IV ENAMA

IV ENCONTRO NACIONAL DE ANÁLISE MATEMÁTICA E APLICAÇÕES

Resumo dos Trabalhos

Realização

FACULDADE DE MATEMÁTICA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

Universidade Federal do Pará

Instituto de Ciências Exatas e Naturais

Faculdade de Matemática

Belém, 10 a 12 de novembro de 2010

IV ENAMA

O IV ENAMA (Encontro nacional de análise matemática e aplicações) é uma realização da Faculdade de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará, na cidade de Belém-Pa, no período de 10 a 12 de novembro de 2010.

O ENAMA é um evento na área de Matemática, mais especificamente, em Análise Funcional, Análise Numérica e Equações Diferenciais, criado para ser um fórum de debates e de intercâmbio de conhecimentos entre diversos especialistas, professores, pesquisadores e alunos de pós-graduação em Matemática do Brasil e do exterior. Nesta Quarta edição, o evento contou com três mini-cursos, três palestras plenárias (conferências), noventa e duas comunicações orais e dezoito apresentações de pôsteres.

Os organizadores do IV ENAMA desejam expressar sua gratidão aos projetos, órgãos e instituições que apoiaram e tornaram possível a realização deste Evento: UFPA, FAPESPA, PROJETO PRO-LICENCIATURA e CAPES. Agradecem também a todos os participantes e colaboradores pelo entusiasmo e esforço, que tanto contribuíram para o sucesso deste ENAMA.

A Comissão Organizadora

Comitê Organizador

Comitê Científico do IV ENAMA

Índice dos Resumos

Comunicações Orais

Apresentações em Pôsteres

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$\underline{\text{o}}$ 4 Novembro 2009

Boundaries for $\mathcal{A}_u(B_E)$ and $\mathcal{A}_{wu}(B_E)$

M. D. Acosta * & R. M. Aron † & L. A. Moraes ‡

A classical result of Šilov states that if K is a compact Hausdorff topological space and $\mathcal{A}$ is a unital and separating subalgebra of $\mathcal{C}(K)$ then there is a minimal closed subset $M \subset K$ such that $\|f\| = \max_{m\in M} |f(m)|$ for every $f \in \mathcal{A}$. This set is known as the **Šilov** boundary for $\mathcal{A}$.

Five years after Šilov's paper, Bishop proved that if $\mathcal{A}$ is a separating Banach algebra of continuous functions on a compact metrizable space K, then K has a minimal subset M (not necessarily closed) satisfying the following condition: For all $f \in \mathcal{A}$, there exists $m \in M$ such that $|f(m)| = \|f\|$. In fact, M is the set of all peak points for $\mathcal{A}$.

About twenty years after the classical results of Šilov and Bishop, Globevnik considered the problem of extending those results to the setting of certain subalgebras $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}_b(\Omega)$, where Ω is a topological space which is not necessarily compact, and where $\mathcal{C}_b(\Omega)$ denotes the space of continuous and bounded functions on Ω endowed with the usual sup norm.

Following Globevnik, we say that a subset Γ of a topological space Ω is a **boundary** for a function algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}_b(\Omega)$ if

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in \Gamma\}, \ \ \text{forall}\, f \in \mathcal{A}.$$

For a complex Banach space X, let $\mathcal{A}_u(B_X)$ be the Banach algebra of those complex valued functions defined on the closed unit ball B_X of X that are uniformly continuous on B_X and holomorphic on the interior of B_X, endowed with the sup norm, let $\mathcal{A}_{wu}(B_X)$ be the Banach sub-algebra of the elements of $\mathcal{A}_u(B_X)$ that are weakly uniformly continuous on B_X , and let $\mathcal{A}_{w^*u}(B_{X''})$ be the Banach algebra of all complex valued functions defined on the closed unit ball $B_{X''}$ of X'' that are weakly star (uniformly) continuous on $B_{X''}$ and holomorphic on the interior of $B_{X''}$, endowed with the sup norm.

The space of all holomorphic functions from X into $\mathbb{C}$ that, when restricted to any bounded subset of X, are uniformly weakly continuous is denoted by $H_{wu}(X)$, and the space of all holomorphic functions from X'' into $\mathbb{C}$ that, when restricted to any bounded subset of X'', are (uniformly) w^*-continuous is denoted by $H_{w^*u}(X'')$. For every non-negative integer n, we write $\mathcal{P}_{wu}(^nX) := \mathcal{P}(^nX) \cap H_{wu}(X)$ and $\mathcal{P}_{w^*u}(^nX'') := \mathcal{P}(^nX'') \cap H_{w^*u}(X'')$, where $\mathcal{P}(^nX)$ is the space of continuous n-homogeneous polynomials on X. Let $H_b(X)$ be the space of all holomorphic functions from X into $\mathbb{C}$ that are bounded on bounded subsets of X. Since (B_X, w^*) is compact, the boundaries Γ for $\mathcal{A}_{w^*u}(B_{X''})$ (in the sense of Globevnik) that are w^*-closed are boundaries for $\mathcal{A}_{w^*u}(B_{X''})$ in the standard sense, that each $f \in \mathcal{A}_{w^*u}(B_{X''})$ achieves its norm.

The proofs of the results announced in this note can be found in [1].

Proposition 1. *The space of all functions $f \in \mathcal{A}_{wu}(B_X)$ such that $f = g|B_X$ for some $g \in H_{wu}(X)$ is dense in $\mathcal{A}_{wu}(B_X)$. Moreover, for each $f \in \mathcal{A}_{wu}(B_X)$ there exists a unique $\tilde{f} \in \mathcal{A}_{w^*u}(B_{X''})$ such that $\tilde{f}|B_X = f$. In addition, the extension mapping $f \to \tilde{f}$ is an algebraic and isometric isomorphism.*

Proposition 2. *If X is a Banach space whose dual X' is separable and Γ is a subset of B_X, then Γ is a boundary for $\mathcal{A}_{wu}(B_X)$ if and only if $\overline{\Gamma}^{w^*}$ contains all the complex extreme points of $B_{X''}$.*

*Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada, 18071 Granada, Spain, e-mail dacosta@ugr.es
†Department of Mathematical Sciences, Kent State University, Kent, Ohio, 44242, United States, e-mail aron@math.kent.edu
‡Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 21945-970 Rio de Janeiro, RJ , Brasil, e-mail luiza@im.ufrj.br

Proposition 3. *Let X be a complex Banach space such that $\mathcal{P}_{wu}(^nX) = \mathcal{P}(^nX)$ for every $n \geq 1$. Then $\mathcal{A}_u(B_X) = \mathcal{A}_{wu}(B_X)$.*

It is well known that Propositions 2 and 3 apply to c_0 . We can also apply Proposition 2 to some other special cases.

We start by considering the space T^* defined by Tsirelson. The Tsirelson's space is a reflexive Banach space with Schauder basis. For all $n \geq 1$ every element of $\mathcal{P}(^nT^*)$ is weakly sequentially continuous and, since T^* does not contain a copy of ℓ_1, we have that $\mathcal{P}_{wu}(^nT^*) = \mathcal{P}(^nT^*)$ for every $n \geq 1$. So, these propositions apply and we deduce that a subset Γ of B_{T^*} is a boundary for $\mathcal{A}_u(B_{T^*})$, if and only if, $\overline{\Gamma}^w$ contains all the complex extreme points of B_{T^*}.

Aron and Dineen showed that the Tsirelson-James space T_J^* satisfies the equation $\mathcal{P}_{wu}(^nT_J^*) = \mathcal{P}(^nT_J^*)$ for every $n \geq 1$ and that T_J^* has a shrinking basis and so its dual is separable. So, Propositions 2 and 3 apply and we have that a subset Γ of $B_{T_J^*}$ is a boundary for $\mathcal{A}_u(B_{T_J^*})$ if and only if $\overline{\Gamma}^{w^*}$ contains all the complex extreme points of the closed unit ball of the bidual of T_J^*.

Next we present Proposition 5 and Corollary 1 which are also application of Proposition 2. The definition of the canonical pre-dual $d_*(w,1)$ of the Lorentz sequence space $d(w,1)$ can be found in [1] or [3].

Proposition 4. *If $w \notin \ell_p$ for all $p \in \mathbb{N}$ then $\mathcal{A}_u(B_{d_*(w,1)}) = \mathcal{A}_{wu}(B_{d_*(w,1)})$.*

Since the dual of $d_*(w,1)$ is separable, Proposition 2 can be used to characterize the boundaries for $\mathcal{A}_{wu}(B_{d_*(w,1)})$. This characterization will be given after we describe the set of complex extreme points of the unit ball of its bidual.

Lemma 1. *Let $X = d'(w,1)$, the dual of $d(w,1)$, and $z = (z_k) \in B_X$ a non-negative, decreasing sequence of real numbers. Then z is a complex extreme point of B_X if and only if* $\liminf \left\{ \sum_{j=1}^{n} w_j - \sum_{k=1}^{n} z_k \right\} = 0$.

For a sequence $x = (x_n) \in c_0$, we will denote by $x^* = (x_n^*)$ a decreasing rearrangement of x.

Theorem 1. *Let $X = d'(w,1)$. If $z \in B_X$, then z is a complex extreme point of B_X if and only if*

$$\liminf \{\sum_{j=1}^{n} w_j - \sum_{k=1}^{n} z_k^*\} = 0.$$

Proposition 5. *If $X = d_*(w,1)$, we have $B_{X''} = \overline{Ext_{\mathbb{C}}(B_{X''})}^{w^*}$.*

Corollary 1. *A subset Γ of $B_{d_*(w,1)}$ is a boundary for $\mathcal{A}_{wu}(B_{d_*(w,1)})$ if and only if $B_{d'(w,1)} = \overline{\Gamma}^{w^*}$. As a consequence, if $w \notin \ell_p$ for every $1 \leq p < \infty$, then Γ is a boundary for $\mathcal{A}_u(B_{d'(w,1)})$ if and only if $B_{d'(w,1)} = \overline{\Gamma}^{w^*}$.*

One way of summarizing a number of these results is to say that Γ is a boundary for $\mathcal{A}_{wu}(B_X)$ if and only if Γ is w^*-dense in the set of complex extreme points of $B_{X''}$.

References

[1] M.D. Acosta, R.M. Aron and L.A. Moraes, *Boundaries for spaces of holomorphic functions on M-ideals in their biduals*, Indiana University Mathematics Journal 58 (2009) 2575-2596.

[2] M.D. Acosta and L.A. Moraes, *On boundaries for spaces of holomorphic functions on the unit ball of a Banach space*, In: Banach spaces and their Applications in Analysis, B. Randrianantoanina and N. Randrianantoanina (Eds.), Walter de Gruyter, Berlin, 2007, pp. 229–240.

[3] M.D. Acosta, L.A. Moraes and L. Romero Grados, *On boundaries on the predual of the Lorentz sequence space*, J. Math. Anal. Appl. **336** (2007), 470–479.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

ESTABILIDADE UNIFORME DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS IMPULSIVAS VIA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS GENERALIZADAS

S. M. AFONSO*, E. M. BONOTTO *, M. FEDERSON * & L. P. GIMENES †

Neste trabalho, consideraremos uma classe de equações diferenciais funcionais com retardamento (escreveremos EDFR's) e impulsos em tempo variável que pode ser identificada, de maneira biunívoca, com uma certa classe de equações diferenciais ordinárias (escreveremos EDOs) generalizadas e estabeleceremos um resultado de estabilidade uniforme da solução nula dessas equações através da teoria das equações diferenciais ordinárias generalizadas, usando também funcionais de Lyapunov.

1 Descrição da classe de EDFR's impulsivas

Sejam $\mathbb{R}^n$ o espaço euclideano n-dimensional com norma $|\cdot|$ e $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

Denotaremos por $G^-([a,b],\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ que são regradas e contínuas à esquerda em $[a,b] \subset \mathbb{R}$, ou seja, $f(t-) = f(t)$ para cada $t \in (a,b]$ e o limite à direita $f(t+)$ existe para todo $t \in [a,b)$, onde $f(t-) = \lim_{\rho \to 0^-} f(t+\rho)$ e $f(t+) = \lim_{\rho \to 0^+} f(t+\rho)$. Consideraremos $G^-([a,b],\mathbb{R}^n)$ munido da norma usual do supremo, $\|f\| = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$, $f \in G^-([a,b],\mathbb{R}^n)$.

