M. AND RUEDA, P. - *Biduality in spaces of holomorphic functions*, Math. Scand. **86** (2000), 5-16.

[5] KALTON, N. J. - *Schauder decompositions in locally convex spaces*, Proc. Camb. Phil. Soc. **68** (1970), 377-392.

[6] MORAES, L.A. AND PEREIRA, A.F. - The spectra of algebras of Lorch analytic mappings, *Topology*, **48**, 91–99, 2009.

[7] MUJICA, J. - *Complex Analysis in Banach Spaces*, North-Holland Math. Stud., **120**, Amsterdam, 1986.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

Existência de solução para uma classe singular de sistemas elípticos hamiltonianos em $\mathbb{R}^2$

Manassés de Souza*

O objetivo deste trabalho é estabelecer a existência de solução fraca não-trivial para seguinte classe de sistemas elípticos

$$\begin{cases} -\Delta u + b(x)u = g(v)|x|^{-\alpha}, & v > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2, \\ -\Delta v + b(x)v = f(u)|x|^{-\beta}, & u > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{0.1}$$

onde Δ é o operador de Laplace, $\alpha,\ \beta \in [0,2)$ e $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que satisfaz as seguintes condições:

(B_1) Existe uma constante positiva b_0 tal que $b(x) \geq b_0$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$;

(B_2) a função $[b(x)]^{-1}$ pertence ao espaço $L^1(\mathbb{R}^2)$.

Aqui, motivados por uma versão singular da desigualdade de Trudinger-Moser [4,6,7], estamos interessados em tratar não-linearidades $f(s)$ e $g(s)$ que envolvem crescimento exponencial subcrítico e crítico, os quais definimos a seguir.

Dizemos que $f(s)$ tem *crescimento subcrítico* em $+\infty$ se $\lim_{s\to+\infty} f(s)e^{-\gamma s^2} = 0$ para todo $\gamma > 0$ e $f(s)$ tem *crescimento crítico* em $+\infty$ se existe $\gamma_0 > 0$ tal que

$$\lim_{s\to+\infty} f(s)e^{-\gamma s^2} = \begin{cases} 0, & \forall\, \gamma > \gamma_0, \\ +\infty, & \forall\, \gamma < \gamma_0. \end{cases}$$

Denominaremos γ_0 o expoente crítico de $f(s)$.

Para o nosso estudo assumiremos também as seguintes condições sobre as não linearidades:

(H_1) $f, g : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ são funções contínuas e $f(s) = g(s) = 0$ para todo $s \leq 0$;

(H_2) existe um número $\theta > 2$ tal que para todo $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$0 < \theta F(s) := \theta \int_0^s f(t)dt \leq sf(s) \quad \text{e} \quad 0 < \theta G(s) := \theta \int_0^s g(t)dt \leq sg(s);$$

(H_3) existem constantes $M > 0$ e $s_1 > 0$ tais que para todo $s \geq s_1$,

$$0 < F(s) \leq Mf(s) \quad \text{e} \quad 0 < G(s) \leq Mg(s).$$

Para aplicarmos métodos variacionais consideraremos o seguinte subespaço de $H^1(\mathbb{R}^2)$

$$Z = \Big\{ u \in H^1(\mathbb{R}^2) : \int_{\mathbb{R}^2} b(x)u^2 dx < \infty \Big\},$$

o qual é um espaço de Hilbert quando munido do seguinte produto interno

$$\langle u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} [\nabla u \nabla v + b(x)uv]dx, \quad u, v \in Z,$$

*Departamento de Matemática, UFPB, PB, Brasil, manasses@mat.ufpb.br

para o qual associamos a norma $\|u\| := \langle u, u\rangle^{1/2}$.

Usando as condições (B_1) e (B_2) temos que

$$\lambda_{1,\beta} := \inf_{u\in Z\setminus\{0\}} \frac{\|u\|^2}{\int_{\mathbb{R}^2} u^2/|x|^\beta dx} > 0 \quad \text{e} \quad \lambda_{1,\alpha} := \inf_{u\in Z\setminus\{0\}} \frac{\|u\|^2}{\int_{\mathbb{R}^2} u^2/|x|^\alpha dx} > 0.$$

É fácil de ver que o problema

$$-\Delta u + b(x)u = \frac{\lambda_{1,\beta} u + 2ue^{u^2}}{|x|^\beta}, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

não tem soluções positivas. Assim, é natural considerarmos a seguinte condição adicional próximo a origem:

(H_4) $\limsup_{s\to 0^+} \frac{2F(s)}{s^2} < \lambda_{1,\beta}$ e $\limsup_{s\to 0^+} \frac{2G(s)}{s^2} < \lambda_{1,\alpha}$.

Seja $E = Z \times Z$ o espaço produto. Aqui, pesquisaremos soluções fracas de (0.1), isto é, funções $(u, v) \in E$ tais que para todo $(\psi, \varphi) \in E$

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\nabla u\nabla\psi + b(x)u\psi + \nabla v\nabla\varphi + b(x)v\varphi]dx - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u)\varphi}{|x|^\beta} dx - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{g(v)\psi}{|x|^\alpha} dx = 0.$$

Teorema 0.1. *Assuma que $g(s)$ tem crescimento subcrítico, $f(s)$ tem crescimento subcrítico ou crítico, e que as condições $(B_1) - (B_2)$, $(H_1) - (H_2)$ e (H_4) são satisfeitas. Então (0.1) possui uma solução fraca não-trivial $(u, v) \in E$.*

Teorema 0.2. *Assuma que $g(s)$ e $f(s)$ têm crescimento crítico com mesmo expoente crítico γ_0, $\alpha = \beta$, e que as condições $(B_1) - (B_2)$, $(H_1) - (H_4)$ são satisfeitas. Além disso, assuma que existem constantes $p > 2$ e $C_p > 0$ tais que*

$$f(s) \geq C_p s^{p-1} \quad \text{e} \quad g(s) \geq C_p s^{p-1} \quad \text{para todo} \quad s \geq 0.$$

Então (0.1) possui uma solução fraca não-trivial $(u, v) \in E$.

Observação: Existe uma extensa bibliografia tratando sistemas elípticos hamiltonianos em $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 3$ (cf. [2] e suas referências). O caso $n = 2$ para sistemas hamiltonianos envolvendo crescimento exponencial do tipo Trudinger-Moser em domínios limitados foi estudado em [1] e em todo o espaço $\mathbb{R}^2$ em [5]. Aqui, complementamos os resultados dos trabalhos [1,5]. Para mais detalhes cf. [3].

Referências

[1] D. G. de Figueiredo, J. M. do Ó and B. Ruf. - *Critical and subcritical elliptic systems in dimension two*, Indiana Univ. Math. J., **53** (2004), 1037–1054.

[2] D. G. de Figueiredo and P. L. Felmer. - *On superquadratic elliptic systems*, Trans. Amer. Math. Soc., **343** (1994), 97–116.

[3] M. de Souza. - *On a singular Hamiltonian elliptic systems involving critical growth in dimension two*, Communications on Pure and Applied Analysis, **5** (2012), 1859–1874.

[4] M. de Souza and J. M. do Ó. - *On a class of singular Trudinger-Moser type inequalities and its applications*, Mathematische Nachrichten, **284** (2011), 1754–1776.

[5] J. M. do Ó, Liliane A. Maia and Elves A. B. Silva. - *Standing wave solutions for system of Schrodinger equations in $\mathbb{R}^2$ involving critical growth*, preprint.

[6] J. Moser. - *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Indiana Univ. Math. J., **20** (1970/71), 1077–1092.

[7] N. S. Trudinger. - *On the embedding into Orlicz spaces and some applications*, J. Math. Mech., **17** (1967), 473–484.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

ASYMPTOTIC STABILITY OF THE WAVE EQUATION ON COMPACT MANIFOLDS AND LOCALLY DISTRIBUTED VISCOELASTIC DISSIPATION

MARCELO M. CAVALCANTI*, VALÉRIA N. DOMINGOS CAVALCANTI† AND
FLÁVIO A. FALCÃO NASCIMENTO‡

Let $(M, \mathbf{g})$ be a n-dimensional compact Riemannian manifold with boundary where $\mathbf{g}$ denotes a Riemannian metric of class C^∞. We denote by ∇ the Levi-Civita connection on M and by Δ the Laplace-Beltrami operator on M.

In this paper, we investigate the stability properties of function $u(x,t)$ which solves the following partially viscoelastic problem:

$$\begin{cases} u_{tt} - \kappa_0 \Delta u + \int_0^t g(t-s)\mathrm{div}[a(x)\nabla u(s)]\, ds = 0 & \text{on } M \times]0,\infty[\,, \\ u = 0 & \text{on } \partial M \times]0,\infty[\,, \\ u(0) = u^0, \quad u_t(0) = u^1, & x \in M, \end{cases} \tag{1}$$

where $\kappa_0 > 0$, g is the relaxation function and $a(x) \geq a_0 > 0$ in a subset $\omega \subset M$. Assuming that the well known geometric control condition (ω, T_0) holds and supposing that the kernel of the memory term g is dominated by a function which decays exponentially to zero,we show that the solutions to the corresponding partial viscoelastic model decay exponentially to zero no matter how small is the viscoelastic portion of the material.

1 Mathematical Results

Assuming that u is the unique global weak solution to problem (1), we define the corresponding energy functional by

$$E_u(t) = \frac{1}{2}\int_M \left[|u_t(x,t)|^2 + \kappa(x,t)\,|\nabla u(x,t)|^2 + a(x) g \Box \nabla u\right] dM, \tag{2}$$

where

$$\kappa(x,t) := \kappa_0 - a(x)\int_0^t g(s)\, ds.$$

Every weak solution of (1) satisfies the following identity

$$E_u(t_2) - E_u(t_1) = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_M a(x)\left[g' \Box \nabla u - g(t)|\nabla u|^2\right] dM dt, \quad \text{for all } t_2 > t_1 \geq 0, \tag{3}$$

and therefore the energy is a non increasing function of the time variable t. The following assumptions are required:

Assumption 1: The relaxation function $g : [0,\infty[\to \mathbb{R}_+$ is a C^1 nonincreasing function and satisfies

$$||a||_{L^\infty}\int_0^\infty g(s)\, ds < \kappa_0.$$

In addition, let us assume that

$$g'(t) \leq -\xi g(t), \quad \text{for all } t \geq 0,$$

for some $\xi > 0$.

*Department of Mathematics , UEM, PR, Brasil, mmcavalcanti@uem.br
†Department of Mathematics , UEM, PR, Brasil, e-mail: vndcavalcanti@uem.br
‡Department of Mathematics , UECE-FAFIDAM, CE, Brasil, e-mail: flavio.falcao@uece.br

Assumption 2:

If M is a manifold with boundary, we assume that the geodesics of $\overline{M}$ have no contact of infinite order with ∂M. Let ω' be an open subset of M and consider that there exists $T_0 > 0$ such that every geodesic traveling at speed 1 and issued at $t = 0$ meets $\overline{\omega'}$ in a time $t < T_0$.

We also assume that $a \in C^\infty(M)$ is a nonnegative function such that

$$a(x) \geq a_0 > 0 \quad \text{ in } \omega,$$

where ω is an open subset verifying $\omega \supset \overline{\omega'}$.

Our aim is to prove that the following inequality

$$E_u(T) \leq C \left\{ \int_0^T \int_M a(x) \left[-g' \Box \nabla u + g(t) |\nabla u|^2 \right] dM \, dt \right\} \tag{4}$$

holds for all $T > T_0$, provided the initial (u_0, u_1) data is taken in bounded sets of $H_0^1(M) \times L^2(M)$. Since $E_u(t)$ is a non-increasing function, according to (3), it is enough to prove the following result:

Lemma 1.1. *Let us assume the assumptions 1 and 2. Then, for all $T > T_0$ and for all $L > 0$, there exists a positive constant $C = C(T, L)$ such that the inequality*

$$E_u(0) \leq C \left\{ \int_0^T \int_M a(x) \left[-g' \Box \nabla u + g(t) |\nabla u|^2 \right] dM \, dt \right\} \tag{5}$$

holds for every solution u of problem (1) provide that the initial data satisfies

$$E_u(0) \leq L. \tag{6}$$

Theorem 1.1. *Let us assume that assumptions 1 and 2 are in place. Then, for all $L > 0$, there exist positive constants C_0, γ (which depend on L) such that every weak solution of problem (1) satisfies*

$$E_u(t) \leq C_0 e^{-\gamma t} E_u(0), \quad \textit{for all } t \geq T_0,$$

provided that $(u_0, u_1) \in H_0^1(M) \times L^2(M)$ and $E_u(0) \leq L$, where $E_u(t)$ is given in (2).

Proof From Lemma 1.1 and from the fact that $E_u(t)$ is a non-increasing function, (4) is in place. On the other hand, from (3) and proceeding verbatim as in Munõz-Rivera and Salvatierra [4], we obtain our main result.

References

[1] C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch-*Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary.* SIAM J. Control Optim. 30 (1992), no. 5, 1024–1065.

[2] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, R. Fukuoka and J. A. Soriano - *Uniform Stabilization of the wave equation on compact surfaces and locally distributed damping*, Methods Appl. Anal. 15(4) (2008), 405-426.

[3] M. Daoulatti, I. Lasiecka and D. Toundykov- *Uniform energy decay for a wave equation with partialy supported nonlinear boundary dissipation without growth restrictions*, DCDS-S, 2, 1(2009).

[4] J. E. Munõz Rivera, A. Peres Salvatierra *Asymptotic behaviour of the energy in partially viscoelastic materials.* Quart. Appl. Math. 59 (2001), no. 3, 557578.

[5] J. Rauch - M. Taylor- *Decay of solutions to n ondissipative hyperbolic systems on compact manifolds.* Comm. Pure Appl. Math. 28(4) (1975), 501-523 .

[6] E. Zuazua- *Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping.* Comm. Partial Differential Equations 15 (1990), no. 2, 205–235.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

ALGUNS ASPECTOS DA TEORIA DO POTENCIAL EM PROBLEMAS INVERSOS DE RECONSTRUÇÃO DE FONTE.

MARCELO L. S. RAINHA* & NILSON C. ROBERTY† & CARLOS J. S. ALVES ‡

O trabalho consiste em encontrar as fontes características $f = \chi_W$ para o problema de Poisson definido em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ com $W \subset \Omega$, uma vez que são conhecidos os dados de Dirichlet e Neumann na fronteira $\Gamma = \partial\Omega$, a qual deve ser regular por partes:

$$\begin{cases} \Delta u = f & ;\ \Omega \\ u = g & ;\ \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi & ;\ \Gamma \end{cases} \tag{0.1}$$

onde $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ e $f \in L^2(\Omega)$. Daí, pode-se notar a não linearidade do problema, uma vez que $g = g(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ e $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ com $\mathbf{x} \in \Gamma$. É uma consequência da relação de ortogonalidade [2], pg 77, Lema 4.1.2 que o problema inverso está associado à seguinte equação integral:

$$\int_\Omega f v dV = \int_\Gamma \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\Gamma, \tag{0.2}$$

para qualquer que seja $v \in H_\Delta(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega);\ \Delta v = 0\}$. Prova-se em [3] que o dado de Dirichlet sobre frenteira Γ não nos fornece informações adicionais para a resolução do problema inverso, assim sem perda de generalidade, podemos considerar $g \equiv 0$. Desta forma a equação integral acima podem ser reescritas:

$$\int_\Omega f v dV = \int_\Gamma -v\varphi d\Gamma. \tag{0.3}$$

Então existe $K > 0$ constante, tal que

$$|\mu(W_1) - \mu(W_2)| \leq K\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}, \tag{0.4}$$

onde μ é a medida de Lebesgue usual. Esta nota nos inspirou a desenvolver aspectos teóricos da teoria do potencial relacionados com uma segmentação quadricular de fonte levando a um algorítimo de implementação numérica com base em programação não linear afim de reconstruir a fonte χ_W.

1 Resultados

Definição 1.1. *Seja $\mathcal{A}$ a σ-álgebra de Borel definida sobre Ω e $\mathcal{U} := \{U \in \mathcal{A}\ ;\ \Delta u = \chi_U,\ u \in L^2(\Omega)\}$. Definimos $\Psi : \mathcal{U} \to H^{-1/2}(\Gamma)$ como sendo:*

$$\Psi(U) = \phi = \frac{\partial u}{\partial \nu} \quad \forall\ U \in \mathcal{U} \tag{1.5}$$

onde u é solução do problema direto associado,

$$\begin{cases} \Delta u = \chi_U\ ; & \Omega \\ u = 0\ ; & \Gamma \end{cases}.$$

*Departamento de Matemática e Estatística , UNIRIO, RJ, Brasil, marcelo.rainha@uniriotec.br
†PEN, UFRJ, RJ, Brasil, e-mail: nilson@con.ufrj.br
‡IST, Lisboa, Portugal, e-mail: carlos.alves@math.ist.utl.pt

Teorema 1.1. *Sejam* $W_0,\ W_n \in \mathcal{U}$ *com* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\varphi_0,\ \varphi_n,\ \varphi_{n0},\ \varphi_{0n} \in H^{-1/2}(\Gamma)$ *tal que* $\Psi(W_0) = \varphi_0$, $\Psi(W_n) = \varphi_n$, $\Psi(W_0 \backslash W_n) = \varphi_{0n}$ $\Psi(W_n \backslash W_0) = \varphi_{n0}$. *Se* $\{\varphi_n\}$ *converge fraco para* φ_0 *em* $H^{-1/2}(\Gamma)$ *então, existe* $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ *e uma subsequência de* $\{\varphi_{0n}\}$ *e outra de* $\{\varphi_{n0}\}$ *tal que ambas convergem fraco estrela (ou na norma) para* φ *em* $H^{-1/2}(\Gamma)$. *Mais ainda,*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(W_0 \backslash W_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(W_n \backslash W_0) = \int_\Gamma v^* \varphi d\Gamma \tag{1.6}$$

onde $v^* = \Psi(1)$.

O método consiste em resolver o problema direto em um "hiper quadrado"de referência $\hat{Q} = [-1,1]^d$. Sendo B_n uma coleção de quadrados adequadamente tomados, definimos φ_n como sendo a função que satisfaz;

$$\|\varphi - \varphi_n\| = \min_{B\in\mathcal{B}_n} \{\|\varphi - \Psi(B)\|\} \tag{1.7}$$

Note que para cada n por construção teremos apenas um número finito de Bs a considerar, portanto, existe $B_n \in \mathcal{B}_n$ tal que $\varphi_n = \Psi(B_n)$ satisfazendo tal condição.

Teorema 1.2. *Sejam* $W \in\subset \Omega$ *um conjunto aberto, conexo, limitado e* $\{\varphi_n\}$ *a sequência de funções construída em (1.7). Então* φ_n *converge fraco para* φ *em* $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Prova A ideia da prova é supor que este fato é falso, portanto existem $\varepsilon_0 > 0$, $v_0 \in H^{1/2}(\Gamma) \cong [H^{-1/2}(\Gamma)]^*$ com $\|v_0\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = 1$ e uma subsequência $\{\varphi_{n_k}\}$ de $\{\varphi_n\}$ tal que

$$\left| \int_\Gamma v_0(\varphi_{n_k} - \varphi) \right| > \varepsilon_0, \tag{1.8}$$

para todo n_k. Construiremos então uma função $\varphi_0 \in \mathcal{B}_{n_k}$ para k suficientemente grande, tal que $\|\varphi - \varphi_{n_k}\| > \|\varphi - \varphi_0\|$ o que é uma contradição por hipótese.

Observação 1.1. *A convergência fraca que exigimos no Teorema (1.2) é no sentido usual,* $\lim_{k\to\infty} < v, \varphi_k >_{H^{1/2}\times H^{-1/2}} =< v, \varphi_k >$ *para toda* $v \in H^{1/2}(\Gamma)$. *O Teorema (1.2) é uma de nossas contribuições para a literatura, em resumo, mostramos que o conjunto formado por* $\bigcup_n^\infty \left\{\varphi_B = \Psi(B) \in H^{-1/2}(\Gamma);\ \ B \in \mathcal{B}_n\right\}$ *é denso no conjunto de dados de Neumann associado ao problema inverso (0.1), isto é, é denso em* $Rg(\Psi)$.

Para o caso particular quando W é um aberto estrelado limitado de $\mathbb{R}^3$, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 1.1. *Sejam* B_n *os conjunto correspondente a* φ_n, *no caso especial em que* W *é um subconjunto de* Ω, *aberto, estrelado e limitado de* $\mathbb{R}^3$. *Então* B_n *converge para* W

A demonstração desta proposição é uma consequência do Teorema de Novikov, que pode ser encontrada no artigo original [6] ou em [2].

Referências

[1] A. El Badia and T. Ha Duong, - Some remarks on the problem of source identification from boundary measurements, *Inverse Probl.* **14** (1998).

[2] V. Isakov, - Inverse Problems for Partial Differential Equations, *Applied Mathematical Sciences,* **Vol. 127** , Springer-Verlag, New York, (1998).

[3] C.J.S. Alves, N. Martins, N.C. Roberty,- On the identification of star shape sources from boundary measurements using a reciprocity functional, *Inverse Probl. Sci. Eng.* **17(2)** (2009).

[4] M.L. Rainha and N. C. Roberty,- Integral and Variational Formulations for the Helmholtz Equation Inverse Source Problem, *Mathematical Problems in Engineering.* (2012)

[5] Lions, j. l. and Magenes, e. - Non homogeneous boundary value problems and applications, *Springer Verlag, Berlin,* (1972).

[6] Novikoff P 1938 Sur le probleme inverse du potentiel *Dokl. Akad. Nauk* **18** 165

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

A REMARK ON TAUBERIAN POLYNOMIALS

MARIA D. ACOSTA* & PABLO GALINDO† & LUIZA A. MORAES‡

Throughout X, Y and Z denote Banach spaces over the scalar field $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$). The closed unit ball of X is denoted B_X. The (topological) dual of X is represented by X'. We denote by $\mathcal{L}(^N X, Y)$ the *space of all continuous N-linear mappings* from X^N into Y. In case $N = 1$ we will simply write $\mathcal{L}(X, Y)$. Recall that a mapping P from X into Y is a N-homogeneous polynomial if there exists a $B \in \mathcal{L}(^N X, Y)$ such that $P(x) = B(x, \cdots, x)$. The *space of all continuous N-homogeneous polynomials* from X into Y is denoted by $\mathcal{P}(^N X, Y)$. Whenever Y is the scalar field, we omit it in the notation.

A (bounded linear) operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ is said to be *Tauberian* if T^{tt} (the second adjoint of T) maps elements outside X into elements outside Y. Tauberian operators were introduced to investigate a problem in summability theory from an abstract point of view. Afterwards, they have made a deep impact on the isomorphic theory of Banach spaces. A vast literature has been devoted to them; we refer to the recent monograph [2] by M. González and A. Martínez-Abejón for details.

A common trend in Infinite Dimensional Complex Analysis is to consider non linear versions of notions that appear in Linear Analysis. In [1] we introduced the concept of Tauberian polynomial and studied some ideas and results behind the notion of Tauberian operator for vector valued homogeneous polynomials.

Let $\widehat{\otimes}_{N,s,\pi} X$ denote the completion of the N-fold symmetric tensor product of X, endowed with the projective norm. It is well known that $\widehat{\otimes}_{N,s,\pi} X$ is a Banach space whose (topological) dual is linearly isomorphic to the space $\mathcal{P}(^N X)$ and, even more, that the space $\mathcal{L}(\widehat{\otimes}_{N,s,\pi} X, Y)$ is linearly isomorphic to the space $\mathcal{P}(^N X, Y)$. More explicitly, each $P \in \mathcal{P}(^N X, Y)$ can be identified with a linear operator $L_P \in \mathcal{L}(\widehat{\otimes}_{N,s,\pi} X, Y)$ such that $P(x) = L_P(x \otimes \ldots \otimes x)$ for every element x in X. Very often L_P is called the linearization of P. Thus, if $\delta : X \to \widehat{\otimes}_{N,s,\pi} X$ is the N-homogeneous polynomial given by $\delta(x) = x \otimes \ldots \otimes x$, we have $P = L_P \circ \delta$ for every $P \in \mathcal{P}(^N X, Y)$. In this note we are going to show that a polynomial P is Tauberian whenever L_P is Tauberian but the converse is not true. This means that the set of the polynomials whose linearization is a Tauberian operator is "smaller" then the set of the Tauberian polynomials.

1 Mathematical Results

The following definition was introduced in [1] and provides a natural extension of the concept of Tauberian operator (see [3] or [2])to the vector valued homogeneous polynomials.

Definition 1.1. We say that $P \in \mathcal{P}(^N X, Y)$ is **Tauberian** if its Aron-Berner extension $\tilde{P}$ satisfies $\tilde{P}(X'' \setminus X) \subset Y'' \setminus Y$ or, equivalently, $\tilde{P}^{-1}(Y) \subset X$.

The (homogeneous) Tauberian polynomial were introduced and studied in [1], where a number of examples showing that the behavior of Tauberian polynomials differs from that of Tauberian operators were presented.

Clearly, if X is reflexive we have that every $P \in \mathcal{P}(^N X, Y)$ is Tauberian for every Banach space Y and $N \in \mathbb{N}$. It is also clear that if Y is reflexive and X is not reflexive then no $P \in \mathcal{P}(^N X, Y)$ is Tauberian. Moreover, it is not difficult to show that no weakly compact homogeneous polynomial defined in a non reflexive space can be Tauberian.

*Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada, Granada, Espanha, e-mail: dacosta@ugr.es
†Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Valencia, Valencia, Espanha, e-mail: galindo@uv.es
‡Instituto de Matemática , Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, e-mail: luiza@im.ufrj.br

Example 1.2. The mapping $\delta : x \in X \to x \otimes \ldots \otimes x \in \widehat{\otimes}_{N,s,\pi} X$ is a Tauberian polynomial

Let $\tilde{\delta} : X'' \longrightarrow (\widehat{\otimes}_{N,s,\pi} X)''$ be the Aron-Berner extension of δ. Firstly we notice that for $x'' \in X''$ and every $P \in \mathcal{P}(^N X)$, we have that $\tilde{\delta}(x'')(L_P) = \widetilde{L_P \circ \delta}(x'') = \tilde{P}(x'')$ since $L_P \circ \delta = P$.

Now we prove that δ is Tauberian. Assume that $x'' \in X'' \backslash \{0\}$ satisfies $\tilde{\delta}(x'') \in \widehat{\otimes}_{N,s,\pi} X$. In order to check that $x'' \in X$ it is enough to show that x'' is weak*-continuous on $B_{X'}$ (see for instance [4, 2.7.9 Corollary]). Take any net $(x'_\alpha) \subset B_{X'}$ that converges to $x' \in B_{X'}$ in the weak*-topology of X'. Let $y' \in X'$ be any element in X' such that $x''(y') \neq 0$. Then the bounded net $(P_\alpha) = \big((y')^{N-1} x'_\alpha\big) \subset \mathcal{P}(^N X)$ converges pointwise on X to the polynomial $P = (y')^{N-1} x'$, that is, $L_{P_\alpha}(x \otimes \cdots \otimes x) \to L_P(x \otimes \cdots \otimes x)$ for all $x \in X$.

From the facts that the net $\big(L_{P_\alpha}\big)$ is bounded in $\big(\widehat{\otimes}_{N,s,\pi} X\big)'$ and the linear space generated by $\{x \otimes \cdots \otimes x : x \in X\}$ is norm-dense in $\widehat{\otimes}_{N,s,\pi} X$, we deduce that the net $\big(L_{P_\alpha}\big)$ converges to L_P in the weak*-topology of $\big(\widehat{\otimes}_{N,s,\pi} X\big)'$. Since $\tilde{\delta}(x'') \in \widehat{\otimes}_{N,s,\pi} X$, we get $\tilde{\delta}(x'')(L_{P_\alpha}) \to \tilde{\delta}(x'')(L_P)$. The polynomials P_α and P are finite products of functionals and so $\widetilde{P_\alpha}(x'') = x''(y')^{N-1} x''(x'_\alpha)$ and $\tilde{P}(x'') = x''(y')^{N-1} x''(x')$. Bearing in mind also that $\tilde{\delta}(x'')(L_P) = \tilde{P}(x'')$, we have that $x''(y')^{N-1} x''(x'_\alpha) \to x''(y')^{N-1} x''(x')$. Since $x''(y') \neq 0$, this gives $x''(x'_\alpha) \to x''(x')$. We have shown that x'' is weak*-continuous on $B_{X'}$ as wanted. Therefore, $x'' \in X$.

Proposition 1.3. *If $P \in \mathcal{P}(^N X, Y)$ is a Tauberian polynomial and $T \in L(Y, Z)$ is a Tauberian operator, then $T \circ P$ is a Tauberian polynomial. A partial converse holds: if $T \circ P$ is a Tauberian polynomial, then P itself is Tauberian.*

Corollary 1.4. *If the linearization of $P \in \mathcal{P}(^N X, Y)$ is Tauberian, then P itself is Tauberian.*

Proof. Recall that by Example 1.2 the polynomial mapping $\delta : x \in X \to x \otimes \ldots \otimes x \in \widehat{\otimes}_{N,s,\pi} X$ is Tauberian. Thus $P = L_P \circ \delta$ is Tauberian. ☐

However, it may happen that the linearization of a Tauberian polynomial is not Tauberian as the next example points out.

Example 1.5. We first recall that $\ell_2 \widehat{\otimes}_{s,\pi} \ell_2$ contains a copy ℓ_1 (see [5, Example 2.10]). Then the quotient mapping $q : \ell_2 \widehat{\otimes}_{s,\pi} \ell_2 \to \frac{\ell_2 \widehat{\otimes}_{s,\pi} \ell_2}{\ell_1}$ is not Tauberian since its kernel is not reflexive [2, Proposition 2.3.2]. However, the polynomial $x \in \ell_2 \to P(x) := x \otimes x + \ell_1 \in \frac{\ell_2 \widehat{\otimes}_{s,\pi} \ell_2}{\ell_1}$ is Tauberian and the linearization of P is q since $P(x) = q(x \otimes x)$.

References

[1] M. D. Acosta, P. Galindo e L. A. Moraes, *Tauberian polynomials*, submetido.

[2] M. González and A. Martínez-Abejón, *Tauberian Operators*, Operator Theory: Advances and Applications, vol. **194**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2010.

[3] N.J. Kalton and A. Wilansky, *Tauberian operators on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **57** (1976), 251–255.

[4] R.E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory,* Graduate Texts in Mathematics, vol. **183**, Springer-Verlag, New York, 1998.

[5] R.A. Ryan, *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, London, 2002.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

Soluções Envoltórias para EDPs com Dois Conjuntos Disjuntos De Variáveis

Maria Lewtchuk Espindola*

20/08/2012

1 Introdução

O papel desempenhado pelas soluções envoltórias em EDOs e EDPs é muito importante, principalmente em matemática aplicada. No caso das EDPs as soluções envoltórias são as hipersuperfícies que envolvem uma das famílias de hipersuperfícies dadas pelas soluções completas. O intuito desse artigo é desenvolver e discutir as soluções envoltórias de EDPs que envolvem dois conjuntos disjuntos de variáveis. Esse tipo de EDPs aparecem na Mecânica Hamiltoniana, desde que o espaço de fase é composto por dois conjuntos disjuntos de variáveis canônicas: as coordenadas e os momenta generalizados, veja, por exemplo, Leech ou Goldstein [1]. No procedimento de Hamiltonização alternativo mostramos que o Hamiltoniano é definido por uma EDP e que a função Hamiltoniana clássica é a solução envoltória da solução linear nos momenta, veja em Espindola [2]. Como a técnica de determinação das envoltórias foi utilizada sem demonstração no procedimento de Hamiltonização a intenção desse artigo é fundamentar o que foi utilizado estendendo o procedimento de determinação das soluções envoltórias para o caso do espaço de fase e demonstrando que em determinados casos essa solução não existe.

2 Soluções Envoltórias para Funções que Dependem de Dois Conjuntos Disjuntos de Variáveis

Como temos interesse na aplicação de soluções envoltórias na Mecânica Hamiltoniana e o espaço de fase é composto por dois conjuntos de variáveis, vamos considerar esses conjuntos de variáveis como $x = x_1, ..., x_n$ e $y = y_1, ..., y_n$ e a função $u = u(x, y)$. A EDP fica dada por

$$u(x, y) = f(p, q, x, y), \tag{2.1}$$

onde $p = p_1, ..., p_n$, $p = \partial u/\partial x$ e $q = q_1, ..., q_n$, $q = \partial u/\partial y$. Escrevendo as soluções gerais como

$$\varphi(u, x, y) = 0, \tag{2.2}$$

obtemos uma família de soluções completas como

$$\varphi(u, x, y, a, b) = 0, \tag{2.3}$$

onde $a = a_1, ..., a_n$ e $b = b_1, ..., b_n$ são constantes. Impondo as condições de envoltória, veja Sneddon [3], obtemos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_i} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial b_i} = 0^1, \tag{2.4}$$

Então a solução do sistema de equações (2.3) e (2.4) determina a solução envoltória.

*Departamento de Matemática - CCEN, UFPB, PB, Brasil, mariia@mat.ufpb.br
[1] Repeated indices mean sum.

Vamos supor que podemos explicitar a solução geral

$$u(x,y) = \phi(x,y), \tag{2.5}$$

logo desta temos a solução completa

$$u(x,y) = \phi(x,y,a,b). \tag{2.6}$$

As condições de envoltória equações (2.4) são

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_i} = 0, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial b_i} = 0. \tag{2.7}$$

Sendo que este sistema de $2n$ equações determina a e b e portanto a solução envoltória de (2.6).

Se, por outro lado, a equação (2.1) for linear em p (ou q) e não depender q (ou de p) então esta equação não possui solução envoltória. Por exemplo, considere a EDP

$$u(x,y) = (y_i - r_i(x))\, q_i + s(x), \tag{2.8}$$

[2]cuja solução geral, se $y_i \neq r_i$, será

$$u = s + \psi_i\, (y_i - r_i), \tag{2.9}$$

onde $\psi_i = \psi_i(c)$ e $c = c_1, ..., c_n$.

Considerando agora a solução completa equivalente a (2.3)

$$\varphi = s + a_i(y_i - r_i) - u = 0, \tag{2.10}$$

onde a_i são constantes arbitrárias, a imposição da condições de envoltória - equação (2.7), resulta em $y_i - r_i = 0$, contrariando a hipótese anterior. Portanto no caso especificado a equação diferencial parcial não possui envoltória.

3 CONCLUSÃO GERAL

A demonstração da inexistência em determinados casos da solução envoltória é o que fundamenta a necessidade de uma abordagem que difere da de Hamilton para os sistemas singulares como, por exemplo, a desenvolvida por Dirac [4] e por Espindola [2]. Este artigo poderia ser generalizado estendendo a um número n de conjuntos disjuntos de variáveis. Assim como para o caso continuo envolvendo portanto EDPs variacionais. No procedimento de Hamiltonização alternativa que desenvolvemos para teorias de campo utilizamos esses conceitos.

- Citando referência: Espindola [5]

Referências

[1] Leech, J. W. - *Mecânica Analítica.*, Ed. USP, SP, 1971; Goldstein, H. - *Classical Mechanics*, Addison Wesley, 1971.

[2] Espindola, M. L., Espindola, O. e Teixeira, N. L. - Hamiltonization as a Two Fold Procedure. *Hadronic J.*, **28**, 807-810, 1986; Espindola, M. L., Espindola, O. e Teixeira, N. L. - Hamiltonization for Singular and Non Singular Mechanics. *J. Math. Phys.*, **9**, 121-124, 1986; Espindola, M. L., Espindola, O. e Teixeira, N. L. - Hamiltonization for Singular and Non Singular Mechanics. *J. Math. Phys.*, **9**, 121-124, 1986; Espindola, M. L., Espindola, O. e Teixeira, N. L. - Direct Hamiltonization. *Hadronic J. Suppl.*, **4**, 369-373, 1996; Espindola, M. L. - Hamiltonizações Alternativas. *Tese de Doutorado*, DF/UFRJ, 1993.

[3] Sneddon, I. - *Elements of Partial Differential Equations*, McGraw-Hill, Kogakusha, 1957.

[4] Dirac, P. A. M. - Generalized Hamiltonian Dynamics. *Can. J. Math.*, **2**, 129-148, 1950.

[5] Espindola, M. L., Espindola, O. e Teixeira, N. L. - Two Fold Hamiltonization for Field Theory. *Hadronic J.*, **10**, 83-87, 1987.

[2]Repeated indices mean sum.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

COEFICIENTE DE FUJITA PARA UMA EQUAÇÃO DO CALOR COM NÃO LINEARIDADE NÃO LOCAL

M. LOAYZA*

Consideramos o seguinte problema parabólico com não linearidade não local no tempo

$$\begin{cases} u_t - \Delta u & = \int_0^t k(t,s)|u|^{p-1}u(s)ds, \text{ em } (0,T)\times\Omega \\ u(t,x) & = 0 \text{ em } (0,T)\times\partial\Omega \\ u(0,x) & = u_0(x) \text{ em } \Omega \end{cases} \tag{0.1}$$

com $u_0 \in C_0(\Omega)$, $p > 1$ e $k \in C(\mathcal{K})$ onde $\mathcal{K} = \{(t,s); 0 \le s \le t\}$. Estudamos os casos em que $\Omega = \mathcal{R}^N$ e quando Ω é um domínio limitado com fronteira regular. Esta equação modela fenômenos de difussão com memória e tem sido considerado por vários autores, por exemplo [2]-[5].

Além da continuidade vamos supor que a função k satisfaz a seguinte propriedade

$$k(\lambda t, \lambda s) = \lambda^{-\gamma}k(t,s) \tag{0.2}$$

para todo $\lambda > 0$ e $(t,s) \in \mathcal{K}$. Com esta hipótese é possível observar que se u é uma solução de (0.1), então a função $\lambda^{(4-2\gamma)/(p-1)}u(\lambda^2 t, \lambda x)$ é também uma solução de (0.1) para cada $\lambda > 0$.

O trabalho é motivado por [1], na qual o problema (0.1) é considerado no caso particular em que $k(t,s) = (t-s)^{-\gamma}$ com $s < t$ and $\gamma \in [0,1)$. Note que k satisfaz a propriedade (0.2). No trabalho [1] é mostrado que o coeficiente de Fujita para o problema (0.1), quando $\Omega = \mathcal{R}^N$, é dado por

$$p^* = \max\{\frac{1}{\gamma}, 1 + \frac{4-2\gamma}{(N-2+2\gamma)^+}\}$$

e no caso em que Ω é limitado $p^* = 1/\gamma$. Especificamente, eles mostraram que se $1 < p \le p^*$, então toda solução não trivial e não negativa, explode num tempo finito. Se $p > p^*$, então existem $\varepsilon > 0$ e $r^* > 1$ de tal maneira que para $u_0 \in C_0(\Omega) \cap L^{r^*}(\Omega)$ com $\|u_0\|_{r^*} < \varepsilon$, então a solução de (0.1) é global.

Os resultados obtidos estendem os resultados obtidos em [1].

1 Resultados

Em relação à existência de solução do problema (0.1) temos o seguinte resultado.

Teorema 1.1. *Sejam $p > 1$, $k \in C(\mathcal{K})$ verificando (0.2) com $\gamma < 2$ e $\int_0^1 k(1,\eta)d\eta < \infty$. Dado $u_0 \in C_0(\Omega)$, existe $T > 0$ e uma única função $u \in C([0,T], C_0(\Omega))$ solução de (0.1). Além disso, u pode ser estendido a um intervalo maximal $[0, T_{max})$ de tal maneira que ou $T_{max} = \infty$(solução global) ou $T_{max} < \infty$ e $\lim_{t\to T_{max}} \|u(t)\|_\infty = \infty$(solução que explode num tempo finito).*

O principal resultado quando $\Omega = \mathcal{R}^N$ é o seguinte

Teorema 1.2. *Sejam $p > 1$, $l \in \mathcal{R}$, $k \in C(\mathcal{K})$ verificando (0.2) com $\gamma < 2$ e $\int_0^1 k(1,\eta)d\eta < \infty$.*

1. *Suponha que $\liminf_{\eta\to 1} k(1,\eta) > 0$ and $\liminf_{\eta\to 0} \eta^l k(1,\eta) > 0$ se $1-\gamma+l > 0$. Se $u_0 \ge 0$, $u_0 \ne 0$ e alguma das seguintes condições é válida: $\frac{p}{p-1}(2-\gamma) \ge \frac{N}{2} + \min\{2-\gamma, 1-l\}$, $1-\gamma \ge \frac{p-1}{p}\min\{2-\gamma, 1-l\}$, então u explode num tempo finito.*

*Departamento de Matemática , UFPE, PE, Brasil, miguel@dmat.ufpe.br

2. *Suponha que* $\limsup_{\eta\to 0}\eta^l k(1,\eta) < \infty$ *com* $l < 1$. *Se* $\frac{p}{p-1}(2-\gamma) < \frac{N}{2} + \min\{2-\gamma, 1-l\}$, $1-\gamma < \frac{p-1}{p}\min\{2-\gamma, 1-l\}$ *e* $u_0 \in L^r(\mathcal{R}^N)$ *com* $r = N(p-1)/(4-2\gamma)$, *então existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* u *é global quando* $\|u_0\|_r < \varepsilon$.

No caso em que Ω é limitado temos.

Teorema 1.3. *Sejam* $p > 1$, $l \in \mathcal{R}$, $k \in C(\mathcal{K})$ *verificando (0.2) com* $\gamma < 2$ *e* $\int_0^1 k(1,\eta)d\eta < \infty$.

1. *Suponha que* $\liminf_{\eta\to 1} k(1,\eta) > 0$ *and* $\liminf_{\eta\to 0}\eta^l k(1,\eta) > 0$ *se* $1-\gamma+l > 0$. *Se* $u_0 \geq 0$, $u_0 \neq 0$ *e* $1-\gamma \geq \frac{p-1}{p}\min\{2-\gamma, 1-l\}$, *então* u *explode num tempo finito.*

2. *Suponha que* $\limsup_{\eta\to 0}\eta^l k(1,\eta) < \infty$ *se* $\gamma \leq 1$. *Se* $1-l\}$, $1-\gamma < \frac{p-1}{p}\min\{2-\gamma, 1-l\}$, *então* u *é global quando* $\|u_0\|_\infty$ *é suficientemente pequeno.*

Prova: *Existência de soluções globais.* Usamos o argumento do ponto fixo no espaço

$$K(T) = \{u \in L^\infty((0,\infty), L^\eta(\mathcal{R}^N)), t^\alpha\|u(t)\| \leq \delta\} \text{ no caso } \Omega = \mathcal{R}^N \text{ e}$$

$$K(T) = \{u \in L^\infty((0,\infty), L^\infty(\Omega)); (1+t)^\alpha\|u(t)\|_\infty \leq \delta\} \text{ no caso em que } \Omega \text{ é um domínio limitado.}$$

Os valores de η, α e δ são escolhidos apropriadamente.

Soluções que explodem num tempo finito. Para obter uma estimativa superior da solução estudamos primeiro a E.D.O $w' + aw \geq b\int_0^t k(t,s)w^p(s)ds$. Depois(No caso $\Omega = \mathcal{R}^N$) estudamos o comportamento da equação autosimilar obtida de (0.1) via a seguinte mudança de variáveis $u(t,x) = t^{-(2-\gamma)/(p-1)}v(s,y), s = \ln t$ e $y = x/\sqrt{t}$. Assim, é necessário obter estimativas inferiores da solução da equação

$$v_s + Lv - \nu v = \int_0^1 k(1,\eta)\eta^{-p\nu}v^p(s+\ln\eta, y/\sqrt{\eta})d\eta$$

onde $Lv = -\Delta v - \frac{y}{2}\cdot\nabla v$ e $\nu = (2-\gamma)/(p-1)$.

No caso em que Ω é limitado a situação é simples, pois multiplicando a equação (0.1) por $\varphi_1 > 0$, a primeira autofunção, com $\int_\Omega \varphi_1 = 1$, associada ao primeiro autovalor $\lambda_1 > 0$ e usando a desigualdade de Jensen obtemos $w' + \lambda_1 w \geq \int_0^t k(t,s)w^p(s)ds$ onde $w(t) = \int_\Omega u(t)\varphi_1$.

Referências

[1]T. CAZENAVE, F. DICKSTEIN AND F. WEISSLER, An equation whose Fujita critical exponent is not given by scaling, *Nonlinear Anal.* 68, (2008), 862-874.
[2]H. BELLOUT, Blow-up of solution of parabolic equations with nonlinear memory, *J. Diff. Eq.* 70, (1987), 42-68.
[3]A. KHOZANOV, Parabolic equations with nonlocal nonlinear source, *Siberian Math. J.* 35, (1994), 545-556.
[4]P. SOUPLET, Blow-up in nonlocal reaction-diffusion equations, *SIAM J. Math. Anal.* 29, (1998), 1301-1334.
[5]P. SOUPLET, Nonexistence of global solution to some differential inequalities of the second order and applications, *Portugaliae Mathematica* 52, (1995) 289-299.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

Exponential dichotomy for delay linear non-autonomous equations

MIGUEL V. S. FRASSON* & PATRICIA H. TACURI†

1 Introduction

We are concerned with the study of the asymptotic behavior of solutions to non-autonomous linear retarded functional differential equations, and an important tool to study it is the concept of exponential dichotomies, which has been studied with much emphasis in the last fifty years by many authors ([1]–[7]). This concept was introduced by Perron in his classical paper on stability in a finite-dimensional setting [7]. In this work we consider the IVP

$$\dot{x}(t) = L(t)x_t, \ \ t \geq s, \quad x_s = \varphi \in X \tag{1.1}$$

where $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ and $L(t)$ is a linear operator from the Banach space $X = C([-h,0], \mathbb{C}^n)$ into $\mathbb{C}^n$. In the spirit of the paper of Latushkin et. al [4] if we want to write system (1.1) as an abstract evolutionary system in a Banach space X,

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t), \quad u(s) = \varphi \in D(A(s)), \quad t \geq s, \quad s,t \in \mathbb{R}$$

then, by the general theory we have that

$$D(A(s)) = \left\{ \phi \in X : \dot{\phi} \in X, \dot{\phi}(0) = L(s)\phi \right\}, \quad A(s)\phi = \dot{\phi}.$$

Thereafter, notice that the Equation (1.1) enters in the definition of de domain of A, this means that to change Equation (1.1) is to change the domain of the infinitesimal generator. This would lead to technical complications if we want to relate solutions of various equations to each other by means of a variation-of-constants formula. In order to solve this problem and principally to ensure the existence of an evolutionary family of operators $\{U(t,s)\}_{t\geq s}$ which gives a solution x_t of (1.1), we use the (sun-star) $\odot *$-framework developed by Clement et. al [3] which gives a variation-of-constant formula that is the core of a the good perturbation theory. This theory is a kind of extrapolation theory for strongly continuous semigroups and we can use it for evolutionary system with two parameters under some conditions. Using these tools we show that the solution of the system (1.1) has the property of exponential dichotomy if and only if the corresponding inhomogeneus equation

$$\dot{x}(t) = L(t)x_t + f(t), \ \ t \geq s \tag{1.2}$$

has a unique solution for every bounded forcing function f. Where we say that an evolution family $\{U(t,s)\}_{t\geq s}$ have *exponential dichotomy on* $\mathbb{R}$ (with a constant $\alpha > 0$) if there exists a projection-valued function $P : \mathbb{R} \to B(X)$, such that the function $t \mapsto P(t)\varphi$ is continuous and bounded for each $\varphi \in X$, and for some constant $M = M(\alpha) > 0$, the following holds:

1. $P(t)U(t,s) = U(t,s)P(s)$;
2. The restriction $U(t,s)|_{\operatorname{Im} Q(s)}$ is invertible as an operator from $\operatorname{Im} Q(s)$ to $\operatorname{Im} Q(t)$;
3. $\|U(t,s)P(s)\| \leq Me^{-\alpha(t-s)}$, for $s \leq t$;
4. $\|U(t,s)Q(s)\| \leq Me^{-\alpha(s-t)}$, for $t \leq s$.

*ICMC USP-São Carlos, SP, Brasil, frasson@icmc.usp.br
†ICMC, USP-São Carlos, SP, Brasil, e-mail: ptacuri@icmc.usp.br

2 Mathematical Results

In our first theorem we show a correspondence between solutions of the initial value problem for the nonautonomous inhomogeneous retarded functional diferential equation (1.2) with solutions of the abstract integral equations (AIE)

$$U(t,s)\varphi = T_0(t-s)\varphi + \int_s^t T_0^{\odot *}(t-\tau)C(\tau)U(\tau,s)\varphi d\tau \tag{2.3}$$

where T_0 is a $\mathcal{C}_0$-semigroup defined by the solution of the initial-value prototype problem $\dot{x} = 0$ and $C(t) : X \to X^{\odot *}$ is defined by $C(t)\varphi = B(t)\varphi + (f(t), 0)$ where $B(t) : X \to X^{\odot *}$ is a family of bounded operators given by $B(t)\varphi = (L(t)\varphi, 0)$.

Teorema 2.1. *Let, for X, $T_0(t)$ and $C(t)$ as described above, $U(t,s)$ denote the evolutionary system defined by the AIE (2.3). Then $x(t)$ defined by*

$$x(s+\theta) = \varphi(\theta), \quad -h \leq \theta \leq 0, \tag{2.4}$$

$$x(t) = (U(t,s)\varphi)(0), \quad t \geq s \tag{2.5}$$

satisfies (1.2), *and conversely, if x is a solution of the RFDE* (1.2) *satisfying the initial condition* (2.4), *then for $t \geq s$ and $-h \leq \theta \leq 0$, we have*

$$(U(t,s)\varphi)(\theta) = \begin{cases} \varphi(t-s+\theta), & t+\theta \leq s, \\ x(t+\theta), & t+\theta \geq s. \end{cases} \tag{2.6}$$

The next theorem is our main result.

Teorema 2.2. *The evolutionary family $\{U(t,s)\}_{t\geq s}$ has an exponential dichotomy if and only if for every $f \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ there exists a unique bounded solution $x_t \in C([-h,0], \mathbb{C}^n)$ to the following integral equation*

$$x_t = T_0(t-s)\varphi + \int_s^t T_0^{\odot *}(t-\tau)C(\tau)x_\tau d\tau.$$

References

[1] Coppel, W. A. *Dichotomies in stability theory.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 629. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978.

[2] Coppel, W. A. *Stability and asymptotic behavior of differential equations.* D. C. Heath and Co., Boston, Mass. 1965

[3] Clément, Ph.; Diekmann, O.; Gyllenberg, M.; Heijmans, H. J. A. M.; Thieme, H. R. *Perturbation theory for dual semigroups. I. The sun-reflexive case.* Math. Ann. 277 (1987), no. 4, 709–725.

[4] Latushkin, Y.; Randolph, T.; Schnaubelt, R., *Exponential dichotomy and mild solutions of nonautonomous equations in Banach spaces*, J. Dynam. Differential Equations 10 (1998), no. 3, 489–510.

[5] Massera, J. L.; Schäffer, J. J. *Linear differential equations and functional analysis. I.* Ann. of Math. (2) 67 1958 517–573.

[6] Maĭzel, A. D. *On stability of solutions of systems of differential equations.* Ural. Politehn. Inst. Trudy 51 (1954), 20–50.

[7] Perron, O. *Die Stabilittsfrage bei Differentialgleichungen.* Math. Z. 32 (1930), no. 1, 703–728.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

COEFFICIENT DETERMINATION FOR THE STATIONARY ANISOTROPIC BOLTZMANN TRANSPORT EQUATION

NILSON C. ROBERTY * & ROBERTO M. G. SILVA † & MARCELO L. S. RAINHA ‡

We consider the boundary value problem for the linear stationary Boltzmann Transport equation

$$\begin{cases} \pm\omega\cdot\nabla\phi^{\pm}(\omega,x)+q(x)\phi^{\pm}(\omega,x)-K_f[\phi^{\pm}](\omega,x)=0 & \text{in } S\times\Omega\ ; \\ \phi^{\pm}(\omega,\sigma)=g^{\mp}(\omega,\sigma) & \text{on } \Sigma^{\mp}. \end{cases} \tag{0.1}$$

where Ω is a bounded and convex domain of $\mathbb{R}^d$, $d=2,3$, $S=S^{d-1}$ denotes the unit sphere of $\mathbb{R}^d$, $\Sigma^{\pm}=\{(\omega,\sigma)\in S\times\partial\Omega : \pm\omega\cdot\nu(\sigma)>0\}$ is the influx (outflux) boundary of $S\times\Omega$, $\phi^{\pm}$ are the direct and adjoint solutions, respectively, and if directions in the adjoint problem are reversed, $U[\phi^-]=\phi^-(-\omega,x)$, it can be treated with the same methodology used to solve the direct problem. The coefficient $q(x)$ is the extinction due to absorption or scattering and K_f is the integral operator with Kernel

$$K_f[\phi](t,\omega,x)=\int_S f(x,\omega\cdot\omega')\phi(t,\omega',x)d\omega'=\int_S\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k-1}{4\pi}q_k(x)P_{k-1}(\omega\cdot\omega')\phi(t,\omega',x)d\omega',$$

which describes the gain of particles in the direction ω due to scattering from other directions. This series is absolute and uniformly convergent and P_{k-1} is the Legendre polynomials of degree $k-1$.

The combination of extinction and scattering defines the operator R^{-1}, by $R^{-1}[\phi]:=q(x)\phi-K_f[\phi]$ in $S\times\Omega$ that will be inverted only for appropriate values of the coefficient q and f.

The solution ϕ^+ defines the flux in the outflux boundary Σ^+ by

$$\phi^+=g^+\text{on }\Sigma^+\ ;$$

and the Cauchy data for the problem,

$$C_R=\{(g^-,g^+)\text{ on }\Sigma^-\times\Sigma^+\},$$

characterizes the graph of the Albedo operator (the influx to outflux mapping), which we denote by $\mathcal{A}_R$.

In the inverse problem, we ask if it is possible to determine the coefficients of operator R, that is, the functions q and f from the a priori knowledge of the Albedo operator. The problem is the investigation of the following mapping

$$\Phi : R\longrightarrow\mathcal{A}_R.$$

Note that when particle gain from scattering is neglected, that is, if $q_k=0,\forall k$, this is a transmission tomography problem, in which the Cauchy data (g^-,g^+) are mathematical expression for the collimated source and detector data used in the x-ray reconstruction of the coefficient q . In this generalized problem, additional coefficients $q_k, k=1,2,...,$ are reconstructed by measurements of non-collimated data which are usually neglected in the transmission problem. In reality, there are, at least, two orders of magnitude between the two kinds of data and new technological strategies for the treatment of this problem are waiting for solutions. In the work Roberty Nunes 2011, [4], we introduce algorithms marching over an polygonal mesh with elements consistent with the propagation

*Programa de Engenharia Nuclear , Coppe/UFRJ, RJ, Brasil, nilson@con.ufrj.br
†Programa de Engenharia Nuclear , Coppe/UFRJ, RJ, Brasil, rmamud@con.ufrj.br
‡Departamento de Matemática e Estatística , UNIRIO, RJ, Brasil, marcelo.rainha@uniriotec.br

directions of the particle (radiation) flux. They are based on solution of an equivalent system of ordinary differential equations along characteristics. Analysis of this kind of system can be found in R. Precup 2002, [1], Vladimirov 1961, [5], and the implemented algorithm can be used to solve the direct problem. The direct problem can also be solved using the spherical harmonics methodology introduced by Vladimirov 1961, [5], that converts equations (0.1) in a system of elliptic partial differential equations that can be solved with finite elements method. In N. Roberty 2012, [2], it is introduced an methodology for parameter determination in second order elliptic systems that is based on splinting the over determinate data on the boundary to formulates two well posed direct initial mixed boundary values problems for each Cauchy data on the boundary. The Nelder-Mead Simplex method is used to search for parameters that minimizes the defined discrepancy functional. In this work we modify this methodology in order to reconstruct parameters associated with the model coefficients q, q_k. For the same operator equation (0.1), we suppose that some parameters are unknown, but admits also that the boundary conditions are known in many boundary value system of problems indexed by $p = 1, ..., nP$, $C_R^{(p)} = \{(g^-, g^+)^{(p)} \text{ on } \Sigma^- \times \Sigma^+\}$ characterizes some values of the Albedo operator graph (the influx to outflux mapping) $\mathcal{A}_R$.

1 Mathematical Results

The set of nP fully prescribed Cauchy data can be used to formulated an non unique set with $2 \times nP$ well posed direct problems: For $p = 1, ..., nP$, to find $\phi^{+(p)}$, (resp. $U[\phi^{-(p)}]$) such that they solve problem (0.1).

Teorema 1.1. *Suppose that in the model given by operator (0.1) the Cauchy data $C_R^{(p)}$ are consistent with an unique solution. Then, for all $p = 1, ..., nP$, we have*

$$\phi^{+(p)}(\omega, x) = \phi^{-(p)}(\omega, x) = U[\phi^{-(p)}](-\omega, x) \ , \ (\omega, x) \in S \times \Omega. \tag{1.2}$$

The idea now is explore the fact that these two sets of solutions indexed by $-$ and $+$ must be, under ideal conditions, equal for each problem p and create some discrepancy function that measures observed differences for guess values of the parameters. For a set of parameters $a_1, ..., a_{nA}$, where nA is the total number of parameters associated with all coefficients q, q_k, some norm in the solution space for the direct problems can be adopted as measures , that is,

$$d(a_1, ..., a_{nA}) = \sum_{p=1}^{nP} ||\phi^{+(p)}(a_1, ..., a_{nA}, .) - \phi^{-(p)}(a_1, ..., a_{nA}, .)||_V \tag{1.3}$$

where V denote the chosen norm. We now posed the Optimization Problem: In the guess set of parameters $P = \{(a_1, ..., a_{nA}) : P \subset \mathbb{R}^{nA}\}$, to find $(\overline{a}_1, ..., \overline{a}_{nA})$ that minimizes the discrepancy (1.3).

References

[1] PRECUP, R. - *Methods in Nonlinear Integral Equations*, Kluwer Academic Publishers, 2002.

[2] ROBERTY, N. C. - Parameters reconstruction in second order elliptic equations, *3th International Conference on Engineering Optimization, EngOpt 2012*, july 1-5, 2012, Rio de Janeiro.

[3] CIPOLATTI, R., MOTA, C. M. AND ROBERTY, N. C. - Stability Estimates for an Inverse Problem for the Linear Boltzmann Equation, *Revista Matemática Complutence*, 19, n.1, 113-132, 2006.

[4] ROBERTY, N. C. AND NUNES, R. C. - Consistent Algorithms Marching Along Characteristics for the Numerical Solution of the Boltzmann Equation. *Journal of Applied Mathematics*, Volume 2011 (2011), Article ID 126309.

[5] VLADIMIROV, V.S. *Mathematical in the one-velocity theory of particle transport* Translate from Transactions of the V.A. Steklov Mathematical Institute, 61, 1961. AECL1661-Atomic Energy of Canada Limited, Chalk River, Ontario, January 1963.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

GLOBAL SOLUTIONS OF CARRIER SYSTEM WITH DISSIPATIVE TERM AND SMALL DATA

O. A. Lima* & M.R.Clark† & A.O.Marinho‡

Abstract

In this work we establish the existence of local solutions for a dissipative system of Carrier type with arbitrary initial data in Sobolev spaces. Moreover under condition of small data we prove the existence of global solution and its stabilization.

1 Introduction

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an open and bounded domain with regular boundary Γ and let $\sum = \Gamma \times (0,T)$ be the lateral boundary of the cylinder $Q = \Omega \times (0,T)$, where $T > 0$ is a real number. The Carrier equation

$$u'' - M(|u|^2)\Delta u = f$$

was deduced in [4]. Here Δ is the Laplacian operator in $\mathbb{R}^n$, $|\, u \,|$ is the $L^2(\Omega)$ norm given by $|\, u \,|^2 = \int_\Omega |\, u(x) \,|^2 \; dx$ and $M : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ is a given function.

In [2] the authors studied the Carrier equation with dissipative term

$$u'' - M(|u|^2)\Delta u + u' = f \quad \text{in} \quad Q = \Omega \times (0,T)$$

with Dirichlet boundary condition

$$u = 0 \text{ in } \textstyle\sum$$

and initial conditions

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x) \text{ in } \Omega.$$

The existence of global solutions with small initial data $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ and $u_1 \in L^2(\Omega)$ was proved.

In C. L. Frota et all [1] the authors studied the Carrier equation with the non-linearity $g(u') = |u'|^\rho u'$. They have got the algebraic decay of the energy. Several authors have been studied the Carrier equation, see for example the references in [1] and [3].

This work is concern with the existence of local and global solutions for the following dissipative Carrier system and the uniform stabilization of the associated energy:

$$\begin{cases} u'' - M(|u|^2 + |v|^2)\Delta u + u' = f \\ v'' - M(|u|^2 + |v|^2)\Delta v + v' = g \\ u|_{\sum} = v|_{\sum} = 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \; u'(x,0) = u_1(x) \\ v(x,0) = v_0(x), \; v'(x,0) = v_1(x) \end{cases} \tag{1.1}$$

where f, g are given real functions and M is a real positive function.

*Departamento de Matemática , UEPB, PB, Brasil, osmundomatematica@yahoo.com.br
†Departamento de Matemática, UFPI, PI, Brasil, Partially supported by PROCAD-CAPES e-mail: marcondesclark@ufpi.edu.br
‡Departamento de Matemática, UFPI, PI, Brasil, Partially supported by PROCAD-CAPES e-mail: marinho@ufpi.edu.br

2 Results

Our result on the existence of local weak solution:

Theorem 2.1. *If $u_0, v_0 \in H_0^1(\Omega)$; $u_1, v_1 \in L^2(\Omega)$ and $f, g \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ then there exists $0 < t^* < T$ and a local weak solution $\{u\,,\,v\}$ of (1.1) in the class*

$$u, v \in C^0(0,t^*;L^2(\Omega)) \;\; \textit{and} \;\; u', v' \in C^0(0,t^*;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.1}$$

In order to state the result on the existence of global solution and the uniform stabilization of the associated energy, for each par of function $\{u\,,\,v\}$ satisfying (2.1) we set

$$E(t) = \frac{1}{2}\{|\Delta^{-1/2}u'|^2 + |\Delta^{-1/2}v'|^2 + 2\widehat{M}(|u|^2 + |v|^2)\}\,. \tag{2.2}$$

Whence we have the following result:

Theorem 2.2. *Suppose the initial data u_0 and u_1 satisfy*

$$||u_1||^2_{H^{-1}} + ||v_1||^2_{H^{-1}} + 2\widehat{M}(|u_0|^2 + |v_0|^2) \le \varepsilon \;\; \textit{for some} \; 0 < \varepsilon < 1 \tag{2.3}$$

and $f = g = 0$. Then there exists a unique global weak solution $[u, v]$ of the system (1.1) and the associated energy decays exponentially to zero as time goes to infinity, that is, there exist positive constants C_0 and γ such that

$$E(t) \le C_0\, e^{-\gamma t} \;\; \textit{for all} \;\; t \ge 0. \tag{2.4}$$

References

[1] C.L.Frota, A.T. Cousin, N.A. Larkin - Existence of Global Solutions and Energy Decay for the Carrier Equation with Dissipative Term, Differential Integral Equation, Vol 12, pp 453-469, 1999.

[2] M.L.Oliveira, O.A.Lima - Global Solutions for small data of the Carrier equation with dissipative term-proceeding of 46 Semninrio Brasileiro de Análise-SBA, Vol 1, pp 504-513.

[3] A.T.Cousin, C.L.Frota, N.A.Larkin, L.A. Medeiros - on the abstract model of the Kirchhoff-Carrier equation, Communications and Applied Analysis, (1) Vol 3, pp 389-404, 1997.

[4] G.F.Carrier - On the nonlinear vibration problem of the elastic string, Q.J. Appll. Math,. 3(1945), 157-165.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

NONHOMOGENEOUS ASYMMETRIC FLOW UNDER FRICTION-TYPE BOUNDARY CONDITIONS

P. BRAZ E SILVA*, M. A. ROJAS-MEDAR† & F. V. SILVA ‡

We show the solvability of an initial-boundary value problem for the system of equations describing the motion of a viscous nonhomogeneous asymmetric fluid in a domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n = 2$ or $3)$ having a C^2 boundary. We extend results by Tani *et al.* (Proc. Royal Soc. Edinburgh, **130A** (2000), 827–835) to a class of non-Newtonnian fluids whose stress tensor is asymmetric. As far as we know, for the type of fluid we consider there are no previous results for the slippage of the fluid on the boundary.

1 Introduction

We are concerned with an initial-boundary value problem for the following system of equations

$$\begin{gathered} \rho_t + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \\ \rho[v_t + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}] - (\mu + \mu_r)\Delta \vec{v} + \nabla p = 2\mu_r \nabla \times \vec{w} + \rho \vec{f}, \qquad \nabla \cdot \vec{v} = 0, \\ \jmath \rho[w_t + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{w}] - (c_a + c_d)\Delta \vec{w} - (c_0 - c_a + c_d)\nabla(\nabla \cdot \vec{w}) + 4\mu_r \vec{w} = 2\mu_r \nabla \times \vec{v} + \rho \vec{g} \end{gathered} \tag{1.1}$$

in $Q_T = (0, T) \times \Omega, T > 0$, with boundary conditions

$$\rho(0) = \rho_0, \ \vec{v}(0) = v_0, \ \vec{w}(0) = w_0, \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} \vec{v} \cdot \vec{n} = 0, \quad \vec{v} = \widetilde{K}[\vec{n} \cdot \mathbf{T} - (\vec{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{n})\vec{n}] \\ \vec{w} = \dfrac{\alpha}{2} \nabla \times \vec{v} \end{cases} \quad \text{on } \Gamma_T. \tag{1.3}$$

Equations in (1.1) represent conservation of linear momentum, the continuity equation, the incompressibility and the conservation of angular momentum respectively. The parameters $\mu, \mu_r, c_0, c_a, c_d, \jmath > 0$ are viscosities which satisfy $c_0 - c_a + c_d > 0$. The unknowns are ρ, the denstity; $\vec{v}$ and $\vec{w}$, the fields of velocity and rotation of particles and the pressure, p. The fields $\vec{f}$ and $\vec{g}$ are, respectively, given external sources of linear and angular momenta densities. The above model, named the nonhomogeneous micropolar fluid model, contains the incompressible, density dependent Navier-Stokes system as a particular case ($\mu_r = 0, \vec{w} \equiv 0$). More details on the derivation of the model may be found in the papers [3, 2].

In the boundary conditions (1.3), $\vec{n}$ denotes the unit normal to Γ, $\widetilde{K}(x, t)$ is a nonnegative function defined in $\Gamma_T = [0, T] \times \partial\Omega$, $\alpha \in [0, 1]$ is a real parameter and $\mathbf{T} = -p\delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i}) + \mu_r(v_{i,j} - v_{j,i}) - 2\mu_r \varepsilon_{mij} w_m, \ i, j, k, m = 1, 2, 3$. The boundary conditions $(1.3)_1$ for the velocity $\vec{v}$ are sort of slip boundary conditions widely studied in the context of Navier-Stokes fluids in both stationary and evolutionary regimes [6, 4]. We remark that the flow region $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 2, 3$, need not to be bounded. The general form of (1.3) has been employed by Kaloni for a cylindrical domain, under suitable symmetry assumptions in an attempt to explain the so-called "wrong way round" behavior of electrically conducting fluids observed in experiments, see [5] and references therein. For a general flow, however,

*Departamento de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Recife, PE (email: `pablo@dmat.ufpe.br`) This author was partially supported by CNPq Grant 306144/2009-3.

†Departamento de Ciencias Básicas, Universidad del Bío-Bío, Campus Fernando May, Casilla 447, Chillán, Chile (email: `marko@ueubiobio.cl`) This author was partially supported by DGI-MEC (Spain) Grant MTM2009-1292 and Fondecyt-Chile Grant 1080628.

‡Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 74001-970, Brazil (email: `fabios@mat.ufg.br`).

on demanding Kaloni's boundary condition (1.3), the following boundary integral that appears upon testing $(1.1)_3$ with $\vec{w}$

$$\int_\Gamma \Big((c_a + c_d)\vec{w}\cdot\nabla\vec{w} + (c_0 - c_a + c_d)(\nabla\cdot\vec{w})\vec{w} + 2\mu_r(\vec{v}\times\vec{w})\Big)\cdot\vec{n}\, ds$$

lacks a meaning. One possible way to give it a meaning is by taking $\alpha = 0$ in $(1.3)_3$, as we do in the sequel. In this regard is also worth of mention the work of Bayada *et al.* [1], in which they obtained a well-posed boundary value problem for homogeneous fluids ($\rho \equiv$ const.) obeying a linearization of (1.1) and the boundary condition $(c_a + c_d)(\nabla\times\vec{w})\times\vec{n} = 2\mu_r\beta(\vec{v}-\vec{s})\times\vec{n}, \quad \vec{w}\cdot\vec{n} = 0$, where $\vec{s}$ is the velocity of the boundary and $\beta\in\mathbb{R}$ is a parameter controlling the slippage at the wall.