Sejam $r > 0$ e $t_0 \geq 0$. Dada uma função $y \in G^-([t_0 - r, +\infty),\mathbb{R}^n)$, definiremos $y_t \in G^-([-r,0],\mathbb{R}^n)$ por $y_t(\theta) = y(t+\theta)$, para $\theta \in [-r,0]$ e $t \in [t_0,+\infty)$. Consideraremos a equação diferencial funcional com retardamento e ação impulsiva

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y_t, t), & t \neq \tau_k(y(t)), \quad t \geq t_0, \\ \Delta y(t) = I_k(y(t)), & t = \tau_k(y(t)), \quad k = 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{1.1}$$

com condição inicial

$$y_{t_0} = \phi, \tag{1.2}$$

onde $\phi \in G^-([-r,0],\mathbb{R}^n)$ e $f : G^-([-r,0],\mathbb{R}^n) \times [t_0,+\infty) \to \mathbb{R}^n$. Consideraremos que, para cada $y \in G^-([t_0 - r,+\infty),\mathbb{R}^n)$, a aplicação $t \mapsto f(t, y_t)$ seja Lebesgue integrável. Vamos considerar, também, que os operadores de impulso $I_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, sejam funções contínuas de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ e que $\Delta y(t) = y(t+) - y(t-) = y(t+) - y(t) = I_k(y(t))$, $k = 1, 2, \ldots$, para cada $y \in G^-([t_0 - r,+\infty),\mathbb{R}^n)$ e para cada $t \geq t_0$.

Vamos supor condições do tipo "Carathéodory" e do tipo "Lipschitz" para a integral indefinida de f e para os operadores de impulsos $I_k, k = 1, 2, \ldots$. Veja [2].

Consideraremos que as superfícies τ_k, $k = 1, 2, \ldots$, sejam funções contínuas de $\mathbb{R}^n$ em $(0,+\infty)$, $\tau_0(x) \equiv t_0 < \tau_1(x) < \tau_2(x) < \ldots$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $\tau_k(x) \to +\infty$ quando $k \to +\infty$ uniformemente em $x \in \mathbb{R}^n$, e que as curvas integrais do sistema (1.1)-(1.2) encontram tais superfícies um número finito de vezes.

Uma função $y \in G^-([t_0 - r,+\infty),\mathbb{R}^n)$ será dita uma *solução* de (1.1)-(1.2) em $[t_0 - r,+\infty)$ se satisfizer as seguintes condições:

(*i*) $\dot{y}(t) = f(y_t, t)$, para quase todo $t \in [t_0,+\infty) \setminus \{s : s = \tau_k(y(s)), k = 1, 2, \ldots\}$;

*Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo-Campus de São Carlos , SP, Brasil. E-mails: suzmaria@icmc.usp.br, ebonotto@icmc.usp.br, federson@icmc.usp.br
†Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá-PR, Brasil, lpgarantes@uem.br

(*ii*) $y(t+) = y(t) + I_k(y(t))$, $t = \tau_k(y(t)) \in [t_0, +\infty)$, $\quad k = 1, 2, \ldots$;

(*iii*) $y_{t_0} = \phi$.

EDFR's com impulsos em tempo variável satisfazendo as condições acima podem ser identificadas, de maneira biunívoca, com certa classe de EDOs generalizadas, veja [2].

2 Resultado

No que segue, vamos supor que $f(0, t) = 0$ para todo t e $I_k(0) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Isso implica que a função $y \equiv 0$ é uma solução da equação (1.1) em qualquer intervalo contido em $[t_0, +\infty)$. Também consideraremos os conjuntos $E_c = \{\psi \in G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n) : \ \|\psi\| < c\}$ e $\overline{E}_\rho = \{\psi \in G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n) : \ \|\psi\| \leq \rho\}$, com $0 < \rho < c$. A solução trivial $y \equiv 0$ de (1.1) será dita

(i) *Estável*, se para quaisquer $t_0 \geq 0$ e $\varepsilon > 0$, existir $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que se $\phi \in E_c$ e $\overline{y} : [t_0 - r, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ for solução de (1.1) em $[t_0, +\infty)$ tal que $\overline{y}_{t_0} = \phi$ e

$$\|\phi\| < \delta,$$

então

$$\|\overline{y}_t(t_0, \phi)\| < \varepsilon, \quad t \in [t_0, +\infty).$$

(ii) *Uniformemente estável*, se o número δ no item (i) for independente de t_0.

Através da teoria das EDOs generalizadas, usando funcionais de Lyapunov, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 2.1. *Consideremos a equação diferencial funcional com retardamento e impulsos em tempo variável (1.1). Suponhamos que as condições (A), (B), (A'), (B') estejam satisfeitas. Seja $U : [t_0, +\infty) \times \overline{E}_\rho \to \mathbb{R}$ contínua à esquerda em $(t_0, +\infty)$. Suponhamos que U satisfaça as seguintes condições:*

(i) $U(t, 0) = 0$, $t \in [t_0, +\infty)$;

(ii) Existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|U(t, \psi) - U(t, \overline{\psi})| \leq K\|\psi - \overline{\psi}\|, \quad t \in [t_0, +\infty), \ \ \psi, \overline{\psi} \in \overline{E}_\rho;$$

iii) Existe uma função monótona crescente $b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, tal que $b(0) = 0$ e

$$U(t, \psi) \geq b(\|\psi\|),$$

para quaisquer $t \in [t_0, +\infty)$ e $\psi \in \overline{E}_\rho$;

(iv) Dados $t \geq t_0$ e $\psi \in G^-([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, para a solução $y : [t - r, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ de (1.1) satisfazendo a condição inicial $y_t = y_t(t, \psi) = \psi$, vale a desigualdade

$$D^+U(t, y_t) = \limsup_{\eta \to 0+} \frac{U(t + \eta, y_{t+\eta}(t, \psi)) - U(t, y_t(t, \psi))}{\eta} \leq 0.$$

Então a solução trivial $y \equiv 0$ de (1.1) é uniformemente estável.

O resultado acima está descrito no artigo [1] e será discutido no Congresso.

Referências

[1] AFONSO, S. M., BONOTTO, E. M., FEDERSON, M., GIMENES L. P. - Stability of functional differential equations with variable impulsive perturbations via generalized ordinary differential equations. *Submetido.*

[2] FEDERSON, M., SCHWABIK, Š. - Generalized ODEs approach to impulsive retarded differential equations. *Differential and Integral Equations*, **19(11)**, 1201-1234, 2006.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

On asymptotically periodic behavior of fractional integro-differential equations

Ravi P. Agarwal*, Bruno de Andrade† and Claudio Cuevas ‡§

Resumo

The periodic behavior of differential equations has been extensively studied over the years. In this talk we present some of our recent results on asymptotically periodic behavior of fractional integro-differential equations.

1 Introduction

In this work we are interested in discussing sufficient conditions for the existence and uniqueness of an asymptotically almost periodic mild solution of the fractional Cauchy problem

$$v'(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Av(s)ds + f(t, v(t)), \quad t \geq 0, \tag{1.1}$$

$$v(0) = u_0 \in X. \tag{1.2}$$

where $1 < \alpha < 2$, $A : D(A) \subset X \to X$ is a linear densely defined operator of sectorial type on a complex Banach space X and $f : [0, \infty) \times X \to X$ is appropriated functions. Notice that the convolution integral in (1.1) is known as the Riemann-Liouville fractional integral. In the literature problem (1.1)-(1.2) has been studied by several authors. In [5] the authors investigated existence and uniqueness of S-asymptotically ω-periodic mild solutions of (1.1)-(1.2) with infinite delay, while the case without delay has been considered in [3] and [4] (see also [2]) for asymptotically behavior of solutions and existence of S-asymptotically ω-periodic mild solutions, respectively.

2 Existence Results

Below are our main results.

Teorema 2.1. *Assume that A is sectorial of type $\mu < 0$. Let $f : [0, \infty) \times X \to X$ be a function asymptotically almost periodic in t uniformly in $x \in X$ and assume that there exists an integrable bounded function $L_f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ satisfying*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L_f(t)\|x - y\|, \quad \forall\ x, y \in X, \forall\ t \geq 0. \tag{2.3}$$

Then the problem (1.1)-(1.2) has a unique asymptotically almost periodic mild solution.

Corolário 2.1. *Assume that A is sectorial of type $\mu < 0$. Let $f : [0, \infty) \times X \to X$ be a function asymptotically almost periodic in t uniformly in $x \in X$ that satisfy the Lipschitz condition (2.3) with $L_f(\cdot) \equiv L$. If $CM|\mu|^{-1/\alpha}\pi L < \alpha \sin \pi/\alpha$, where C and M are the constants given in Corollary 4.3 in [1], then the problem (1.1)-(1.2) has a unique asymptotically almost periodic mild solution.*

Taking $A = -\rho^\alpha I$ with $\rho > 0$ and $X = \mathbb{C}$ in (1.1), the about result produces the following corollary.

*Florida Institute of Technology, USA, e-mail: agarwal@fit.edu
†DMAT-UFPE, PE, Brasil, e-mail: bruno00luis@gmail.com
‡DMAT-UFPE, PE, Brasil, e-mail: cch@dmat.ufpe.br
§The third author is partially supported by CNPQ/Brazil

Corolário 2.2. *Let $f : [0,\infty) \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ be a function asymptotically almost periodic in t uniformly in $z \in \mathbb{C}$ and that satisfies the Lipschitz condition (2.3) with $L_f(\cdot) \equiv L$. Then the problem (1.1)-(1.2) has a unique asymptotically almost periodic solution whenever $L < \frac{\alpha \sin \pi/\alpha}{\rho\pi}$.*

Referências

[1] Agarwal, R. P.; de Andrade, B.; Cuevas, C. *On type of periodicity and ergodicity to a class of fractional order differential equations, Advances in Difference Equations,* Volume 2010, Article ID 179750, 25 pages.

[2] de Andrade, B.; Cuevas, C. *S-asymptotically ω-periodic and asymptotically ω-periodic solutions to semilinear Cauchy problems with non dense domain*, Nonlinear Anal., **72** (2010), 3190-3208.

[3] Cuesta, E. *Asymptotically behavior of the solutions of fractional integro-differential equations and some discretizations,* Discrete Contin. Dyn. Syst. (Supplement) (2007), 277-285.

[4] Cuevas, C.; de Souza, J. C. *S-asymptotically ω-periodic solutions of semilinear fractional integro-differential equations*, Appl. Math. Lett., **22** (2009), 865-870.

[5] Cuevas, C.; de Souza, J. C. *Existence of S-asymptotically ω-periodic solutions for fractional order functional integro-differential equations with infinite delay*, Nonlinear Analysis (2009), doi: 10.1016/j.na.2009.09.007.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

Weighted pseudo-almost periodic solutions

Ravi P. Agarwal, *Claudio Cuevas † & Herme Soto ‡

1 Introduction.

The concept of pseudo-almost periodicity was introduced in the literature in the early nineties by Zhang [10]. Since then, such notion became of great interest to several mathematicians (see Agarwal [3], Cuevas [5], [6]). In Agarwal et al. Agarwal [4] and Diagana [7], [8], [9], a new generalization of the concept of almost periodicity was introduced. Such a new concept is called weighted pseudo-almost periodicity. To construct those weighted pseudo-almost periodic functions, the main idea consists of enlarging the so-called ergodic component. See also the recent paper by Agarwal et al. Agarwal [1], where they discussed existence and uniqueness of a weighted pseudo-almost periodic (mild) solution to a class of semi-linear fractional differential equations. Furthermore the authors gave applications to abstract partial evolution (respectively, fractional relaxation-ascillation) equations.

In this work, we study the existence and uniqueness of a weighted pseudo-almost periodic (mild) solution to the following semi-linear integral equations with infinite delay of the form

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} a(t-s)\big[Au(s) + f(s,u(s))\big]ds, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

where $a \in L^1([0,\infty))$, $A : D(A) \subset X \to X$ is the generator of an integral resolvent family defined on a complex Banach space X and $f : \mathbb{R} \times X \to X$ is a weighted pseudo-almost periodic function.

2 Existence Results

We introduce the following integrability assumption for strongly continuous functions $S : [0,\infty) \to \mathcal{B}(X)$.
(INT) There is $\phi \in L^1([0,\infty))$ such that $\|S(t)\| \leq \phi(t)$ for all $t \geq 0$.