2 Notations and statement of results

By $L_q(\Omega)$, $1 \le q \le \infty$, we denote the usual Lebesgue spaces with norm $\|\cdot\|_{L_q(\Omega)}$ and for $k = 0, 1, 2, \dots$ we denote by $W_q^k = \{u \in L_q(\Omega) \mid \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_{L_q(\Omega)}\}$, the Sobolev spaces modelled in $L_q(\Omega)$ and $W_q^{2,1}(Q_T) = \{u \in L_q(Q_T) \mid \|u\|_{W_q^{2,1}(Q_T)} = \|u_t\|_{L_q(Q_T)} + \sum_{|\alpha|\le 2}\|D_x^\alpha u\|_{L_q(Q_T)} < \infty\}$ with $Q_T = \Omega\times(0,T)$ and $D_x^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. We also consider the Slobodetskii-Besov space $W_q^{2-2/q}(\Omega)$ whose norm is

$$\|u\|^q_{W_q^{2-2/q}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le 1}\|D_x^\alpha u\|^q_{L_q(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=1}\int_\Omega\int_\Omega \frac{|D_x^\alpha u(x) - D_y^\alpha u(y)|^q}{|x-y|^{n+q-2}}\,dxdy.$$

At last, we denote $K = (1+\mu_1\widetilde{K})^{-1}$. Our main results are stated below.

Theorem 2.1. *Let $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $r > n$, $\rho_0(x)\in C^1(\overline{\Omega}), 0 < m \le \rho_0(x) \le M < \infty$, $f(x,t), g(x,t) \in L_r(Q_T), \widetilde{K}(x,t) \in C^\beta([0,T]; W_r^{1-1/r}(\Gamma)), 0 < \beta \le 1$ and $\vec{v}_0(x), \vec{w}_0(x) \in W_r^{2-2/r}(\Omega)$, $\nabla\cdot\vec{v}_0 = 0$, in Ω along with compatibility conditions between* (1.1) *and initial and boundary conditions* (1.2) *and* (1.3)*. Then*

- *i) for $n = 3$, there exists $T^*\in(0,T]$ such that* (1.1)-(1.3) *has an unique solution $\rho\in C^1(\overline{Q}_{T^*}), \vec{v}, \vec{w} \in W_r^{2,1}(Q_{T^*}), \nabla p \in L_r(Q_{T^*})$.*
- *ii) for $n = 2$, assuming in addition that $\sup_{t\in[0,T]}\left\|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j \frac{K(\cdot,t)}{1-K(\cdot,t)}\right\|_{L_2(\Gamma_t)} < \infty$, $j = 0, 1$, where $\Gamma_t = \{x\in\Gamma \mid K(x,t)\ne 1\}\ne\emptyset$, the solution of problem* (1.1)-(1.3) *above exists on the interval* $[0,T]$.

References

[1] G. BAYADA; N. BENHABOUCHA; M. CHAMBAT, New models in micropolar fluid and their application to lubrication, *Math. Models Methods Appl. Sci.* **15** (3) (2005), 343–374.

[2] D. CONDIFF; J. DAHLER, Fluid mechanical aspects of antisymmetric stress, *Physics of Fluids* **7** (6) (1964), 824–854.

[3] A-C. ERINGEN, Theory of micropolar fluids, *J. Math. Mech.* **16** (1966), 1–18.

[4] S. ITOH; A. TANI, The initial value problem for the non-homogeneous Navier-Stokes equations with general slip boundary condition, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **130** (2000), 827–835.

[5] P. KALONI, Some remarks on the boundary conditions for magnetic fluids, *Internat. J. Engrg. Sci.* **30** (10) (1992), 1451–1457.

[6] V. SOLONNIKOV; S. ŠCADILOV, On a boundary value problem for a stationary system of Navier-Stokes equations, *Proc. Steklov Inst. Math.* **125** (1973), 186–199.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

L^p-SOLUTIONS OF THE STOCHASTIC TRANSPORT EQUATION

Pedro Catuogno * & Christian Olivera†

We establish global existence and uniqueness of solution of the transport linear equation with a stochastic perturbation. Namely, we consider the following equation:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t,x) + b(t,x)\nabla u(t,x) + \nabla u(t,x)\frac{dB_t}{dt} = 0, \\ u(0,x) = u_0(x) \in L^p(\mathbb{R}^d), \end{cases} \tag{0.1}$$

where $B_t = (B_t^1, ..., B_t^d)$ is a standard Brownian motion in $\mathbb{R}^d$ and the stochastic integration is taken in the Stratonovich sense.

This equation has been treated for the case $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ (see [3] and [5]) via the stochastic characteristic method. Our aim here is to prove the existence, uniqueness and regularity when the initial data $u_0(x) \in L^p(\mathbb{R}^d)$ for $p \in [1,\infty)$. Some partial results are presented in [6], where the case $u_0(x) \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ was studied.

We prove existence and uniqueness of weak L^p-solution using the generalized Itô-Ventzel-Kunita formula (see Theorem 8.3 of [4]) and the results on existence and uniqueness for the deterministic transport linear equation (see for example [2].

1 Mathematical Results

We shall always assume that

$$b \in L^1([0,T],(L^1_{loc}(\mathbb{R}^d))^d) \tag{1.2}$$

We observe that this definition makes sense if we assume

$$b \in L^1([0,T],(L^q_{loc}(\mathbb{R}^d))^d) \tag{1.3}$$

where q is the conjugate exponent of p.

Teorema 1.1. *Let $p \in [1,\infty), u_0 \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Assume (1.2), (1.3) and that*

$$div\ b \in L^1([0,T], L^\infty(\mathbb{R}^d)) \tag{1.4}$$

Then there exits a weak L^p-solution u of the SPDE (0.1).

Proof Step 1 (auxiliary transport equation) We considerer the following auxiliary transport equation

$$\begin{cases} v_t + b(t,x+B_t)\nabla v(t,x) &= 0 \\ v(0,x) &= u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{1.5}$$

According to an easy modification of [2], Proposition II.1 (taking only test functions defined on $\mathbb{R}^d$) there is a solution $v \in L^\infty([0,T]\times\Omega, L^p(\mathbb{R}^d))$ of the equation (1.5) in the sense that it satisfies

$$\int v(t,x)\varphi(x)dx = \int u_0(x)\varphi(x)\ dx$$

*IMECC, UNICAMP, SP, Brasil, e-mail: colivera@ime.unicamp.br
†IMECC, UNICAMP, SP, Brasil, e-mail: colivera@ime.unicamp.br

$$+\int_0^t \int b(s, x+B_s)\nabla\varphi(x)v(s,x)\ dxds + \int_0^t \int div\ b(s, x+B_s)\varphi(x)v(s,x)\ dxds\ . \tag{1.6}$$

We observe that the process $\int v(t,x)\varphi(x)dx$ is adapted since it is the weak limit in $L^2([0,T]\times\Omega)$ of adapted processes, see [7] Chap. III for details.

Step 2 (Solution via Itô-Ventzel-Kunita formula)

Applying the Itô-Ventzel-Kunita formula to $F(y) = \int u(t,x)\varphi(x+y)dx$ (see Theorem 8.3 of [4]) we obtain that

$$\int v(t,x)\varphi(x+B_t)dx$$

is equal to

$$\int u_0(x)\varphi(x)\ dx + \int_0^t \int b(s,x+B_s)\nabla\varphi(x+B_s)v(s,x)\ dxds$$
$$+\int_0^t \int div\ b(s,x+B_s)\varphi(x+B_s)v(s,x)\ dxds$$
$$+\sum_{i=1}^d \int_0^t \int v(s,x)\frac{\partial}{\partial y_i}\varphi(x+B_s)dx \circ dB_s^i.$$

We note that $\frac{\partial}{\partial y_i}\varphi(x+B_s) = \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x+B_s)$. Thus

$$\int v(t,x)\varphi(x+B_t)dx = \int u_0(x)\varphi(x)\ dx$$
$$+\int_0^t \int b(s,x+B_s)\nabla\varphi(x+B_s)v(s,x)\ dxds + \int_0^t \int div\ b(s,x+B_s)\varphi(x+B_s)v(s,x)\ dxds$$
$$+\sum_{i=1}^d \int_0^t \int v(s,x)D_i\varphi(x+B_s)dx \circ dB_s^i. \tag{1.7}$$

From the equation (1.7) we follow that $u(t,x) := v(t,x-B_t)$ is a weak L^p-solution of the SPDE (0.1).

In [1] we prove existence, uniqueness and we give a Wong-Zakai principle for the stochastic transport equation (0.1), this principle is proved via stability properties of the deterministic transport linear equation.

References

[1] P. Catuogno, C. Olivera, *L^p-solutions of the stochastic transport equation*, aceite em Random Operator and Stochastic Equations, arXiv:1102.3076.

[2] R. DiPerna, P. L. Lions, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math., 98 (3) (1989) pp. 511-547.

[3] F. Flandoli, M. Gubinelli, E. Priola, *Well-posedness of the transport equation by stochastic perturbation*, Invent. Math., 180 (2010) pp. 1-53.

[4] H. Kunita, *Stochastic differential equations and stochastic flows of diffeomorphisms*, Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1097 (1982) pp. 143-303.

[5] H. Kunita,*Stochastic flows and stochastic differential equations.* Cambridge University Press, 1990.

[6] C. Le Bris, P.-L. Lions, *Renormalized solutions of some transport equations with partially $W^{1,1}$ velocities and applications*, Annali di Matematica, 183 (2003) 97-130

[7] E. Pardoux, *Equations aux drives partielles stochastiques non linaires monotones. Etude de solutions fortes de type Itô*, PhD Thesis, Universit Paris Sud, 1975.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

UNICIDADE DE SOLUÇÃO PARA UMA CLASSE DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS COM IMPULSOS E CONDIÇÃO DE FRONTEIRA

PIERLUIGI BENEVIERI* MÁRCIA FEDERSON† & ANDRÉ L. FURTADO‡

Neste trabalho, estabeleceremos condições que garantem unicidade de solução para uma classe de equações diferencias funcionais com retardo sujeitas a condições impulsivas e de fronteira.

Os momentos de impulso do problema que estudaremos constituem uma sequência finita e crescente de números reais positivos $t_1 < t_2 < \ldots < t_m < T$, onde $T > 0$ está fixado.

Se $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, diremos que uma função $\phi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é regrada caso existam e sejam finitos ambos os limites laterais

$$\lim_{t \to \tau^-} \phi(t), \quad \text{para todo } \tau \in (a, b]$$

$$\lim_{t \to \tau^+} \phi(t), \quad \text{para todo } \tau \in [a, b).$$

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, denotaremos por $G([a, b], \mathbb{R})$ o espaço de Banach constituído pelo conjunto das funções regradas $\phi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ munido com a norma usual do supremo. Com a notação $G^-([a, b], \mathbb{R})$ indicaremos o espaço das funções que pertencem a $G([a, b], \mathbb{R})$ e que são contínuas pela esquerda. Para mais detalhes sobre as funções regradas sugerimos a leitura de Franňková [1].

Seja $r \leq T$ uma constante positiva. Dados $t \in [0, T]$ e uma função $x : [-r, T] \longrightarrow \mathbb{R}$, denotamos por x_t a função definida por $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-r, 0]$. No que segue, a notação $\Delta x(t_k)$ representa a diferença, $\lim\limits_{t \to t_k^+} x(t) - x(t_k)$.

Nosso objeto de estudo será o problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x_t), & t \in [0, T] \setminus \{t_1, \ldots, t_m\} \\ \Delta x(t_k) = I(t_k, x(t_k)), & k \in \{1, \ldots, m\} \\ x(0) = x(T) = x_0, \end{cases} \tag{0.1}$$

onde $f : [0, T] \times G([-r, 0], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que, para cada $x \in G([-r, T], \mathbb{R})$, a função $[0, T] \ni t \mapsto f(t, x_t)$ pertence a $G^-([0, T], \mathbb{R})$. Além disso, $I \in C([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Diremos que uma função $x \in G([-r, T], \mathbb{R})$ é uma solução do problema (0.1), quando satisfaz a condição de fronteira $x(0) = x(T) = x_0$ e as seguintes condições são satisfeitas:

- x é diferenciável em cada intervalo $[0, t_1]$ e $(t_k, t_{k+1}]$, $k = 1, \ldots, m - 1$;
- x satisfisfaz a igualdade $x'(t) = f(t, x_t)$, em cada ponto $t \in [0, T] \setminus \{t_1, \ldots, t_m\}$;
- $\Delta x(t_k) = I(t_k, x(t_k))$, para cada $k = 1, \ldots, m$.

Considere a seguinte condição sobre a função f:

(H) Para cada $\xi \in G([-r, 0], \mathbb{R})$, existem $\delta = \delta(\xi) > 0$ e $L = L(\delta) > 0$ tais que se $\varphi, \psi \in G([-r, 0], \mathbb{R})$ forem tais que $\|\varphi - \xi\|_\infty < \delta$ e $\|\psi - \xi\|_\infty < \delta$, então

$$|f(t, \varphi) - f(t, \psi)| \leq L|\varphi(0) - \psi(0)|, \quad t \in [0, T].$$

*Instituto de Matemática e Estatística , USP, SP, Brasil, pluigi@ime.usp.br
†ICMC, USP, SP, Brasil, e-mail: federson@icmc.usp.br
‡ICMC, USP, SP, Brasil, e-mail: andrelf@icmc.usp.br

1 Resultado

Teorema 1.1. *Se a funcão f cumpre a condição (H) e $t_m + r < T$, então o problema (0.1) não possui duas soluções distintas coincidindo em $[-r, \sigma]$, qualquer que seja $\sigma \in (t_m + r, T)$.*

Prova: (Ideia) Suponha que f satisfaz a condição (H) e que $t_m + r < T$. Fixe $\sigma \in (t_m + r, T)$. Suponha que $x : [-r, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $y : [-r, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ sejam soluções de (0.1) que coincidem em $[-r, \sigma]$. Mostraremos que $x \equiv y$.

Defina o conjunto

$$A = \{t \in [0, T];\ x(s) = y(s) \text{ para } 0 \leq s \leq t\}.$$

Para obter o resultado, mostramos que as hipóteses implicam que $T \in A$. ■

Referências

[2] FRANŇKOVÁ, D. - Regulated functions, *Mathematica Bohemica*, **1**, 20-59, 1991.

[2] HALE, J. K. AND VERDUYN, S. M. - *Introduction to functional differential equations.* Applied Mathematical Sciences, 99. Springer-Verlag, 1993.

[3] LAKSHMIKANTHAM, V.; BAINOV, D. D. AND SIMEONOV, P. S. - *Theory of impulsive differential equations*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Singapure, 1989.

[4] MALLET-PARET, J.; NUSSBAUM, R. D. AND PARASKEVOPOULOS, P. - Periodic solutions for functional differential equations with multiple state-dependent time lags, *Journal of the Juliusz Schauder Center*, **3**, 101-162, 1994.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO PARA SISTEMA ASSINTOTICAMENTE LINEAR NÃO-AUTÔNOMO EM $\mathbb{R}^N$

RAQUEL LEHRER * & LILIANE A. MAIA†

Apresentamos resultados sobre a existência de solução para o sistema elíptico, assintoticamente linear no infinito, fracamente acoplado

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= \frac{u^2+v^2}{1+(s+a(x))(u^2+v^2)}u + \lambda v \\ -\Delta v + v &= \frac{u^2+v^2}{1+(s+a(x))(u^2+v^2)}v + \lambda u \end{aligned} \tag{0.1}$$

onde Δ denota o operador Laplaciano, u e $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 3$, λ e s são constantes tais que $0 < \lambda < 1$ e $0 < s < 1$. Além disso, $0 < s_0 < s + a(x) < s, \forall x \in \mathbb{R}^N$, com $\lim\limits_{|x|\to\infty} a(x) = 0$. Mostramos que tal sistema possui uma solução (u, v) não-nula.

Inicialmente, fazemos uma caracterização da solução de energia mínima do problema limite (autônomo)

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= \frac{u^2+v^2}{1+s(u^2+v^2)}u + \lambda v \\ -\Delta v + v &= \frac{u^2+v^2}{1+s(u^2+v^2)}v + \lambda u. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Consideramos que I_∞ é o funcional associado ao sistema (0.2) e definimos

$$m_\infty := \inf \left\{ I_\infty(u, v); (u, v) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N) \textit{ tal que } (u, v) \textit{ resolve } (0.2) \right\}.$$

Ainda, tomando $\Gamma_\infty := \left\{ \gamma \in C([0, 1], H^1(\mathbb{R}^N)); \gamma(0) = 0 \textit{ e } I_\infty(\gamma(1)) < 0 \right\}$, temos

$$c_\infty := \inf_{\gamma \in \Gamma_\infty} \max_{(u,v)\in\gamma([0,1])} I_\infty(\gamma(t)).$$

Assim, fazendo uso da variedade de Pohozaev associada ao sistema (0.2)

$$\mathcal{P}_\infty = \left\{ (u, v) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{(0, 0)\}\, ; \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 dx - 2 \int_{\mathbb{R}^N} G(u, v) dx = 0 \right\},$$

onde $G_\infty(u, v) = -\dfrac{u^2+v^2}{2} + \dfrac{u^2+v^2}{2s} - \dfrac{1}{2s^2} \ln(1 + s(u^2 + v^2)) + \lambda uv$, e adaptando as ideias de [1], mostramos que

$$c_\infty = m_\infty.$$

Em seguida, provamos o seguinte resultado de compacidade:

Teorema 0.1. *Seja $(z_n) = (u_n, v_n) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência limitada tal que $I(z_n) \to c$ e $\|I'(z_n)\|(1 + \|z_n\|) \to 0$. Então, substituindo (z_n) por uma subsequência, caso necessário, existe uma solução $\bar{z} = (\bar{u}, \bar{v})$ de (0.1), um número $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, k pares de funções $(u_1, v_1), (u_2, v_2), ..., (u_k, v_k)$ e k sequências de pontos $y_n^j \in \mathbb{R}^N, 1 \leq j \leq k$, satisfazendo:*

*Colegiado de Matemática , UNIOESTE, PR, Brasil, raquel.lehrer@unioeste.br
†Departamento de Matemática, UNB, DF, Brasil, e-mail: lilimaia@mat.unb.br

a) $|y_n^j| \to \infty$ *e* $|y_n^j - y_n^i| \to \infty$ *se* $j \neq i$*;*

b) $(u_n, v_n) - \sum_{j=1}^{n}(u_j(x - y_n^j), v_j(x - y_n^j)) \to (\bar{u}, \bar{v})$ *em* $H^1(\mathbb{R}^N)$*;*

c) $I(z_n) \to I(\bar{z}) + \sum_{j=1}^{n} I_\infty(z_j)$*;*

d) $z_j = (u_j, v_j)$ *são soluções fracas não triviais de (0.2).*

Ainda, no caso de $k = 0$*, o teorema é válido sem* (u_j, v_j)*.*

Com isto, mostramos que o funcional I, associado ao sistema (0.1), satisfaz a condição de Cerami no nível d, para qualquer $0 < d < m_\infty$, isto é, toda sequência $(z_n) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $I(z_n) \to d$ e $\|I^{'}(z_n)\|(1 + \|z_n\|) \to 0$ possui uma subsequência convergente.

Para usarmos o Teorema do Passo da Montanha, mostramos que o nível c do referido teorema, dado por

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{(u,v) \in \gamma([0,1])} I(\gamma(t));$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^N)); \gamma(0) = 0 \text{ } e \text{ } I(\gamma(1)) < 0\}$, satisfaz $0 < c < m_\infty$.

Isto é feito utilizando-se o fato de que $I(z) \leq I_\infty(z), \forall z \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$ e pela construção de um caminho específico $\gamma(t) \in \Gamma$ tal que

$$\max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)) < m_\infty.$$

Assim, pelo Teorema do Passo da Montanha, obtemos uma solução não nula para o sistema (0.1).

Ressaltamos que, para equações da forma $-\Delta u = g(u)$, tal equivalência $m_\infty = c_\infty$ é usualmente provada via variedade de Nehari, utilizando-se a condição de monoticidade da função $t \mapsto \frac{g(t)}{t}$. Em nosso caso, como utilizamos a variedade de Pohozaev, não fazemos uso de equivalente condição.

Referências

[1] JEANJEAN,L. AND TANAKA,K. - *A remark on least energy solutions in* $\mathbb{R}^N$,Proc. Amer. Math. Soc.,**131**,no. 8,2399-2408, 2002.

[2] COSTA,D.G. AND TEHRANI,H. - *On a Class of Asymptotically Linear Elliptic Problems in* $\mathbb{R}^N$,J. Diff. Equations, **173**,470-494, 2001.

[3]AMBROSETTI,G. , CERAMI,G. AND RUIZ,D.- *Solitons of linearly coupled systems of semilinear non-autonomous equations on* $\mathbb{R}^N$, J. of. Func. Anal.,**254**, 2816-2845, 2008.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

n-Larguras de Operadores Multiplicadores sobre o Toro $\mathbb{T}^d$

Régis L. B. Stábile* & Sérgio A. Tozoni†

1 Introdução

Seja A um subconjunto compacto e centralmente simétrico (simétrico com relação à origem 0, ou seja, $-x \in A$, sempre que $x \in A$) de um espaço de Banach X. Definimos as n-larguras de Kolmogorov e de Gelfand de A em X, respectivamente pelos valores

$$d_n(A, X) := \inf_{X_n} \sup_{x \in A} \inf_{y \in X_n} \|x - y\|_X \quad \text{e} \quad d^n(A, X) := \inf_{L^n} \sup_{x \in A \cap L^n} \|x\|_X,$$

onde o ínfimo na primeira expressão é tomado sobre todos os espaços n-dimensionais X_n de X e na segunda sobre todos os subespaços L^n de codimensão no máximo n de X. Se Y é um outro espaço de Banach e $T : X \longrightarrow Y$ um operador limitado, definimos as n-larguras de Kolmogorov e de Gelfand de T por $d_n(T) := d_n(T(B_X), Y)$ e $d^n(T) := d^n(T(B_X), Y)$, respectivamente, onde B_X denota a bola unitária fechada do espaço X.

Dada $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$, definimos a série de Fourier da função f por

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \qquad \widehat{f}(\mathbf{k}) := \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\nu(\mathbf{x}),$$

onde $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_dx_d$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{T}^d$ e $d\nu$ denota a medida de Lebesgue normalizada sobre $\mathbb{T}^d$.

Para $R \geq 0$ as expressões

$$(f * D(d,R))(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \\ |k_j| \leq R}} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \qquad D(d,R)(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \\ |k_j| \leq R}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

são denominadas soma parcial quadrada de Fourier da função f e núcleo quadrado de Dirichlet no toro $\mathbb{T}^d$, respectivamente.

Para $l, N \in \mathbb{N}$, denotamos $\mathcal{H}_l := \left[e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} : \mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}\right]$ e $\mathcal{T}_N := \bigoplus_{l=0}^N \mathcal{H}_l$, onde $A_l := \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : |k_j| \leq l,\ j = 1, \ldots, d\}$. Seja $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números complexos e sejam $1 \leq p, q \leq \infty$. Se para todo $\varphi \in L^p(\mathbb{T}^d)$ existe uma função $f = \Lambda\varphi \in L^q(\mathbb{T}^d)$ com expansão formal em série de Fourier dada por

$$f \sim \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l \sum_{\mathbf{k} \in A_l \setminus A_{l-1}} \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

tal que $\|\Lambda\|_{p,q} := \sup\{\|\Lambda\varphi\|_q : \varphi \in U_p\} < \infty$, dizemos que Λ é um operador multiplicador limitado de L^p em L^q, com norma $\|\Lambda\|_{p,q}$, onde U_p denota a bola unitária fechada do espaço $L^p(\mathbb{T}^d)$

*IMECC, UNICAMP, SP, Brasil, e-mail: ra069475@ime.unicamp.br
†IMECC, UNICAMP, SP, Brasil, e-mail: tozoni@ime.unicamp.br

2 Resultados

Neste trabalho demonstramos estimativas inferiores e superiores para n-larguras de operadores multiplicadores gerais definidos sobre o toro $\mathbb{T}^d$. Numa etapa posterior pretendemos aplicar estes resultados na obtenção de estimativas para n-larguras de conjuntos de funções suaves sobre o toro $\mathbb{T}^d$. Em particular, pretendemos estudar as n-larguras de Kolmogorov dos conjuntos de funções finitamente diferenciáveis $\Lambda^{(1)}(U_p)$, $\Lambda^{(1)} = \{\lambda_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$, $\lambda_k^{(1)} = k^{-\gamma}(\ln k)^{-\zeta}$, e dos conjuntos de funções infinitamente diferenciáveis (analíticas para $r = 1$) $\Lambda^{(2)}(U_p)$, $\Lambda^{(2)} = \{\lambda_k^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$, $\lambda_k^{(2)} = e^{-\gamma k^r}$, onde $\gamma,\ \zeta > 0$ e $0 < r \leq 1$. A referência principal para este trabalho é [2].

Teorema 2.1. *Sejam $1 \leq q \leq p \leq 2$, $0 < \lambda < 1$, $n = \dim \mathcal{T}_N$, $d_k = \dim \mathcal{H}_k$ e seja $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de multiplicadores tal que $\lambda_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Então existe uma constante absoluta $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} &\min\{d_{[\lambda n-1]}(\Lambda U_p; L^q), d^{[\lambda n-1]}(\Lambda U_p; L^q)\} \\ \geq\quad & C(1-\lambda)^{1/2}\begin{cases} (1-1/q)^{1/2} n^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{N}|\lambda_k|^{-2}d_k\right)^{-1/2}, & q > 1, \\ (n/\ln n)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{N}|\lambda_k|^{-2}d_k\right)^{-1/2}, & q = 1, \end{cases} \end{aligned}$$

onde $[\lambda n - 1]$ denota a parte inteira do número $\lambda n - 1$. Em particular, para n-larguras de Kolmogorov temos que

$$d_{[\lambda n-1]}(\Lambda U_p, L^q) \geq C_{p,q}(1-\lambda)^{1/2} n^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{N}|\lambda_k|^{-2}d_k\right)^{-1/2}\left\{\begin{array}{cc} 1, & 1 \leq p \leq 2,\ 1 < q \leq 2, \\ 1, & 2 \leq p < \infty, 2 \leq q \leq \infty, \\ 1, & 1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty, \\ (\ln n)^{-1/2}, & 1 \leq p \leq 2,\ q = 1, \\ (\ln n)^{-1/2}, & p = \infty,\ 2 \leq q \leq \infty. \end{array}\right\}$$

Teorema 2.2. *Suponhamos que $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ seja uma sequência decrescente em módulo satisfazendo $\lim_{k\to\infty}|\lambda_k| = 0$, $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$, e que o operador multiplicador Λ é limitado de L^1 em L^2. Sejam $\{N_k\}_{k=0}^{\infty}$ e $\{m_k\}_{k=0}^{M}$ sequências de números naturais tais que $N_k < N_{k+1}$, $N_0 = 0$ e $\sum_{k=0}^{M} m_k \leq \beta$. Então existe uma constante absoluta $C > 0$ tal que*

$$d_\beta(\Lambda U_p; L^q) \ \leq\ C\left(\sum_{k=1}^{M}|\lambda_{N_k}|\varrho_{m_k} + \sum_{k=M+1}^{\infty}|\lambda_{N_k}|\theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/q}\right),$$

onde

$$\varrho_{m_0} := \theta_{0,N_1}^{1/p-1/2} d_{m_0}(U_2 \cap \mathcal{T}_{N_1}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_1}), \quad \varrho_{m_k} := \frac{\theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p}}{(m_k)^{1/2}} \cdot \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\ln \theta_{N_k,N_{k+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{cases}$$

$$\theta_{N_0,N_1} \ =\ \sum_{s=0}^{N_1} \dim\ \mathcal{H}_s, \quad \theta_{N_k,N_{k+1}} \ =\ \sum_{s=N_k}^{N_{k+1}} \dim\ \mathcal{H}_s, \quad k \geq 1.$$

Referências

[1] Grafakos, L, *Classical Fourier Analysis*, Springer, second edition, 2008.

[2] kushpel, A. and tozoni, S. A., Entropy and Widths of Multiplier Operators on Two-Point Homogeneous Spaces, *Constructive Aproximation*, **35** (2012) 137-180.

[3] Pinkus, A., *n-Widths in Approximation Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

EXPOENTE CRÍTICO DE FUJITA PARA UM SISTEMA PARABÓLICO NUM DOMÍNIO EXTERIOR COM A CONDIÇÃO DE NEUMANN NA FRONTEIRA

Renata de Farias Limeira* & Miguel Loayza†

Em seu célebre trabalho, Fujita [3] considerou o seguinte problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= u^p, \text{ em } \mathbb{R}^N \times (0,\infty), && (0.1)\\ u(x,0) &= u_0(x) \geq 0, \text{ em } \mathbb{R}^N. && (0.2) \end{aligned}$$

Ele mostrou o seguinte:

(i) Se $p > 1 + 2/N$ e u_0 é limitado por uma Gaussiana suficientemente pequena, então o problema (0.1)-(0.2) admite soluções globais não negativas não triviais.

(ii) Quando $1 < p < 1 + 2/N$ não existem soluções globais não triviais.

O valor $pc = 1+2/N$ é chamado de expoente crítico ou coeficiente de Fujita. Desde o trabalho de Fujita, muitas extensões do problema (0.1)-(0.2) têm sido consideradas. Os trabalhos de Levine [4] e Deng e Levine [1] coletam uma série de problemas nessa direção.

Estudamos o seguinte problema

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= v^p, \text{ em } D \times (0,\infty), && (0.3)\\ v_t - \Delta v &= u^q, \text{ em } D \times (0,\infty) && (0.4)\\ \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} &= 0, \text{ em } \partial D \times (0,\infty), && (0.5)\\ u(x,0) &= u_0(x) \geq 0, v(x,0) = v_0(x) \geq 0, \text{ em } D, && (0.6) \end{aligned}$$

sendo D um domínio exterior em $\mathbb{R}^N$, $p, q > 1$ e $u_0, v_0 \in C_0(D)$, com $C_0(D)$ denotando o fecho em $L^\infty(D)$ das funções contínuas sobre D com suporte compacto.

As equações (0.3)-(0.4) podem ser usadas como um modelo que descreve a propagação do calor numa mistura combustível com duas substâncias. Neste caso, as funções u e v representam a temperatura de cada uma dessas substâncias e uma liberação de energia dada por pontências de u e v é considerada. A condição de Neumann indica que o fluxo de calor pela fronteira é zero.

1 Resultados

Estabelecemos que o coeficiente crítico para o problema (0.3)-(0.6) coincide com o coeficiente crítico obtido por Escobedo e Herrero [2], os quais estudaram o mesmo sistema sobre $\mathbb{R}^N$.

Teorema 1.1. *Sejam $p, q > 1$, $u_0, v_0 \in C_0(D)$, $u_0, v_0 \geq 0$ e D um domínio exterior com fronteira suave em $\mathbb{R}^N$.*

(i) Seja $N/2 > (\gamma+1)/(pq-1)$, com $\gamma = \max\{p, q\}$ e $N \geq 3$. Suponha que D tem fronteira Lipschitz, $u_0 \in L^{r^*}(D) \cap L^2(D)$ e $v_0 \in L^{s^*}(D) \cap L^2(D)$, com $r^* = \frac{N}{2}\frac{pq-1}{p+1}$, $s^* = \frac{N}{2}\frac{pq-1}{q+1}$. Então existe $\delta > 0$ tal que, se $\|u_0\|_{r^*} + \|v_0\|_{s^*} < \delta$, (0.3)-(0.6) tem solução global.

*UPE, PE, Brasil, email: limeira.renata@gmail.com
†DMAT, UFPE, PE, Brasil, e-mail: miguel@dmat.ufpe.br

(ii) Se $N/2 \leq (\gamma+1)/(pq-1)$, com $\gamma = \max\{p,q\}$, então o problema (0.3)-(0.6) não têm soluções não negativas globais não triviais.

Prova: *Soluções não globais* - Na demonstração da parte (ii) utilizamos uma adaptação do método da função teste usado por Mitidieri e Pohozaev [5] e Kirane *et al* [6].

Existência de soluções globais - Usamos um argumento de ponto fixo para provar a parte (i). Abaixo segue uma ideia da prova. Seja $(S(t))_{t\geq 0}$ o semigrupo do calor com condição de Neumann homogênea na fronteira definido sobre $L^p(D)$ se $1 \leq p < \infty$ ou $C_r(D) = \{u|_D; u \in C_0(\mathbb{R}^N)\}$ se $p = \infty$. Sejam $a = \frac{N}{2}\left(\frac{1}{r^*} - \frac{1}{r}\right)$ e $b = \frac{N}{2}\left(\frac{1}{s^*} - \frac{1}{s}\right)$, com r e s escolhidos apropriadamente. Consideremos o espaço $M = C((0,\infty), L^r(D)) \times C((0,\infty), L^s(D))$ e seja $E_\varepsilon = \left\{(u,v) \in M;\ t^a\|u(t)\|_{L^r} + t^b\|v(t)\|_{L^s} \leq \varepsilon,\ \text{para todo } t > 0\right\}$, em que $\varepsilon > 0$ é uma constante pequena. O espaço E_ε com a métrica $d\left((u,v),(\overline{u},\overline{v})\right) := \sup_{t>0}\left\{t^a\|u(t)-\overline{u}(t)\|_{L^r}\right\} + \sup_{t>0}\left\{t^b\|v(t)-\overline{v}(t)\|_{L^s}\right\}$ é um espaço métrico completo.

Para cada $(u,v) \in E_\varepsilon$, definimos $\Psi(u,v) = (\Psi_1(v), \Psi_2(u))$, com $\Psi_1(v)$ e $\Psi_2(u)$ dados por

$$\begin{aligned} \Psi_1(v)(t) &= S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)|v|^{p-1}v(\sigma)d\sigma, \\ \Psi_2(u)(t) &= S(t)v_0 + \int_0^t S(t-\sigma)|u|^{q-1}u(\sigma)d\sigma, \end{aligned} \tag{1.7}$$

para cada $t > 0$.

Mostramos, então, que existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que $\Psi(E_\varepsilon) \subset E_\varepsilon$ e que $\Psi : E_\varepsilon \to E_\varepsilon$ seja uma contração estrita. Para este último passo, a estimativa que obtivemos para o semigrupo do calor (Teorema 1.2 abaixo) é crucial.

□

Teorema 1.2. *Seja $D \subset \mathbb{R}^N$ um domínio exterior com fronteira C^2 compacta. Sejam $1 < p \leq r \leq \infty$ e $N \geq 3$. Então existe uma constante $C_1 = C_1(D,p,r) > 0$ tal que*

$$\|S(t)\varphi\|_{L^r} \leq C_1 t^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\|\varphi\|_{L^p}, \tag{1.8}$$

para cada $\varphi \in L^p(D), 1 \leq p \leq \infty$ e todo $t > 0$.

Esta estimativa também permite que estabeleçamos a existência de soluções locais para o problema (0.3)-(0.6):

Teorema 1.3. *Sejam $p,q > 1$ e seja $C' = \{u|_D; u \in C_0(\mathbb{R}^N)\}$. Então para cada $u_0, v_0 \in C'(D) \cap L^2(D)$, existe $T > 0$ e uma solução $(u,v) \in [C(D \times (0,T))]^2$ do problema (0.3)-(0.6). Além disso, $u \geq 0$ se $u_0 \geq 0$ e, se $u_0 \in L^r(D)$, então $u \in C([0,T], L^r(D))$.*

Referências

[1] DENG, K. AND LEVINE, H. A. - The role of critical exponent in blow up theorems: The sequel. *J. Math. Anal. Appl.*, **243**, 85-126, 2000.

[2] ESCOBEDO, M. AND HERRERO, M. A. - Boundedness and blow up for a semilinear reaction-diffusion system. *Jour. of Diff. Equations*, **89**, 176-202, 1991.

[3] FUJITA, H. - On the blowing-up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{\alpha+1}$. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sect. I **13**, 109-124, 1966.

[4] LEVINE, H. A. - The role of the critical exponents in blow up theorems. *SIAM*, **32**, 269-288, 2000.

[5] KIRANE, M., LASKRI, Y. AND TATAR, N. - Critical exponent of Fujita type for certain evolution equations and systems with spatio-temporal fractional derivatives. *J. Math, Anal. Appl.* **312**, 488-501, 2005.

[6] MITIDIERI, E. AND POHOZAEV, S. I. - A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities. *Proc. Steklov. Inst. Math.* **234**, 1-383, 2001.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

CUBIC-QUINTIC GROSS-PITAEVSKII EQUATION FOR BOSE-EINSTEIN CONDENSATES

ROLCI CIPOLATTI* & CARLOS TRALLERO-GINER†

It is well known that the Bose-Einstein condensates (BEC) can be described by means of the ground state solutions of Gross-Pitaevskii equation (GPE) [1, 2, 3]. In general, the 3D (GPE) cannot be factorized into transverse and longitudinal motions, but under certain parameter regions we can assert that the BEC follows a 1D behavior (for a detailed discussion see Ref. [4]). In the case of the harmonic trapping potential and considering that the atoms are tightly confined in two transverse directions, a transition to the quasi-1D description is possible. Indeed, employing the adiabatic approximation and using the factorized ansatz $\Psi(x,\mathbf{r};t) = \exp(-\mathbf{i}\mu_0 t/\hbar)\Phi(x)\chi(\mathbf{r};t)$, we can derive an effective 1D GPE, which describes the physical characteristics of the cigar-like shape condensate [5, 6, 7]. Nevertheless, the usual cubic nonlinear model does not reflect some important instability properties of the condensates and a more general nonlinearity is necessary.

Assuming that the harmonic trapping potential has a strong anisotropy (of cigar-shaped type), the 1D limit of the GPE with cubic-quintic nonlinearity can be considered as a model to describe the condensate, more precisely, by the equation (see [5])

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\Psi + g_1|\Psi|^2\Psi - g|\Psi|^4\Psi = \mu_0\Psi, \tag{0.1}$$

where $\omega > 0$ is the oscilator trap frequency, $m > 0$ is the atomic mass, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ is the chemical potential and $g_1, g \in \mathbb{R}$ are the effective 1D nonlinear self-interaction coefficients. These two coefficients depend on the total number N of particles in the condensate, the transverse harmonic oscillator frequency $\omega_{\mathbf{r}}$ and the scattering length a_s ($a_s > 0$ or $a_s < 0$ for attractive or repulsive interatomic interaction, respectively) by the relations $g_1 = 2a_s N\hbar\omega_{\mathbf{r}}$ and $g = 6\ln(4/3)g_1^2/\hbar\omega_{\mathbf{r}}$ [6].

In its dimensionless form the equation (0.1) can be written as

$$-\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \xi^2\psi + \lambda|\psi|^2\psi - \varepsilon\lambda^2|\psi|^4\psi = \mu\psi, \tag{0.2}$$

where, for $l := \sqrt{\hbar/m\omega}$, we set $\xi = x/l$, $\lambda = 2g_1/l\hbar\omega$, $\mu = 2\mu_0/\hbar\omega$, $\psi(\xi) = \Phi(xl)/\sqrt{l}$, $\varepsilon = 3\ln(4/3)\omega/\omega_{\mathbf{r}}$.

The solutions of (0.2) can be viewed as standing waves of the time dependent GPE, namely,

$$\mathbf{i}\frac{\partial u}{\partial\tau} = -\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \xi^2 u + \lambda|u|^2 u - \varepsilon\lambda^2|u|^4 u, \tag{0.3}$$

where $\tau := \omega t/2$ and t is the time. By standing waves we mean time periodic solutions of the form

$$u(\tau,\xi) := e^{-\mathbf{i}\mu\tau}\psi(\xi).$$

In this work we present new formulas to approximate the energy, the chemical potential and the ground state solution of (0.2), based on a new variational method introduced in [8]. By using these formulas we discuss the range of validity of the self-interacting coefficient λ in the cigar-like model.

*Instituto de Matemática, UFRJ, RJ, Brasil, cipolatti@im.ufrj.br
†Faculty of Physics, Havana University, Havana, Cuba, ctraller@fisica.uh.cu

References

[1] E.P. GROSS - J. Math. Phys., 4, (1963), 195.

[2] L.K. PITAEVSKII - Sov. Phys. JETP, 13, (1961), 451.

[3] E.H. LIEB, M. LOSS - *Analysis 2nd Edition*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 14, AMS, (2001).

[4] E.H. LIEB, R. SEIRINGER,J. YNGVASON - Commun. Math. Phys., 244, (2004), 347.

[5] R. CARRETERO-GONZÁLEZ, D.J. FRANTZESKAKIS, P.G. KEVREKIDIS, Nonlinearity, 21, (2008), R139.

[6] A.E. MURYSHEV, G.V. SHLYAPNIKOV, W. ERTMER, K. SENGSTOCK, M. LEWENSTEIN - Phys. Rev. Lett., 89, (2002), 110401.

[7] L. KHAYKOVICH, B.A. MALOMED - Phys. Rev. A, 74, (2006), 023607.

[8] R. CIPOLATTI, J. LÓPEZ GONDAR, C. TRALLERO-GINER - Physica D-Nonlinear Phenomena 241, (2012), 755.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

SOBRE COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO E CONTROLE EXATO PARA A EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON EM DOMÍNIOS LIMITADOS

Ruikson Sillas O. Nunes * & Waldemar D. Bastos †

1 Introdução

Neste trabalho estudamos problemas de controle exato na fronteira para equação linear de Klein-Gordon em domínios gerais de $\mathbb{R}^N$, $N = 1, 2, \cdots$. O método aqui usado requer o conhecimento do comportamento assintótico das soluções do problema de Cauchy

$$(u_{tt} - \Delta u + c^2 u)(x,t) = 0, \ \ u(x,0) = u_0(x), \ \ u_t(x,0) = u_1(x), \ \ x \in \mathbb{R}^N, \ t \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Mostramos que a energia local de tais soluções decai polinomialmente. Em seguida usamos o decaimento local de energia para estudar controlabilidade exata na fronteira, para a equação linear de Klein-Gordon em domínios limitados de $\mathbb{R}^N$.

2 Resultados

Fazendo uso da análise de Fourier é possível obter a estimativa

$$|u(x,t)| \leq C\,|t|^{-N/2} \sum_{|\alpha|+j \leq (N+3)/2} \int \left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial y)^\alpha} u_j(y) \right| dy \tag{2.2}$$

para $|t|$ suficientemente grande e uma constante $C > 0$ que não depende de u_j, $j = 0, 1$ (veja Hörmander[3]). Aqui $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ é um multi-indice, $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$ e $(\partial y)^\alpha = \partial y_N^{\alpha_N} ... \partial y_1^{\alpha_1}$. Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ e m um inteiro positivo. Assumindo u_0, $u_1 \in C_0^\infty(\Omega)$, de (2.2) obtemos

$$|u(x,t)|^2 \leq \frac{K}{|t|^N} \left\{ \|u_0\|^2_{H^m(U)} + \|u_1\|^2_{H^{m-1}(U)} \right\} \tag{2.3}$$

para $|t|$ suficientemente grande e todo inteiro $m \geq \frac{N+3}{2} \geq 2$. Aqui H^m denota o espaço de Sobolev usual (Adams [1]). A estimativa (2.3) aplicada às derivadas de u nos permite estender para a equação $u_{tt} - \Delta u + c^2 u = 0$, com dados iniciais suficientemente regulares, os resultados de controlabilidade obtidos por D. L. Russell [6] para a equação da onda. Nosso interesse é estudar controlabilidade na fronteira para $u_{tt} - \Delta u + c^2 u = 0$ com dados iniciais em $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, para domínios limitados Ω de $\mathbb{R}^N$ com fronteira não suave.

Para atingir este objetivo provamos :

Teorema 2.1. *Dado um domínio limitado Ω, existe uma contante $K > 0$ dependendo de Ω, c e das funções de Bessel J_0, J_1, tal que para $\alpha \in \mathbb{N}^{N+1}$, $|\alpha| \leq 1$ e dados iniciais u_0, $u_1 \in C_0^\infty(U)$ a solução de (1.1) satisfaz*

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x \partial t)^\alpha} u(x,t) \right|^2 \leq \frac{K}{t^N} \left\{ \|u_0\|^2_{H^1(U)} + \|u_1\|^2_{L^2(U)} \right\}. \tag{2.4}$$

para todo $x \in U$ e $t > 0$ suficientemente grande. Aqui usamos $\frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x \partial t)^\alpha}$ para denotar $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial t^{\alpha_{N+1}} \partial x^{\alpha_N} \cdots \partial x^{\alpha_1}}$. □

*Aluno de doutorado em Matemática IBILCE-UNESP, SP-Brasil, e-mail: ruiksonsillas@hotmail.com
†IBILCE, UNESP, SP, Brasil, e-mail: waldemar@ibilce.unesp.br

Observamos que a estimativa (2.3) para $m = 1$ e $N = 1, 2, 3$ já é conhecida a algum tempo. Veja, por exemplo, [4] e [5]. Até onde sabemos, a literatura não dispõe de uma estimativa na forma (2.4), válida para todas as dimensões N.

Para provar (2.4) usamos a fórmula explícita da solução u do problema de Cauchy (1.1) considerando separadamente os casos em que N é par ou ímpar, pois a representação de u muda com a paridade de N. Para N ímpar a fórmula de u envolve as funções de Bessel de primeira espécie J_0 e J_1. Neste caso usamos também alguns resultados clássicos sobre o comportamento assintótico destas funções ([2], [8]).

É consequência de (2.4) a estimativa

$$\|u(.,t)\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\frac{\partial}{\partial t}u(.,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{K'}{t^N}\left\{\|u_0\|^2_{H^1(\Omega)} + \|u_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right\} \tag{2.5}$$

válida para t suficientemente grande e soluções (1.1) com energia finita. Aqui $K' = (N+2)K|\Omega|$.

A desigualdade acima nos permite provar o seguinte resultado:

Teorema 2.2. *Seja $U \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ um domínio limitado, com a fronteira Lipschitziana. Existe $T > 0$ tal que todo par $(u_0, u_1) \in H^1(U) \times L^2(U)$ admite uma extensão $(\widetilde{u}_0, \widetilde{u}_1) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$, com suporte compacto, de modo que a solução $\widetilde{u} \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^{N+1})$ do problema de Cauchy (1.1) com estado inicial $(\widetilde{u}_0, \widetilde{u}_1)$ satisfaz $\widetilde{u}(.,T) = \widetilde{u}_t(.,T) = 0$ em U.* $\square$

O teorema acima juntamente com teoremas de traços apropriados nos permite resolver problemas de controle com vários tipos de controle na fronteira, para diversos tipos de domínios. Particularmente, se $N \geq 2$ e U é suave por partes (sem cúspides), a restrição de $\widetilde{u}$ ao cilindro $U \times [0,T]$ possui traço $\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \nu}$ com quadrado integrável ao longo de $\partial U \times [0,T]$ (Tataru [7]). Assim, procedendo como em [6], fica resolvido o problema de controle exato na fronteira, com controle tipo Neuman, para a equação de Klein-Gordon no domínio U.

Referências

[1] ADAMS, R. - *Sobolev Spaces.* Academic Press Inc., Flórida, 1975.

[2] GRADSHTEYN, I. S. AND RYZHIK, I. M.-*Table of Integrais, Series and Products.* Sixth Edition, Academic Press, USA, 2000.

[3] HORMANDER, L. - *Remarks on the Klein-Gordon equation.*, *Journée Équations aux Dérivées Partielles*, 1-9, 1987.

[4]MORAWETZ, C. S., STRAUSS, W. - *Decay and scattering of solutions of a nonlinear relativistic wave equation.*, *J. Comm. Pure App. Math.*, **25**, 1-31, 1972.

[5] MORAWETZ, C. S. - *Decay for Solutions of the Exterior Problem for the Wave Equation, Comm. Pure App. Math., 28, (1975) 229-264.*

[6] RUSSEL, D. L. - *A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations.*, *Stud. Appl. Math.*, **52**, 189-211, 1973.

[7] TATARU, D. - *On regularity of the boundary traces for the wave.. Ann. Scuola Norm. Pisa*, **26** nº1, 185-206, 1998.

[8] WATSON, G. N. - *A treatise on the theory of Bessel function.* Second edition, Cambridge University Press, London, 1966.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

NEW DECAY RATES FOR A SEMILINEAR SYSTEM OF ELASTIC WAVES WITH POTENTIAL TYPE OF DAMPING

RUY C. CHARÃO* & CLEVERSON R. DA LUZ†

1 Introduction

We consider the following initial value problem in $\mathbb{R}^n$ associated to the system of elasticity with a nonabsoption nonlinear term and a critical potential type of damping

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \triangle u - (b^2 - a^2)\nabla \mathrm{div} u + V(t,x)u_t = |u_t|^{p-1}u_t\,, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = \delta u_0(x), \quad u_t(0,x) = \delta u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1.1}$$

where the coefficients $a > 0$ and $b > 0$, such that: $a^2 < b^2$, are related with the Lamé coefficients: $a^2 = \lambda + \mu$ and $b^2 = \lambda + 2\mu$. The potential type of damping $V(t,x)$ is a positive $L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ function.

We assume initial data with compact support, that is,

$$u_0 \in (H^2(\mathbb{R}^n))^n, \quad u_1 \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n, \quad \mathrm{supp}\, u_0 \cup \mathrm{supp}\, u_1 \subset \{|x| \le R\}, \tag{1.2}$$

where $R > 0$ is an arbitrarily fixed real number, and $|x|$ is the usual Euclidian-norm of $x \in \mathbb{R}^n$.

Under the above conditions there exists $T_m = T_m(\delta) > 0$ such that the problem (1.1) has a unique local solution $u = u(t,x)$ in the class

$$u \in C([0,T_m); (H^2(\mathbb{R}^n))^n) \cap C^1([0,T_m); (H^1(\mathbb{R}^n))^n),$$

and satisfies the finite speed propagation property:

$$u(t,x) = 0 \quad \text{for} \quad |x| \ge bt + R,$$

where the the propagation speed b is the constant coefficient which appears in the system of elastic waves (1.1). For these basic results we refer to Ikawa [4] and Strauss [8].

In the present work we apply a simple method due to Ikehata-Inoue [5] to a semilinear system of elastic waves having a nonconstant damping coefficient with a critical parameter $\gamma = 1$ in order to obtain polynomial decay of the total energy. Although we have many decay and non decay results concerning the scalar valued wave equation case, there are few related results on the system of elastic waves with a non-compactly supported critical potential of damping. For instance, Charão-Ikehata [2] studied the system of elastic waves in an exterior domain, with a dissipation localized near infinity but, to show polynomial decay of solutions, they imposed an extra assumption on the Lamé coefficients of the system: $b^2 < 4a^2$. In this work we do not impose such a condition. Furthermore, Kapitonov [6] and Charão [1] studied decay rates of local energy for non-damped linear system of elastic waves in three dimension.

Our goal is to prove new decay rates for the problem (1.1)-(1.2) which improve the estimates obtained by Charão-Ikehata [3].

*Departamento de Matemática , UFSC, SC, Brasil, charao@mtm.ufsc.br
†Departamento de Matemática , UFSC, SC, Brasil, cleverson@mtm.ufsc.br

2 Assumptions and Result

Hypothesis 1: We assume that $V(x,t) = V(x)$. Suppose there are positive constants C_0 and C_1 such that

$$\frac{C_0}{1+|x|} \leq V(x) \leq \frac{C_1}{1+|x|}.$$

We can take number α such that

$$0 < \alpha < \frac{C_0}{b}. \tag{2.3}$$

Lemma 2.1. *If $C_0 > b$ then there exist numbers $\alpha > 1$ satisfying (2.3) and $\epsilon > 0$ such that*

$$\left(\frac{2C_0 - \alpha b}{2b + kb(\alpha - 1)}\right)\left(a^2 - C_n^* \frac{(\alpha-1)}{2}\left[\frac{b^2}{k} + bC_1\right]\right) > \frac{\alpha}{2}(1+\epsilon)\,a^2, \tag{2.4}$$

where C_n^* is the constant of the Hardy's inequality in $\mathbb{R}^n$, (See [7], [9]).

Remark 1: The idea is that α will be the rate of decay. It seems that by increasing C_0 we can increasing $\alpha > 1$ due to (2.3). But, analyzing the inequality (2.4) together (2.3) it is possible to prove that for $\frac{C_0}{b} >> 1$ the decay rate α will decrease to 1. This fact seems that $C_0 >> b$ is a case of overdamping.

Hypothesis 2: We assume that α satisfies the condition (2.3) and

$$1 < \alpha < \alpha_0 \qquad if\ C_0 > b$$

where α_0 is given by Lemma 2.1

Our main result says that assuming the above hypotheses it follows that the solution of (1.1) is global and the total energy satisfies

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |u_t(t)|^2\,dx + \frac{a^2}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(t)|^2\,dx + \frac{(b^2-a^2)}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{div}u(t)|^2\,dx \leq CI_0(1+t)^{-\alpha},$$

for a suitable power nonlinearity p and for $0 < \delta << 1$, where I_0 is a constant that depends on the initial data.

References

[1] CHARÃO R. C. - On the principle of limiting amplitude for perturbed elastic waves in 3D. *Bollettino U. M. I.*, **(7)**, 781-797, 1996.

[2] CHARÃO, R. C. AND IKEHATA, I. - Decay of solutions for a semilinear system of elastic waves in an exterior domain with damping near infinity. *Nonlinear Analysis*, **67**, 398-429, 2007

[3] CHARÃO, R. C. AND IKEHATA, I. - Energy decay rates of elastic waves in unbounded domain with potential type of damping. *Journal Math. Anal. Applic.*, **380**, 46-56, 2011.

[4] IKAWA, M. - *Hyperbolic Partial Differential Equations and Wave Phenomena*, Translations of Mathematical Monograph 189, AMS, Providence RI, 2000.

[5] IKEHATA, R. AND INOUE, Y. - Total energy decay for semilinear wave equations with a critical potential type of damping. *Nonlinear Analysis*, **69**, 1396-1401, 2008.

[6] KAPITONOV, B. V. - Decrease of a solution of an exterior boundary-value problem for a system in elastic theory. *Differential Equations*, **22**, 332-337, 1986.

[7] LADYZHENSKAYA, O. A. - *The mathematical theory of viscous imcompressible flow*, transl. by R. A. Silverman, Gordon-Breach, New York, 1969.

[8] STRAUSS, W. - Nonlinear wave equations. *CBMS regional conference series in Math. 73, published for the conference board of the Math. Sci. Washington DC; AMS, Providence*, RI, 1-68, 1989.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

DYNAMICAL SYSTEMS OF TYPE $(n.m)$

RUY EXEL*

Given positive integers n and m, we consider dynamical systems in which (the disjoint union of) n copies of a topological space is homeomorphic to m copies of that same space. The universal such system is shown to arise naturally from the study of a C*-algebra denoted by $\mathcal{O}_{n,m}$, which in turn is obtained as a quotient of the well known Leavitt C*-algebra $L_{n,m}$, a process meant to transform the generating set of partial isometries of $L_{n,m}$ into a tame set. Describing $\mathcal{O}_{n,m}$ as the crossed product of the universal (n,m)-dynamical system by a partial action of the free group F_{n+m}, we show that $\mathcal{O}_{n,m}$ is not exact when n and m are both greater than or equal to 2, but the corresponding reduced crossed product, denoted by $\mathcal{O}_{n,m}$, is shown to be exact and non-nuclear. Still under the assumption that $m, n \geq 2$, we prove that the partial action of F_{n+m} is topologically free and that $\mathcal{O}_{n,m}$ satisfies property (SP) (small projections). We also show that $\mathcal{O}_{n,m}$ admits no finite dimensional representations. The techniques developed to treat this system include several new results pertaining to the theory of Fell bundles over discrete groups.

References

[1] P. ARA AND R. EXEL - *Dynamical systems of type (m,n) and their C*-algebras,* Ergodic Theory Dynam. Systems, to appear [http://arxiv.org/abs/1109.4093v1]

*UFSC, Brasil, ruyexel@gmail.com

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

UPPER SEMICONTINUITY OF ATTRACTORS AND CONTINUITY OF EQUILIBRIUM SETS OF A PARABOLIC PROBLEM WITH DEGENERATE P-LAPLACIAN

SIMONE M. BRUSCHI[*,†], CLAUDIA B. GENTILE[‡] & MARCOS R. T. PRIMO[§]

In 2000, Takeuchi and Yamada completely described the set of stationary solutions of the problem involving the p-laplacian operator

$$\begin{cases} u_t = \lambda(|u_x|^{p-2}u_x)_x + |u|^{q-2}u(1-|u|^r), & (x,t) \in (0,1)\times(0,+\infty) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & 0 \le t < +\infty \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,1), \end{cases} \tag{0.1}$$

where $p > 2$, $q \ge 2$, $r > 0$ and $\lambda > 0$.

They get that if $p > q$ there exists a decreasing sequence $\lambda_n^*(p,q)$, $\lambda_n^*(p,q) \to 0$ when $n \to \infty$ such that the equilibrium set $E = \{0\} \cup \cup_{i=0}^{\infty} E_i^{\pm}$ where $E_i^{\pm}$ denote the equilibrium sets within the equilibria with i zeros in $(0,1)$ and if, $\lambda < \lambda_n^*$, the set $E_i^{\pm}$ is homeomorphic to $[0,1]^i$, for $i \le n$. We observe that in this case there is equilibrium points with any amount of zeros in $(0,1)$.

If $p \le q$ there exist deacresing sequences $\lambda_n(p,q)$ and $\lambda_n^*(p,q)$ such that $\lambda_n > \lambda_n^*$ and λ_n, $\lambda_n^* \to 0$ when $n \to \infty$. If $p = q$ and $\lambda_{M+1} \le \lambda < \lambda_M$ then the equilibrium set is given by $E = \{0\} \cup \cup_{i=0}^{M} E_i^{\pm}$. If $p < q$ and $\lambda_{M+1} < \lambda \le \lambda_M$, the equilibrium set is given by $E = \{0\} \cup \cup_{i=0}^{M}(E_i^{\pm} \cup \{F_i^{\pm}\})$, where $E_i^{\pm}$ denote the equilibrium sets within the equilibria with i zeros in $(0,1)$ and $F_i^{\pm} = \{\psi_i^{\pm}\}$ also is equilibrium with i zeros in $(0,1)$. Furthermore, if $\lambda < \lambda_n^*$, the set $E_i^{\pm}$ is homeomorphic to $[0,1]^i$, for $i \le n$.

About the stability of the equilibria, in [8], Th 4.2, 4.3, they get that 0 is asymptotic stable if $p = q$ and $\lambda \ge \lambda_0$ or if $p < q$, 0 is unstable for $p > q$ or $p = q$ anda $\lambda < \lambda_0$. The equilibrium ϕ_0^+ is asymptotically stable if $\lambda > \lambda_0^*$ and attractive for $\lambda \le \lambda_0^*$, and if $q > p$, ψ_0 is unstable for $\lambda \le \lambda_0$.

We observe that the set of equilibrium points, $E_\lambda(p,q)$, is always infinity if $p > q$ and, if $p = q$ or $p < q$, $E_\lambda(p,q)$ is a finite set only for large values of λ. However, in each of the three cases, there is the possibility of existing continuum equilibrium sets, which does not happen in the semilinear case, $p = 2$. We also observe that in the case $q > p$ the equilibrium does not bifurcate from the trivial solution, the bifurcations are spontaneous.

It is well known that problem (0.1) is globally well-posed in $L^2(0,1)$. The existence of a global attractor $\{\mathcal{A}_p\}$ for (0.1) is easily obtained from the uniform estimates in $L^2(0,1)$ and $W_0^{1,p}(0,1)$. Furthermore, the problem (0.1) generates a gradient system in $W_0^{1,p}(0,1)$, therefore, the global attractor is characterized as the union of the unstable set of equilibrium points, [4, 9]. Also, Gentile and Bruschi in 2005 proved that the lap-number is not increasing through orbits, if the initial conditions are continuous. With this information we can determinate which equilibrium points can belong to the ω-limit set of any initial data.

In [2], they investigate in which way the parameter $p \ge 2$ affects the dynamic of (0.1), analyzing the continuity properties of the flows, the equilibrium sets and the global attractors $\mathcal{A}_p$, with respect to parameter $p \ge 2$. They guarantee that, for $p = q$, as $p \to 2$ and for fixed values of λ, any continuum connected component of E_λ reduces to a single point when p is still at a positive distance of 2.

[*]Departamento de Matemática , UnB, DF, Brasil, e-mail: sbruschi@unb.br
[†]Partial supported by FEMAT - Fundação de Estudos Matemáticos
[‡]Departamento de Matemática, UFSCar, SP, Brasil, e-mail: gentile@dm.ufscar.br
[§]Departamento de Matemática, UEM, PR, Brasil, e-mail: mrtprimo@uem.br

Since there are important qualitative changes in the equilibrium sets $E_\lambda(p,q)$ in the cases $p>q$, $p=q$ and $p<q$, in this work we focus our analysis in the continuity with respect to q, considering $\lambda>0$, $p>2$ fixed. We prove some uniform estimates, with respect to parameter $p>2$, and $q\geq 2$ in bounded sets, for solutions of (0.1) on $L^2(0,1)$, and $W_0^{1,p}(0,1)$. We show a compactness result which is fundamental to prove the continuity of the flows in $C([0,T]:L^2(0,1))$ for each $T>0$ and the upper semicontinuity of the family of global attractors in $L^2(0,1)$. Finally, we prove the continuity of the equilibrium sets of (0.1) for $p>2$ fixed and $q\to p$, roughtly speaking, a sequence of equilibria in $E^\pm$ with a fixed number of zeros must converge to an equilibrium point of the limit problem with the same amount in the zeros in $(0,1)$ or, when it is not possible, the sequence converges to the null stationary solution. We also prove that any sequence of equilibria taken in $F_i^\pm$ converges to zero.

The following theorems sumarize the results about the convergence of equilibirum points

Theorem 0.1. *Suppose $p>2$ fixed. Let M be the maximum number of zeros of an equilibrium when $q=p$. Let $\phi_n(q)\in E_n^\pm$ for $p>q$. If $n\leq M$, then $\phi_n(q)$ converges to another stationary solution, whit the same amount of zeros when $q\to p^-$. If n is greater than M, then $\|\phi_n(q)\|_{C^1(0,1)}$ goes to zero when $q\to p^-$.*

and

Theorem 0.2. *Suppose $p>2$ fixed. Let $\phi_n(q)\in E_n^\pm$ for $q>p$. Then $\phi_n(q)$ converges to another stationary solution, whit the same amount of zeros when $q\to p^+$. If $\psi_n(q)\in F_n^\pm$, then $\|\psi_n(q)\|_{C^1(0,1)}$ goes to zero when $q\to p^+$.*

References

[1] H. BRÈZIS - *Operateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1973.

[2] S. M. BRUSCHI, C. B. GENTILE AND M. R. T. PRIMO - *Continuity properties on p for p-Laplacian parabolic problems,* Nonlinear Analysis, 72 (2010), pp. 1580-1588.

[3] C. B. GENTILE AND S. M. BRUSCHI - *Lap number properties for p-Laplacian problems investigated by Lyapunov methods,* Nonlinear Analysis, 66 (2007), pp. 1005-1015.

[4] J. K. HALE - *Asymptotic Behaviour of Dissipative Systems*, Mathematical Surveys and Monographs - 25, American Mathematical Society, 1989.

[5] J. K. HALE - *Ordinary Differential Equations*, Wiley Interscience, 1969.

[6] D. HENRY - *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Mathematics- 840, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1981.

[7] A. T. PLANT - *Four Inequalities for Monotone Gradient Vector Fields,* Arch. Rational Mech. Anal., 82 (1983), pp. 377-389.

[8] S. TAKEUCHI AND Y. YAMADA - *Asymptotic Properties of a Reaction-Diffusion Equation with Degenerate p-Laplacian,* Nonlinear Analysis, 42 (2000), pp. 41-61.

[9] R. TEMAM - *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Applied Mathematical Sciences - 68, Springer-Verlag, New York, 1988.

[10] I. I. VRABIE - *Compactness Methods for Nonlinear Evolutions*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, London (1987).

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

Weak approximation properties on projective symmetric tensor products

SONIA BERRIOS* & GERALDO BOTELHO†

The aim of this work is to generalize the results presented in [2] on the weak approximation property on projective symmetric tensor products of Banach spaces.

Given Banach spaces E and F, by $\mathcal{P}(^kE;F)$ we denote the Banach space of all continuous k-homogeneous polynomials from E into F. The subspace of all compact k-homogeneous polynomials from E to F is denoted by $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^kE;F)$. When $k=1$, $\mathcal{P}(^1E;F)$ and $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^1E;F)$ are denoted by $\mathcal{L}(E;F)$ and $\mathcal{K}(E;F)$, respectively the space of all continuous linear operators and the space of all compact operators from E to F.

For $y \in F$ and $P \in \mathcal{P}(^kE)$, define $(P\otimes y)(x) = P(x)y$, $x \in E$. So defined, $P \otimes y \in \mathcal{P}(^kE;F)$. A polynomial $P \in \mathcal{P}(^kE;F)$ is said to be of *finite rank* if there are $n \in \mathbf{N}$, $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{P}(^kE)$ and $y_1, \ldots, y_n \in F$ such that $P = \sum_{j=1}^n P_j \otimes y_j$. Let $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(^kE;F)$ denote the space of all finite rank k-homogeneous polynomials from E to F. When $k=1$, $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(^1E;F)$ is denoted by $\mathcal{F}(E;F)$, the space of all finite rank linear operators from E to F.

Let τ_c denote the topology on $\mathcal{P}(^kE;F)$ of uniform convergence on compact subsets of E. A Banach space E has the approximation property (AP) if $\mathcal{L}(E;E) = \overline{\mathcal{F}(E;E)}^{\tau_c}$. We say that a Banach space E has the weak approximation property (WAP) if $\mathcal{K}(E;E) \subset \overline{\mathcal{F}(E;E)}^{\tau_c}$. Choi and Kim [3] introduced the weak approximation property.

Çaliskan and Rueda [2, Proposition 7] proved the following characterization of the WAP on the completed projective symmetric tensor product $\hat{\bigotimes}^k_{s,\pi}E$:

Theorem 0.1. *Let E be a Banach space. Consider the following conditions:*
(1) $\hat{\bigotimes}^k_{s,\pi}E$ has the WAP.
(2) $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^kE;\hat{\bigotimes}^k_{s,\pi}E) \subset \overline{\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(^kE;\hat{\bigotimes}^k_{s,\pi}E)}^{\tau_c}$.
(3) $\mathcal{K}(E;\hat{\bigotimes}^k_{s,\pi}E) \subset \overline{\mathcal{F}(E;\hat{\bigotimes}^k_{s,\pi}E)}^{\tau_c}$.
Then (1) and (2) are equivalent and they imply (3).

We shall introduce a new concept that encompasses the AP and the WAP as particular cases. Let $\mathcal{I}$ be an ideal of operators in the sense of Pietsch [4]. We say that a Banach space E has the *$\mathcal{I}$-weak approximation property* ($\mathcal{I}$-WAP) if $\mathcal{I}(E;E) \subset \overline{\mathcal{F}(E;E)}^{\tau_c}$. Note that $\mathcal{K}-WAP = WAP$ and $\mathcal{L}-WAP = AP$.

The main aim of this work is to characterize the $\mathcal{I}$-weak approximation property on $\hat{\bigotimes}^k_{s,\pi}E$, extending so Theorem 0.1.

Given an operator ideal $\mathcal{I}$, a polynomial $P \in \mathcal{P}(^kE;F)$ belongs to the *composition polynomial ideal $\mathcal{I}\circ\mathcal{P}$*, denoted $P \in \mathcal{I}\circ\mathcal{P}(^kE;F)$, if there are a Banach space G, a polynomial $Q \in \mathcal{P}(^kE;G)$ and an operator $u \in \mathcal{I}(G;F)$ such that $P = u \circ Q$ (see [1]). Motivated by the fact that $\mathcal{P}_{\mathcal{K}} = \mathcal{K}\circ\mathcal{P}$ [5] and following the ideas in [2], we prove the following:

Theorem 0.2. *Let E be a Banach space and $\mathcal{I}$ be an operator ideal. Consider the following conditions:*
(a) $\hat{\bigotimes}^k_{s,\pi}E$ has the $\mathcal{I}-\mathcal{WAP}$.
(b) $\mathcal{I}(\hat{\bigotimes}^k_{s,\pi}E;\hat{\bigotimes}^k_{s,\pi}E) \subset \overline{\mathcal{F}(\hat{\bigotimes}^k_{s,\pi}E;\hat{\bigotimes}^k_{s,\pi}E)}^{\tau_c}$.

*Universidade Federal de Uberlândia, UFU, MG, Brasil, e-mail: soniles@famat.ufu.br. Supported by Fapemig
†Universidade Federal de Uberlândia, UFU, MG, Brasil, e-mail: botelho@ufu.br

(c) $\mathcal{I}\circ\mathcal{P}({}^kE;\hat{\bigotimes}^k_{s,\pi}E)\subset\overline{\mathcal{P}_{\mathcal{F}}({}^kE;\hat{\bigotimes}^k_{s,\pi}E)}^{\tau_c}$.

(d) $\mathcal{I}(E;\hat{\bigotimes}^k_{s,\pi}E)\subset\overline{\mathcal{F}(E;\hat{\bigotimes}^k_{s,\pi}E)}^{\tau_c}$.

Then (a), (b) and (c) are equivalent and they imply (d).

The formula $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}=\mathcal{K}\circ\mathcal{P}$ guarantees that Theorem 0.1 is a particular instance of Theorem 0.2

Before stating our next result we need some definitions and results concerning projections on spaces of polynomials, which ares used in the proof of the main result.