Let $\mathbb{V}$ be denote the collection of all functions $\rho : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ satisfying: ρ is piecewise continuous, and $\rho \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. The notations $\mathbb{V}_\infty$ stands for the set of weight functions, $\mathbb{V}_\infty := \{\rho \in \mathbb{V} : \lim_{T\to\infty} m(T,\rho) = \infty\}$, where $T > 0$ and $m(T,\rho) := \int_{-T}^{T} \rho(x)dx$.

Teorema 2.1. *Let $\rho \in \mathbb{V}_\infty$. Assume that A generates an integral resolvent family $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ that satisfies the assumption* **(INT)**. *Let $f \in PAP(X,X,\rho)$ satisfying $\|f(t,u) - f(t,v)\| \leq L_f\|u - v\|$, $\forall\ u,v \in X$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$ with $L_f < \|\phi\|_1^{-1}$. Then equation (1.1) has a unique weighted pseudo-almost periodic solution.*

Teorema 2.2. *Let $\rho \in \mathbb{V}_\infty$. Assume that A generates an integral resolvent family $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ that satisfies assumption* **(INT)**. *Let $f \in PAP(X,X,\rho)$ and assume that there is a nondecreasing function $L : [0,\infty) \to [0,\infty)$ such that for each positive number R, and $x,y \in X$, $||x|| \leq R$, $||y|| \leq R$, we have $||f(t,x) - f(t,y)|| \leq L(R)||x - y||$, $\forall t \in \mathbb{R}$, with $\limsup_{R\to\infty} ||\phi||_1 L(R) < 1$. Then equation (1.1) has a unique weighted pseudo-almost periodic mild solution.*

To establish our next result we consider functions f that satisfies the following boundedness condition.
($\mathbf{B_0}$) There is a continuous nondecreasing function $W : [0,\infty) \to [0,\infty)$ such that $\|f(t,x)\| \leq W(\|x\|)$ for all $t \in \mathbb{R}$ and $x \in X$.

*Departament of Mathematical Sciences, Florida Institute of Technology, Melbourne, Florida, USA. e-mail: agarwal@fit.edu
†DMAT-UFPE, PE, Brasil, e-mail: cch@dmat.ufpe.br
‡Departamento de Matemática y Estadística, Universidad de La Frontera, Temuco, Chile, e-mail: hsoto@ufro.cl

Teorema 2.3. *Let $\rho \in \mathbb{V}_\infty$. Assume that A generates an integral resolvent family $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ that satisfies assumption* **(INT)***. Let $f \in PAP(X, X, \rho)$ satisfying $(\mathbf{B_0})$ and the following conditions:*

(B_1) *$f(t,x)$ is uniformly continuous in any bounded subset $K \subset X$ uniformly in $t \in \mathbb{R}$.*

(B_2) *For each $\nu \geq 0$, $\lim\limits_{|t|\to\infty} \frac{1}{h(t)} \int_{-\infty}^{t} \phi(t-s) W(\nu h(s))ds = 0$, where h is as above.*

(B_3) *For each $\epsilon > 0$ there is $\delta > 0$ such that for every $u, v \in C_h(X)$, $\|v-u\|_h \leq \delta$ implies that*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{t} \phi(t-s)\|f(s,v(s)) - f(s,u(s))\|ds \leq \epsilon.$$

(B_4) $\liminf\limits_{\xi\to\infty} \frac{\xi}{\beta(\xi)} > 1$*, where* $\beta(\nu) := \left\| \int_{-\infty}^{\cdot} \phi(\cdot - s) W(\nu h(s))ds \right\|_h$.

(B_5) *For all $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, and $r > 0$, the set $\{f(s,x) : a \leq s \leq b,\ x \in X, \|x\| \leq r\}$ is relatively compact in X.*

Then equation (1.1) has a weighted pseudo-almost periodic mild solution.

Referências

[1] AGARWAL, R. P., DE ANDRADE, B. AND CUEVAS, C. - *Weighted pseudo-almost periodic solutions of a class of semilinear fractional differential equations*, Nonlinear Analysis, RWA, doi:10.1016/j.nonrwa. 2010.01.002.

[2] AGARWAL, R. P., DE ANDRADE, B. AND CUEVAS, C. - *On type of periodicity and ergodicity to a class of integral equations with infinite delay*, J. Nonlinear Convex Anal. 2010, to appear.

[3] AGARWAL, R. P., DE ANDRADE, B. AND CUEVAS, C. - *On type of periodicity and ergodicity to a class of fractional order differential equations*, Advances in Difference Equations, 2010, Article ID 179750, p.1-25.

[4] AGARWAL, R. P., DIAGANA, T. AND HERNÁNDEZ, E. - *Weighted pseudo almost periodic solutions to some partial neutral functional differential equations*, J. Nonlinear Convex Anal. **8**(3) (2007), 397-415.

[5] CUEVAS, C. AND HERNÁNDEZ, E. - *Pseudo-almost periodic solutions for abstract partial functional differential equation*, Appl. Math. Lett. **22** (2009), 534-538.

[6] CUEVAS, C. AND PINTO, M. - *Existence and uniqueness of pseudo almost periodic solutions of semilinar Cauchy problems with non dense domain*, Nonlinear Anal. **45** (1) (2001), 73-83.

[7] DIAGANA, T. - *Weighted pseudo almost periodic functions and applications*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser I **343** (10) (2006), 643-646.

[8] DIAGANA, T. - *Weighted pseudo almost periodic solutions to some differential equations*, Nonlinear Anal. **68** (8) (2008), 2250-2260.

[9] DIAGANA, T. - *Existence of weighted pseudo almost periodic solutions to some classes of hyperbolic evolution equations*, J. Math. Anal. Appl. **350** (2009), 18-28.

[10] ZHANG, C. - , Pseudo Almost Periodic Functions and Their Applications, Ph. D. Thesis, The University of Western Ontario, 1992.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

BOUND STATE SOLUTIONS FOR DEGENERATE SINGULAR PERTURBATION PROBLEMS WITH SIGN-CHANGING POTENTIALS

M. J. ALVES * R. B. ASSUNÇÃO † P. C. CARRIÃO ‡ & O. H. MIYAGAKI §

This work is concerned with the study of the degenerate singular perturbation problems

$$-\varepsilon^2\mathrm{div}(|\mathrm{x}|^{-2\mathrm{a}}\nabla\mathrm{u}) + |\mathrm{x}|^{-2(\mathrm{a}+1-\mathrm{c})}\mathrm{V}(\mathrm{x})\mathrm{u} \quad = |x|^{-b2^*(a,b)}g(x,u), \tag{0.1}$$

for small $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, and

$$-\mathrm{div}(|\mathrm{x}|^{-2\mathrm{a}}\nabla\mathrm{u}) + \lambda|\mathrm{x}|^{-2(\mathrm{a}+1-\mathrm{c})}\mathrm{V}(\mathrm{x})\mathrm{u} \quad = |x|^{-b2^*(a,b)}g(x,u), \tag{0.2}$$

for large $\lambda \in \mathbb{R}^+$. We consider the case where $x \in \mathbb{R}^N$ and we search for decaying solutions, that is, solutions such that $u(x) \to 0$ as $|x| \to +\infty$. The other parameters are such that

$$0 \leqslant a < (N-2)/2, \qquad a \leqslant b < a+1, \qquad c = 0. \tag{0.3}$$

Additionally, we define $2^*(a,b) \equiv 2N/[N-2(a+1-b)]$ and $2^* = 2^*(a,a) \equiv 2N/(N-2)$. We are mainly interested in a superlinear, critical nonlinearity g and in a sign-changing potential V.

These type of problems come from the study of standing waves in anisotropic Schrödinger equation. The transition from quantum mechanics to classical mechanics can be formally realised by letting $\varepsilon \to 0$; therefore, the existence of solutions for ε small is of physical interest. Aside from being one of the main objects of quantum physics, the Schrödinger equation also appears in problems of nonlinear optics, in plasma physics, and in condensed matter physics, where one simulates the interaction effect among many particles through a nonlinear term. Moreover, several physical phenomena related to equilibrium of anisotropic continuous media that possibly are “perfect” insulators can be modeled by this type of elliptic problem, where it is allowed for the coefficient of the operator to be unbounded.

In the case $V(x) \equiv 1$, $g(x,u) \equiv |u|^{2^*(a,b)-2}u$, $c = 0$, and where at least one of the parameters a or b is different from zero, the first and the second problems are closely related. In fact, when $\varepsilon^2 = \lambda^{-1}$, then u is a solution to the second problem if and only if $v(x) = \lambda^{-1/(2^*(a,b)-2)}u(x)$ is a solution to the first problem. Hence, as far as the existence and the number of solutions are concerned, both problems are equivalent. However, for more general perturbations g this is no longer true.

Inspired by Ding and Szulkin in [2], we prove results of existence of bound state solutions to the case of degenerate, singular, semilinear elliptic problems. We look for solutions to both problems in the space $\mathcal{D}_a^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Additionaly, in the case where the nonlinearity $g(x,u)$ is an odd function of u, we obtain infinitely many geometrically distinct solutions.

Now we state our hypotheses. We set $G(x,u) \equiv \displaystyle\int_0^u g(x,s)\,\mathrm{d}s$ and $\widetilde{G}(x,u) \equiv \dfrac{g(x,u)u}{2} - G(x,u)$ and we assume the following conditions on the potential V and on the perturbation g.

(V_1) $V \in C(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ and V is bounded from below.

(V_2) There exists $b > 0$ such that the set $\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) < b\}$ is non-empty and has finite measure.

*Departamento de Matemática, UFMG, MG, Brasil, mariajose@mat.ufmg.br.
†Departamento de Matemática, UFMG, MG, Brasil, ronaldo@mat.ufmg.br.
‡Departamento de Matemática, UFMG, MG, Brasil, carrion@mat.ufmg.br.
§Departamento de Matemática, UFJF, MG, Brasil, ohmiyagaki@gmail.com.

(g_1) $g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $G(x,u) \geqslant 0$ for all (x,u) and $g(x,u) = o(u)$ uniformly in x as $u \to 0$.

(g_2) $\dfrac{G(x,u)}{u^2} \to +\infty$ uniformly in x as $|u| \to +\infty$.

(g_3) $\widetilde{G}(x,u) > 0$ whenever $u \neq 0$.

(g_4) $|g(x,u)|^\tau \leqslant a_1 \widetilde{G}(x,u)|u|^\tau$ for some $a_1 > 0$, $\tau > \max\{1, N/2\}$, and for all (x,u) with $|u|$ large enough.

The main results of our work can be stated as follows.

Teorema 0.1. *Suppose that assumptions (V_1), (V_2), and (g_1) to (g_4) are verified and that $V^{-1}(0)$ has a nonempty and bounded interior Ω. Suppose that conditions on the parameters a, b, and c are also verified.*

1. *If $G(x,u) \geqslant a_0|u|^\delta$ for some $a_0 > 0$, for some $2 < \delta < 2^*$ and for all $|u|$ small enough, then there exists $\varepsilon_0 > 0$ such that the first problem has at least one nontrivial solution whenever $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Moreover, if g is odd in u, then for each $k \geqslant 1$ there exists $\varepsilon_k > 0$ such that the first problem has at least k pairs of nontrivial solutions whenever $\varepsilon \in (0, \varepsilon_k)$.*

2. *There exists $\Lambda_0 > 0$ such that the second problem has at least one nontrivial solution whenever $\lambda > \Lambda_0$. Moreover, if g is odd in u, then for each $k \geqslant 1$ there exists $\Lambda_k > 0$ such that the secondproblem has at least k pairs of nontrivial solutions whenever $\lambda > \Lambda_k$.*

Teorema 0.2. *Suppose that assumptions (V_1), (V_2), and (g_1) to (g_4) are verified. Suppose that conditions on the parameters a, b, and c are also verified.*

1. *If $V(x) < 0$ for some x and $G(x,u) \geqslant a_0|u|^\delta$ for some $a_0 > 0$, for some $2 < \delta < 2^*$ and for all $|u|$ small enough, then there exists a sequence $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ with $\varepsilon_k \to 0$ such that the first problem has a nontrivial solution for each $\varepsilon = \varepsilon_k$.*

2. *If $V(x) < 0$ for some x, then there exists a sequence $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ with $\lambda_k \to +\infty$ such that the secondproblem has a nontrivial solution for each $\lambda = \lambda_k$.*

References

[1] Alves, M. J., Assunção, R. B., Carrião, P. C., Miyagaki, O. H., *Bound state solutions for degenerate singular perturbation problems with sign-changing potentials.* Preprint.