Choose $e\in E$ and $\gamma\in E'$ such that $\|e\|=\gamma(e)=\|\gamma\|=1$. Let

$$j_{k,F}:\mathcal{P}({}^kE;F)\to\mathcal{P}({}^{k+1}E;F)\ ,\ \ j_{k,F}(Q)(x)=\gamma(x)Q(x),$$

$$\pi_{k,F}:\mathcal{P}({}^{k+1}E;F)\to\mathcal{P}({}^{k+1}E;F)\ ,\ \ \pi_{k,F}(P)(x)=P(x)-P(x-\gamma(x)e),$$

for $Q\in\mathcal{P}({}^kE;F)$, $P\in\mathcal{P}({}^{k+1}E;F)$ and $x\in E$. Define $q_{k,F}:=(j_{k,F})^{-1}\circ\pi_{k,F}:\mathcal{P}({}^{k+1}E;F)\to\mathcal{P}({}^kE;F)$. Let $j^k_F:\mathcal{L}(E;F)\to\mathcal{P}({}^kE;F)$ be defined by $j^k_F:=j_{k-1,F}\circ\cdots\circ j_{1,F}$, and let $q^k_F:\mathcal{P}({}^kE;F)\to\mathcal{L}(E;F)$ be defined by $q^k_F:=q_{1,F}\circ\cdots\circ q_{k-1,F}$.

Lemma 0.1. *Given $k\in\mathbf{N}$, an operator ideal $\mathcal{I}$ and Banach spaces E and F, we have:*

(a) $j_{k,F}(\mathcal{I}\circ\mathcal{P}({}^kE;F))\subset\mathcal{I}\circ\mathcal{P}({}^{k+1}E;F)$.

(b) $\pi_{k,F}(\mathcal{I}\circ\mathcal{P}({}^{k+1}E;F))\subset\mathcal{I}\circ\mathcal{P}({}^{k+1}E;F)$.

(c) $q_{k,F}(\mathcal{I}\circ\mathcal{P}({}^{k+1}E;F))\subset\mathcal{I}\circ\mathcal{P}({}^kE;F)$.

(d) $q^k_F(\mathcal{I}\circ\mathcal{P}({}^kE;F))\subset\mathcal{I}(E;F)$.

(e) $j^k_F(\mathcal{I}(E;F))\subset\mathcal{I}\circ\mathcal{P}({}^kE;F)$.

The following theorem, in particular, gives a further characterization of the $\mathcal{I}$-WAP on $\hat{\bigotimes}^k_{s,\pi}E$:

Theorem 0.3. *Let E be a Banach space and $\mathcal{I}$ be an operator ideal. Consider the following conditions:*

(a) $\mathcal{I}(\hat{\bigotimes}^k_{s,\pi}E;\hat{\bigotimes}^k_{s,\pi}E)\subset\overline{\mathcal{J}(\hat{\bigotimes}^k_{s,\pi}E;\hat{\bigotimes}^k_{s,\pi}E)}^{\tau_c}$.

(b) $\mathcal{I}\circ\mathcal{P}({}^kE;\hat{\bigotimes}^k_{s,\pi}E)\subset\overline{\mathcal{J}\circ\mathcal{P}({}^kE;\hat{\bigotimes}^k_{s,\pi}E)}^{\tau_c}$.

(c) $\mathcal{I}(E;\hat{\bigotimes}^k_{s,\pi}E)\subset\overline{\mathcal{J}(E;\hat{\bigotimes}^k_{s,\pi}E)}^{\tau_c}$.

Then (a), (b) are equivalent and they imply (c).

References

[1] G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda, *On composition ideals of multilinear mappings and homogemous polynomials*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **43** (2007), 1139 – 1155.

[2] E. Çaliskan and P. Rueda, *On distinguished polynomials and thier projections*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., in press.

[3] C. Choi and J. M. Kim, *Weak and quasi approximation properties in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **316** (2006), 722 – 735.

[4] A. Pietsch, *Operator Ideals*. Deutscher Verlag der Wissenschaften and North-Holland, Berlin/Amsterdam-New York-Oxford, 1978/80.

[5] R. Ryan, *Applications of topological tensor products to infinite dimensional holomorphy* . Thesis - Trinity College Dublin, 1980.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS COM RETARDAMENTO DEPENDENDO DO TEMPO.

SUZINEI AP. S. MARCONATO*

1 Introdução

Neste trabalho estudamos propriedades de estabilidade de um sistema de equações de diferenças

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k(t)x(t - r_k(t)), t \geq 0 \tag{1.1}$$

considerando os coeficientes A_k e os retardamentos r_k variando com o tempo, utilizando dados da equação em que A_k são matrizes constantes de ordem n e r_k são constantes reais positivas, ou seja,

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k x(t - r_k), x \in R^n. \tag{1.2}$$

Provamos que, no caso escalar, se (1.2) for estável, o sistema perturbado (1.1) será também estável, com condições impostas sobre $r_k(t)$ e $A_k(t)$. No caso escalar, Melvin [3] provou que uma condição necessária e suficiente para estabilidade de (1.2) é $\sum_{k=1}^{N} |A_k| < 1$, $A_k \in R$. Vamos utilizar uma versão modificada do Teorema do Ponto Fixo de Darbo (veja [2]) para provar o principal resultado em relação à estabilidade da equação (1.1), com a condição inicial

$$x(t) = \psi(t), -r \leq t \leq 0, \tag{1.3}$$

Teorema 1.1. *Para o sistema (1.1-1.3), consideremos* $r_k : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $A_k : [0, +\infty) \to R$, *funções contínuas com* $A_k(0) = A_k, r_k(0) = r_k, 0 \leq r_k \leq r, r_k(t) \leq t + r_k, t \geq 0, k = 1, ..., N$ *e seja* $r(t) = max\{r_k(t), k = 1, ..., N\}, t \geq 0$, $r = max\{r_k, k = 1, ..., N\}, -r \leq t \leq 0$. *Supõe-se que:*

(i) $sup_{t \geq 0}\{\sum_{k=1}^{N} |A_k(t)|\} < 1$;

(ii) $lim_{t \to +\infty}(t - r(t)) = +\infty$.

Então, para toda função ψ *definida e contínua em* $[-r, 0]$ *com* $\psi(0) = \sum_{k=1}^{N} A_k \psi(-r_k)$, *o sistema (1.1-1.3) terá uma única solução* y, *com* $y(t) \to 0$ *quando* $t \to +\infty$.

A versão modificada do Teorema do Ponto Fixo de Darbo é dada por:

Teorema 1.2. *Seja* C *um subconjunto não vazio, limitado, convexo e fechado de um espaço de Banach* E. *Supõe-se* $T : C \to C$ *uma* μ*-contração. Então,* T *terá, no mínimo, um ponto fixo em* C *e o conjunto* $FixT = \{x \in C : Tx = x\}$ *pertence a* $Ker\mu$.

Para demonstrar o principal resultado, vejamos algumas notações. Sejam $(E, \|\|)$ um espaço de Banach, m_E a família de subconjuntos não vazios e limitados de E e R_E a família de subconjuntos não vazios e relativamente compactos de E. Seja $p(t)$ um função definida e contínua em $[-r, +\infty)$ com valores em R^+, sendo r um número

*IGCE , UNESP, RClaro, Brasil, sasmarc@rc.unesp.br

real. Denotemos $C_p = C([-r,\infty);p(t))$ o conjunto das funções reais contínuas definidas em $[-r,\infty)$, tais que $sup\{|x(t)|p(t) : t \geq -r\} < \infty$. C_p é um espaço de Banach real munido da norma $\|x\| = sup\{|x(t)|p(t) : t \geq -r\}$. Agora, para um arbitrário $x \in C_p$, $X \in m_{C_p}, T > 0, \epsilon > 0$, denotemos:
$w^T(x,\epsilon) = sup\{|x(t)p(t) - x(s)p(s)| : t,s \in [-r,T], |t-s| \leq \epsilon\}$ $\quad w^T(X,\epsilon) = sup\{w^T(x,\epsilon) : x \in X\}$
$w_o^T(X) = \lim_{\epsilon\to 0} w^T(X,\epsilon)$ $\quad w_o(X) = \lim_{T\to\infty} w_o^T(X)$ $\quad a(X) = \lim_{T\to\infty} sup_{x\in X}\{sup\{|x(t)|p(t) : t \geq T\}\}$.
Define-se também a função $\mu_o(X) = w_o(X) + a(X)$, que é medida sublinear de não compacidade no espaço C_p, veja [1]. O $Ker\mu_o$ é a família de todos os conjuntos limitados, consistindo de funções equicontínuas em cada intervalo compacto e que $\lim_{t\to\infty} x(t)p(t) = 0$, uniformemente com relação a $x \in X$.

2 Resultado: Demonstração do Teorema 1.1

Seja $M = \{y \in C_H([-r,+\infty),R) : y(t) = \psi(t), -r \leq t \leq 0\}$, em que $C_H([-r,+\infty),R) = \{y \in C([-r,+\infty),R) : \|y\| \leq H\}$ e $F : M \to M$ é uma aplicação dada por $(Fy)(t) = \sum_{k=1}^N a_k(t)y(t-r_k(t)), t \geq 0$ e $(Fy)(t) = y(t)$ para $-r \leq t \leq 0$.
É fácil verificar que F é uma contração e pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, o sistema (1.1-1.3) tem uma única solução. Vamos agora provar a estabilidade. Considere a mudança de variáveis $y(t) = x(t)exp(t-r(t))$. Assim, $y(t-r_k(t)) = x(t-r_k(t))exp(t-r_k(t)-r(t-r_k(t)))$ e o sistema (1.1-1.3) é equivalente a $x(t) = \sum_{k=1}^N a_k(t)exp[r(t) - r_k(t) - r(t-r_k(t))]x(t-r_k(t)), t \geq 0$ e $x(t) = exp(r(0)-t)\psi(t)$ para $-r \leq t \leq 0$. Seja $C_p = C([-r,+\infty),p(t))$ com $p(t) = exp(t-r(t))$, define-se $M = \{x \in C_p : x(t) = exp(r(0)-t)\psi(t), -r \leq t \leq 0\}$ e a aplicação F definida em M por $(Fx)(t) = \sum_{k=1}^N a_k(t)exp[r(t)-r_k(t)-r(t-r_k(t))]x(t-r_k(t)), t \geq 0$ e $(Fx)(t) = x(t), -r \leq t \leq 0$. É possível provar que $\|Fx - Fy\| \leq \|x-y\|$, para $x,y \in M$. Portanto, F é contínua em $K = K(0,\delta)$, bola aberta centrada no zero. Agora, para $X \subset K$ fixo, $x \in X$, $T \geq 0$, $t \geq T$, temos que

$$|(Fx)(t)|exp(t-r(t)) = |\sum_{k=1}^N a_k(t)exp[t-r_k(t)-r(t-r_k(t))]x(t-r_k(t))| \leq$$

$$\leq sup_{t\geq 0}\{\sum_{k=1}^N |a_k(t)|\}sup\{|x(t)|exp(t-r(t)) : t \geq inf_{s\geq T}(s-r(s))\}.$$

Assim, $a(FX) \leq sup_{t\geq 0}\{\sum_{k=1}^N |a_k(t)|\}a(X)$ para todo $X \subset K$. Sejam $\epsilon > 0, T > 0, t,s \in (0,T)$ tais que $|t-s| \leq \epsilon$. É possível provar que $|(Fx)(t)exp(t-r(t)) - (Fx)(s)exp(s-r(s))| \leq$

$$\leq sup_{t\geq 0}\{\sum_{k=1}^N |a_k(t)|\}sup\{|A(t)-B(t)| : t,s \in (0,T), |t-s| \leq \alpha\},$$

em que $A(t) = exp(t-r(t))x(t)$, $B(s) = exp(s-r(s))x(s)$ e $\alpha = sup\{|(t-r(t))-(s-r(s))|, t,s \in (0,T), |t-s| \leq \epsilon\}$.
Assim, $w_o^T(FX) \leq sup_{t\geq 0}\{\sum_{k=1}^N |a_k(t)|\}w_o^T(X), \forall X \subset K$.
Combinando esta desigualdade com a que maximiza $a(FX)$, temos $\mu_o(FX) \leq sup_{t\geq 0}\{\sum_{k=1}^N |a_k(t)|\}\mu_o(X)$, para todo $X \subset K$, o qual prova que F é uma μ_o-contração e pelo Teorema 1, o sistema (1.1-1.3) tem um ponto fixo x em C_p com $\lim_{t\to\infty} x(t)p(t) = 0$ e como $x(t) = exp[-(t-r(t))]y(t)$, tem-se que $\lim_{t\to\infty} x(t)p(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = 0$, onde y é a solução do sistema (1.1-1.3). ■

Referências

[1] BANÁS, J., GOEBEL, K. - *Measures of non-compactness in Banach spaces*, Marcel Dekker Inc., New York, 1980.
[2] BANÁS, J., HAJNOSZ, A., WEDRYCHOWICZ, S. - On existence and asymptotic behavior of solutions of some functional equations. *Funkcial Ekvac*, **25**, 257-267, 1982.
[3] MELVIN, W. R. - Stability properties of functional differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, **48**, 749-763, 1974.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

GLOBAL EXPONENTIAL STABILITY OF IMPULSIVE FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INFINITE DELAY

TERESA FARIA [*]; MARTA C. GADOTTI [†] & JOSÉ J. OLIVEIRA [‡]

We establish conditions to ensure that the equilibrium point of impulsive functional differential equations with infinite delay is globally exponentially stable. The results are used to give stability criteria for a very broad family of impulsive neural network models.

1 Preliminaries

For a compact interval $[\alpha,\beta]$ of $\mathbb{R}$, let $PC([\alpha,\beta];\mathbb{R}^n)$ be the space of piecewise continuous functions from $[\alpha,\beta]$ to $\mathbb{R}^n$ and left continuous on $(\alpha,\beta]$, $PC([\alpha,\beta];\mathbb{R}^n)=\{\phi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n|\ \phi$ is continuous everywhere except for a finite number of points $s\in[\alpha,\beta)$ for which $\phi(s^-),\phi(s^+)$ exist and $\phi(s^-)=\phi(s)\}$, equipped with the supremum norm $\|\phi\|_\infty=\sup_{s\in[\alpha,\beta]}|\phi(s)|$, where $|\cdot|$ is a chosen norm in $\mathbb{R}^n$. Denote by $R([\alpha,\beta];\mathbb{R}^n)$ the closure of $PC([\alpha,\beta];\mathbb{R}^n)$ with respect to the supremum norm in the space of all bounded functions from $[\alpha,\beta]$ to $\mathbb{R}^n$. The space $R([\alpha,\beta];\mathbb{R}^n)$ is the space of normalized (from the left) regulated (or ruled) functions from $[\alpha,\beta]$ to $\mathbb{R}^n$, i.e, the space of functions $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ with only discontinuities of the first kind, and left continuous on $(\alpha,\beta]$; $R([\alpha,\beta];\mathbb{R}^n)$ is a Banach space and every function in $R([\alpha,\beta];\mathbb{R}^n)$ has at most countably many discontinuities (see e.g. [Dieudonné, p. 146]).

Define the space $PC=PC((-\infty,0];\mathbb{R}^n)$ as the space of functions from $(-\infty,0]$ to $\mathbb{R}^n$ for which the restriction to each compact interval $[\alpha,\beta]\subset(-\infty,0]$ is in $R([\alpha,\beta];\mathbb{R}^n)$. Clearly, if $\phi\in PC$ then ϕ is continuous everywhere except at most for a enumerable number of points $s=s_k$, and $\phi(s_k^-),\phi(s_k^+)$ exist with $\phi(s_k)=\phi(s_k^-)$. Denote by BPC the subspace of all bounded functions in PC, $BPC=BPC((-\infty,0];\mathbb{R}^n)=\{\phi\in PC:\phi$ is bounded on $(-\infty,0]\}$, with the supremum norm $\|\phi\|_\infty=\sup_{\theta\le 0}|\phi(\theta)|$. For $\beta\in\mathbb{R}$, in a similar way we define the spaces $PC((-\infty,\beta];\mathbb{R}^n)$ and $BPC((-\infty,\beta];\mathbb{R}^n)$.

Fix a function g such that: (g1) $g:(-\infty,0]\to[1,\infty)$ is a non-increasing continuous function and $g(0)=1$; (g2) $\lim\limits_{u\to 0^-}\dfrac{g(s+u)}{g(s)}=1$ uniformly on $(-\infty,0]$; (g3) $g(s)\to\infty$ as $s\to-\infty$.

We shall consider the phase space

$$PC_g=\Big\{\phi\in PC:\sup_{s\le 0}\frac{|\phi(s)|}{g(s)}<\infty\Big\},\ \text{with the norm}\quad \|\phi\|_g=\sup_{s\le 0}\frac{|\phi(s)|}{g(s)}.$$

It is clear that $BPC\subset PC_g$, with $\|\phi\|_g\le\|\phi\|_\infty$ for $\phi\in BPC$. If BPC is considered as a subspace of PC_g, we often write BPC_g. The spaces $(BPC,\|\cdot\|_\infty)$ and $(PC_g,\|\cdot\|_g)$ are Banach spaces. For this purpose, we shall consider $g(s)=e^{-\alpha s}$, $s\in(-\infty,0]$, for some α and denote the phase space PC_g by PC_α and $\|.\|_g$ by $\|.\|_\alpha$.

[*]Departamento de Matemática and CMAF, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Portugal, e-mail: tfaria@ptmat.fc.ul.pt
[†]IGCE-Departamento de Matemática, Unesp, Rio Claro-SP, Brasil, e-mail: martacg@rc.unesp.br. Supported by FAPESP - Processo 2010/12712-7
[‡]Departamento de Matemática e Aplicações and CMAT, Escola de Ciências, Universidade do Minho, Portugal, e-mail: jjoliveira@math.uminho.pt

2 Main results

Consider the following non-autonomous impulsive system:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= -a_i(x_i(t))[b_i(x_i(t)) + f_i(t, x_t)],\ 0 \le t \ne t_k,\ i = 1, 2, ..., n \\ \Delta(x_i(t_k)) &= x_i(t_k^+) - x_i(t_k^-) = I_{ik}(x_i(t_k^-)), \end{aligned} \tag{2.1}$$

where $a_i : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $b_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_i : \mathbb{R} \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ and $I_{ik} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are continuous functions for all $k = 1, 2, ..., 1 \le i \le n$, and either $\mathcal{D} = PC_g$ or $\mathcal{D} = BPC$. For $i = 1, \dots, n$ and $k = 1, 2, \dots$, we denote

$$\hat{I}_{ik}(u) := I_{ik}(u) + u, \quad u \in \mathbb{R}.$$

The initial conditions will be given at $t = 0$,

$$x_0 = \phi, \quad \phi \in BPC. \tag{2.2}$$

The following hypotheses will be assumed:

(A1) there exists constants $\beta_i > 0$ such that $\dfrac{b_i(u) - b_i(v)}{u - v} \ge \beta_i$, $\forall\ u, v \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$;
(A2) f_i are uniformly Lipschitz continuous with respect to φ, with $|f_i(t, \varphi) - f_i(t, \psi)| \le l_i \|\varphi - \psi\|_g$, for $t \in \mathbb{R}$ and $\varphi, \psi \in PC_g$, $i = 1, 2, \dots, n$;
(A3) $\beta_i > l_i$, $i = 1, 2, \dots, n$;
(A4) $\hat{I_{ik}}$ are Lipschitz continuous with $|\hat{I}_{ik}(u) - \hat{I}_{ik}(v)| \le \hat{\gamma}_{ik}|u - v|$, $\forall u, v \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$, $k = 1, 2, ...$

Proposição 2.1. *Assume (A1)-(A4). Then the initial value problem (2.1)-(2.2) has a solution $x(t)$ defined on $[0, \infty)$.*

Teorema 2.1. *Assume that there is an equilibrium x^* of (2.1). Assume also (A1)-(A4) and*
(A5) $a_i(u) \ge \underline{a_i} > 0$ *for all* $u \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$.
(A6) *for* $\hat{\gamma}_k := \max_{1 \le i \le n} \hat{\gamma}_{ik}$ *and* $\hat{\gamma}_{ik}$ *as in (A4) and some* $k_0 \in \mathbb{N}$,

$$\eta := \sup_{k \ge k_0} \frac{\log(\max\{1, \hat{\gamma}_k\})}{t_k - t_{k-1}} < \min_i \{\underline{a_i}(\beta_i - l_i)\},$$

where the space PC_g in (A2) is $PC_g = PC_\varepsilon$ for some $\varepsilon > \eta$. Then the equilibrium x^* of (2.1) is globally exponentially stable.

References

[1] FARIA, T. AND OLIVEIRA, J.J., *General criteria for asymptotic and exponential stabilities of neural network models with unbounded delays*, Applied Mathematics and Computation, 217 (2011) 9646-9658.

[2] FARIA, T., GADOTTI, M.C. AND OLIVEIRA, J.J., *Stability results for impulsive functional differential equations with infinite delay*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, (2012).

[3] HINO,Y., MURAKAMI, S. AND NAITO, T., *Functional Differential Equations with Infinite Delay*, Springer-Verlag, Berlin (1991).

[4] LI, K., ZHANG, L. AND LI, Z., *Stability in impulsive Cohen-Grossberg-type BAM neural networks with distributed delays*, Applied Mathematics and Computation, 215 (2010) 3970-3984.

[5] LUO, W. AND ZHONG, S., *Global exponential stability of inpulsive Cohen-Grossberg neural networks with delays*, Chaos, Solitons & Fractals 42 (2009) 1084-1091.

[6] XIA, Y., HUANG, Z. AND HAN, M. , *Existence and globally exponential stability of equilibrium for BAM neural networks with impulses,* Chaos, Solitons & Fractals 37 (2008) 588-597.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

Eigenvalues of integral operators with kernels satisfying an averaged Hölder assumption on the sphere.

Thaís Jordão * & Valdir A. Menegatto †

We investigate the eigenvalue behavior of positive integral operators generated by kernels satisfying a Hölder condition defined by averages on caps of the usual unit sphere. Our method is based on a convenient approximation by finite rank operators based on the generalized Jackson kernels.

1 The result

We will write S^m to denote the unit sphere in $\mathbb{R}^{m+1}$ while $d\sigma_m$ will indicate the surface element of S^m. For $p = 1, 2$, the symbol $L^p(S^m)$ will denote the usual space $L^p(S^m, \sigma_m)$. The inner product in $L^2(S^m)$ will be written $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$.

In this note we will deal with positive integral operators of the form

$$\mathcal{L}_\mathcal{K}(f)(x) = \int_{S^m} K(x,y) f(y)\, d\sigma_m(y), \quad x \in S^m,$$

in which $K : S^m \times S^m \to \mathbb{C}$ is a kernel from the usual space $L^2(S^m \times S^m)$. It is well-known that $\mathcal{L}_\mathcal{K}$ is a well-defined bounded and compact linear operator from $L^2(S^m)$ into itself. The positivity of $\mathcal{L}_\mathcal{K}$ means that $\langle \mathcal{L}_\mathcal{K}(f), f\rangle_2 \geq 0$, $f \in L^2(S^m)$. Since $\mathcal{L}_\mathcal{K}$ is also self-adjoint, its spectrum is composed of at most countably many nonnegative eigenvalues which can be ordered decreasingly: $\lambda_1(\mathcal{L}_\mathcal{K}) \geq \lambda_2(\mathcal{L}_\mathcal{K}) \geq \ldots \geq 0$.

Since $\mathcal{L}_\mathcal{K}$ has a unique square root $\mathcal{L}_\mathcal{K}{}^{1/2}$, we will assume it is, likewise, an integral operator generated by an hermitian kernel $K_{1/2}$, and that K can be recovered from $K_{1/2}$ in the following sense:

$$\int_{S^m} K_{1/2}(x,y) K_{1/2}(w,x) d\sigma_m(x) = K(w,y), \quad y, w \in S^m.$$

Ordering the eigenvalues of $\mathcal{L}_K^{1/2}$ the same way we did with those of $\mathcal{L}_\mathcal{K}$, the following connection formula holds

$$\lambda_n(\mathcal{L}_K^{1/2}) = (\lambda_n(\mathcal{L}_\mathcal{K}))^{1/2}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

The main result in this note describes the exact asymptotic eigenvalue behavior for the sequence $\{\lambda_n(\mathcal{L}_\mathcal{K})\}$ when K satisfies an assumption of Hölder type defined via averages on caps of the sphere. For $t \in (0, \pi)$, the average of a function $f \in L^1(S^m)$ over the cap $C_t^x = \{w \in S^m : x \cdot w \geq \cos t\}$ ("$\cdot$" is the usual inner product in $\mathbb{R}^{m+1}$), is the function M_t given by the formula

$$M_t(f)(x) = \frac{1}{C_m(t)} \int_{C_t^x} f(w) dr(w), \quad x \in S^m, \quad t \in (0, \pi),$$

in which $C_m(t)$ is total volume of cap C_t^x. Its value is precisely $C_m(t) = \sigma_{m-1} \int_0^t (\sin h)^{m-1} dh$, where σ_{m-1} is the surface area of S^{m-1}. The formula above defines a bounded linear operator M_t from $L^p(S^m)$ into itself ([1, 2]). The averaged Hölder condition we referred to in the title can now be introduced: if $\beta \in (0, 2]$ and B belongs to $L^1(S^m)$, the kernel K is said to be (B, β)-*Hölder* when

$$|M_t(K(y, \cdot))(x) - K(y, x)| \leq B(y) t^\beta, \quad x, y \in S^m, \quad t \in (0, \pi).$$

*ICMC, USP, SP, Brasil, thsjordao@gmail.com. Partially supported by FAPESP grant # 2011/21300 − 7.
†ICMC, USP, SP, Brasil, menegatt@icmc.usp.br. Partially supported by FAPESP grant # 2010/19734 − 6.

Our target is the following result.

Teorema 1.1. *($m \geq 2$) Let $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ be an integral operator possessing all the features listed above. If the generating kernel $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ is (B, β)-Hölder on S^m then*

$$\lambda_n(\mathcal{L}_{\mathcal{K}}) = O(n^{-2-(\beta-2)/m}), \quad (n \to \infty).$$

This decay is best possible within the setting adopted.

The proof is based on the estimation for the eigenvalues provided by the Min-max theorem for compact operators on a Hilbert space ([3]). We use that result to estimate upon the eigenvalues of the square root of $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$. The idea is to approximate the later by specially chosen finite rank operators that depend on $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ itself, the generalized Jackson kernels and the operator M_t.

2 Comments on the result

This theorem resembles results found in [4, 5, 6]. In the first reference the decay obtained is $\lambda_n(\mathcal{L}_{\mathcal{K}}) = O(n^{-1-\beta/m})$, the exponent β coming from the standard Hölder condition used. Despite the setting being larger, the generating kernel is assumed to be continuous and the arguments do not use the square root of the operator. The decay derived there is optimal within the setting adopted and the construction of an example matching the decay exactly is provided.

In [6], the same usual Hölder condition on the generating kernel is used to improve the decay rate in [4] to that in the statement of the above theorem. The setting is the spherical one and the other assumptions are basically the same we are adopting here. In [5], two additional achievements were attained: the same decay rate was obtained with the replacement of the Hölder condition with another one based on the translation operator and the setting was expanded in order to include all two-point homogeneous spaces. In both references, the decay is shown to be optimal within the setting.

Returning to the spherical setting, Theorem 1.1 above is an improvement of all the results above in the sense that we are obtaining the very same decay for the sequence of eigenvalues using an averaged Hölder condition which is weaker than those used before.

References

[1] BERENS, H.; BUTZER, P. L. AND PAWELKE, S. - *Limitierungsverfahren von Reihen mehrdimensionaler Kugelfunktionen und deren Saturationsverhalten (German),* Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A, 4 (1968), pp. 201-268.

[2] DITZIAN, Z. AND RUNOVSKII, K. - *Averages on caps of S^{d-1},* J. Math. Anal. Appl., 248 (2000), pp. 260-274.

[3] GOHBERG, I.; GOLDBERG, S. AND KRUPNIK, N. - *Traces and determinants of linear operators,* Operator Theory: Advances and Applications, 116, Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.

[4] KÜHN, T. - *Eigenvalues of integral operators with smooth positive definite kernels,* Arch. Math. (Basel), 49 (1987), pp. 525-534.

[5] MENEGATTO, V. A. AND OLIVEIRA, C. P. - *Eigenvalues of positive integral operators over compact two-point homogeneous spaces,* preprint.

[6] MENEGATTO, V. A.; PERON, A. P. AND SANT'ANNA, D. A. - *Optimal asymptotic eigenvalue behavior of positive integral operators via generalized Jackson kernels,* preprint.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

Polyomials between Operator Spaces

Cristina Radu * & Sean Dineen†

Operator spaces are closed subspaces of $B(H)$. This means an operator space is a Banach space endowed with an extra structure which keeps track of $C^*algebra$ structure inherited from $B(H)$ (the information about the embedding is kept by spaces of matrices of the operator space). The morphisms in the cathegory of operator spaces are the completely bounded maps. If E, F are operator spaces and $u : E \to F$ is a linear map we have that

$$\|u\|_{cb} = \sup \|u_n\|$$

where $u_n : M_n(E) \to M_n(F)$ is defined by $u_n([x_{ij}]) = [u(x_{ij})]$. The space $CB(E, F)$ (completely bounded operators between E and F) is a Banach space with respect to the cb norm.

Effros and Ruan [3] studied the operator spaces from the matrix structure point of view, using multilinear mappings [1]. Pisier [4] focused more on the embedding which makes a certain Banach space become an operator space.

We get the row operator space, R, by viewing l_2 as the first row in an infinite matrix with zero entries everywhere else. And we get the column operator space, C by placing l_2 in an infinite matrix with non-zero entries in the first column. The row and the column operator spaces are isometric as Banach spaces since both are Hilbert spaces of same dimension but as operator spaces they are as far apart as two operator spaces may be. They are also dual one to each other, in the sense that $R^* = C$ as operator spaces. Another important example of a Hilbert operator space is Pisier's self dual operator space, OH [5]. In the category of operator spaces there are an infinity of non completely isometric Hilbert operator spaces, the only self dual being OH. This space is the unique operator space up to a complete isometry with the following property. Let K be any Hilbert space and let $(T_i)_{i\in I}$ be any orthonormal basis of OH. Then for any finitely supported family $(x_i)_{i\in I}$ in $B(K)$ we have

$$(\mathcal{P})\ \|\sum_{i\in I} x_i \otimes T_i\|_{min} = \|\sum_i x_i \otimes \overline{x_i}\|_{min}^{\frac{1}{2}}.$$

We define completely bounded polynomials between operator spaces [6], [2]. If E and F are operator spaces we let

$$\mathcal{P}_{cb}(^1E, F) = CB(E, F)$$

as operator spaces. Suppose $\mathcal{P}_{cb}(^{m-1}E, F)$ has been endowed with an operator space structure. For an integer $m \geq 2$ let

$$\mathcal{P}_{cb}(^mE, F) := \{P \in \mathcal{P}(^mE, F) : \overline{P} \in CB(E, \mathcal{P}_{cb}(^{m-1}E, F)\}$$

where $\overline{P} = dP$. Let $\|\cdot\|_\bullet$ denote the norm on $\mathcal{P}_{cb}(^mE, F)$, given by

$$\|P\|_\bullet = \|\overline{P}\|_{cb}.$$

*Instituto de Matemática , UFRJ, RJ, Brasil, cristinar@im.ufrj.br
†University College Dublin, Ireland e-mail: sean.dineen@ucd.ie

An important example of completely bounded polynomials are the m-th powers of linear functionals. Other examples of completely bounded polynomials include the nuclear polynomials on arbitrary Banach spaces.

We notice that the space of m-homogeneous polynomials on a finite dimensional operator space E may be identified with a closed subspace of the m-th tensor product of E^*.

$$\mathcal{P}_{cb}(^m E) \hookrightarrow CB(E, \mathcal{P}_{cb}(^{m-1}E)) \hookrightarrow \otimes^m_{min} E^*.$$

We study a particular subspace of $\mathcal{P}(^m H)$, the diagonal polynomials. These polynomials have the form

$$P(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^m$$

with $\lambda_i \in \mathbf{C}$, $1 \leq i \leq n$. We denote by $\mathcal{P}_{cb,d}(^m H)$ the space of m-homogeneous completely bounded diagonal polynomials on H, relative to some given basis, endowed with the operator structure inherited from $\mathcal{P}_{cb}(^m H)$.

For computing the norm of a completely bounded polynomial on OH_n we essentially use the unique property $(\mathcal{P})$ of OH_n. We show that if $P \in \mathcal{P}_d(^m OH_n)$ has the form

$$P(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^m$$

for some scalars $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \subset \mathbf{C}^n$, then it is completely bounded and

$$\|P\|_{\bullet} = \sup_i |\lambda_i|.$$

In order to compute the cb norm of an m-homogeneous polynomial on the row operator space and the column operator space we use an interesting property of the minimal tensor product. This property is based on the relation between the minimal tensor product and the Haagerup tensor product and is specific to the row and column operator spaces. The Haagerup tensor product is defined only in the category of operator spaces. We obtain an l_2 type norm for the completely bounded norm of m-homogeneous diagonal polynomials on both R and C

$$\|P\|^2_{\bullet} = \sum_{i=1}^n |\lambda_j|^2.$$

References

[1] Effros, E., Ruan, G-J., A new approach to operator spaces, Canad. Math. Bull., 34, (1991), no. 3, 329–337.

[2] Dineen, S., Radu, C. Completely Bounded Polynomials Between Operator Spaces, Math. Scand. 107 (2010), p. 249-266

[3] Effros, E., Ruan, G-J., Operator Spaces, Oxford Science Publications, 2005.

[4] Pisier, G., Introduction to Operator Space Theory, London Math. Soc. Lecture Note Series, 294, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[5] Pisier, G., The Operator Space OH, Complex Interpolation and Tensor Norms, Memoirs of the AMS, Vol. 122, Nr. 585, 1996.

[6] Radu, C., Completely Bounded Polynomials Between Operator Spaces, thesis, UCD, 2008

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

EQUAÇÕES DE SCHRÖDINGER COM POTENCIAL DE SINAL INDEFINIDO E ENVOLVENDO CRESCIMENTO EXPONENCIAL

EVERALDO DE MEDEIROS[*], MANASSÉS DE SOUZA[†] & UBERLANDIO SEVERO[‡]

Neste trabalho, estamos interessados na existência de solução para a seguinte classe de equações de Schrödinger semilineares:

$$-\Delta u + V(x)u = g(x,u) + \lambda h \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^2, \tag{0.1}$$

em que λ é um parâmetro positivo, g e V são funções satisfazendo condições suaves e h pertence ao dual de um apropriado espaço de funções. Como é bem conhecido na literatura, o problema (0.1) está relacionado com a existência de ondas solitárias para a equação de Schrödinger não-linear

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m}\Delta_x\psi + V(x)\psi - g(x,|\psi|)\psi - h(x)e^{i\omega t},$$

em que m e $\hbar$ são constantes positivas, $\omega \in \mathbb{R}$ e $\psi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Tais equações aparecem em vários ramos da Física-Matemática (veja, por exemplo, [4]) e tem sido objeto de extensivo estudo durante os últimos anos.