[2] Ding, Y. H., Szulkin, A., *Bound states for semilinear Schrödinger equations with sign-changing potential.* Calc. Var. Partial Differential Equations 29 (2007), no. 3, 397–419.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

SOBRE ESTABILIDADE PARA MISTURAS

Margareth S. Alves * & Octavio V. Villagran †

Neste trabalho, investigamos a estabilidade do semigrupo associado a um sistema que modela misturas binárias com porosidades. Nosso principal objetivo é obter condições que garantam a analiticidade e a falta de estabilidade exponencial do semigrupo associado ao sistema

$$\begin{aligned}
&\rho_1\, u_{tt} - a_{11}\Delta u - a_{12}\,\Delta w - b_{11}\,\Delta u_t - b_{12}\,\Delta w_t + \alpha\,(u-w) + \alpha_1\,(u_t - w_t) - k_1\Delta\theta - \beta_1\,\theta = 0 \quad \text{em} \quad Q,\\
&\rho_2\, w_{tt} - a_{21}\,\Delta u - a_{22}\,\Delta w - b_{21}\,\Delta u_t - b_{22}\,\Delta w_t - \alpha\,(u-w) - \alpha_1\,(u_t - w_t) - k_2\Delta\theta - \beta_2\,\theta = 0 \quad \text{em} \quad Q,\\
&c\,\theta_t - \kappa\,\Delta\theta + k_1\Delta u_t + k_2\Delta w_t + \beta_1\,u_t + \beta_2\,w_t = 0 \quad \text{em} \quad Q,
\end{aligned} \tag{0.1}$$

$Q = \Omega\times]0,\infty[$, em que Ω é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira regular, $n \geq 1$, u (respectivamente, w) é o volume fracional de uma das constituintes da mistura, θ é a temperatura. A descrição deste modelo pode ser encontrada em Ieşan e Quintanilla [4] ou Ieşan e Nappa [5]. Assumimos que ρ_1, ρ_2, c, κ, α e α_1 são constantes positivas e $\left(\beta_1^2+\beta_2^2\right)\left(k_1^2+k_2^2\right) \neq 0$. As matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij}) \neq 0$ são simétricas e satisfazem a

$$a_{11} > 0, \qquad a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2 > 0, \quad b_{11} \geq 0, \qquad b_{11}\,b_{22} - b_{12}^2 \geq 0.$$

Estudamos (0.1) com as condições iniciais

$$u(x,\,0) = u_0,\; u_t(x,\,0) = u_1,\; w(x,\,0) = w_0,\; w_t(x,\,0) = w_1,\; \theta(x,\,0) = \theta_0 \text{ em } \Omega \tag{0.2}$$

e as condições de fronteira

$$u(x,\,t) = u(x,\,t) = w(x,\,t) = w(x,\,t) = \theta(x,\,t) = \theta(x,\,t) = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \tag{0.3}$$

1 Resultados Alcançados

Considere o espaço de Hilbert $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ munido do produto interno

$$\begin{aligned}
\langle (u_1, w_1, v_1, \eta_1, \theta_1),\, (u_2,\, w_2,\, v_2,\, \eta_2, \theta_2)\rangle_{\mathcal{H}} = & \int_\Omega a_{11}\nabla u_1 \overline{\nabla u_2}dx + \int_\Omega a_{22}\nabla w_1\overline{\nabla w_2}dx\\
&+\int_\Omega a_{12}(u_1\overline{w}_2 + w_1\overline{u}_2)dx + \alpha\int_\Omega (u_1-w_1)(\overline{u_2-w_2})dx\\
&+\rho_1\int_\Omega v_1\overline{v_2}dx + \rho_2\int_\Omega \eta_1\overline{\eta_2}dx + c\int_\Omega \theta_1\overline{\theta_2}dx.
\end{aligned}$$

e norma $\|.\|_{\mathcal{H}}$. O problema misto (0.1)-(0.3) pode ser reduzido ao seguinte problema de Cauchy

$$\frac{d}{dt}U(t) = \mathcal{A}U(t), \qquad U(0) = U_0, \quad \forall\, t > 0$$

em que $U(t) = (u,\,w,\,u_t,\,w_t,\,\theta)'$, $U_0 = (u_0,\,w_0,\,u_1,\,w_1,\,\theta_0)'$ e o operador linear $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é dado por

$$A\begin{pmatrix} u\\ w\\ v\\ \eta\\ \theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\\ \eta\\ \frac{1}{\rho_1}\Delta\left(a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta\right) - \frac{\alpha}{\rho_1}(u-w) - \frac{\alpha_1}{\rho_2}(v-\eta) + \frac{\beta_1}{\rho_1}\theta\\ \frac{1}{\rho_2}\Delta\left(a_{12}u + a_{22}w + b_{12}v + b_{22}\eta + k_2\theta\right) + \frac{\alpha}{\rho_1}(u-w) + \frac{\alpha_1}{\rho_2}(v-\eta) + \frac{\beta_2}{\rho_2}\theta\\ \frac{1}{c}\Delta\left(\kappa\theta - k_1 v - k_2\eta\right) - \frac{\beta_1}{c}v - \frac{\beta_2}{c}\end{pmatrix},$$

*Departamento de Matemática ,UFV, MG, Brasil, malves@ufv.br
†Departamento de Matemática, Universidad del Bío-Bío, Chile, e-mail: overa@ubiobio.cl

$D(\mathcal{A})$ é o subespaço de $\mathcal{H}$ constituído dos vetores (u, v, w, η, θ) tais que $v,\ \eta,\ \theta \in H_0^1(\Omega)$, $\kappa\theta + k_1 v + k_2\eta \in H^2(\Omega)$, $a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + c_1\theta \in H^2(\Omega)$ e $a_{12}u + a_{22}w + b_{12}v + b_{22}\eta + c_2\theta \in H^2(\Omega)$.

Segue, usando o Teorema de Lumer - Phillips, que o operador $\mathcal{A}$ genera um C_0-semigrupo de contrações, $S_{\mathcal{A}}(t)$, no espaço $\mathcal{H}$.

Na demonstaração dos resultados abaixo, usamos resultados sobre estabilidade exponencial e analiciticidade de C_0-semigrupos de contração em espaços de Hilbert que podem ser encontrados no livro de Liu e Zheng [6]. Estamos denotando por C_P a constante de Poincaré.

Lema 1.1. *Suponha que um dos itens abaixo seja válido.*

(a) B *é definida positiva;*

(b) B *é definida não-negativa e*

- $(b.1)$ $b_{12} \neq -b_{11}$ *ou* $b_{12} \neq -b_{22}$*;*
- $(b.2)$ $b_{12} = -b_{11} = -b_{22}$, $\beta_1 = -\beta_2$ *e* $k_1 \neq -k_2$*;*
- $(b.3)$ $b_{12} = -b_{11} = -b_{22}$, $\rho_2\,(a_{11} + a_{12}) \neq \rho_1\,(a_{12} + a_{22})$*;*
- $(b.4)$ $b_{12} = -b_{11} = -b_{22}$, $\beta_1 = \varrho\, k_1$, $\beta_2 = \varrho\, k_2, \varrho \neq 0$ *e* $\varrho < \frac{1}{C_P}$, *e* $k_1 \neq -k_2$.

Então $i\mathbb{R} \subset \rho\,(\mathcal{A})$.

Teorema 1.1. *Suponha que a matriz* B *seja definida não-negativa e que* $b_{12} \neq -b_{11}$ *ou* $b_{12} \neq -b_{22}$*. Então o semigrupo* $S_{\mathcal{A}}(t)$ *é exponencialmente estável, ou seja, existem constantes positivas* M *e* μ *tais que*

$$\|S_{\mathcal{A}}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq M \exp(-\,\mu\, t).$$

Se B é uma matriz definida positiva temos que o semigrupo $S_{\mathcal{A}}(t)$ é analítico. Além disso, temos:

Teorema 1.2. *Suponha que* B *é definida não negativa e somente um dos itens abaixo é válido.*

(a) $(b_{12} \neq -b_{11}$ *or* $b_{12} \neq -b_{22})$ *and* $(b_{11}k_2 \neq b_{12}k_1$ *or* $b_{12}k_2 \neq b_{22}k_1)$*;*

(b) $b_{12} = -b_{11} = -b_{22}$

- $(b.1)$ $\beta_1 = -\beta_2$ *and* $k_1 \neq -k_2$*;*
- $(b.2)$ $(\beta_1, \beta_2) = -\varrho\,(k_1, k_2)$, $\varrho > 0$, *and* $k_1 \neq -k_2$,
- $(b.3)$ $\rho_2\,(a_{11} + a_{12}) \neq \rho_1\,(a_{12} + a_{22})$ *and* $k_2 \neq -k_1$.

Então o semigrupo $S_{\mathcal{A}}(t)$ *é analítico.*

Teorema 1.3. *Suponha que* $b_{11} = b_{22} = -b_{12}$ *e* $\rho_2(a_{11} + a_{12}) = (a_{22} + a_{12})\rho_1$*. Além disso, assuma que*

(a) $\beta_1 = -\beta_2$ *e* $k_1 = -k_2$ *ou* (b) $\beta_1 \neq -\beta_2$ *e* $k_1 = -k_2$.

Então $S_{\mathcal{A}}(t)$ *não é exponentialmente estável.*

Referências

[1] Alves, M. S., Muñoz Rivera, J. E., Quintanilla, R.- Exponential decay in a thermoelastic mixture of solids.*Int. J. Solids Struct.*, **46**, 1659 - 1666, 2009.

[2] Alves, M. S., Muñoz Rivera, J. E., Sepúlveda, M. and Villagrán, O. V- Exponential stability in thermoviscoelastic mixtures of solids. *Int. J. Solids Struct.*, **46**, 4151 - 4162, 2009

[3] Alves, M. S., Muñoz Rivera, J. E., Sepúlveda, M. and Villagrán, O. V - Analyticity of semigroups associated with thermoviscoelastic mixtures of solids. *Journal of Thermal Stresses*, **32**, 986 - 1004, 2009.

[4] Ieşan, D., Quintanilla, R. - A theory of porous thermoviscoelastic mixtures.*J. Thermal Stresses*, **30**, 693-714, 2007.

[5] Ieşan, D., Nappa, L. - On the theory of viscoelastic mixtures and stability. *Mathematics and Mechanics of Solids* **13**, 55-80, 2008.

[6] Liu, Z., Zheng, S.- *Semigroups associated with dissipative systems.* CRC Research Notes in Mathematics 398. Chapman & Hall, 1999.

[7] Prüss, J.- On the spectrum of C_0-semigroups. *Trans. of Am. Math. Soc.*, **284(2)**, 847-857, 1984.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

Nonlinear Wave Equations with Acoustic Boundary Conditions

G. O. ANTUNES* M. D. G. DA SILVA† C. L. FROTA‡ & L. A. MEDEIROS§

Let us consider Ω be an open, bounded and connect set of $\mathbb{R}^n$ with smooth boundary denoted by Γ. Suppose $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ where Γ_0 is a measurable subset of Γ such that $meas\,(\Gamma_0) > 0$ and $\Gamma_1 = \Gamma - \Gamma_0$. By $Q = \Omega \times (0,T)$, for $T > 0$ a real number, we denote a cylinder of $\mathbb{R}^{n+1}$ with lateral boundary $\Sigma = \Gamma \times (0,T) = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$, being $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0,T)$ and $\Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0,T)$.

We shall study the existence and uniqueness of solutions to the initial boundary value problem

$$\left|\begin{array}{ll} u'' - \Delta u + |u|^\rho + \beta u' = 0 & \text{in } Q \\ u = 0 & \text{on } \Sigma_0 \\ \alpha u' + f\delta'' + g\delta' + h\delta = 0 & \text{on } \Sigma_1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} - \delta' = 0 & \text{on } \Sigma_1 \\ u\,(x,0) = u_0\,(x)\,, \quad u'\,(x,0) = u_1\,(x) & \text{in } \Omega \\ \delta\,(x,0) = \delta_0\,(x)\,, \quad \delta'\,(x,0) = \delta_1\,(x) & \text{on } \Gamma, \end{array}\right. \tag{1}$$

where the derivatives are in the sense of the theory of distributions, Δ represents the usual Laplace operator in $\mathbb{R}^n$, α and β are positive real constants, ν denotes the unit outward normal, $1 < \rho \leq \dfrac{n}{n-2}$ for $n \geq 3$, f, g and h are real valued functions of class C^0 in $x \in \overline{\Gamma}$ satisfying

$$0 < f_1 \leq f\,(x)\,, \quad 0 < g_1 \leq g\,(x) \text{ and } 0 < h_1 \leq h\,(x)\,.$$

The boundary conditions in $(1)_3$ and $(1)_4$ are called acoustic boundary conditions and were proposed by [1] in a study of the linear wave equation. Physically the idea is that each boundary point acts as a spring. Problems involving locally reacting boundaries were studied by [2], [3], [4], [5] and others.

In the study of the problem (1) we consider the functional space V defined by

$$V = \left\{v \in H^1\,(\Omega)\,;\ \gamma_0\,(v) = 0 \text{ a.e. on } \Gamma_0\right\},$$

where $\gamma_0 : H^1\,(\Omega) \longrightarrow H^{1/2}\,(\Gamma)$ is the trace map of order zero of v. We call attention that V is a closed subspace of $H^1\,(\Omega)$ and the norm

$$\|u\|_V = \left(\sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\right)^{1/2}$$

is equivalent to the usual norm from $H^1\,(\Omega)$. The symbols $(\cdot,\cdot)\,,\ (\cdot,\cdot)_\Gamma\,,\ |\cdot|^2$ and $|\cdot|_\Gamma^2$ denote the inner products and norms of the Hilbert spaces $L^2\,(\Omega)$ and $L^2\,(\Gamma)$, respectively.

The nonlinearity $|u|^\rho$ brings troubles in the process of calculus of a priori estimates because we get, in certain point of the our proof, a term of the type

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{2}{\rho+1}\int_\Omega |u|^\rho\,u dx$$

which one cannot control the sign. We overcome this difficulty by employing an argument of Tartar [7].

*Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, RJ, Brasil, gladson.antunes@uniriotec.br
†Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM, RJ, Brasil, darci@im.ufrj.br
‡Universidade Estadual de Maringá, PR, Brasil, clfrota@uem.br
§Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM, RJ, Brasil, luizadauto@gmail.com

1 Mathematical Result

The main result is contained in the following Theorem:

Theorem 1.1. *Given* $u_0 \in V \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in V$, $\delta_0, \delta_1 \in L^2(\Gamma)$. *Set*

$$\gamma = \alpha |u_1|^2 + \alpha \|u_0\|^2 + \frac{2\alpha}{\rho+1} \int_\Omega |u_0|^\rho u_0 dx + \left|\sqrt{f}\delta_1\right|_\Gamma^2 + \left|\sqrt{h}\delta_0\right|_\Gamma^2,$$

and suppose

$$\gamma < \alpha \left(\frac{1}{2C_0^2}\right)^{\frac{\rho+1}{\rho-1}},$$

where C_0 *is the constant of embedding of* V *in* $L^{\rho+1}(\Omega)$, $1 < \rho \leq \dfrac{n}{n-2}$ $n \geq 3$. *Then there exists* u *in the class*

$$\begin{aligned} & u \in L^\infty(0,T;V), \; u' \in L^\infty(0,T;V), \; u'' \in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \\ & \delta, \; \delta', \; \delta'' \in L^\infty\left(0,T;L^2(\Gamma)\right), \end{aligned}$$

for all $T > 0$, *weak solution of* (1).

References

[1] Beale, J. T., Rosencrans, S. I., *Acoustic boundary conditions,* Bull. Amer. Math. Soc. 80, (1974), pp. 1276 – 1278.

[2] Frota, C. L. & Cousin, A. T. & Larkin, N. A., *On a system of Klein-Gordon type equations with acoustic boundary conditions*, J. Math. Anal. Appl., 293, 293-309, (2004).

[3] Frota, C. L. & Goldstein, J. A., *Some Nonlinear wave equations with acoustic boundary conditions*, J. Differential Equations, 164, 92-109, (2000).

[4] Frota, C. L. & Vicente, A., *A hyperbolic system of Klein Gordon type with acoustic boundary conditions*, Int. J. Pure Appl. Math., 47, n. 2, 185-198, (2008).

[5] Límaco, J., Clark, H., Frota, C. L., Medeiros, L.A., *On an Evolution Equation with Acoustic Boundary Conditions*, (to appear)

[6] Medeiros, L .A. , Miranda, M .M., *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais,* Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, (1983)

[7] Tartar, L., Topics in Nonlinear Analysis, Publications Math. D'Orsay, Universit Paris - Sud, Orsay, (1979).

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$\underline{o}$ 4 Novembro 2010

EXISTENCE OF GLOBAL SOLUTIONS OF NONLINEAR WAVE EQUATION WITH THERMO-ELASTIC COUPLING

RICARDO F. APOLAYA * & MANUEL M. MIRANDA † & RAUL M. IZAGUIRRE ‡

In this present work, the authors prove the existence of global solutions of nonlinear wave equation with thermo-elastic coupling give by the system of equation:

$$u''(x,t) - \mu(t)\Delta u(x,t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \theta}{\partial x_i}(x,t) + F\left(u(x,t)\right) = 0 \text{ in } Q = \Omega \times (0,\infty)$$

$$\theta'(x,t) - \Delta\theta(x,t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u'}{\partial x_i}(x,t) = 0 \text{ in } Q = \Omega \times (0,\infty),$$

where u is displacement, θ is absolute temperature, Δ denotes the Laplace operator, μ is a positive real function of t, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous function such that $s \cdot F(s) \geq 0$, Ω is a smooth bounded open set in $\mathbb{R}^n$ with boundary Γ.

The non linearity $F(v) = |v|^\rho\, v$ usually appears in relativistic quantum mechanic (see Segal [12] or Schiff [11]), and has been considered by various authors for hyperbolic, parabolic and elliptic equations. Lions [5] studied the wave equation with the same non linearity, i.e., $|v|^\rho\, v$, in a smooth bounded open domain Ω of $\mathbb{R}^n$ and proved existence and uniqueness of solution using both Faedo-Galerkin's and Compactnesss' methods.
In [1] investigated the system coupling with $F(v) = |v|^\rho\, v$. They established global existence and strong and weak solutions by Faedo-Galerkin's method using a basis of the space $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.
Based in the theory developed in the paper [1] , [9] and [14] Strauss approximations of F, we will prove that the system coupling has a unique global weak solution.

1 Existence of Global Solutions

Teorema 1.1. *Let $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, be continuous such that $s \cdot F(s) \geq 0$. Consider*

$$G(s) = \int_0^s F(\sigma)\, d\sigma$$

Given

$$u_0, \theta_0 \in H_0^1(\Omega), \quad G(u_0) \in L^1(\Omega) \text{ and } u_1 \in L^2(\Omega)$$

there exists $\{u, \theta\} : Q \to \mathbb{R}$ such that:

$$u, \theta \in L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega))$$

$$u' \in L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega)), \quad \theta' \in L^2(0,\infty; L^2(\Omega))$$

and $\{u, \theta\}$ satisfies the equations

$$u''(x,t) - \mu(t)\Delta u(x,t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \theta}{\partial x_i}(x,t) + \gamma F\left(u(x,t)\right) = 0 \quad in\ L^\infty_{loc}(0,\infty, L^2(\Omega))$$

*Instituto de Matemática , UFF, RJ, Brasil, ricardof16@yahoo.com.br
†Instituto de Matemática , UFRJ, RJ, Brasil, milla@im.ufrj.br
‡Facultad de Ciencias Matemáticas , UNMSM, Lima, Perú, raul_izaguirre2222@yahoo.es

$$\theta'(x,t) - \Delta\theta(x,t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u'}{\partial x_i}(x,t) = 0 \ \ in\ L^{\infty}_{loc}(0,\infty, L^2(\Omega))$$

and the initial conditions

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad \theta(0) = \theta_0$$

Referências

[1] APOLAYA R. F., CLARK H. R. AND FEITOSA A. - On a nonlinear coupled system with internal damping. *Electronic Journal of Differential Equations, Volume 2000*, **64**,1-17, 2000..

[2] BREZIS H. AND CAZENAVE T., it Non Linear Evolution Equations, Lecture Notes at. Instituto de Matemática, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1994

[3] CLARK H. R., JUTUCA SAN GIL L. P. AND MILLA MIRANDA M. - On a mixed problem for a linear coupled system with variable coefficients.*Electronic Journal of Differential Equations, Volume 1* **04**, 1-20, 1998.

[4] LADYZHENSKAIA O. A. AND VISIK M. I. - Boundary value problems for partial differential equations and certain classes of operator equations. *A. M. S. Translations Series 2* **10**, 223-281, 1958.

[5] LIONS, J.L.*Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéares*, Dunod-Gauthier Villars, Paris, First edition, 1969.

[6] LIONS, J.L. AND MAGENES, E. *Non-homogeneous boundary value problems and applications*, Vols. 1, Springer-Verlag, New York, 1972.

[7] MEDEIROS L. A. AND MILLA MIRANDA M. - On a boundary value problem for wave equations: Existence, uniquenesse-asymptotic behavior,*Revista de Matemáticas Aplicadas, Universidad de Chile,* **17**, 47-73, 1996.

[8] MEDEIROS L. A. AND MILLA MIRANDA M. *Espaço de Sobolev - Iniciação aos problemas elípticos não homogêneos.* Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, First Edition, (1977).

[9] MILLA MIRANDA M. AND MEDEIROS L. A., - Hidden regularity for Semilinear Hyperbolic Partial Differential Equations, *An. Fac. des Sciences de Tolouse, Volume IX* **01**, 103-120, 1988..

[10] NIRENBERG I.,- Remarks on strongly elliptic partial differential equations. . *Comm. Pure Applied Math.,* **08**, 648-674, 1977.

[11] SCHIFF L. I., *Non linear meson theory of nuclear forces*, I. Physic. Rev., **84**, 1-9, 1951.

[12] SEGAL I. E., - The global Cauchy problem for a relativistic scalar field with power interaction,*Bull. Soc. Math., France* **91**, 129-135, 1963 .

[13] SOBOLEV S. I., *Applications de analyse functionnelle aux équations de la physique mathématique* , Lêningrad, 1950.

[14] STRAUSS W. A., - On weak solutions of semilinear hyperbolic equations, *An. Acad. Bras. Ciências Volume 42,* **04**, 645-651, 1950.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

MICROPOLAR FLUID WITH VARIABLE VISCOSITY

F. D. ARARUNA * M. A. F. ARAÚJO † & G. M. DE ARAÚJO ‡

1 Introduction

We are interested in the motion of a non-homogeneous viscous incompressible asymmetric fluid with variable Newtonian viscosity. The governing equations with boundary and initial conditions are the following:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t - (\mu_r + \mu_0 + \mu_1 \|\mathbf{u}\|^2)\Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{u} + \nabla p = 2\mu_r \nabla \times \mathbf{w} + \mathbf{f} & \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \\ \mathbf{w}_t - \widehat{c}\Delta \mathbf{w} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w} - \overline{c}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{w}) = 2\mu_r \nabla \times \mathbf{u} + \mathbf{g} & \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \\ \mathbf{u} = \mathbf{w} = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ \mathbf{u}(\cdot,0) = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{w}(\cdot,0) = \mathbf{w}_0 & \text{in} \quad \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

where $\widehat{c} = c_a + c_d$ and $\overline{c} = c_0 + c_d - c_a$.

In (1.1), $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \leq 3)$ is a bounded open set whose boundary Γ is regular enough and $T > 0$. The unknowns $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ and p are, respectively, for the velocity field, the angular velocity of rotation of the fluid particles and the pressure distribution. The positive constants μ_0, μ_1, μ_r , c_0 , c_a and c_d are related with viscosity properties of the fluid, and satisfy $c_0 + c_d > c_a$. The symbol $\|\cdot\|$ is a norm in a space which will be defined later. Spaces of $\mathbb{R}^3$-valued functions, as well as their elements, are represented by bold-face letters.

For the model derivation (with $\mu_1 = 0$) and related physical discussion, see Condiff and Dalher [2] and Lukaszewicz [7]. Concerning applications, the micropolar fluid model has been used, for example, in the behavior of liquid crystals, polymeric fluids and blood in thin vessels (see [1], [4], [9] and the references). We observe that (1.1) includes as particular case the classical Navier-Stokes equations, which have been widely studied (see, for instance, Ladyzhenskaya [6] or Temam [12], and the references therein). A good referencee for the mathematical aspects of (1.1) is [7]. This book contains important existence and uniqueness results. In [10] the existence of strong solution is proved using the Galerkin method, and in [8] the regularity results for weak solutions.