Aqui, primeiramente, consideramos as seguintes hipóteses sobre o potencial V:

(V_1) $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é mensurável e existem b_0, $R_0 > 0$ tais que $V(x) \geq b_0$, para $|x| \geq R_0$;

(V_2) $V^- \in L^p(B_{R_0})$ para algum $1 < p \leq \infty$;

em que $V^{\pm} = \max\{\pm V, 0\}$ e B_R denota a bola aberta centrada na origem em $\mathbb{R}^2$. Notemos que (V_1) e (V_2) permitem considerar potenciais coercivos, que podem oscilar no infinito e também potenciais que não são limitados inferiormente. Não necessitamos impor condições em V que impliquem em algum resultado de compacidade e nem precisamos que o potencial seja contínuo. Salientamos que trabalhos que envolvem potenciais mudando de sinal não são tão abordados na literatura.

Nosso segundo objetivo neste trabalho é lidar com não-linearidades $g(x,s)$ somente mensuráveis e tendo crescimento exponencial. Depois dos trabalhos bem conhecidos de Trudinger e Moser, o caso limite $p = n$ da imersão de Sobolev recebeu uma considerável atenção nos últimos anos. À grosso modo, seus resultados afirmam que se Ω é um domínio limitado e $\alpha > 0$, então existe a imersão $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L_A(\Omega)$, onde $L_A(\Omega)$ é o espaço de Orlicz baseado na N-função $A(s) = e^{s^2} - 1$. De fato, esta imersão é a "melhor possível"no sentido que se existe qualquer imersão da forma $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L_B(\Omega)$, então A "domina"a N-função B no infinito. Este fato foi a principal motivação para a noção de crescimento crítico exponencial, como introduzida nos trabalhos [1] e [3].

Quando $\Omega = \mathbb{R}^2$, provou-se que se $\alpha > 0$ e $u \in W^{1,2}\left(\mathbb{R}^2\right)$ então $\int_{\mathbb{R}^2}(e^{\alpha s^2} - 1)\,\mathrm{d}x < \infty$. Este resultado motivou o estudo de equações elípticas semilineares no espaço inteiro $\mathbb{R}^2$, quando a não linearidade $g(x,s)$ comporta-se como $e^{\alpha s^2} - 1$ no infinito.

Em muitos trabalhos, quando $g(x,s)$ é uma função Carathéodory, pode-se usar argumentos de minimização, baseados no Princípio Variacional de Ekeland e Lema 2.1 de [3], para se encontrar uma solução para problemas não-homogêneos do tipo (0.1).

Neste trabalho, consideramos uma classe mais geral de não-linearidades $g(x,s)$, satisfazendo as hipóteses:

(G_1) para cada $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mensurável, a função de Nemytskii $N_g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $N_g(x) = g(x, u(x))$ é mensurável;

[*]Departamento de Matemática , UFPB, João Pessoa-PB, Brasil, everaldo@mat.ufpb.br
[†]Departamento de Matemática , UFPB, João Pessoa-PB, Brasil, manasses@mat.ufpb.br
[‡]Departamento de Matemática , UFPB, João Pessoa-PB, Brasil, uberlandio@mat.ufpb.br

(G_2) para cada $x \in \mathbb{R}^2$, $g(x,s)$ é não-decrescente em s e

$$|g(x,s)| \leq c_1 k(x)|s|^\rho + c_2(e^{\alpha_0 s^2} - 1)|s|^\mu, \ \forall\, (x,s) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R},$$

em que $k \in L^\sigma(\mathbb{R}^2)$ para algum $1 < \sigma \leq \infty$, $c_1, c_2 > 0$, $\alpha_0 > 0$, $\rho > 1$ and $\mu > 1$.

Com o intuito de obtermos a existência de solução para (0.1), trabalhamos no espaço X definido por

$$X = \left\{ u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^2) : \int_{\mathbb{R}^2} V^+(x) u^2 \,\mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

Um cálculo simples mostra que X é um espaço de Hilbert cuja norma proveniente do produto interno é dada por

$$\|u\| := \left[\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + V^+(x)u^2)\,\mathrm{d}x \right]^{1/2}.$$

Além disso, pela condição (V_1) a imersão $X \hookrightarrow W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ é contínua. Para todo $2 \leq t < \infty$, definamos

$$S_t = \inf_{\substack{u \in X \\ u \neq 0}} \frac{\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + V^+(x)u^2)\,\mathrm{d}x}{\left(\int_{\mathbb{R}^2} |u|^t \,\mathrm{d}x\right)^{2/t}}.$$

Provamos em nosso trabalho a continuidade da imersão $W^{1,2}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^t(\mathbb{R}^2)$, de onde concluímos que $S_t > 0$. Neste contexto, supomos que $h \in X'$, o espaço dual de X, e dizemos que $u \in X$ é uma solução fraca do problema (0.1) se vale

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^2} V(x)uv \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^2} g(x,u)v \,\mathrm{d}x + \lambda \langle h, v \rangle, \quad \forall\, v \in X,$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o par dualidade entre X e seu dual X'. Além das hipóteses sobre V, também assumimos a seguinte condição:

(V_3) $\|V^-\|_{L^p(B_{R_0})} < S_{t_0}$, onde $t_0 := 2p/(p-1) > 2$.

Desta forma, o principal resultado de nosso trabalho é o seguinte:

Teorema 0.1. *Suponha que* $(V_1) - (V_3)$ *e* $(G_1) - (G_2)$ *sejam satisfeitas. Então, existe* $\lambda_0 > 0$ *tal que para todo* $0 < \lambda \leq \lambda_0$*, o problema* (0.1) *tem uma solução fraca.*

As principais características da classe de problemas tratadas aqui são que ela está definida no $\mathbb{R}^2$ inteiro e que a não linearidade $g(x,s)$ pode ser descontínua em s e pode se comportar como $e^{\alpha s^2} - 1$ no infinito. Para demonstrarmos o Teorema 0.1, usamos um resultado de ponto fixo devido a S. Carl e S. Heikkilä (veja Corolário 2.2 em [2]), e uma versão pode enunciada como segue:

Lema 0.1. *Seja X um semi-reticulado de Banach reflexivo. Então, qualquer bola fechada de X tem a propriedade do ponto fixo.*

Referências

[1] ADIMURTHI - *Existence of positive solutions of the semilinear Dirichlet problem with critical growth for the n-Laplacian*, Ann. Scuola norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **17** (1990), 393–413.

[2] CARL, S. AND HEIKKILÄ, S. - *Elliptic problems with lack of compactness via a new fixed point theorem.* J. Differential Equations **186** (2002), 122–140.

[3] DE FIGUEIREDO, D. G.; MIYAGAKI, O. H. AND RUF, B. - *Elliptic equations in $\mathbb{R}^2$ with nonlinearities in the critical growth range*, Calc. Var. Partial Differential Equations **4** (1995), 139–153.

[4] STRAUSS, W. A. - *Mathematical aspects of classical nonlinear field equations.*, (Proc. IX G.I.F.T. Internat. Sem. Theoret. Phys., Univ. Zaragoza, Jaca, 1978). Lecture Notes in Physics, vol. **98**, pp. 123–149 (Springer, 1979).

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

Uma abordagem unificadora para estimar autovalores e valores singulares de operadores integrais

Valdir a. Menegatto* & Claudemir p. de Oliveira†

Nosso objetivo neste trabalho é apresentar um método para obter taxas de decaimento para autovalores e valores singulares de certos operadores integrais atuando em $L^2(X)$, o espaço das funções complexas de quadrado integrável sobre um espaço de medida (X, σ), tentando unificar tentativas anteriores. O trabalho [1], onde taxas de decaimento para valores singulares e autovalores de operadores integrais gerados por núcleos quadrado integráveis na esfera unitária em $\mathbb{R}^{m+1}$, $m \geq 2$, foram obtidos mediante hipóteses sobre certas derivadas de Laplace-Beltrami do núcleo e sobre os próprios operadores integrais, pode ser considerado com fonte motivadora para os resultados aqui apresentados. A unificação proposta aqui consiste em trocar a esfera de $\mathbb{R}^{m+1}$ por X, este desprovido de qualquer estrutura topológica, e a substituição do operador de Laplace-Beltrami por operador multiplicativo.

Suponhamos que $L^2(X)$ possua uma decomposição ortogonal da forma

$$L^2(X) = \oplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k, \tag{0.1}$$

onde cada $\mathcal{H}_k$ tem dimensão finita. Tais dimensões são denotados por d quando $k = 0$ e $d(k)$ nos demais casos. Os operadores integrais $\mathcal{K} : L^2(X) \to L^2(X)$ são definidos pela igualdade

$$\mathcal{K}(f) = \int_X K(\cdot, y) f(y) d\sigma(y), \quad f \in L^2(X),$$

onde $K \in L^2(X \times X) := L^2(X \times X, \sigma \times \sigma)$. Consequentemente, $\mathcal{K}$ é limitado e compacto e seus autovalores podem ser ordenados na forma

$$|\lambda_1(\mathcal{K})| \geq |\lambda_2(\mathcal{K})| \geq \cdots \geq 0, \tag{0.2}$$

com possíveis repetições incluídas na lista. Os resultados que pretendemos descrever pressupõem a existência de um operador linear ilimitado $\mathcal{D}$ com domínio

$$W := \{f \in L^2(X) : \mathcal{D}(f) \in L^2(X)\} \tag{0.3}$$

de modo que

$$\mathcal{D}(f) = \alpha_n f, \quad f \in \mathcal{H}_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{0.4}$$

onde $\{\alpha_n\}$ é uma sequência real crescente e ilimitada. Suporemos que $\{\alpha_n\}$ respeita a decomposição (0.1) no seguinte sentido: $\{\alpha_n\}$ está ordenada em blocos, onde B_0 contém d entradas iguais a α_0 e o n-ésimo bloco B_n, $n \geq 1$, contém $d(n)$ entradas iguais a α_n. Uma consequência óbvia das afirmações (0.3) e (0.4) é $\mathcal{H}_n \subset W$, $n = 0, 1, \ldots$. A notação $\mathcal{D}K$ representará o núcleo obtido de K pela ação de $\mathcal{D}$ na segunda variável, enquanto a primeira é mantida fixada. Neste contexto definimos

$$W' = \{K \in L^2(X \times X) : \mathcal{D}K(x, \cdot) \in W, \ x \in X \ a.e.\}.$$

Finalmente, necessitaremos considerar o operador $\mathcal{E} : L^2(X) \to L^2(X)$ obtido pelas condições

$$\mathcal{E}(f) = \alpha_n^{-1} f, \quad f \in \mathcal{H}_n, \quad n \neq 0,$$

e de uma extensão contínua a todo o $L^2(X)$. Como $\mathcal{E}$ é um limite, na norma de operadores, de uma sequência de operadores de posto finito, ele é automaticamente compacto. A sequência de autovalores de $\mathcal{E}$ deve ser interpretada

*ICMC-USP - São Carlos, SP, Brasil. menegatt@icmsc.usp.br. Este autor foi suportado pela FAPESP 2010/19734-6
†ICEX, UNIFEI, MG, Brasil. oliveira@unifei.edu.br

em consonância com o teorema espectral para operadores compactos e autoadjuntos sobre um espaço de Hillbert. Em particular, ela deve respeitar a estrutura em blocos imposta por $\mathcal{D}$. Cabe ainda informar que o operador $\mathcal{E}$ é normal.

Salvo disposição em contrário, suporemos que a sequência $\{s_n(\mathcal{K})\}$ dos valores singulares de $\mathcal{K}$ está ordenada em conformidade com a estrutura em blocos mencionada anteriormente, contando as multiplicidades de cada elemento da sequência.

As técnicas usadas nas provas dos resultados são semelhantes às de [1] auxiliadas por estimativas de [2].

1 Resultados

As hipóteses básicas abaixo são mencionadas nos enunciados dos teoremas principais.

A1: *Existe um inteiro positivo m tal que $d_n = O(n^m)$.*

A segunda afirmação relaciona $\{\alpha_n\}$ com $\{d(n)\}$ usando m de A1.

A2: *Existe um número real r tal que $n^{m+r} = O(\alpha_n d(n))$.*
A3: *Existe um real positivo ρ tal que $n^{m+\rho} = O(\alpha_n^2 d(n))$.*

Escreveremos $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ para denotar o produto interno de $L^2(X)$.

Teorema 1.1. *Seja $K \in W'$ satisfazendo $\langle \mathcal{K}(f), f \rangle_2 \geq 0$, $f \in L^2(X)$. Suponha que A1 e A2 ocorram. Se $\mathcal{K}_1$ é trace-class, então*
$$\lambda_n(\mathcal{K}) = o(n^{-(m+r+1)/m}), \quad (n \to \infty).$$

Teorema 1.2. *Seja $K \in W'$ satisfazendo $\langle \mathcal{K}(f), f \rangle_2 \geq 0$, $f \in L^2(X)$. Suponha que A1 and A2 ocorram. Se $\mathcal{D}K$ pertence a $L^2(X \times X)$, então*
$$\lambda_n(\mathcal{K}) = o(n^{-(m+r+1)/2m}), \quad (n \to \infty).$$

Teorema 1.3. *Seja $K \in W'$ tal que $\langle \mathcal{K}(f), f \rangle_2 \geq 0$, $f \in L^2(X)$. Suponha que A1 e A3 ocorram. Se $\mathcal{D}K$ pertence a $L^2(X \times X)$, então*
$$\lambda_n(\mathcal{K}) = o(n^{-(m+\rho+1)/2m}), \quad (n \to \infty).$$

Teorema 1.4. *Seja K um elemento de W'. Suponha que A1 e A3 ocorram. Se $\mathcal{K}_1$ é limitato e $|\mathcal{K}_1| := (\mathcal{K}_1^* \mathcal{K}_1)^{1/2}$ é Hilbert-Schmidt, então*
$$s_n(\mathcal{K}) = o(n^{-(m+\rho+1)/2m}), \quad (n \to \infty).$$

Teorema 1.5. *Seja K um elemento de W'. Suponha que A1 e A2 ocorram. Se $\mathcal{K}_1$ é limitado, então*
$$s_n(\mathcal{K}) = O(n^{-r/m}) \quad (n \to \infty).$$

Referências

[1] M. H. CASTRO AND V. A. MENEGATTO, Eigenvalue decay of positive integral operators on the sphere, Math. Comput., 81 (2012), nº 280, 2303-2317.

[2] I. C. GOHBERG AND M. G. KREIN, Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators. Translated from the Russian by A. Feinstein. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 18, American Mathematical Society (1969).

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

On a nonlocal elliptic equation of p-Kirchhoff type with nonlinear boundary condition

VICTOR EMILIO CARRERA BARRANTES * & EUGENIO CABANILLAS LAPA †

Abstract

In this paper, we will study the existence of positive solutions for a nonlocal elliptic equation of p-Kirchhoff type with nonlinear boundary condition.The existence of at least one nontrivial solution is stated via Galerkin method.

1 Introduction

Consider the following semilinear integro-differential equation of p-Kirchhoff type

$$\begin{aligned} &M\Big(\int_\Omega \tfrac{1}{p}(|\nabla u|^p + |u|^p)dx\Big)(-\Delta_p u + |u|^{p-2}u) + \lambda \int_\Omega H(u)dy = u^\alpha(x) \quad \text{in } \Omega \\ &M\Big(\int_\Omega \tfrac{1}{p}(|\nabla u|^p + |u|^p)dx\Big)|\nabla u|^{p-2}\tfrac{\partial u}{\partial \nu} = g(x,u) \quad \text{on } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.1}$$

where Ω is a bounded smooth domain of $\mathbb{R}^n$,$\lambda > 0$, $1 < p < N$, Δ_p is the p-Laplacian operator, that is $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, the function $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ is a continuous function and there is a constant $m_0 > 0$ such that

(M) $\qquad M(t) \geq m_0 \qquad$ for all $\qquad t \geq 0$,

$H \in C^1(\mathbb{R})$ satisfying

(H) $\qquad |H(s)| \leq c_1|s|^r \quad ,|H'(s)| \leq c_1|s|^{r-1} \quad ,r \in (0,1]$ and

$g : \partial\Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ is a Caratheodory function and satisfies the subcritical condition

(g) $\qquad |g(x,t)| \leq c_2(|t|^{q-1} + 1) \qquad$ for some $\quad p < q < p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p} & \text{if } N \geq 3, \\ +\infty & \text{if } N = 1,2. \end{cases}$

Problem (1.1) is called nonlocal because of the presence of the integral term related to the unknown u over Ω, it is no longer an identity pointwise. This problem has a physical motivation when $p = 2$. In this case, the operator $M\big(\int_\Omega(|\nabla u|^2 + |u|^2)dx\big)(-\Delta u + u)$ appears in the Kirchhoff-Carrier equation which arises in nonlinear vibrations and there are many authors who pay more attention to this equation, see [1-3]. In particularly, authors obtained solutions for(1.1), with $H(s) = 0$, using the variational methods, invariant sets of descent flow, Yang index , critical groups, degree theory and the method of upper and lower solutions. In this paper, the problem (1.1) has no variational structure and so we deal with the existence of solutions via Galerkin method.

2 Mathematical Results

We establish now the result that treats the existence of solutions for the nonlocal elliptic equation of p-Kirchhoff type with nonlinear boundary condition.

*Instituto de Investigación, Facultad de Ciencias Matemáticas-UNMSM, Lima-Perú, vcarrerab@yahoo.com
†Instituto de Investigación, Facultad de Ciencias Matemáticas-UNMSM, Lima-Perú, cleugenio@yahoo.com,

Teorema 2.1. *Let us assume that conditions $(M), (H)$ and (g) hold. In addition, we suppose that*
$(g1)$ *There exists constant* $C_1 > 0$ *such taht* $g(x,s)s \leq C_1|s|^2$ *for all* $x \in \partial\Omega$.
Then there exists a weak solution of (1.1).

Proof We will use the Galerkin method through the Brouwer fixed-point Theorem. $\square$

References

[1] J. F. Bonder and J. D. Rossi, Existence results for the p-Laplacian with nonlinear boundary conditions, *J. Math. Anal. Appl.* **263**(1)(2001) 195223

[2] S.-Z. Song and C.-L. Tang, Resonance problems for the p-Laplacian with a nonlinear boundary condition,*Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* **64**(9)(2006) 20072021.

[3] F. Wang and Y. An , Existence of Nontrivial Solution for a Nonlocal Elliptic Equation with Nonlinear Boundary Condition, *Boundary Value Problems.* **Article ID 540360**(2009).

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

OPERADORES DE CONVOLUÇÃO EM ESPAÇOS DE FUNÇÕES LORENTZ HOLOMORFAS DE TIPO LIMITADO

VINÍCIUS V. FÁVARO* & DANIEL PELLEGRINO†

Sejam E um espaço de Banach, $n \in \mathbb{N}$, e suponha que $(\mathcal{P}_\Delta({}^nE), \|\cdot\|_\Delta)$ é um espaço quase-normado de polinômios n-homogêneos definidos em E, tais que a inclusão $\mathcal{P}_\Delta({}^nE) \hookrightarrow \mathcal{P}({}^nE)$ é contínua e que os polinômios de tipo finito estão em $\mathcal{P}_\Delta({}^nE)$. Suponha ainda que a transformada de Borel

$$\mathcal{B} : (\mathcal{P}_\Delta({}^nE)', \|\cdot\|) \to (\mathcal{P}_{\Delta'}({}^nE'), \|\cdot\|_{\Delta'}) \subset \mathcal{P}({}^nE')$$

dada por $\mathcal{B}(T)(\varphi) = T(\varphi^n)$, para todos $\varphi \in E'$ e $T \in \mathcal{P}_\Delta({}^nE)'$, seja um isomorfismo topológico. Em [4], introduzimos uma técnica para construir um espaço de Banach $\left(\mathcal{P}_{\widetilde{\Delta}}({}^nE), \|\cdot\|_{\widetilde{\Delta}}\right)$ tal que $(\mathcal{P}_\Delta({}^nE), \|\cdot\|_\Delta)$ é denso em $\left(\mathcal{P}_{\widetilde{\Delta}}({}^nE), \|\cdot\|_{\widetilde{\Delta}}\right)$ e tal que

$$\widetilde{\mathcal{B}}\colon \left[\mathcal{P}_{\widetilde{\Delta}}\left({}^nE\right)\right]' \longrightarrow \mathcal{P}_{\Delta'}\left({}^nE'\right),$$

dado por $\widetilde{\mathcal{B}}(T)(\varphi) = T(\varphi^n)$, também é um isomorfismo topológico.

Mostramos ainda que a construção deste espaço, juntamente com os conceitos de π_1-π_2-tipos de holomorfia introduzidos em [2], possibilita obter resultados de existência e aproximação de soluções para equações de convolução sobre o espaço $\mathcal{H}_{\widetilde{\Delta}b}(E)$ de todas as funções inteiras de E em $\mathbb{C}$ de $\widetilde{\Delta}$-tipo limitado (veja [2]); e obter resultados de hiperciclicidade de operadores de convolução definidos em $\mathcal{H}_{\widetilde{\Delta}b}(E)$ (veja [1]).

Como exemplo de aplicação desta técnica, mostraremos neste trabalho que é possível obter resultados de existência e aproximação de soluções para equações de convolução e resultados de hiperciclicidade para operadores de convolução definidos nos espaços de funções Lorentz de tipo limitado. A construção destes espaços foi feita em [4] e envolve as teorias de polinômios Lorentz somantes e Lorentz nucleares introduzidas, respectivamente, em [6] e [3]. Abaixo enunciamos os principais resultados deste trabalho.

Sejam $\mathcal{P}_{\widetilde{N},((r,q);(s,p))}\left({}^mE\right)$ o espaço dos polinômios m-homogêneos Lorentz $((r,q);(s,p))$-quase nucleares definidos no espaço de Banach E a valores em $\mathbb{C}$; $\mathcal{H}_{\widetilde{N}b,((r,q);(s,p))}(E)$ o espaço das funções inteiras Lorentz $((r,q);(s,p))$-quase nucleares de tipo limitado definidas no espaço de Banach E e $L\colon \mathcal{H}_{\widetilde{N}b,((r,q);(s,p))}(E) \longrightarrow \mathcal{H}_{\widetilde{N}b,((r,q);(s,p))}(E)$ um operador de convolução (isto é, um operador linear contínuo que comuta com translação).

Teorema 0.1. ***(Resultado de aproximação de soluções)*** *O subespaço vetorial de $\mathcal{H}_{\widetilde{N}b,((r,q);(s,p))}(E)$ gerado pelas soluções do tipo polinomial-exponencial da equação homogênea $L = 0$, é denso no subespaço fechado de todas as soluções da equação homogênea, isto é, o subespaço vetorial de $\mathcal{H}_{\widetilde{N}b,((r,q);(s,p))}(E)$ gerado por*

$$\mathcal{L} = \left\{P\exp\varphi; P \in \mathcal{P}_{\widetilde{N},((r,q);(s,p))}\left({}^mE\right), m \in \mathbb{N}, \varphi \in E', L\left(P\exp\varphi\right) = 0\right\}$$

é denso em

$$\ker L = \left\{f \in \mathcal{H}_{\widetilde{N}b,((r,q);(s,p))}(E); Lf = 0\right\}.$$

Teorema 0.2. ***(Resultado de existência de soluções)*** *Se L é um operador de convolução não-nulo, então*

$$L\left(\mathcal{H}_{\widetilde{N}b,((r,q);(s,p))}\left(E\right)\right) = \mathcal{H}_{\widetilde{N}b,((r,q);(s,p))}\left(E\right).$$

Teorema 0.3. ***(Resultado de hiperciclicidade)*** *Se E' é separável, então todo operador de convolução sobre $\mathcal{H}_{\widetilde{N}b,((r,q);(s,p))}(E)$ que não é múltiplo escalar da identidade é hipercíclico.*

*Faculdade de Matemática, UFU, Uberlândia-MG, Brasil, vvfavaro@gmail.com
†DM, UFPB, João Pessoa-PB, Brasil, e-mail: dmpellegrino@gmail.com

Referências

[1] F. BERTOLOTO, G. BOTELHO, V. V. FÁVARO, A. M. JATOBÁ - *Hypercyclicity of convolution operators on spaces of entire functions*, Ann. Inst. Fourier, to appear.

[2] V. V. FÁVARO, A. M. JATOBÁ - *Holomorphy types and spaces of entire functions of bounded type on Banach spaces*, Czech. Math. Journal **59** (2009), 909-927.

[3] V. V. FÁVARO, M. C. MATOS, D. PELLEGRINO - *On Lorentz nuclear homogeneous polynomials between Banach spaces*, Portugal. Math. **67** (2010), 413-435.

[4] V. V. FÁVARO, D. PELLEGRINO - *A new technique for approximation and existence results for convolution equations*, preprint.

[5] M. C. MATOS - *Absolutely summing mappings, nuclear mappings and convolution equations*, IMECC-UNICAMP, 2007. Web: http://www.ime.unicamp.br/∼matos.

[6] M. C. MATOS, D. PELLEGRINO - *On Lorentz summing mappings*, Math. Nach. **283** (2010), 1409-1427.

[7] L. NACHBIN - *Topology on Spaces of Holomorphic Mappings*, Springer-Verlag, New York, 1969.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

SEMILINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF P-KIRCHHOFF TYPE

WILLY BARAHONA M * & EUGENIO CABANILLAS LAPA † & BENIGNO GODOY T. ‡

Abstract

In our research we will study the existence of positive solutions to the problem

$$-[M(\|u\|_{1,p}^{p})]^{p-1}\Delta_p u = f(x,u) + \int_\Omega k(x,y)H(u)dy \quad \text{in } \Omega$$

with zero Dirichlet boundary condition on a bounded smooth domain of $\mathbb{R}^n$, $1 < p < N$, M is a positive function , f has subcritical growth, k is a non-positive function and H is a nonlinear function.

1 Introduction

Consider the following semilinear integro-differential equation of p-Kirchhoff type

$$-[M(\|u\|_{1,p}^{p})]^{p-1}\Delta_p u = f(x,u) + \int_\Omega k(x,y)H(u)dy \quad \text{in } \Omega \tag{1.1}$$
$$u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

where Ω is a bounded smooth domain of $\mathbb{R}^n$, $1 < p < N$, Δ_p is the p-Laplacian operator, that is $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, the function $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ is a continuous function and there is a constant $m_0 > 0$ such that
(M) $\quad M(t) \geq m_0 \quad$ for all $\quad t \geq 0$
$f(x,t) : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ is a continuous function and satisfies the subcritical condition

$$(f) \qquad |f(x,t)| \leq c_1(|t|^{q-1} + 1) \qquad \text{for some} \quad p < q < p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p} & \text{if } N \geq 3, \\ +\infty & \text{if } N = 1, 2. \end{cases}$$

$H \in C^1(\mathbb{R})$ satisfying
(H) $\quad |H(s)| \leq c_2|s|^r \quad , |H'(s)| \leq c_2|s|^{r-1} \quad , r \in (0,1]$
and
(k) $\quad k(x,y)$ is a non-positive $L^2(\Omega \times \Omega)$ *function*
Semilinear integro-differential equations have become an active area of research, for example in the framework of control theory as well in order to solve noncooperative system,arisen in the classical FitzHugh-Nagumo systems , see [1-3].In the problem (1.1), the presence of the term M provokes some mathematical difficulties which makes the study of such a problem particulary interesting.In case that the kernel is symmetric (and $H(s) = s$) ,the problem is of variational type and a solution can be found by the Mountain Pass Theorem if the $L^2 \times L^2$ norm is sufficiently small. In this paper we consider non-symmetric kernels(so the problem has no variational structure).

2 Mathematical Results

We establish now the result that treats the existence of solutions for the semilinear integro-differential equation of p-Kirchhoff type.

*Instituto de Investigación, Facultad de Ciencias Matemáticas-UNMSM, Lima-Perú, wilbara_73@yahoo.es,
†Instituto de Investigación, Facultad de Ciencias Matemáticas-UNMSM, Lima-Perú, cleugenio@yahoo.com,
‡Instituto de Investigación, Facultad de Ciencias Matemáticas-UNMSM, Lima-Perú, bgodoyt@unmsm.edu.pe

Teorema 2.1. *Let us assume that conditions* $(M),(f),(H)$ *and* (k) *hold.Let us assume in addition that* $\|k\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}$ *is sufficiently small. Then there exists a weak solution of (1.1).*

Proof The solution of (1.1) is obtained as a limit of the sequence of Galerkin's approximations . $\square$

References

[1] K. Balachandran,R. Sakthivel, Controllability of functional semilinear integro-differential system in Banach space, *J. Math. Anal. Appl.* **255**(2)(2001) 447-457

[2] S. Mataloni, M. Matzeu ,Semilinear integrodifferential problems with non-symetric kernels via mountain-pass techniques, *Adv. Nonlin. Stud.* **5**(1)(2005) 23-32.

[3] A. Cabada , F. J. S.A. Corrêa , Existence of solutions of a nonlocal elliptic system via galerkin method, *Abs. Appl. Anal.* **Article ID 137379**(2012).

[4] Y. Yang, J. Zhang ,Existence results for a class of nonlocal problems involving p-Laplacian, *Boundary Value Problems.* **2011:32**.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

THE GLOBAL SOLVABILITY OF INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR REACTION-DIFFUSION PARABOLIC SYSTEMS

WLADIMIR NEVES* & MIKHAIL VISHNEVSKII†

Abstract

In this talk we study the quasi-linear non-diagonal parabolic type systems. We assume that the principal elliptic operator, which is part of the parabolic system, has a divergence structure. Under certain conditions it is proved the well-posedness of classical solutions, which exists globally in time.

The main purpose of this talk is to present some techniques and results concerning global existence of classical solutions for non-diagonal parabolic systems. To be precise, let $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, ($d \in \mathbb{N}$ fixed), be the points in the time-space domain. Throughout this paper $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ is an open bounded domain of class C^1, $\mathbf{n} = (n^1, \ldots, n^d)$ is the unitary normal vector field on $\partial\Omega =: \Gamma$.

For $T > 0$ and $N \in \mathbb{N}$, we define $Q_T := (0, T) \times \Omega$ and consider the vector function $\mathbf{u} : \overline{Q_T} \to \mathbb{R}^N$, which is supposed to be governed by the following reaction-diffusion system

$$\partial_t u_\alpha(t, \mathbf{x}) + \mathrm{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = g_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (t, \mathbf{x}) \in Q_T, \tag{1}$$

where $\mathbf{f}_\alpha$ is a given flux defined by

$$f^j_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}) := \varphi^j_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - A^{jk}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial u_\beta}{\partial x_k}, \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, N).$$

Hereafter, the usual summation convention is used. Moreover, Greek and Latin indices ranges respectively from 1 to N and from 1 to d. Although, we are not going to enter in physical details, we should mention that there are many physical applications of the above reaction-diffusion system, we list for instance: Flows in porous media, diffusion of polymers, population dynamics, reaction and diffusion in electrolysis, phase transitions, among others.

We shall assume

$$A^{jk}_{\alpha\beta} \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N), \quad 0 < \lambda_0 := \inf \big\{ A^{jk}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \, \xi^j_\alpha \xi^k_\beta \big\}, \tag{2}$$

where the infimum is taken over all $\xi \in S^{(Nd)-1}$, ($S^{(Nd)-1}$ denotes the unit sphere in $\mathbb{R}^{Nd}$), and $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N$. Also

$$\varphi^j_\alpha \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N), \quad g_\alpha \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N), \tag{3}$$

and for convenience, we denote

$$\gamma_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi^j_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \quad \text{for each } (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N.$$

*Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brasil, wladimir@im.ufrj.br
†Universidade Estadual do Norte Fluminense, RJ, Brasil, and Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia, e-mail: mikhail@uenf.br

The parabolic system (1) is supplemented with an initial-data

$$\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \in C(\overline{\Omega}), \tag{4}$$

and the following types of boundary-conditions on $\Gamma_T = (0, T) \times \Gamma$: For some $0 \leq K \leq N$, we set for $\mathbf{x} \in \partial\Omega$

$$\begin{aligned} \alpha = 1, \dots, K, \quad & f^j_\alpha \, n^j = 0 \quad \text{(non-flux condition)}, \\ \alpha = K+1, \dots, N, \quad & u_\alpha(t, \mathbf{x}) = u_{b\alpha}(\mathbf{x}) \quad \text{(Dirichlet condition)}, \end{aligned} \tag{5}$$

where $u_{b\alpha}$ is a given function, and $\alpha = 1, \dots, 0$ or $\alpha = N+1, \dots, N$, means clearly $\alpha \equiv 0$.

Under certain conditions, it is proved that, the system (1), (4) and (5) is well-posednessed, where the classical solution exists globally in time.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

ESTABILIDADE DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM ARGUMENTO CONSTANTE VIA EQUAÇÕES DISCRETAS

ANTÔNIO M. DA SILVA * & ÉRICA R. MALASPINA †

O presente trabalho visa estudar a estabilidade no sentido de Liapunov para a classe de equações diferenciais com argumento constante em intervalos da forma $h(t) = [t]$, onde $[t]$ representa a parte inteira de t. O problema é colocado no contexto das equações diferenciais com retardamento contínuo em intervalos. A idéia é explorar a estabilidade de uma equação discreta associada usando as chamadas funções de Liapunov. Sob condições apropriadas essas propriedades de estabilidade implicam nas propriedades da estabilidade das soluções da equação principal.

O objetivo principal desta pesquisa é o estudo da estabilidade no sentido de Liapunov de equação do tipo

$$x'(t) = f(t, x(t), x([t])) \tag{0.1}$$

em que $[t]$ denota a parte inteira de t. A equação (0.1) é um caso particular da equação com argumento contínuo em intervalos, que é do tipo

$$x'(t) = f(t, x(t), x(h(t)))$$

em que o argumento $h(t)$ tem intervalos de constância. No caso, $h(t) = [t]$ é descontínuo nos inteiros. Aplicações dessas equações aparecem na estabilização de sistemas de controle híbrido com reação retardada, na semi-discretização de uma equação diferencial ordinária e como caso especial de uma equação diferencial com retardamento em que $r(t) = [t]$ é descontínuo nos inteiros. Como as soluções de (0.1) são contínuas nos pontos $t = n$, para n um inteiro, o uso de relações recursivas nos intervalos entre inteiros nos levará à definição de uma equação discreta associada do tipo $c_{n+1} = h(n, c_n)$. Então, sob determinadas condições, mostraremos que a estabilidade do equilíbrio nulo da equação discreta associada implica na estabilidade da solução nula da equação (0.1). Como $[t]$ é sempre menor ou igual a t, a equação (0.1) pode ser analisada no contexto das equações diferenciais funcionais com retardamento

$$x'(t) = g(t, x_t) \tag{0.2}$$

em que $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua, $\mathbb{D} \subset \mathbb{C} = \mathbb{C}([-1, 0], \mathbb{R}^n)$ é um aberto e $\mathbb{C}$ é o espaço de Banach das aplicações contínuas de $[-1, 0]$ no $\mathbb{R}^n$ com a norma $||\phi|| = sup_{-1\leq\theta\leq 0}|(\theta)|$. Dado uma condição inicial para a equação (0.2), a existência e unicidade de solução para o problema de valor inicial sairá a partir do conceito das condições de Carathéodory. Exploraremos ainda os conceitos de estabilidade no sentido de Liapunov para obter resultados para as soluções da equação principal via equação discreta.