In the context of Navier-Stokes equations, Ladyzhenskaya in [2] was the first to propose the study of this problem with viscosity depending on velocity $\mathbf{u}$. When the viscosity is of the form in $(1.1)_1$, with $\mu_1 > 0$, Lions in [5] showed existence for $n \leq 4$ and uniqueness for $n \leq 3$.

In this paper we study the existence of weak solutions of the problem (1.1) with $n \leq 4$. We also are interested in the study of the time-periodic solutions for this system.

Let us consider the following vector spaces usual in the context of incompressible fluids:

$$\mathbf{V} = \{\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega);\ \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} = 0 \text{ in } \Omega\}$$

and

$$\mathbf{H} = \{\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{L}^2(\Omega);\ \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} = 0 \text{ in } \Omega,\ \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ on } \Gamma\},$$

equipped with scalar product and norms given by $((\cdot,\cdot))$, $\|\cdot\|$ and $(\cdot,\cdot)$, $|\cdot|$, respectively.

Our main results are formulated as follows.

Theorem 1.1. *If* $\mathbf{f} \in L^{4/3}(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega))$, $\mathbf{g} \in L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega))$, $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}$ *and* $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, *then problem (1.1) has a weak solution.*

*UFPB, DM, João Pessoa - PB, Brasil, fagner@mat.ufpb.br
†UFMA, DME, São Luís - Ma, Brasil, marcosttte@gmail.com
‡UFPA, DM, Belém - Pa, Brasil, gera@ufpa.br

Theorem 1.2. *Under the assumptions of Theorem 1.1, there exists a solution* $\{u, w\}$ *of (1.1) such that* $u(0) = u(T),\ w(0) = w(T)$.

To prove Theorem 1.1 we use essentially Galerkin method combined with monotony and compactness methods. To prove Theorem 1.2 we apply the Brower fixed point theorem.

References

[1] ARIMAN, T. AND TURK, M. - *On steady and pulsatile flow of blood*, J. Appl. Mech., 41 (1974), 1-7.

[2] CONDIFF, D. W. AND DAHLER, J. S. - *Fluid mechanics aspects of antisymmetric stress*, Phys. Fluids, 11 (1964), 842-854.

[3] DUPUY, D., PANASENKO, G. P. AND STAVRE, R. - *Asymptotic methods for micropolar fluids in a tube structure*, Math. Models Methods Appl. Sci., 14 (5) (2004), 735-758.

[4] GUILLÉN-GONZÁLEZ, F., ROJAS-MEDAR, M. A. AND RODRÍGUEZ-BELLIDO, M. A. - *Sufficient conditions for regularity and uniqueness of a 3D nematic liquid crystal model*, Math. Nachr., 282 (6) (2009), 846-867.

[5] LIONS, J.-L. - *Quelques Méthodes de Resolution Des Problémes Aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[6] LADYZHENSKAYA, O. A. - *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gordon and Breach-London (Second Edition), 1989.

[7] LUKASZEWICZ, G. - *Micropolar fluids, Theory and applications, Modeling and Simulation in Science*, Engineering and Technology, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1999.

[8] ORTEGA-TORRES, E. AND ROJAS-MEDAR, M. A. - *On the regularity for solutions of the micropolar fluid equations*, In press Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.

[9] POPEL, A. S., REGIRER, S. A., USICK, P. I. - *A continuum model of blood flow*, Biorheology, 11 (1974), 427-437.

[10] ROJAS-MEDAR, M. A. - *Magneto-micropolar fluid motion: existence and uniqueness of strong solution*, Math. Nachr., 188 (1997), 301-319.

[11] STAVRE, R. - *The control of the pressure for a micropolar fluid*, Dedicated to Eugen Sos, Z. Angew. Math. Phys., 53 (6) (2002), 912-922.

[12] TEMAM, R. - *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, North - Holland (2^{nd} Revised Edition), Amsterdam, 1979.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

ON A CONTROL RESULT FOR THE SEMI-GALERKIN APPROXIMATIONS OF A BOUSSINESQ SYSTEM

F. D. ARARUNA [*] J. L. BOLDRINI [†] & M. A. ROJAS-MEDAR [‡]

Consider the following controlled version of a nonlinear Boussinesq system usually used to model thermally driven flow of a fluid contained in Ω:

$$\left|\begin{array}{lll} \mathbf{u}_t - \Delta\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \nabla p = \theta\mathbf{g} + \mathbf{v}1_{\mathcal{O}} & \text{in} & \Omega\times(0,T), \\ \theta_t - \Delta\theta + \mathbf{u}\cdot\nabla\theta = w1_{\mathcal{O}} & \text{in} & \Omega\times(0,T), \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 & \text{in} & \Omega\times(0,T), \\ \mathbf{u} = 0, \quad \theta = 0 & \text{on} & \Gamma\times(0,T), \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \theta(0) = \theta^0 & \text{in} & \Omega. \end{array}\right. \tag{0.1}$$

Here, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ is a bounded open set whose boundary Γ is regular enough and $T > 0$. The unknowns $\mathbf{u}$, θ and p denote, respectively, the velocity of the fluid, the temperature and the hydrostatic pressure. The function $\mathbf{g}$ is the external force by unit of mass. The subset $\mathcal{O} \subset \Omega$ is the control domain, which is supposed to be as small as desired, and $\mathbf{v}$ and w stand for control functions which act over the system. Spaces of $\mathbb{R}^3$-valued functions, as well as their elements, are represented by bold-face letters.

Due to the dissipative and nonreversible properties of this system, it is clear that one cannot expect such exact controllability for this Boussinesq model for arbitrary target states, in the same way as in the case of the Navier-Stokes equations.

In fact, in the context of the Navier-Stokes equations only partial results are known. Local exact controllability to uncontrolled trajectories was considered in Fursikov-Imanuvilov [4], Imanuvilov [5] and Fernández-Cara et al. [3]. Concerning this kind of controllability results for other fluid models, much fewer results are known; we can mention the local exact controllability to trajectories for micropolar fluids obtained by Fernández-Cara and Guerrero in [2].

On the other hand, Lions and Zuazua considered in [6] the same sort of controllability issue, but for finite-dimensional Galerkin approximations of the Navier-Stokes system; they were able proved that such approximate systems are exactly controllable. The same sort of result was proved for the Galerkin approximations of the micropolar fluid equations by Araruna, Chaves-Silva and Rojas-Medar in [1].

The present paper is interested in controllability questions related to the ones in [6] (see also [1]), but now for a semi-Galerkin approximation for the Boussinesq system (0.1). Here, we just say that, roughly speaking, to get the semi-Galerkin approximations we will suitably discretize the equation for the velocity in (0.1) but will keep the equation for the temperature as it is. That is why we will be able to prove exact controllability for the discretized velocity, but just approximate controllability for the temperature.

We remark that the present results can be viewed as an improvement of the result in [1] in the sense that there the authors consider Galerkin approximations of the micropolar fluid system; that is, they discretize both the translation velocity and the microrotational velocity equations to obtain their results; however, the present techniques could also be applied to a semi-Galerkin approximation of such micropolar fluid system, in which only the translation velocity equation discretized, and exact-approximate controllability could be achieved as well.

The following vector spaces, usual in the context of incompressible fluids, will be used along the paper:

$$\mathbf{V} = \{\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega);\ \nabla\cdot\boldsymbol{\varphi} = 0 \text{ in } \Omega\}$$

[*] UFPB, DM, João Pessoa - PB, Brasil, fagner@mat.ufpb.br
[†] UNICAMP, IMECC, Campinas - SP, Brasil, boldrini@ime.unicamp.br
[‡] Universidad del Bío Bío, Departamento de Ciencias Básicas, Chillán, Chile, marko@ueubiobio.cl

and

$$\mathbf{H} = \{\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{L}^2(\Omega);\ \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} = 0 \text{ in } \Omega,\ \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ on } \Gamma\}$$

Here and in what follows $(\cdot,\cdot)$ and $\|\cdot\|$ denote, respectively the scalar product and the norm in $L^2(\Omega)$ or $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Next, we will describe the semi-Galerkin approximations of (0.1) that we will analyze. For this, let us consider $\{\mathbf{e}_j\}_{j\geq 1}$ a basis of $\mathbf{V}$ such that

$$\{\mathbf{e}_j\}_{j\geq 1} \text{ is linearly independent in } \mathbf{L}^2(\mathcal{O}), \tag{0.2}$$

which existence is guaranteed by an abstract result proved in Lions and Zuazua [7].

Let us fix a natural number N and consider the following finite dimensional subspace of $\mathbf{V}$:

$$E = \text{span } [\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_N]. \tag{0.3}$$

Let us introduce the semi-Galerkin approximation of the variational formulation for (0.1):

$$\left| \begin{array}{l} (\mathbf{u}_t, \mathbf{e}) + (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{e}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{e}) = (\theta \mathbf{g}, \mathbf{e}) + (\mathbf{v} 1_{\mathcal{O}}, \mathbf{e}),\ \forall\, \mathbf{e} \in E, \\ (\theta_t, f) + (\nabla \theta, \nabla f) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \theta, f) = (w 1_{\mathcal{O}}, f),\ \forall f \in H_0^1(\Omega), \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0 \in \mathbf{V}, \quad \theta(0) = \theta^0 \in L^2(\Omega), \end{array} \right. \tag{0.4}$$

where $\mathbf{g} \in \mathbf{L}^\infty(Q)$. The nonlinear system (0.4) has a unique solution $\{\mathbf{u}, \theta\} \in C^0([0,T]; E) \times C^0([0,T]; H_0^1(\Omega))$.

The exact-approximate controllability problem for (0.4) is formulated as follows: given $T > 0$, $\left\{\mathbf{u}^0, \theta^0\right\}$, $\left\{\mathbf{u}^T, \theta^T\right\}$ in $E \times L^2(\Omega)$ and $\epsilon > 0$, to find a pair of controls $\{\mathbf{v}, w\} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{O} \times (0,T)) \times L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$ such that the solution $\{\mathbf{u}, \theta\}$ of (0.4) satisfies

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{u}(T; (\mathbf{v}, w)) = \mathbf{u}^T, \\ \left\| \theta(T; (\mathbf{v}, w)) - \theta^T \right\| < \epsilon. \end{array} \right. \tag{0.5}$$

In other words, we request the exact controllability of the Galerkin's approximation of the velocity and the approximate controllability of the temperature.

The main result is formulated as follows.

Theorem 0.1. *The semi-Galerkin approximation* (0.4) *is exact-approximately controllable in any time* $T > 0$, *in the sense of* (0.5).

Our strategy to obtain the exact-approximate of (0.4) is to combine a similar controllability for an associated linearized system with fixed point arguments.

References

[1] ARARUNA, F. D., CHAVES-SILVA, F. W. AND ROJAS-MEDAR, M. A. - *Exact controllability of Galerkin's approximations of micropolar fluids*, Proc. Amer. Math. Soc., 138 (2010), 1361-1370.

[2] FERNÁNDEZ-CARA, E. AND GUERRERO, S. - *Local exact controllability of micropolar fluids*, J. Math. Fluid. Mech., 9 (2007), 419-453.

[3] FERNÁNDEZ-CARA, E., GUERRERO, S., IMANUVILOV, O. Y. AND PUEL, J.-P. - *Local exact controllability of the Navier-Stokes system*, J. Math. Pures Appl., 83 (12) (2004), 1501-1542.

[4] FURSIKOV, A. V. AND IMANUVILOV, O. Y. - *Controllability of evolution equations*, vol. 34 of Lecture Notes Series, Seoul National University Research Institute of Mathematics Global Analysis Center, Seoul, 1996.

[5] IMANUVILOV, O. Y. - *Remarks on exact controllability for the Navier-Stokes equations*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 6 (2001), 39-72.

[6] LIONS, J.-L. AND ZUAZUA, E. - *Contrôlabilité exacte des approximations de Galerkin des équations de Navier-Stokes*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 234 (1997) , 1015-1021.