1 Aplicações

Aplicação 1.1.

Consideremos a equação

*Instituto de Ciências Exatas, UFMG, MG, Brasil, antonio.mat@hotmail.com
†Departamento de Matemática, UFOP, MG, Brasil, e-mail: malaspin@iceb.ufop.br

$$y'(s) = ay(s) + a_0 y([s]_r),$$

em que $[s]_r = n$, $nr \leq s < (n+1)r$, $n \in \mathbb{N}$, a e a_0 são constantes reais, $a \neq 0$ e $r > 0$.

Nessa aplicação iremos encontrar, através do método de Liapunov, a região de estabilidade assintótica obtida por Cooke e Wiener em [3].

Lema 1.1. *Considere a função escalar $U(x) = U_p(x) + W(x)$, em que $W(x) = \circ(|x|^p)$ quando $|x| \to 0$ é contínua e U_p é um polinômio homogêneo de grau p definido negativo, então $U(x)$ é definida negativa numa vizinhança de $x = 0$.*

O resultado acima pode ser encontrado em [4] e será demonstrado no Congresso.

Através desse lema poderemos verificar a estabilidade de equações não lineares, como faremos na próxima aplicação.

Aplicação 1.2.

Consideremos a equação

$$y'(s) = ay(s) + g(y([s]_r)),$$

em que $a \in \mathbb{R} - \{0\}, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e $g(0) = 0$.

Iremos mostrar que, sob certas condições, a solução nula dessa equação é assintoticamente estável.

Aplicação 1.3.

Consideremos o sistema

$$Y'(s) = BY(s) + B_0 Y([s]_r),$$

em que B e B_0 são matrizes reais $m \times m$, B é invertível, Y é um vetor $m \times 1$, $[s]_r = n$, $nr \leq s < (n+1)r$, $n \in \mathbb{N}$ e $r > 0$.

Neste caso, mostraremos que a solução nula dessa equação é assintoticamente estável.

Referências

[1] CARVALHO, L.A.V. - *A Nonlinear Equation With Piecewise Continuous Argument. Differential and Integral Equations*, vol. 1. Number 3, pp359-367, 1988.

[2] COOKE, K. L. AND WIENER, J. - *Retarded Differential Equations With Piecewise Constant Delays*, Journal of Mathematical Analysis and Aplications 99. pp. 265-297, 1984.

[3] COOKE, K. L. AND WIENER, J. - *Stability Regions for Linear Equations With Pecewise Continuous Delays.* Comp. e Math. With Aplis., vol. 12ª, nº 6, pp. 695-701, 1986.

[4] MALASPINA, E.R. - *Sobre a Estabilidade de Equações Diferenciais com Argumentos Seccionalmente Contínuo.* Dissertação de Mestrado. São José do Rio Preto/SP, 1997.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

REMARKS ON THE DOMINATION THEOREM FOR SUMMING OPERATORS

Antonio Nunes*

In this note we provide some applications of the general Pietsch Domination Theorem. Pietsch Domination Theorem plays a central role in the theory of absolutely summing linear operators (see [3]). Let us recall the General Pietsch Domination Theorem recently presented in [2, 5]: Let X, Y and E be (arbitrary) non-void sets, $\mathcal{H}$ be a family of mappings from X to Y, G be a Banach space and K be a compact Hausdorff topological space. Let

$$S\colon \mathcal{H} \times E \times G \longrightarrow [0,\infty)$$

be an arbitrary map and

$$R\colon K \times E \times G \longrightarrow [0,\infty)$$

be such that

$$R_{x,b}\colon K \longrightarrow [0,\infty) \text{ defined by } R_{x,b}(\varphi) = R(\varphi, x, b)$$

is continuous for every $x \in E$ and $b \in G$. If R and S are as above and $0 < p < \infty$, a mapping $f \in \mathcal{H}$ is said to be R-S-abstract p-summing if there is a constant $C_1 > 0$ so that

$$\left(\sum_{j=1}^{m} S(f, x_j, b_j)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_1 \sup_{\varphi\in K}\left(\sum_{j=1}^{m} R\left(\varphi, x_j, b_j\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{0.1}$$

for all $x_1, \ldots, x_m \in E$, $b_1, \ldots, b_m \in G$ and $m \in \mathbb{N}$. The general unified PDT reads as follows:

Theorem 0.1 (General Pietsch Domination Theorem)**.** *Let R and S be as above, $0 < p < \infty$ and $f \in \mathcal{H}$. Then f is R-S-abstract p-summing if and only if there is a constant $C > 0$ and a Borel probability measure μ on K such that*

$$S(f, x, b) \leq C\left(\int_K R\left(\varphi, x, b\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \tag{0.2}$$

for all $x \in E$ and $b \in G$.

Definition 0.1. *Let X and Y be Banach spaces. An arbitrary mapping $f\colon X \longrightarrow Y$ is absolutely p-summing at $a \in X$ if there is a $C \geq 0$ so that*

$$\sum_{j=1}^{m} \|f(a+x_j) - f(a)\|^p \leq C \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p$$

for every natural number m and every $x_1, \ldots, x_m \in X$.

Definition 0.2. *Let X, Y be Banach spaces.*

(i) A map $f : X \to Y$ is locally absolutely p-summing at $a \in X$ if there are $C \geq 0$, $\delta > 0$ such that

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \|f(a+x_j) - f(a)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,p} \tag{0.3}$$

for every $x_1, ..., x_m \in X$ so that $\|x_j\| < \delta$.

*Departamento de Ciências Exatas e Naturais, UFERSA, Mossoró - RN, Brazil, e-mail: nunesag@ufersa.edu.br

(ii) A map $f : X \to Y$ is locally strongly absolutely p-summing at $A \subset X$ if there are $C \geq 0$, $\delta > 0$ such that

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \|f(a_j + x_j) - f(a_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left\| (x_j)_{j=1}^m \right\|_{w,p}$$

for every $a \in A$ and every $x_1, ..., x_m, a_1, ..., a_m \in X$ so that $\|x_j\| < \delta$.

(iii) When $A = X$ in (ii) f is called locally strongly everywhere absolutely p-summing.

1 Results

Theorem 1.1. *A map $f : X \to Y$ is strongly absolutely p-summing at A if and only if there are a constant $C \geq 0$ and a Borel probability measure μ on $(B_{X^*}, (\sigma(X^*, X)))$ such that*

$$\|f(a + x) - f(a)\| \leq C \left(\int_{B_{X^*}} |\varphi(x)|^p \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}}$$

for all $(x, a) \in X \times A$.

Proof. The proof of this theorem is in [4]. □

Theorem 1.2. *A map $f : X \to Y$ is locally strongly absolutely p-summing at A if and only if there are $C \geq 0$, $\delta > 0$ and a Borel probability measure μ on $(B_{X^*}, (\sigma(X^*, X)))$ such that*

$$\|f(a + x) - f(a)\| \leq C \left(\int_{B_{X^*}} |\varphi(x)|^p \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}}$$

for all $(x, a) \in B(0, \delta) \times A$.

References

[1] G. Botelho, D. Pellegrino and P. Rueda, *A nonlinear Pietsch Domination Theorem*, Monatsh. Math. **158** (2009), 247-257.

[2] G. Botelho, D. Pellegrino and P. Rueda, *A unified Pietsch Domination Theorem*, J. Math. Anal. Appl. **365** (2010), 269-276.

[3] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, *Absolutely summing operators*, Cambridge University Press 1995.

[4] N. Antonio, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, Volume 3 Issue 4(2011), 45-49.

[5] D. Pellegrino and J. Santos, *A general Pietsch Domination Theorem*, J. Math. Anal. Appl. **375** (2011), 371-374.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS ESTABELECIDAS COM BASE NUMA ÚNICA RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA

ANTÔNIO S. SILVA *

O teorema do valor médio para derivadas, aplicado sobre uma função de partida escolhida de forma adequada, pode ser associado com certa classe de equações diferenciais para a obtenção de formas de soluções representadas por meio de contractivos, onde cada contractivo é uma função f definida em toda reta com valores $f(x)$ no intervalo $0 \leq f(x) \leq 1$. Neste sentido, calculado o contractivo a solução fica determinada pela representação, Silva [1], gerando assim uma estrutura para o estudo de funções com base no teorema do valor médio para derivadas, chamadas de funções representadas por contractivos. No caso do estudo de equação diferencial ordinária linear de 2ª ordem homogênea, como duas soluções linearmente independentes podem ser representadas por um mesmo contractivo, o cálculo do contractivo é feito por meio de uma equação diferencial de primeira ordem. Além disso, foi observada a convergência mais rápida para séries de potências do contractivo. Desse modo, em certas situações, o uso de contractivos apresenta as vantagens de redução de ordem da equação diferencial e de melhor aproximação por forma de Taylor com resto, motivando o uso de contractivos também em integração numérica, Silva [3].

Para funções elementares, principalmente as transcedentais, o estudo de uma função por meio de representação por contractivo requer que todas as informações possíveis sobre a função sejam usadas para determinação do contractivo de forma completa, de modo que, informações adcionais, que antes não eram explícitas, sejam fornecidas pelo contractivo. No caso das funções seno S e cosseno C, Silva [2], as derivadas são relatadas pelo sistema

$$S'(z) = C(z),\ C'(z) = -S(z),\ S(0) = 0 \text{ e } C(0) = 1, \tag{0.1}$$

para todo z real. A associação do sistema de equações diferenciais (0.1) com o teorema do valor médio para derivadas pode ser feita com base em funções de partida envolvendo apenas a função seno, apenas a função cosseno e simultaneamente as funções seno e cosseno. Usando a função cosseno, considere a função de partida F definida por

$$F(z) = (1 - C(az))(1 - z)^2 \tag{0.2}$$

para todo z real, sendo a uma constante real qualquer. Por (0.1) e (0.2), $F(0) = F(1) = 0$. Então do teorema do valor médio para derivadas, existe c tal que

$$F'(c) = 0,\ 0 < c < 1 \tag{0.3}$$

Como F depende da constante real a, c também depende, ou seja, $c = f(a)$, $0 < f(a) < 1$, onde $f(a)$ é um contractivo. Desse modo, usando o fato que a é uma constante real qualquer, de (0.1), da derivada de (0.2) e de (0.3) e com base nas propriedades de seno e cosseno, obtém-se que

$$S(zf(z)) = \frac{4z(1-f(z))}{4+z^2(1-f(z))^2},\ C(zf(z)) = \frac{4-z^2(1-f(z))^2}{4+z^2(1-f(z))^2},\ 0 < f(z) < 1, \tag{0.4}$$

para todo z real, onde

$$f\left(2+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4+\pi},\ f(0) = \frac{1}{2},\ f(-z) = f(z) \text{ e } 0 < f(z) \leq \frac{1}{2} \tag{0.5}$$

$$\lim_{z\to\pm\infty} f(z) = 0,\ \lim_{z\to-\infty} zf(z) = -\pi \text{ e } \lim_{z\to\infty} = \pi,\ -\pi < zf(z) < \pi. \tag{0.6}$$

*Departamento de Matemática, UFS/CCET, SE, Brasil, ass@infonet.com.br

Os resultados expressos em (0.4) mostram as funções S e C representadas por meio do contractivo $f(z)$, as quais estão calculadas no ponto $zf(z)$. Para obtenção de representações calculadas no ponto z, dois contractivos $p(z)$ e $q(z)$, são introduzidos, definidos agora no intervalo de $[-\pi, \pi]$, são introduzidos pelas relações

$$f\left(\frac{z}{p(z)}\right) = p(z),\ q(z) = \frac{p(z)}{1-p(z)} - \pi \leq z \leq \pi,\ p(zf(z)) = f(z),\ -\infty < z < \infty. \tag{0.7}$$

Com isso, de (0.4) e (0.7) as representações podem ser colocadas numa forma mais compacta expressas por:

$$S(z) = \frac{4zq(z)}{4(q(z))^2 + z^2} \text{ e } C(z) = \frac{4(q(z))^2 - z^2}{4(q(z))^2 + z^2},\ -\pi \leq z \leq \pi \tag{0.8}$$

onde,

$$q(-\pi) = q(\pi) = 0,\ q\left(-\frac{\pi}{2}\right) = q\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4},\ q(0) = 1,\ q(-z) = q(z),\ 0 \leq q(z) \leq 1,\ -\pi \leq z \leq \pi \tag{0.9}$$

Logo, usando a definição, Silva [4],

$$A_n(z) = \frac{z}{2^n q\left(\frac{z}{2^{n-1}}\right)},\ -\pi \leq z \leq \pi,\ n = 1, 2, 3, \cdots \tag{0.10}$$

e o seno do arco duplo, das equações (0.8) e (0.10) podemos escrever a relação de recorrência

$$A_{n+1} = \frac{A_n}{1 + \sqrt{1 + A_n^2}},\ n = 1, 2, 3, \cdots \tag{0.11}$$

1 Resultados

A substituição $z = \arcsin x$ em (0.8) e (0.10) produz o resultado

$$A_1 = \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}},\ \arcsin x = \lim_{n \to \infty} 2^n A_n,\ -1 \leq x \leq 1, \tag{1.12}$$

onde cada A_n, $n \geq 2$, é dada por (0.11). Do mesmo modo, $z = \arctan x$ em (0.8) e (0.10) mostra o resultado

$$A_1 = \frac{x}{1 + \sqrt{1 + x^2}},\ \arctan x = \lim_{n \to \infty} 2^n A_n,\ -\infty \leq x \leq \infty, \tag{1.13}$$

onde cada A_n, $n \geq 2$, é dada por (0.11). Usando os mesmos procedimentos as outras funções trigonométricas inversas também podem ser estabelecidas com apenas uma relação de recorrência, o que diferencia uma função da outra é o valor inicial A_1. Neste sentido, as funções trigonométricas inversas podem ser definidas com base em tal relação de recorrência desde que seja usada uma definição para o número π, por exemplo

$$A_1 = 1,\ \pi = \lim_{n \to \infty} 2^{n+1} A_n \tag{1.14}$$

onde cada A_n, $n \geq 2$, é dada por (0.11).

Referências

[1] SILVA, A. S. - *Contractivos em Equações Diferenciais: Preliminares.*, Anais do XX CNMAC, volume único, páginas 62-63, 1997.

[2] SILVA, A. S. - *Contractivos para as Funções Seno e Cosseno.*, Anais do XX CNMAC, volume único, pagina 143, 1998.

[3] SILVA, A. S. - *Contractivos em Integração: Nova Função de Partida*, Anais do XX CNMAC, volume único, pagina 154, 1999.

[4] SILVA, A. S. - *Função Arco Seno estabelecida com base em representação por contractivo*, Anais do XX CNMAC, volume 1, pagina 411, 2002.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

Análise do escoamento de um fluido em um duto circular pela técnica da transformada integral generalizada

Carlos A.C. Santos* & Mabel M. Lopes†

Consideremos o escoamento laminar de um fluido newtoniado de velocidade $\mathbf{w} = (u, v)$ sob influência de uma pressão p e temperatura θ em um semi duto circular $\mathcal{D} = [0, +\infty] \times [0, 1]$. O modelo é descrito pelo seguinte sistema acoplado escrito em coordenada cilíndricas

$$\begin{cases} \frac{1}{Re}\Delta \mathbf{w} - (\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{w} = \nabla p, & \text{em } \mathcal{D}, \\ \Delta p = \nabla u \otimes \nabla v, & \text{em } \mathcal{D}, \\ \frac{1}{Pe}\Delta\theta = \mathbf{w}\cdot\nabla\theta, & \text{em } \mathcal{D}, \\ \nabla\cdot\mathbf{w} = 0, & \text{em } \mathcal{D}, \\ u = 1 - u_\infty, v = 0, \theta = 1, p = 0, & \text{em } \{0\}\times[0,1], \\ \mathbf{w} = \vec{0}, \theta = 0, \frac{\partial}{\partial y}p = 0, & \text{em } [0,+\infty]\times\{1\}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0, v = 0, \frac{\partial}{\partial y}\theta = 0, \frac{\partial}{\partial y}p = 0, & \text{em } [0,+\infty]\times\{0\}, \\ \mathbf{w} = 0, \theta = 0, \frac{\partial}{\partial x}p = -\frac{8}{Re}, & \text{para } x \gg 0. \end{cases} \tag{0.1}$$

No estudo do escoamento, utilizaremos a técnica da transformada integral generalizada (GITT). A técnica consiste em expandir a solução de (0.1) em termos de autofunções de um problema de autovalor que será um problema de Sturm-Liouville. Desta forma, reduzimos o problema (0.1) a resolução de uma EDO de segunda ordem a qual será implementado no FORTRAN 90 utilizando, principalmente, a subrotina DBVPFD.

1 Descrição do método

As autofunções são soluções do seguinte problema de autovalor:

$$\begin{cases} [yZ_n']' + \lambda_n y Z_n = 0, & \text{em } [0,1] \\ a_1 Z_n' + a_2 Z_n = 0, & \text{em } y = 0 \\ b_1 Z_n' + b_2 Z_n = 0, & \text{em } y = 1. \end{cases} \tag{1.2}$$

Denotaremos a norma das autofunções por

$$N_n = \int_0^1 y Z_n^2(y)dy, \tag{1.3}$$

E as autofunções normalizadas serão denotadas por:

$$\tilde{Z}_n = \frac{Z_n}{\sqrt{N_n}}. \tag{1.4}$$

Tais funções são dotadas da seguinte propriedade de ortogonalidade

$$\int_0^1 y\tilde{Z}_n(y)\tilde{Z}_m(y)dy = \delta_{nm}. \tag{1.5}$$

*Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal da Paraíba, 58051-900, João Pessoa, PB, Brasil (carloscabralsantos@yahoo.com.br).

†Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal da Paraíba, 58051-900, João Pessoa, PB, Brasil (mabel_lopes2_@hotmail.com). Partially supported by CAPES.

Em seguida, decompomos as soluções das equações de (0.1) da seguinte forma:

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_i(y)\bar{u}_i(x),\ p(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(y)\bar{p}_i(x),\ \theta(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\zeta}_i(y)\bar{\theta}_i(x), \tag{1.6}$$

onde $\tilde{\varphi}_i$ é solução de 1.2 com $(a_1, a_2, b_1, b_2) = (0, 1, 0, 1)$, $\tilde{\psi}_i$ é solução de 1.2 com $(a_1, a_2, b_1, b_2) = (1, 1, 0, 0)$ e $\tilde{\zeta}_i$ é solução de 1.2 com $(a_1, a_2, b_1, b_2) = (0, 1, 1, 0)$. Substituindo a expressão (1.6) em (0.1) integrando em $(0, 1)$ e utilizando a propriedade de ortogonalidade, obtemos um sistema de equações diferenciais ordinárias para $\bar{u}_i$,$\bar{p}_i$ e $\bar{\theta}_i$. Em seguida, fazemos um truncamento das séries definidas em (1.6) possibilitando a implementação utilizando as subrotinas disponíveis.

Referências

[1] COTTA, R. M. - *Integral Transform in Computational Heat and Fuid Flow. CRC Press, Boca Raton, FL. 1993.*

[2] BOYCE, W.E e DIPRIMA, R.C - *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valor de Contorno, L.T.C. Livros Técnicos e Científicos. Editora S.A., Rio de Janeiro, 2002.*

[3] ANDRADE, J. H. -*Análise das equações de Navier-Stokes no escoamento bidimensional em dutos com formulação em variáveis primitivas via GITT. Dissertação de Msc. UFPB 2010.*

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

Um Problema de EDP Não Linear em Variedades

Célia Maria Rufino Franco*

Seja Ω um conjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, com fronteira suave Γ e seja η o vetor unitário normal extrior a Γ. Considere o cilindro $Q = \Omega \times]0, T[$ com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times\ ]0, T[$, onde $T > 0$ é um número real. Motivados por Lions [1] , investigamos a existência e unicidade de solução fraca do problema hiperbólico

$$\left| \begin{array}{l} \Delta w = 0 \text{ em } Q \\ w'' + \dfrac{\partial w}{\partial \eta} + |w'|^\rho w' = f \quad \text{sobre } \ \Sigma \\ w(x,0) = w_0(x), \quad w'(x,0) = w_1(x), \quad x \in \Gamma \end{array} \right. \tag{0.1}$$

onde Δ denota o operador Laplaciano, w' e w'' significam a derivada primeira e segunda, respectivamente, de w com respeito ao tempo, $\dfrac{\partial w}{\partial \eta}$ a derivada normal de w, $\rho > 0$ e f sobre Σ são dados.

1 Definições e Notações

Dada $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$, segue da teoria de equação elíptica que o problema

$$\left| \begin{array}{l} \Delta \Phi = 0 \text{ em } \Omega \\ \Phi = \varphi \text{ sobre } \Gamma \end{array} \right. \tag{1.2}$$

possui solução $\Phi \in H^1(\Omega)$ e da teoria do traço resulta que $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \eta} \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Define-se um operador $A : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$, $\ A \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma); H^{-1/2}(\Gamma))$ por

$$A\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}. \tag{1.3}$$

O operador A admite uma extensão natural $\tilde{A}$ ao espaço $L^p(0, T; H^{1/2}(\Gamma))$, $1 \leq p \leq \infty$, que é linear e limitada, a saber

$$\begin{array}{rcl} \tilde{A} : L^p(0, T; H^{1/2}(\Gamma)) & \longrightarrow & L^p(0, T; H^{-1/2}(\Gamma)) \\ u & \longmapsto & \tilde{A}u\ . \end{array}$$

Denota-se por $(\cdot, \cdot)_\Gamma$ o produto escalar do $L^2(\Gamma)$.

2 Formulação do Problema sobre a variedade Γ e Resultados

Designando $w(t)|_\Gamma = u(t)$ e obsevando que $\dfrac{\partial w}{\partial \eta}(t) = Au(t)$, pode-se formular o problema (0.1) da seguinte forma:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Econtrar uma função } u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que} \\ u'' + Au + |u'|^\rho u' = f \text{ sobre } \Sigma \\ u(0) = w_0, \ u'(0) = w_1 \text{ dados sobre } \Gamma \end{array} \right. \tag{2.4}$$

onde u' e u'' significam a derivada primeira e segunda, respectivamente, de u com respeito ao tempo.

Lema 2.1. *Seja Φ saisfazendo (1.2) e (1.3). Dado $\lambda > 0$, existe $\alpha = \alpha(\lambda) > 0$ tal que*

$$(A\varphi, \varphi)_\Gamma + \lambda |\varphi|^2_{L^2(\Gamma)} \geq \alpha \|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}\ , \ \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma), \ \forall \lambda > 0.$$

*Unidade Acadêmica de Educação, Centro de Educação e Saúde, UFCG, Cuité-PB, Brasil, e-mail: celiarufino@ufcg.edu.br

Prova: *A prova do Lema encontra-se em* [3] .

Teorema 2.1. *Suponha que* $f \in L^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma))$, $f' \in L^2(\Sigma)$, $w_0 \in H^1(\Gamma)$ *e* $w_1 \in H^{1/2}(\Gamma) \cap L^{2(\rho+1)}(\Gamma)$. *Então existe uma única função* $u : \Sigma \to \mathbb{R}$ *solução de (2.4) satisfazendo*

$$u \in L^\infty(0,T;H^1(\Gamma)), \tag{2.5}$$

$$u' \in L^\infty(0,T;H^{1/2}(\Gamma)), \tag{2.6}$$

$$u'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Gamma)). \tag{2.7}$$

Demostramos o teorema (2.1) utilizando o Método de Faedo-Galerkin, isto é, determinamos uma sequência de soluções aproximadas do problema (2.4) e, em seguida, por meio de estimativas a priori, passamos o limite nesta sequência de soluções aproximadas que resultou na equação

$$u'' + Au + |u'|^\rho \, u' = f$$

no sentido de $L^{p'}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma) + L^{p'}(\Gamma))$, onde $p = \rho + 2$.

Referências

[1] LIONS, J. L. - *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod-Gauthier Villars, Paris, First edition, 1969.

[2] LIONS, J. L. & MAGENES, E. - *Problèmes aux limites non homogenes et applications*, Dunod-Gauthier Villars, Paris, 1968.

[3] FRANCO, C. M. R. - *Equações Diferenciais Parciais Não Lineares sobre a Fronteira de um Domínio Limitado do* $\mathbb{R}^{n+1}$, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa - PB, Brasil, 2007.

[4]HEBEY, E. - *Nonlinear Analysis on Manifolds: Sobolev Spaces and Inequalitis.* American Mathematical Society - AMS, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, V. 5, 1999.

[5] ARARUNA, F. D., ANTUNES, G. O. & MEDEIROS, L. A., - *Semilinear Wave Equation on Manifolds*, Annales de la Faculté des Science de Toulouse, XI(1), 2002, pp. 7-18.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

Controlabilidade de um sitema acoplado do tipo Boussinesq

Enrique Fernández-Cara*, Maurício C. Santos †, Diego A. Souza ‡

Temos por objetivo provar a controlabilidade exata fronteira da equação de Euler para fluidos incompressíveis e não viscosos sob a influência de uma temperatura. Estudaremos este problema em um domínio regular limitado conexo e simplesmente conexo. Precisamente, sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ nas hipóteses acima e $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ um subconjunto aberto de $\partial\Omega$. Queremos provar que dado um $T > 0$ e dados $\mathbf{y}_0$, $\mathbf{y}_1$, θ_0 e θ_1 regulares tais que

$$div\ \mathbf{y}_0 = div\ \mathbf{y}_1 = 0, \text{ em } \Omega \tag{0.1}$$

e

$$\mathbf{y}_0 \cdot n = \mathbf{y}_1 \cdot n = 0, \text{ sobre } \partial\Omega \setminus \Gamma_0, \tag{0.2}$$

onde n é o vetor normal exterior a fronteira, existe uma solução regular $(\mathbf{y}, \theta)$ para o problema

$$\begin{cases} \mathbf{y}_t + (\mathbf{y} \cdot \nabla)\mathbf{y} + \nabla p = \overrightarrow{k}\theta, & \text{em } \Omega \times [0,T], \\ \theta_t + \mathbf{y} \cdot \nabla\theta = 0, & \text{em } \Omega \times [0,T], \\ div\ \mathbf{y} = 0, & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \theta(0) = \theta_0 & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{y}(T) = \mathbf{y}_1, \theta(T) = \theta_1 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{0.3}$$

para algum $p \in \mathcal{D}'(\Omega \times [0,T])$.

1 Resultado principal

Por um processo de mudança de escala, o objetivo principal fica reduzido a estudar um problema de controlabilidade a zero local para dados pequenos.

Teorema 1.1. *Existe $\delta > 0$ tal que para $\boldsymbol{y}_0 \in C^{2,\alpha}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ nas condições (0.1) e (0.2) e $\theta_0 \in C^{2,\alpha}(\Omega, \mathbb{R})$ com $\max\{\|\boldsymbol{y}_0\|, \|\theta_0\|\} \leq \delta$, existe uma solução $(\boldsymbol{y}, \theta) \in [C([0,T]; C^{1,\alpha}(\Omega)) \cup L^\infty([0,T], C^{2,\alpha}(\Omega))] \times C([0,T]; C^{1,\alpha}(\Omega))$ solução de (0.3) com $T = 1$ e $(\boldsymbol{y}_1, \theta_1) = (0,0)$.*

A idéia da prova é seguir em partes as idéias de [3], ou seja, estudaremos um problema de controle para a equação da vorticidade associada a (0.3) em um domínio extendido conveniente, a saber

$$\begin{cases} \mathbf{w}_t + (\mathbf{y} \cdot \nabla)\mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{y} - (\nabla \cdot \mathbf{y})\mathbf{w} - \overrightarrow{\mathbf{k}} \times \nabla\theta, & \text{em } \Omega_2 \times [0,1], \\ div\ \mathbf{y} = 0,\ \mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{y}, & \text{em } \Omega \times [0,1], \\ \theta_t + \mathbf{y} \cdot \nabla\theta = 0, & \text{em } \Omega_2 \times [0,1], \\ \theta(0) = \pi\theta_0, \mathbf{w}(0) = \nabla \times (\pi\mathbf{y}_0), & \text{em } \Omega_2, \end{cases} \tag{1.4}$$

*Dpto. EDAN, University of Sevilla, Aptdo. 1160, 41080 Sevilla, Spain. E-mail: cara@us.es. Partially supported by grants MTM2006-07932 and MTM2010-15592 (DGI-MICINN, Spain).

†Departamento de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, 58051-900, João Pessoa, PB, Brasil (mauricio@mat.ufpb.br). Partially supported by CAPES.

‡Dpto. EDAN, University of Sevilla, Aptdo. 1160, 41080 Sevilla, Spain. E-mail: desouza@us.es. Par- tially supported by grants MTM2006-07932 and MTM2010-15592 (DGI-MICINN, Spain).

em que $\pi : \mathbf{C}^{[\lambda],\lambda-[\lambda]}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3) \to \mathbf{C}^{[\lambda],\lambda-[\lambda]}(\overline{\Omega}_2, \mathbb{R}^3)$ com suporte em $\Omega_1(\Omega \Subset \Omega_1 \Subset \Omega_2)$ e $\lambda \in [0,3)$. Por se tratar de um problema não linear e como queremos um resultado de controle que conduz dados pequenos a zero, é conveniente usarmos o método do retorno. Em outras palavra, precisamos tornar o problema (1.4) linear e em seguida usar um teorema de ponto fixo para recuperarmos o problema original. Mais precisamente, seja $\bar{\mathbf{y}}$ construida de maneira similar a [3] e

$$\begin{gathered}\chi_\nu = \{\mathbf{y} \in C([0,1]; \mathbf{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)); \nabla \cdot \mathbf{y} = 0 \text{ in } \Omega, \\ \|\mathbf{y} - \overline{\mathbf{y}}\|_{C(\Omega\times[0,1])} \leq \nu, \quad \mathbf{y} \cdot \mathbf{n} = \mu \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{n} + \overline{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{n} \text{ on } \partial\Omega \times [0,T]\},\end{gathered} \tag{1.5}$$

Definimos $F : \chi_\nu \to \chi_\nu$ tal que $F(\widetilde{\mathbf{y}}) = \rho$ onde $\nabla \times \rho = \widetilde{\mathbf{w}}$ com

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{w}}_t + (\widetilde{\mathbf{y}} \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{w}} = (\tilde{\mathbf{w}} \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{y}} - (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{y}})\tilde{\mathbf{w}} - \overrightarrow{\mathbf{k}} \times \nabla\theta, & \text{em } \bar{\Omega} \times [0,1], \\ \theta(0) = \pi\theta_0, \mathbf{w}(0) = \nabla \times (\pi \tilde{\mathbf{y}}_0), & \text{em } \bar{\Omega}. \\ \tilde{\mathbf{w}}(x,1) = \theta(x,1) = 0 & \text{em } \bar{\Omega}. \end{cases} \tag{1.6}$$

O nosso problema de controle se reduz a mostrar que F possui um ponto fixo.

Referências

[1] BARDOS, C. AND FRISCH, U.- *Finite-time regularity for bounded and unbounded ideal incompressible fluids using Hölder estimates, in Proceedings of the conference held at the university of Paris-Sud Orsay, France. Springer-Verlag, Lectures Notes in Math. 565 (1975) 1-13.*

[2] CORON,J.-M.- *Contrôlabilité exacte frontière de l'equation d'Euler des fluides parfaits incompressibles bidimensionnels, C. R. Acad. Sci. Paris, 317, 1993, p. 271-276.*

[3] GLASS, O. - *Exact boundary controllability of 3-D Euler equation of perfect incompressible fluids. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 325 (1997) 987-992.*

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO E ESTABILIDADE NA FRONTEIRA DA EQUAÇÃO DA ONDA SEMILINEAR

FABRÍCIO LOPES DE ARAUJO PAZ*

1 Introdução

Nesta dissertação estudamos a existência e comportamento assintótico da solução fraca para o problema

$$\left|\begin{array}{l} u''(x,t) - \mu(t)\Delta u(x,t) + h(u(x,t)) = f(x,t), \text{ em } Q \\ u(x,t) = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \times]0,T[\\ \mu(t)\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) + \beta(x)u'(x,t) = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \times]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x) \text{ em } \Omega \end{array}\right. \tag{1.1}$$

onde $T > 0$ é um número real, Ω é um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ de classe $\mathcal{C}^2$, $\{\Gamma_0 , \Gamma_1\}$ são subconjuntos de Γ de medida positiva tais que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ e $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$, $Q = \Omega \times T$ é um domínio cilíndrico, h é uma função contínua satisfazendo a condição de sinal $s\,h(s) \geq 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$, e $\mu \in W^{1,\infty}(0,T)$, $\beta \in W^{1,\infty}(\Gamma_1)$ são funções reais satisfazendo $\mu(t) \geq \mu_0 > 0$ e $\beta(x) \geq \beta_0 > 0$.

Mostramos a existência e unicidade de solução forte para (1.1), isto é, com dados iniciais $u_0 \in V \cap H^2(\Omega)$ e $u_1 \in V$, onde $V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ em } \Gamma_0\}$ é o espaço de Hilbert munido do produto interno $((u,v)) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$ e da norma $\|u\| = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$. Para a demonstração da existência de solução usamos o método de Faedo Galerkin com uma base especial em $V \cap H^2(\Omega)$ e resultados de compacidade. A unicidade foi obtida pelo método da energia.

Na sequencia provamos a existência de solução fraca, isto é com menos regularidade das condições iniciais, aproximando a função contínua h pela sequência de Strauss, isto é, uma sequência de funções lipschitizianas satisfazendo o Teorema de Strauss cf em Strauss [3]. A solução fraca é obtida como limite de uma sequência de soluções fortes.

Usando o funcional de Liapunov e técnicas multiplicativas mostramos o decaimento da energia associada a solução fraca do problema. Obtivemos o decaimento da enegia associada a solução fraca como limite inferior da energia associada a solução forte do problema. O produto interno e norma de V e $L^2(\Omega)$ são representadas por $((\cdot,\cdot))$, $\|\cdot\|$ e $(\cdot,\cdot)$, $|\cdot|$, respectivamente.

2 Resultados

Teorema 2.1. *Suponha que h é uma função lipschitziana satisfazendo $s.h(s) \geq 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$. Se $(u_0,u_1) \in (V \cap H^2(\Omega)) \times V$ com $\mu(0)\dfrac{\partial u_0}{\partial \nu} + \beta u_1 = 0$ e $f \in H^1(0,T,L^2(\Omega))$, então existe uma única função $u : Q \to \mathbb{R}$ na classe*

$$u \in L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)), \ \ u' \in L^\infty(0,T;V), \ \ u'' \in L^2(Q); \tag{2.1}$$

satisfazendo:

$$\left|\begin{array}{l} u'' - \mu\triangle u + h(u) = f \ \text{ em } L^2(Q); \\ \mu\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u' = 0 \ \text{ em } L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)); \\ u(0) = u_0, \ \ u'(0) = u_1. \end{array}\right. \tag{2.2}$$

*Instituto de Matemática ,UFCG, PB, Brasil, fabriciopaz@hotmail.com

Demonstração. Existência- Para mostrar que as soluções globais satisfazem (2.1)-(2.2), usamos o Método de Faedo-Galerkin.
Unicidade- Para mostrar a unicidade usamos o método da energia. □

Teorema 2.2. *Suponha que h é uma função contínua satisfazendo $s\,h(s) \geq 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$. Se $(u_0, u_1) \in V \times L^2(\Omega)$ com $\Lambda(u_0) \in L^2(\Omega)$ onde $\Lambda(u_0(x)) = \int_0^{u_0(x)} h(s)\,ds$ e $f \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$, então existe uma função $u : Q \to \mathbb{R}$ tal que*

$$u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.3}$$

$$u' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.4}$$

$$u'' - \mu\triangle u + h(u) = f \text{ em } L^1(0,T;V' + L^1(\Omega)) \tag{2.5}$$

$$\mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u' = 0 \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)) \tag{2.6}$$

$$u(0) = u_0, u'(0) = u_1\,. \tag{2.7}$$

Demonstração. Existência-Para mostrar a existência de solução fraca, aproximamos a função contínua h pela sequência de Strauss. □

Considere
$$E(t) = \frac{1}{2}\Big[\mid u'(t)\mid^2 + \mu(t)\|u(t)\|^2 + 2\int_\Omega \Lambda(u(x,t))\,dx\Big]$$

Suponha $\mu'(t) \leq 0$ quase sempre em $[0,\infty)$ e que existe $\delta > 0$ tal que $h(s)s \geq (2+\delta)\Lambda(s)$, $\forall s \in \mathbb{R}$, onde $\Lambda(s) = \int_0^t h(s)ds$. Nestas condições obtemos o seguinte resultado sobre a estabilidade:

Teorema 2.3. *Suponha que h é contínua satisfazendo $sh(s) \geq 0$. Então, dado $(u_0, u_1) \in V \times L^2(\Omega)$ existe uma constante $\omega > 0$ tal que*

$$E(t) \leq 4E(0)\exp^{-\frac{\omega}{2}t}, \forall t \geq 0. \tag{2.8}$$

Referências

[1] LIONS, J. L. - *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéares.*, Dunod-Gauthier Villars, Paris, First edition, 1969.
[2] M.MILLA MIRANDA AND MEDEIROS, L. A. *On a boundary value problem for wave equations: Existence-uniquenes-assymptotic behavior*, Rev. de Mat. Appl.,Univ. de Chile 17(1996), 47-73.
[3] STRAUSS W. A. *On weak solutions of semilinear hyperbolic equations,* An. Acad. Brasil. Ciênc. 42(1970),645-651.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

SOBRE A IGUALDADE $(\mathcal{I} \circ \mathcal{J})^{\text{dual}} = \mathcal{J}^{\text{dual}} \circ \mathcal{I}^{\text{dual}}$

GISELLE MORAES RESENDE PEREIRA *

O objetivo deste trabalho é combinar dois procedimentos canônicos da teoria de ideais de operadores lineares entre espaços de Banach: a composição $\mathcal{I} \circ \mathcal{J}$ dos ideais $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$; e o dual $\mathcal{I}^{\text{dual}}$ de um ideal $\mathcal{I}$. A ideia é, dados ideais $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ e espaços de Banach E e F sobre o corpo $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, investigar a validade da igualdade

$$(\mathcal{I} \circ \mathcal{J})^{\text{dual}}(E; F) = \mathcal{J}^{\text{dual}} \circ \mathcal{I}^{\text{dual}}(E; F).$$

Mostraremos que a igualdade acima será verdadeira acrescentando uma condição ao espaço F e uma condição aos ideais $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$; mais precisamente, a igualdade será verdadeira se F for reflexivo e os ideais estiverem contidos em seus respectivos duais, ou seja, se os ideais forem simétricos. Este trabalho foi baseado na dissertação [5] e nas referências [1,2,3,4,6].

1 Resultados

Neste trabalho os símbolos $(\mathcal{K}, \|\cdot\|)$, $(\mathcal{W}, \|\cdot\|)$, $(\mathcal{N}, \|\cdot\|_{\mathcal{N}})$, $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ e $(\mathcal{CC}, \|\cdot\|)$ denotam, respectivamente, os ideais de Banach dos operadores compactos, fracamente compactos, nucleares, aproximáveis e completamente contínuos, com suas respectivas normas.

Dado um ideal de operadores $\mathcal{I}$, seu dual é definido da seguinte forma: dados espaços de Banach E e F.

$$\mathcal{I}^{\text{dual}}(E; F) := \{u \in \mathcal{L}(E; F) : u' \in \mathcal{I}(F'; E')\},$$

onde u' denota o adjunto do operador u.

Definição 1.1. Sejam $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ ideais de operadores. Dados os espaços de Banach E e F e $u \in \mathcal{L}(E; F)$, dizemos que u pertence a $\mathcal{I} \circ \mathcal{J}(E; F)$ se existem um espaço de Banach G e operadores $v \in \mathcal{J}(E; G)$ e $w \in \mathcal{I}(G; F)$ tais que $u = w \circ v$.

Dados $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ ideais de operadores, a proposição abaixo mostra que $\mathcal{I} \circ \mathcal{J}$ também é ideal de operadores, chamado de *ideal de composição.*

Proposição 1.1. Se $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ são ideais de operadores, então $\mathcal{I} \circ \mathcal{J}$ também é ideal de operadores.

Vários resultados importantes da teoria de espaços de Banach podem ser escritos na linguagem de ideais de composição. Para exemplificar, enunciamos alguns resultados relativos aos operadores compactos, fracamente compactos e completamente contínuos:

Exemplo 1.1. $\mathcal{K} \circ \mathcal{K} = \mathcal{K}$, $\mathcal{W} \circ \mathcal{W} = \mathcal{W}$ e $\mathcal{CC} \circ \mathcal{W} = \mathcal{K}$.

Se $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ são ideais normados, então uma maneira natural de definir uma norma em $\mathcal{I} \circ \mathcal{J}$ seria

$$\|u\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{J}} = \inf\{\|v\|_{\mathcal{J}} \cdot \|w\|_{\mathcal{I}} : v \in \mathcal{J}, w \in \mathcal{I} \text{ e } u = w \circ v\}.$$

Infelizmente a expressão acima não define uma norma em $\mathcal{I} \circ \mathcal{J}$. Assim, o produto de dois ideais de operadores normados nem sempre é ideal normado (para maiores detalhes veja [2]).

*Universidade Federal de Uberlândia, UFU, MG, Brasil, gisellemoraes@famat.ufu.br

A fórmula $(v \circ w)' = w' \circ v'$ pode nos levar a pensar que a igualdade

$$(\mathcal{I} \circ \mathcal{J})^{\mathrm{dual}} = \mathcal{J}^{\mathrm{dual}} \circ \mathcal{I}^{\mathrm{dual}}$$

é verdadeira para ideais $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ quaisquer. Uma inclusão é trivial:

Proposição 1.2. *Para todos $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ ideais de operadores, $\mathcal{J}^{\mathrm{dual}} \circ \mathcal{I}^{\mathrm{dual}} \subseteq (\mathcal{I} \circ \mathcal{J})^{\mathrm{dual}}$.*

A inclusão inversa não é verdadeira para ideais de operadores $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ arbitrários; mas resultados interessantes podem ser obtidos acrescentando hipóteses adicionais. O resultado a seguir não foi encontrado em nenhuma referência.

Proposição 1.3. *Sejam $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ ideais de operadores tais que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^{\mathrm{dual}}$ e $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}^{\mathrm{dual}}$. Se F é um espaço reflexivo, então $(\mathcal{I} \circ \mathcal{J})^{\mathrm{dual}}(E;F) = \mathcal{J}^{\mathrm{dual}} \circ \mathcal{I}^{\mathrm{dual}}(E;F)$ para todo espaço de Banach E.*

Prova: Pela Proposição 1.2 basta provar a inclusão

$$(\mathcal{I} \circ \mathcal{J})^{\mathrm{dual}}(E;F) \subseteq \mathcal{J}^{\mathrm{dual}} \circ \mathcal{I}^{\mathrm{dual}}(E;F).$$

Para isso seja $u \in (\mathcal{I} \circ \mathcal{J})^{\mathrm{dual}}(E;F)$. Então $u' \in \mathcal{I} \circ \mathcal{J}(F';E')$ e por isso existem um espaço de Banach G e operadores $v \in \mathcal{J}$ e $w \in \mathcal{I}$ tais que $u' = w \circ v$. De $v \in \mathcal{J}(F';G) \subseteq \mathcal{J}^{\mathrm{dual}}(F';G)$ e de $w \in \mathcal{I}(G;E') \subseteq \mathcal{I}^{\mathrm{dual}}(G;E')$ temos, respectivamente, $v' \in \mathcal{J}(G';F'')$ e $w' \in \mathcal{I}(E'';G')$. Considerando os mergulhos canônicos J_E de E em E'' e J_F de F em F'', e usando a hipótese de F ser um espaço reflexivo, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "J_E"'] & F \arrow[d, "J_F"] \\
E'' \arrow[r, "u''"] \arrow[d, "w' \in \mathcal{I}"'] & F'' \\
G' \arrow[ur, "v' \in \mathcal{J}"'] &
\end{tikzcd}$$

Assim, $u = \underbrace{J_F^{-1} \circ v'}_{\in \mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}^{\mathrm{dual}}} \circ \underbrace{w' \circ J_E}_{\in \mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^{\mathrm{dual}}} \in \mathcal{J}^{\mathrm{dual}} \circ \mathcal{I}^{\mathrm{dual}}(E;F)$. $\square$

A hipótese $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^{\mathrm{dual}}$ da proposição acima foi estudada e obtivemos resultados importantes envolvendo essa inclusão.

Definição 1.2. Um ideal de operadores $\mathcal{I}$ é dito *simétrico* se $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^{\mathrm{dual}}$.

São exemplos de ideais de operadores simétricos: o ideal $\mathcal{W}$ dos operadores fracamente compactos, o ideal $\mathcal{K}$ dos operadores compactos, o ideal $\mathcal{A}$ dos operadores aproximáveis e o ideal $\mathcal{N}$ dos operadores nucleares.

Referências

[1] G. Botelho, D. Pellegrino, E. Teixeira, Fundamentos de Análise Funcional, SBM, 2012 (to appear).

[2] A. Defant e K. Floret - *Tensor norms and operator ideals*, North-Holland, 1993.

[3] H. Jarchow- *Locally Convex Spaces*, B. G. Teubner Stuttgart, 1981.

[4] R. E. Megginson - *An introduction to Banach space theory*, Springer-Verlag, 1998.

[5] G. M. R. Pereira - *O dual de um ideal de operadores e ideais de operadores simétricos entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, UFU, 2012.

[6] A. Pietsch - *Operator ideals*, North-Holland, 1980.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

O MÉTODO DO ENVELOPAMENTO PERIÓDICO APLICADO ÀS EQUAÇÕES DE EVOLUÇÃO

JOEL S. SOUZA* & JOCEMAR DE Q. CHAGAS†

1 Introdução

Dado um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, consideramos domínios Ω^ε construídos da seguinte forma: tomamos Y uma célula de referência (por exemplo, $Y = (0,1)^n$), ou mais geralmente, um conjunto que tenha a propriedade de pavimentação com respeito a uma base $(b_1, ..., b_n)$; T um conjunto aberto incluído em Y, tal que $\partial T \cap \partial Y = \emptyset$, de forma que $Y^* = Y \backslash \overline{T}$ seja um conjunto aberto e conexo; e, para $\varepsilon > 0$ definimos:

$$T^\varepsilon = \bigcup_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \varepsilon(\xi + T)$$

e, finalmente:

$$\Omega^\varepsilon = \Omega \backslash T^\varepsilon.$$

Dada uma matriz coerciva e limitada $A^\varepsilon(x) = \left(a^\varepsilon_{ij}(x)\right)_{1 \le i,j \le n}$ q.s. em Ω, definimos o operador

$$\mathcal{A}_\varepsilon = -div(A^\varepsilon \nabla) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a^\varepsilon_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big),$$

e consideramos a equação

$$\mathcal{A}_\varepsilon u^\varepsilon = f,$$

com $f \in H^{-1}(\Omega)$ e, por exemplo, condições de Dirichlet sobre $\partial\Omega$. Nosso interesse é entender o que acontece com as soluções u^ε, quando $\varepsilon \to 0$.

A teoria de homogeneização é um ramo da análise matemática que consiste em entender o comportamento assintótico de operadores diferenciais com coeficientes rapidamente oscilantes. Existem diferentes métodos relacionados a essa teoria, como, por exemplo: o método de múltipla escala, introduzido por A. Bensoussan, J.-L. Lions e G. Papanicolaou [2]; o método das funções testes oscilantes, devido a L. Tartar [9]; o método da convergência em dupla escala, indroduzido por G. Nguetseng [8], e desenvolvido por G. Allaire [1]; e o método do envelopamento periódico.

2 O método do envelopamento periódico

O método do envelopamento periódico foi introduzido por D. Cioranescu, A. Damlamian e G. Griso [3] para o estudo clássico de homogeneização. As principais ferramentas deste método são um operador de envelopamento e uma decomposição macro-micro de funções, que permite separar as escalas macroscópicas e microscópicas. Mais tarde, esse método foi estendido para a homogeneização em domínios com buracos, introduzindo-se o operador de envelopamento para funções definidas em domínios periodicamente perfurados, e um operador de envelopamento

*Departamento de Matemática, UFSC, SC, Brasil, jsouza@mtm.ufsc.br
†Departamento de Matemática e Estatística, UEPG, PR, Brasil & Programa de Pós-Graduação em Matemática, UFRGS, RS, Brasil, & bolsista do CNPq - Brasil, jocemarchagas@uepg.br

de fronteira. O operador de envelopamento periódico é basicamente um operador de extensão, que consiste em estender o domínio de definição da função sobre a qual ele atua, aumentando a dimensão do domínio de definição dessa função. De uma forma bastante simplificada, imagine uma função ϕ definida em um conjunto $X \subset \mathbb{R}$. Agora, estenda o domínio dessa função de forma a aumentar sua dimensão, considerando o domínio formado pelo produto cartesiano $X \times Y$, onde também $Y \subset \mathbb{R}$. O operador de envelopamento vai tomar a curva do gráfico da função ϕ original, no caso, um gráfico bidimensional, e estendê-la a uma superfície do $\mathbb{R}^3$, devido ao acréscimo de uma dimensão ao domínio da função original. Um exemplo de envelopamento seria tomar uma função $\phi(x)$ e considerar sua extensão $\tilde{\phi}(x,y) = \phi(x)\psi(y)$, onde $\psi(y)$ é uma função constante ou uma função trigonométrica qualquer, por exemplo, $\psi(y) = cos(\frac{2\pi y}{\varepsilon})$, função periódica de período ε. Observamos que o gráfico da superfície gerada pelo operador de envelopamento é periódico na componente $y \in Y$.

O operador de envelopamento, apesar de aumentar a dimensão do problema, possui propriedades muito interessantes, e, se o dimensionamento adequado for usado, pode-se obter de maneira bastante simples os mesmos resultados de homogeneização obtidos através dos demais métodos de homogeneização.

3 Aplicação às equações de evolução

O método do envelopamento periódico, utilizado inicialmente para homogeneização de problemas elípticos, pode ser utilizado com muita propriedade para a obtenção de resultados de homogeneização de problemas de evolução. Esse é o objetivo deste trabalho, que encontra-se em desenvolvimento.

Referências

[1] ALLAIRE, G. - *Homogenization and two scale convergence*, SIAM J. Math. Anal., 32 (1992), 1482-1518.

[2] BENSOUSSAN, A.; LIONS J.-L.; PAPANICOLAOU, G. - *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North-Holland, Amsterdam, (1978).

[3] CIORANESCU, D.; DAMLAMIAN, A.; GRISO, G. - *Periodic unfolding and homogenization*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 335 (2002), 99-104.

[4] CIORANESCU, D.; DAMLAMIAN, A.; GRISO, G. - *The periodic unfolding method in homogenization*, SIAM J. of Math. Anal. Vol. 40, 4 (2008), 1585-1620.

[5] CIORANESCU, D.; DONATO, P.; ZAKI, R. - *The periodic unfolding method in perforated domains*, Portugaliae Mathematica, 63, 4 (2006), 467-496.

[6] CIORANESCU, D.; DONATO, P.; ZAKI, R. - *Asymptotic behavior of elliptic problems in perforated domains with nonlinear boundary conditions*, Asymptotic Analysis, 53, 4 (2007), 209-235.

[7] GRISO, G. - *Error estimate and unfolding for periodic homogenization*, Asymptotic Analysis, 3-4 (2004), 269-286.

[8] NGUETSENG, G. - *A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization*, SIAM J. Math. Anal., 20 (1989), 608-629.

[9] TARTAR, L. - *Quelques remarques sur l'homogénisation.*, Functional Analysis and Numerical Analysis, Proc. Japan-France Seminar 1976 (Fujita Ed.), Japanese Society for the Promotion of Sciences, (1978), 468-482.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

O ADJUNTO DA COMPOSIÇÃO DE UM POLINÔMIO HOMOGÊNEO COM UM OPERADOR LINEAR

LETÍCIA GARCIA POLAC*

Sejam E e F espaços de Banach e $P\colon E \longrightarrow F$ um polinômio n-homogêneo contínuo. Em [1], Aron e Schottenloher definiram o adjunto de P como sendo o seguinte operador linear contínuo:

$$P'\colon F' \longrightarrow \mathcal{P}(^nE)\ ,\ P'(\varphi)(x) = \varphi(P(x)),$$

onde $\mathcal{P}(^nE)$ é o espaço dos polinômios n-homogêneos contínuos de E no corpo dos escalares. É claro que essa definição generaliza a noção de adjunto u' de um operador linear u.

É bem conhecido que se $u\colon E \longrightarrow F$ e $v\colon F \longrightarrow G$ são operadores lineares contínuos, então $(v \circ u)' = u' \circ v'$. Essa fórmula nos leva naturalmente a buscar fórmulas para os adjuntos de $u \circ P$ e de $P \circ u$, onde u é um operador linear contínuo e P é um polinômio homogêneo contínuo. O objetivo deste trabalho é obter fórmulas para os adjuntos dessas composições.

As seguintes notações serão utilizadas:

E'= dual topológico do espaço vetorial normado E.
$\mathcal{L}(E;F)$= espaço dos operadores lineares contínuos de E em F.
$\mathcal{P}(^nE;F)$= espaço dos polinômios n-homogêneos contínuos de E em F.
$\otimes^{n,s}_{\pi_s}E$= produto tensorial simétrico de E por E n vezes munido da norma s-projetiva π_s.
$\otimes^n x = x\otimes \overset{(n)}{\cdots} \otimes x$.
$\widehat{\otimes}^{n,s}_{\pi_s}E$= completamento do espaço normado $\otimes^{n,s}_{\pi_s}E$.
$\otimes^{n,s}_{\pi_s}u$= produto tensorial simétrico projetivo do operador linear contínuo u por u n-vezes.
$\delta^E_n\colon E \longrightarrow \widehat{\otimes}^{n,s}_{\pi_s}E$= polinômio n-homogêneo contínuo canônico de E em $\widehat{\otimes}^{n,s}_{\pi_s}E$.

Para a teoria de produtos tensoriais projetivos e produtos tensoriais projetivos simétricos veja [2,4].

1 Resultados

Dados $n \in \mathbb{N}$, E, F e G espaços de Banach, se $u \in \mathcal{L}(G;F)$ e $P \in \mathcal{P}(^nE;G)$ então obtemos facilmente que $(u \circ P)' = P' \circ u'$:

Teorema 1.1. *Sejam $n \in \mathbb{N}, E, F$ e G espaços de Banach. Se $u \in \mathcal{L}(G;F)$ e $P \in \mathcal{P}(^nE;G)$, então $(u\circ P)' = P'\circ u'$, ou seja, o diagrama seguinte é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[rr, "(u\circ P)'"] \arrow[dr, "u'"'] & & P(^nE) \\ & G' \arrow[ur, "P'"'] & \end{tikzcd}$$

*Faculdade de Matemática , UFU, MG, Brasil, e-mail: leticiagarciapolac@yahoo.com.br

Por outro lado, se $u \in \mathcal{L}(E;G)$ e $P \in \mathcal{P}(^nG;F)$, não há uma fórmula óbvia para $(P \circ u)'$, pois os domínios e contra-domínios de P' e u' não são compatíveis neste caso. Para obter uma fórmula para $(P \circ u)'$ em termos de P' e u', usaremos o fato de que, para cada espaço de Banach E, o adjunto do polinômio canônico $\delta_n^E \colon E \longrightarrow \widehat{\otimes}_{\pi_s}^{n,s} E$:

$$\left(\delta_n^E\right)' : \left(\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{n,s} E\right)' \longrightarrow \mathcal{P}(^nE) \ , \ \left(\delta_n^E\right)'(\psi)(x) = \psi\left(\otimes^n x\right),$$

é um isomorfismo isométrico (veja [3, Proposition 2.1(1)])

Teorema 1.2. *Sejam $n \in \mathbb{N}, E, F$ e G espaços de Banach. Se $u \in \mathcal{L}(E;G)$ e $\mathcal{P} \in P(^nG;F)$, então*

$$(P \circ u)' = \left(\delta_n^E\right)' \circ \left(\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{n,s} u\right)' \circ \left[\left(\delta_n^G\right)'\right]^{-1} \circ P',$$

ou seja, o diagrama seguinte é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
F' \arrow[rr, "(P\circ u)'"] \arrow[d, "P'"'] & & \mathcal{P}(^nE) \\
P(^nG) \arrow[r, "{[(\delta_n^G)']^{-1}}"] & \left(\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{n,s} G\right)' \arrow[r, "(\otimes_{\pi_s}^{n,s} u)'"] & \left(\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{n,s} E\right)' \arrow[u, "(\delta_n^E)'"']
\end{tikzcd}$$

Observação 1.1. A fórmula obtida no teorema acima não foi encontrada em nenhuma referência.

Corolário 1.1. *Sejam $n \in \mathbb{N}, E, F, G$ e H espaços de Banach. Se $u \in \mathcal{L}(E;F)$, $P \in \mathcal{P}(^nF;G)$ e $v \in \mathcal{L}(G;H)$, então $(v \circ P \circ u) \in \mathcal{P}(^nE;H)$ e*

$$(v \circ P \circ u)' = \left(\delta_n^E\right)' \circ \left(\otimes_{\pi_s}^{n,s} u\right)' \circ \left[\left(\delta_n^F\right)'\right]^{-1} \circ P' \circ v'.$$

Referências

[1] ARON, R. E SCHOTTENLOHER, M. - *Compact holomorphic mappings on Banach spaces and the approximation property*, J. Funct. Anal. **21** (1976), 7-30.

[2] DEFANT, A. E FLORET, K. - *Tensor Norms and Operator Ideals*, North-Holland Mathematical Studies 176, North-Holland, 1993.

[3] FLORET, K. - *Natural norms on symmetric tensor products of normed spaces*, Note Mat. **17** (1997), 153-188.

[4] RYAN, R. - *Applications of topological tensor products to infinite dimensional holomorphy*, Thesis - Trinity College Dublin, 1980.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

DECAIMENTO EXPONENCIAL EM UMA MISTURA TERMOELÁSTICA DO TIPO III

RAFAEL P. DA SILVA* & LUCI H. FATORI†

Os trabalhos pioneiros da teoria de misturas termoelásticas de sólidos foram contribuições de **Truesdell e Toupin (1960)**, **Green e Naghdi (1965,1968)** ou **Bowen e Wiese (1969)**. Grande parte da teoria de misturas contínuas são dedicadas para descrever situações onde fluidos e/ou gases estão presentes como componentes e então a descrição espacial é a mais adequada. Para uma mistura contínua de dois materiais, o movimento é descrito por duas componentes $x = x(X,t), y = y(Y,t)$ e assumimos que as partículas x, y ocupam a mesma posição no tempo t.

Nos últimos anos este assunto tem merecido atenção e principalmente nos estudos das propriedades qualitativas das soluções desses problemas. Recentemente em [1] foi considerado o sistema de mistura termoelástica de sólidos, sendo estabelecido condições necessárias e suficientes para o decaimento exponencial da solução. Ou seja, satisfeitas certas relações entre os coeficientes do sistema, a dissipação térmica(dada pela lei de Fourier) foi suficiente para garantir o decaimento da solução.

Em nosso trabalho, enfatizamos o estudo do decaimento da solução para o caso de uma viga unidimensional de tamanho L, composta pela mistura de dois sólidos termoelásticos onde são considerados leis não Fourier para o fluxo de calor. Mais especificamente consideramos um problema de mistura termoelástica do tipo III onde a diferença de temperatura é representada por uma equação hiperbólica. Neste caso, denotando o deslocamento das partículas no tempo t por v e w, onde $v = v(x,t); w = w(x,t), x, y \in (0,L)$ e a diferença de temperatura em cada ponto x e tempo t por $\theta = \theta(x,t)$, o sistema que modela o problema é dado por

$$(1) \qquad \begin{cases} \rho_1 v_{tt} - a_{11} v_{xx} - a_{12} w_{xx} + \alpha(v-w) - \beta_1 \theta_{tx} = 0 & \text{em} \quad (0,L) \times (0,\infty) \\ \rho_2 w_{tt} - a_{12} w_{xx} - a_{22} w_{xx} - \alpha(v-w) - \beta_2 \theta_{tx} = 0 & \text{em} \quad (0,L) \times (0,\infty) \\ c\theta_{tt} - \beta_1 v_{tx} - \beta_2 w_{tx} - k\theta_{xx} - \gamma \theta_{txx} = 0 & \text{em} \quad (0,L) \times (0,\infty) \end{cases}$$

As constantes $\rho_1, \rho_2, c, k, \alpha$ e γ são todas positivas, além disso a matriz (a_{ij}) é definida positiva.

As condições iniciais do nosso problema são

$$(2) \qquad v(x,0) = v_0, v_t(x,0) = v_1, w(x,0) = w_0, w_t(x,0) = w_1, \theta(x,0) = \theta_0, \theta_t(x,0) = \theta_1.$$

E as condições de fronteira são dadas por

$$(3) \qquad v(0,t) = v(L,t) = w(0,t) = w(L,t) = \theta_x(0,t) = \theta_x(L,t) = 0.$$

1 Resultados

Em nosso estudo, utilizando teoria de semigrupos de operadores, provamos a existência e unicidade da solução do problema de mistura termoelástica do tipo III. Além disso, foram estabelecidas condições sob as quais esta solução possui decaimento exponencial.

*Departamento de Matemática , UEL, PR, Brasil, rafamat2007@yahoo.com.br
†Departamento de Matemática, UEL, PR, Brasil, lucifatori@uel.br

Referências

[1] ALVES, M. S., MUÑOZ RIVERA, J.E., QUINTANILLA, R. - Exponential decay in a thermoelastic mixture of solids. *International Journal of Solids ans Structures* , **46**, 1659-1666, 2009.

[2] ZHANG, X., ZUAZUA, E. - Decay of solutions of the system os thermoelasticity of type III. *Communications in Contemporary Mathematics* , **5**, 1-59, 2003.

[3] PAZY, A. - *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, 1983.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFS - Universidade Federal de Sergipe
VI ENAMA - Novembro 2012

ESTABILIZAÇÃO DE UM SISTEMA DE BOUSSINESQ DO TIPO KDV-KDV

ROBERTO M. G. DA SILVA* & ADEMIR F. PAZOTO†

Nesta dissertação de mestrado, onde nos baseamos no artigo Pazoto & Rosier [2], estamos interessados no decaimento exponencial da energia total associada ao sistema de Boussinesq do tipo KdV-KdV em um intervalo finito $I = (0, L)$

$$\begin{cases} \eta' + \omega_x + (\eta\omega)_x + \omega_{xxx} = 0, \ 0 < x < L, \ t \geq 0 \\ \omega' + \eta_x + \omega\omega_x + \eta_{xxx} = 0, \ 0 < x < L, \ t \geq 0 \end{cases} \tag{0.1}$$

satisfazendo as condições de contorno

$$\begin{cases} \omega(0,t) = 0, \ \omega_x(0,t) = \alpha_0\eta_x(0,t), \ \omega_{xx}(0,t) = 0, \ t > 0 \\ \omega(L,t) = \alpha_2\eta(L,t), \ \omega_x(L,t) = -\alpha_1\eta_x(L,t), \ \omega_{xx}(L,t) = -\alpha_2\eta_{xx}(L,t), \ t > 0 \end{cases} \tag{0.2}$$

e as condições iniciais

$$\begin{cases} \eta(x,0) = \eta_0(x), \ 0 < x < L \\ \omega(x,0) = \omega_0(x), \ 0 < x < L. \end{cases} \tag{0.3}$$

Em (0.2), α_0, α_1 e α_2 denotam constantes reais não negativas.

Observemos que, multiplicando a primeira equação de (0.1) por η, a segunda equação por ω, integrando em $(0, L)$ e somando os resultados, obtemos (formalmente)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &= -\alpha_2|\eta(L,t)|^2 - \alpha_1|\eta_x(L,t)|^2 - \alpha_0|\eta_x(0,t)|^2 \\ &\quad -\frac{1}{3}|\omega(L,t)|^3 - \int_0^L (\eta\omega)_x\eta \, dx, \end{aligned}$$

onde $E(t) := \frac{1}{2}\int_0^L (|\eta|^2 + |\omega|^2)\, dx$ é a energia total associada ao sistema (0.1).

Portanto, é possível observar que as condições de contorno (0.2) atuam como um mecanismo dissipativo, pelo menos para o sistema linear, visto que os dois últimos termos não aparecem na derivada da energia do problema linear. Logo, surgem as seguintes perguntas naturais:

- $E(t) \to 0$, quando $t \to +\infty$?
- Se este for o caso, podemos determinar uma taxa de decaimento?

O principal resultado deste trabalho foi provado em Pazoto & Rosier [2] e nos dá uma resposta para estas perguntas e será enunciado na próxima seção.

1 Resultados

Nesta seção apresentamos o resultado principal desta dissertação o qual garante a estabilidade exponencial da solução do problema (0.1)-(0.3), para dados iniciais pequenos.

*Programa de Engenharia Nuclear, COPPE, UFRJ, RJ, Brasil, rmamud@con.ufrj.br
†Instituto de Matemática, UFRJ, RJ, Brasil, ademir@im.ufrj.br

Teorema 1.1. *Assuma que* $\alpha_0 \geq 0,\ \ \alpha_1 > 0$ *e* $\alpha_2 = 1$. *Então, existem constantes* $\rho > 0,\ \ C > 0$ *e* $\mu > 0$, *tais que, para quaisquer* $(\eta_0, \omega_0) \in [L^2(I)]^2$ *com* $|(\eta_0, \omega_0)|_{[L^2(I)]^2} \leq \rho$, *o sistema (0.1) - (0.3) admite uma única solução* $(\eta, \omega) \in C(\mathbb{R}^+; [L^2(I)]^2) \cap C(\mathbb{R}^{+*}; [H^1(I)]^2) \cap L^2(0, 1; [H^1(I)]^2)$ *que satisfaz*

$$|(\eta, \omega)(t)|_{[L^2(I)]^2} \leq Ce^{-\mu t} |(\eta_0, \omega_0)|_{[L^2(I)]^2},\ \forall t \geq 0, \tag{1.4}$$

$$\|(\eta, \omega)(t)\|_{[H^1(I)]^2} \leq C \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}} |(\eta_0, \omega_0)|_{[L^2(I)]^2},\ \forall t > 0,\ \ \forall \alpha \in (0, \mu). \tag{1.5}$$

Prova: Primeiro estudamos o sistema linear, através da Teoria de Semigrupos, para deduzirmos algumas estimativas a priori e o decaimento exponencial das soluções na norma L^2. Estabelecemos o efeito regularizante de Kato usando o método dos multiplicadores, enquanto o decaimento exponencial é obtido com a ajuda de alguns argumentos de compacidade que reduz o trabalho a um problema espectral (Ver, por exemplo, Rosier [4]).

Com essas estimativas, provamos a boa colocação global e a estabilidade exponencial das soluções do sistema não linear partindo de dados iniciais pequenos em $[L^2(I)]^2$. A idéia central consiste em combinar o efeito regularizante de Kato e a taxa de decaimento das soluções em $[H^1(I)]^2$ para estabelecer uma estimativa pontual e, então, aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach no espaço

$$F := \{U = (\eta, \omega) \in C(\mathbb{R}^+; [H^1(I)]^2); \|e^{\mu t} U(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; [H^1(I)]^2)} < \infty\}, \tag{1.6}$$

onde $\mu > 0$, será determinado posteriormente. ■

A seguir vamos enunciar o efeito regularizante de Kato para esclarecer os argumentos acima.

Proposição 1.1. *Sejam* $(\eta_0, \omega_0) \in [L^2(I)]^2$ *e* $(\eta, \omega) = S(\cdot)(\eta_0, \omega_0)$. *Então, para todo* $T > 0$,

$$\begin{aligned} &\int_0^L (|\eta_0(x)|^2 + |\omega_0(x)|^2) dx - \int_0^L (|\eta(x, T)|^2 + |\omega(x, T)|^2) dx \\ &\qquad = 2 \int_0^T \{\alpha_2 |\eta(L, t)|^2 + \alpha_1 |\eta_x(L, t)|^2 + \alpha_0 |\eta_x(0, t)|^2\} dt\,, \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} &\frac{T}{2} \int_0^L (|\eta_0(x)|^2 + |\omega_0(x)|^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (|\eta|^2 + |\omega|^2) dx dt \\ &+ \int_0^T (T - t) \{\alpha_2 |\eta(L, t)|^2 + \alpha_1 |\eta_x(L, t)|^2 + \alpha_0 |\eta_x(0, t)|^2\} dx. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Se, além disso, $\alpha_2 = 1$, *então* $(\eta, \omega) \in L^2(0, T; [H^1(I)]^2)$ *e*

$$\|(\eta, \omega)\|_{L^2(0, T; [H^1(I)]^2)} \leq C |(\eta_0, \omega_0)|_{[L^2(I)]^2}, \tag{1.9}$$

onde $C = C(T)$ *é uma constante positiva.*

Referências

[1] Cerpa, E. and Crépeau, E. - Rapid exponential stabilization for a linear Korteweg-de Vries equation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems.*, Series B, **11**, 655-668, 2009.

[2] Pazoto, A. F. and Rosier, L. - Stabilization of a Boussinesq system of KdV-KdV type. *Systems and Control Letters*, **57**, 595-601, 2008.

[3] Micu, S., Ortega, J. H. and Pazoto, A. F. - On the controllability of a coupled system of two Korteweg-de Vries equations. *Communications in Contemporary Mathematics*, **5**, 799-827, 2009.

[4] Rosier, L. - Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, **2**, 33-35, 1997.