[7] LIONS, J.-L. AND ZUAZUA, E. - *On the cost of controlling unstable system: The case of boundary controls*, J. Anal. Math., 73 (1997) , 225-249.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

HOMOGENIZATION IN THIN DOMAINS

JOSÉ M. ARRIETA * & MARCONE C. PEREIRA †

In this work we are interested in analyzing the asymptotic behavior of the solutions of the Neumann problem for the Laplace operator

$$\begin{cases} -\Delta w^\epsilon + w^\epsilon = f^\epsilon & \text{in } R^\epsilon \\ \frac{\partial w^\epsilon}{\partial \nu^\epsilon} = 0 & \text{on } \partial R^\epsilon \end{cases} \tag{0.1}$$

with $f^\epsilon \in L^2(R^\epsilon)$, $\nu^\epsilon = (\nu_1^\epsilon, \nu_2^\epsilon)$ is the unit outward normal to ∂R^ϵ and $\frac{\partial}{\partial \nu^\epsilon}$ is the outside normal derivative. The domain R^ϵ is a thin domain with a highly oscillating boundary which is given by

$$R^\epsilon = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in (0,1), \quad 0 < x_2 < \epsilon\, G_\epsilon(x_1)\}$$

where $G_\epsilon(\cdot)$ is a function satisfying $0 < G_0 \leq G_\epsilon(\cdot) \leq G_1$ for fixed positive constants G_0, G_1 and such that oscillates as the parameter $\epsilon \to 0$. For instance, we may think that the function G_ϵ is of the form $G_\epsilon(x) = a(x) + b(x) g(x/\epsilon^\alpha)$ where $a, b : I \mapsto \mathbb{R}$ are piecewise $\mathcal{C}^1$-functions defined on $I = (0,1)$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is an L-periodic smooth function and $\alpha \geq 0$, see Figure 1. This includes the case where the function $G_\epsilon(\cdot)$ is a purely periodic function, for instance, $G_\epsilon(x) = 2 + \sin(x/\epsilon^\alpha)$, but also includes the case where the function G_ϵ is not periodic and the amplitude is modulated by a function. As a matter of fact, we will be able to treat more general cases, but to stay the general ideas in the introduction we may consider the proptotype function $G_\epsilon(x) = a(x) + b(x) g(x/\epsilon^\alpha)$.

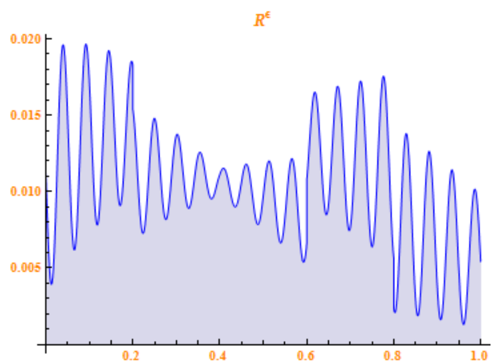

Figura 1: The thin domain R^ϵ

The existence and uniqueness of solutions for problem (0.1) for each $\epsilon > 0$ is garanteed by Lax-Milgram Theorem. We study here the behavior of the solutions as $\epsilon \to 0$, that is, as the domain gets thinner and thinner although with a high oscillating boundary. It is reasonable to expect that the family of solutions w^ϵ will converge to a function of just one variable and that this function will satisfy an equation of the same type of (0.1) but in one dimension. As a matter of fact, if we consider $0 \leq \alpha < 1$ and if we assume that $a(x) + b(x) g(x/\epsilon^\alpha) \to h(x)$ w-$L^2(0,1)$ and $\frac{1}{a(x)+b(x)g(x/\epsilon^\alpha)} \to k(x)$ w-$L^2(0,1)$ (observe that $h(x)k(x) \geq 1$ a.e. and in general it is not true that $h(x)k(x) \equiv 1$), then the limit problem is $-\frac{1}{h(x)} \left(\frac{1}{k(x)} v_x \right)_x + v = f$, in $(0,1)$ with $v_x(0) = v_x(1) = 0$. See [1], [2] and [3] for details. Observe that the geometry of the thin domain enters into the limit equation through the diffusion coefficient.

*Universidad Complutense de Madrid, Madrid, Espanha, e-mail: arrieta@mat.ucm.es. Partially supported by: MTM2009-07540 DGES, Spain; PHB2006-003 PC and PR2009-0027 from MICINN; and GR58/08, Grupo 920894 (BSCH-UCM, Spain)

†Universidade de São Paulo, SP, Brasil, e-mail: marcone@usp.br. Partially supported by FAPESP 2008/53094-4, CAPES DGU 127/07 and CNPq 305210/2008-4.

In this work we are interested in addressing the case $\alpha = 1$, that is $G_\epsilon(x) = a(x) + b(x)g(x/\epsilon)$, where none of the techniques used to solve the previous ones apply. Observe that this situation is very resonant: the height of the domain, the amplitude of the oscillations at the boundary and the period of the oscillations are of the same order ϵ. Moreover we are interested in addressing not only the purely periodic case, that is, the case where the function $G_\epsilon(x) = G(x/\epsilon)$ for some L-periodic smooth function G but also the general case where the amplitude of the oscillation depend on x in a continuous fashion, that is, in our prototype case, the situation where a and b are not piecewise constant, but piecewise continuous function.

1 The main result

In order to obtain the limit equation in the general case, we propose a method that consists in solving first the piecewise periodic case, that is, the case where the functions $a(x)$ and $b(x)$ are piecewise constant and then use an approximation argument to get the limit equation in the general case. This is a subtle argument since we are approximating first the functions a and b by piecewise constant functions, say $a^\delta(x)$, $b^\delta(x)$ so that $|a(x) - a^\delta(x)| + |b(x) - b^\delta(x)| \leq \delta$ and obtain the limit equation for $\delta > 0$ fixed, passing to the limit as $\epsilon \to 0$. Then, in this limit equation, which will depend on δ, we pass to the limit as $\delta \to 0$. But the limit we are interested in is taking first $\delta \to 0$ for $\epsilon > 0$ fixed, so we obtain the domain given by the function $a(x) + b(x)g(x/\epsilon)$, and then we pass to the limit as $\epsilon \to 0$. But, a priori there is no garantee that these two limits commute. We will actually show that these two limits commute by proving that the solutions of problem (0.1) in two domains R^ϵ and $\tilde{R}^\epsilon$ are close in the H^1 norm uniformly in ϵ when a, b and $\tilde{a}, \tilde{b}$ are close. This result, which can be regarded as a domain perturbation result but uniformly in ϵ, guarantee that the two limits commute and will show that the limit problem is given as above. Thus, we will be able to pass to the limit in this problem to obtain:

$$\begin{cases} -\frac{1}{p(x)}(r(x)w_x)_x + w = f(x), & x \in (0,1) \\ w'(0) = w'(1) = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

where $r(x) = p(x)q(x) = \frac{1}{L}\int_{Y^*(x)} \left\{1 - \frac{\partial X(x)}{\partial y_1}(y_1, y_2)\right\} dy_1 dy_2$, $p(x) = \frac{|Y^*(x)|}{L}$ and $X(x)$ is a auxiliary solution of

$$\begin{cases} -\Delta X = 0 \text{ in } Y^* \\ \frac{\partial X}{\partial N} = N_1 \text{ on } B_1 \\ X(0, y_2) = X(L, y_2) \text{ on } B_0 \end{cases}$$

in the basic cell $Y^*(x) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \; : \; 0 < y_1 < L, \quad 0 < y_2 < a(x) + b(x)g(y_1)\}$, which depends on the variable x, where B_0 is the lateral boundary, B_1 is the upper and lower boundary of ∂Y^*. Equation (1.2) is the limit equation we were looking for.

We think that this method of solving first the piecewise periodic case and then use an approximation argument, uniform in the parameter ϵ, can be used in other problems to obtain the appropriate homogenized limit for the non periodic case.

References

[1] HALE, J. K. AND RAUGEL, G. - *Reaction-diffusion equation on thin domains*, J. Math. Pures and Appl., (9) 71, no. 1, 33-95 (1992).

[2] ARRIETA, J. M. - *Spectral properties of Schrödinger operators under perturbations of the domain*, Ph.D. Thesis, Georgia Institute of Technology, (1991).

[3] RAUGEL, G. - *Dynamics of partial differential equations on thin domains*, Lecture Notes in Math., 1609, Springer, Berlin, (1995).

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

VERY RAPIDLY VARYING BOUNDARIES IN EQUATIONS WITH NONLINEAR BOUNDARY CONDITIONS. THE CASE OF A NON UNIFORMLY LIPSCHITZ DEFORMATION

JOSÉ M. ARRIETA * & SIMONE M. BRUSCHI †

We consider elliptic equations with nonlinear boundary conditions of the type

$$\begin{cases} \Delta u - u + f(x,u) = 0 \text{ in } \Omega_\epsilon \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + g(x,u) = 0 \text{ in } \partial\Omega_\epsilon. \end{cases} \tag{0.1}$$

when the boundary of the domain presents a highly oscillatory behavior as the parameter $\epsilon \to 0$. In [2], the main assumption was that $\partial\Omega_\epsilon$, the boundary of the domain Ω_ϵ, is expressed in local charts as a Lipschitz deformation of $\partial\Omega_0$ with the Lipschitz constant uniformly bounded in ϵ. Roughly speaking, this kind of perturbation is characterized by the fact that locally around each point $x_0 \in \partial\Omega_0$ and for all $0 < r < 1$ we have $\dfrac{|\partial\Omega_\epsilon \cap B(x_0,r)|}{|\partial\Omega \cap B(x_0,r)|} \le C$, for some constant C independent of x_0, r and ϵ, where we denote by $|\cdot|$ the $(N-1)$-dimensional measure. For instance, in a two dimensional setting, if $\partial\Omega_0$ is given locally around certain point by the graph of the function $y = \psi_0(x)$, then $\partial\Omega_\epsilon$ is given locally by the graph of a function $y = \psi_\epsilon(x)$ where $\psi_\epsilon \to \psi_0$ and $|\psi'_\epsilon(x)| \le C$ uniformly in ϵ. This includes the case where $\psi_\epsilon(x) = \psi_0(x) + \epsilon \sin(x/\epsilon^\alpha)$, with $\alpha \le 1$. In [2], we get that, for a broad class of nonlinearities f and g, the limit equation of (0.1) when $\epsilon \to 0$ is the same: $\Delta u + f(x,u) = 0$ in Ω_0 while the limit boundary condition is $\dfrac{\partial u}{\partial n} + \gamma(x) g(x,u) = 0$ with $\gamma(x) \ge 1$ a factor that depends on the oscillations of the boundary. In certain sense we may say that the oscillations at the boundary amplify the effect of the nonlinearity $g(x,u)$ at the point $x \in \partial\Omega_0$ by a factor $\gamma(x) \ge 1$.

In this work we consider the case where $\partial\Omega_\epsilon$ is not a uniform Lipschitz deformation of $\partial\Omega_0$. This case, which includes the example above with $\alpha > 1$, can be characterized (roughly speaking) by $\dfrac{|\partial\Omega_\epsilon \cap B(x_0,r)|}{|\partial\Omega \cap B(x_0,r)|} \to +\infty$, which is to say that the factor $\gamma(x) = +\infty$. This extremely high oscillating behavior of the boundary interacts in a nontrivial way with the nonlinear boundary condition. The interpretation described above suggests that if the nonlinearity $g(x,u)$ is strongly dissipative, that is $g(x,u)u \ge b|u|^{d+1}$ for some $d \ge 0$, the effect of the oscillations is to amplify the dissipativity of the boundary then the limit equation is the same while the boundary condition is the most dissipative boundary condition, which is the boundary condition $u = 0$.

We prove that if u_ϵ^*, $0 < \epsilon \le \epsilon_0$, be a family of solutions of problem (0.1) satisfying $\|u_\epsilon^*\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon)} \le R$, then there exists a subsequence, still denoted by u_ϵ^*, and a function $u_0^* \in H_0^1(\Omega)$ with $\|u_0^*\|_{L^\infty(\Omega)} \le R$, solution of the problem

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(x,u) \text{ in } \Omega, \\ u = 0 \text{ in } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.2}$$

with the property that $\|u_\epsilon^* - u_0^*\|_{H^1(\Omega_\epsilon)} + \|u_\epsilon^* - u_0^*\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon)} \to 0$ as $\epsilon \to 0$.

Furthermore, if $d = 1$ and the solution u_0^* of (0.2) is hyperbolic, in the sense that $\lambda = 0$ is not an eigenvalue of the linearized problem of (0.2) around u_0^*, then, there exists a $\delta > 0$ small such that problem (0.1) has one and only one solution u_ϵ^* satisfying $\|u_\epsilon^* - u_0^*\|_{H^1(\Omega_\epsilon)} \le \delta$ for ϵ small enough. The proofs of the results presented here can be found in [3].

*Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid, Madrid, Spain, arrieta@mat.ucm.es
†Departamento de Matemática, UnB , DF, Brasil, e-mail: sbruschi@unb.br

We observe that the case $g \equiv 0$, that is, the case of homogeneous Neumann boundary condition was treated in [4] and it was shown that this condition is also preserved in the limit for many different perturbations of the boundary, including the ones treated in this work (see [4], Section 5.1).

References

[1] ARRIETA, J. M. AND BRUSCHI, S. M. - *Boundary oscillations and nonlinear boundary conditions,* C.R. Acad. Sci. Paris, Ser I. 343 (2006), pp. 99-104.

[2] ARRIETA, J. M. AND BRUSCHI, S. M. - *Rapidly varying boundaries in equations with nonlinear boundary conditions. The case of a Lipschitz deformation,* Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 17 (2007), pp. 1555-1585.

[3] ARRIETA, J. M. AND BRUSCHI, S. M. - *Very Rapidly varying boundaries in equations with nonlinear boundary conditions. The case of a Lipschitz deformation,* Discrete and Continuous Dynamical Systems, 14 (2010), pp. 327351

[4] ARRIETA, J. M. AND CARVALHO, A. N. - *Spectral convergence and nonlinear dynamics of reaction-diffusion equations under perturbations of domain,* Journal of Differential Equations, 199 (2004), pp. 143-178.

[5] CARVALHO, A.N. DE AND PISKAREV, S. - *A general approximation scheme for attractors of abstract parabolic problems,* Numerical Functional Analysis and Optimizations, 27 (7-8) (2006), pp. 785-829.

[6] CASADO-DÍAZ, J., FERNÁNDEZ-CARA, E. AND SIMON, J. - *Why viscous fluids adhere to rugose walls: a mathematical explanation,* Journal of Differential Equations, 189 (2003), pp. 526-537.

[7] CHECHKIN, G., FRIEDMAN, A. AND PIATNITSKI, A. L. - *The boundary-value problem in domains with very rapidly oscillating boundary,* Journal of Math. Anal. Appl., 231 (1999), pp. 213-234.

[8] DAMLAMIAN, A. AND PETTERSSON, K. - *Homogenization of oscillating boundaries,* Discrete and Continuous Dynamical Systems, 23 (2009), pp. 197-219.

[9] DANCER, E. N. AND DANERS, D. - *Domain perturbations for elliptic equations subject to Robin boundary conditions,* Journal of Differential Equations, 138 (1997), pp. 86-132.

[10] FRIEDMAN, A., HU, B. AND LIU, Y. - *A boundary value problem for the Poisson equation with multi-scale oscillating boundary,* Journal of Differential Equations, 137 (1997), pp. 54-93.

[11] LADYZHENSKAYA, O. AND URAL'TSEVA, N. N. - *Linear and Quasilinear Elliptic Equations.*, Academic Press, 1968.

[12] MAZ'JA, V. G. - *Sobolev Spaces.*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[13] STUMMEL, F. - *Diskrete Konvergenz linearer Operatoren I,* Math. Ann., 256 (1970), pp. 45-92.

[14] STUMMEL, F. - *Diskrete Konvergenz linearer Operatoren II,* Math. Z., 120 (1971), pp. 231-264.

[15] STUMMEL, F. - *Diskrete Konvergenz linearer Operatoren III*, Linear Operators and Approximation, (Proc. Conf., Oberwolfach, 1971), Internat. Ser. Numer. Math., 20 (1972), pp. 196-216.

[16] VAINIKKO, G. - *Approximative methods for nonlinear equations (two approaches to the convergence problem),* Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, 2 (1978), pp. 647-687.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edition N$^{\underline{0}}$ 4 November 2010

VIBRATIONS OF BEAMS WITH NONLINEAR BOUNDARY DISSIPATIONS

J.L.G. Araujo * & L.A. Medeiros † & M.Milla Miranda ‡

Let Ω be a bounded open set of $\mathbb{R}^n$ with boundary Γ of class C^2. Assume that Γ is constituted by two non empty closed disjoint parts Γ_0 and Γ_1 with $\Gamma_0 \bigcap \Gamma_1 = \phi$. Thus Γ is a nonconnected set. Denote by $\nu(x)$ the unit outward normal at $x \in \Gamma_1$

In $\Omega \times (0, \infty)$ consider the problem

$$(*) \quad \left| \begin{array}{l} u'' - \Delta u + \delta u' = 0 \ in \ \Omega \times]0, \infty[, \\ u = 0 \ on \ \Gamma_0 \times]0, \infty[, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u'' + h(., u') = 0 \ on \ \Gamma_1 \times]0, \infty[; \\ u(0) = u^0, \ \ u'(0) = u^1 \ in \ \Omega. \end{array} \right.$$

where $\delta(x) \geq 0, \alpha(x) \geq 0$ and $h(x,s)$ are functions defined on Ω, Γ_1 and $\Gamma_1 \times \mathbb{R}$, respectively.

Physical examples that motivate the study the above problem can be found in Koshlyakov,Smirnov, Gliner[6] and Medeiros,Andrade[10].

In (*), the terms $\delta u'$ and $h(., u')$ represent an internal and a boundary dissipation, respectively.

Introduce some notations and hypotheses in order to state our result.

By V is denoted the Hilbert space

$$V = \{u \in H^1(\Omega); u = 0 \ on \ \Gamma_0\}$$

equipped with the Dirichlet scalar product $((u, v))$. Then if $-\Delta$ denotes the operator defined by the triplet $\{V, L^2(\Omega), ((u, v))\}$, we have that the domain of $-\Delta$ is

$$D(-\Delta) = \{u \in V \cap H^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ on \ \Gamma_1\}$$

Introduce the hypothesis

$$(H_1) \left| \begin{array}{l} h(x, s) \in C^0(\mathbb{R}; L^\infty(\Gamma_1)), \\ h(x, 0) = 0, \ a.e. \, in \, \Gamma_1, \\ (h(x, s) - h(x, r))(s - r) \geq d(s - r)^2, \ \forall s, r \in \mathbb{R} \ for \ a.e \ x \in \Gamma_1 \ (d \ positive \ constant); \end{array} \right.$$

Theorem 0.1. *Let $h(x, s)$ be a function satisfying $(H1)$. Consider*

$$u^0 \in D(-\Delta), \ u^1 \in H_0^1(\Omega)$$

and

$$\alpha \in L^\infty(\Gamma_1) \, , \, \alpha(x) \geq 0 \, a.e. \, x \, in \, \Gamma_1 \, , \, \delta \in L^\infty(\Omega) \, , \, \delta(x) \geq 0 \, a.e. \, in \, \Omega$$

*Instituição, IM-UFRJ, RJ, Brasil, e-mail jefferson@im.ufrj.br
†Instituição, IM-UFRJ,RJ,Brasil, e-mail lmedeiros@abc.org.br
‡Instituição, DME-UEPB, PB, Brasil, e-mail milla@im.ufrj.br

Then there exists a function u in the class

$$u \in L^{\infty}(0,\infty;V), \quad u' \in L^{\infty}(0,\infty;V), \quad u'' \in L^{\infty}(0,\infty;L^2(\Omega)).$$

such that

$$\left|\begin{array}{l} u'' - \Delta u + \delta u' = 0 \ in \ L^{\infty}(0,\infty;L^2(\Omega)); \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u'' + h(.,u') = 0 \ in \ L^1_{loc}(0,\infty;L^1(\Gamma_1)); \\ u(0) = u^0, \ u'(0) = u^1 \end{array}\right.$$

In the proof of the theorem we use the Galerkin method with a special basis of $V \cap H^2(\Omega)$, an appropriate Strauss'approximation of $h(x,s)$(see[13]) and the trace theorem on Γ for non-smooth functions.

It will be published later on the existence of solutions of Problem(*) with a nonlinear internal dissipation and the decay of its energy.

References

[1] F.D.Araruna-A.B.Maciel, *Existence and boundary stabilization of the semilinear wave equation*, Nonlinear Analysis, 67 (2007) p. 1288-1305.

[2] M.M. Cavalcanti-V.N. Cavalcanti-P. Martinez, *Existence and decay rate estimates for the wave equations with nonlinear boundary damping source term*, J. Differential Equations, 203 (2004), p. 119-158.

[3] M.M. Cavalcanti - N.A. Larkin - J.A. Soriano, *On solvability and stability of solutions of nonlinear degenerate hyperbolic equations with boundary damping*, Funkcal. Ekvac, 41 (2) (1999) p. 271-289.

[4] G. G. Doronin and N. A. Larkin, *Global solvability for the quasilinear damped wave equation with nonlinear second-order boundary conditions*, Nonlinear Analysis 50(2002), 1119-1134.

[5] G.G. Doronin-N.A. Larkin-A.J. Souza, *A hyperbolic problem with nonlinear second order boundary damping*, Electronic J. Differential Equations (28) (1998), p. 1-10.

[6] N.S. Koshlyakov-M.M. Smirnov-E.B. Gliner, *Differential Equations of Mathematical Physics*, North Holland Publishing Company, Amsterdam 1964.

[7] J.-L. Lions, *Problèmes aux limites dans les équations aux derivées partielles*, Oeuvres Choisies de Jacques-Louis Lions, V.I., EDP Sciences (2003), p. 431-588, Paris, France.

[8] J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolutions des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[9] A.I. Louredo-M.Milla Miranda, *Nonlinear boundary dissipation for a coupled system of Klein-Gordon equations*, to be published in Electronic J. Differantial Equations.

[10] L.A. Medeiros-N.G. Andrade, *Alguns problemas de contorno sobre equações diferenciais parciais*, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil 1979.

[11] M. Milla Miranda; L.A. Medeiros, *On a boundary value problem for wave equations: existence, uniqueness and asymptotic behavior*, Rev. Mat. Univ. Chile, 17 (1996), p. 47-73.

[12] M. Milla Miranda, *Traço para o dual dos espaos de Sobolev*, Bol. Soc. Paran. Matemtica (2^a srie) 11 (1990), 131-157.

[13] W.A. Strauss, *On weak solutions of semilinear hyperbolic equations*, Anais Acad. Brasil. Cincias, 42 (1970), p. 645-651.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

Factorization of holomorphic mappings through operator ideals

Richard Aron*, Geraldo Botelho†, Daniel Pellegrino‡ & Pilar Rueda§

1 Introduction

The basic motivation for this work arises from the following example (see, e.g., [1]). Let $f : E \to F$ be a holomorphic (complex analytic) mapping between complex Banach spaces E and F. Then f is locally compact if and only if for every n, the $n-$homogeneous Taylor polynomial $\hat{d}^n f(0)\colon E \longrightarrow F$ is compact. The cogent fact here is that the non-linear behavior of f is reflected by the behavior of its associated set of Taylor "coefficients," and conversely. The idea in this work is to replace the polynomial ideal of compact polynomials by an arbitrary polynomial ideal $\mathcal{Q}$ and to characterize the holomorphic mappings whose Taylor polynomials belong to $\mathcal{Q}$. The results we prove for composition ideals of polynomials show that these are the holomorphic functions f that can be factorized as $f = u \circ g$ where u belongs to a given surjective operator ideal.

2 Definitions

By $\mathcal{P}(^nE; F)$ we denote the Banach spaces of all continuous n-homogeneous polynomials from the Banach space E to the Banach space F with the usual sup norm and by $\mathcal{H}(U; F)$ the linear space of all holomorphic mappings from an open subset U of E to F. A mapping $P\colon E \longrightarrow F$ is a *polynomial* if $P = P_0 + P_1 + \cdots + P_n$ where each $P_k \in \mathcal{P}(^kE; F)$. For $f \in \mathcal{H}(U; F)$, $a \in U$ and $k \in \mathbb{N}$, $\hat{d}^k f(a)$ is the k-th differential polynomial of f at a. For the general theory of homogeneous polynomials and holomorphic mappings we refer to S. Dineen [4] and J. Mujica [6].

Definition 2.1. (*Composition polynomial ideals*) Given a Banach operator ideal $\mathcal{I}$, the *composition ideal* of polynomials $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$ consists of all homogeneous polynomials P between Banach spaces that can be factored as $P = u \circ Q$ where Q is an homogeneous polynomial and u is linear operator belonging to $\mathcal{I}$. $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$ becomes a Banach polynomial ideal (see [3]) with the usual composition norm $\|\cdot\|_{\mathcal{I}\circ\mathcal{P}}$ given by

$$\|P\|_{\mathcal{I}\circ\mathcal{P}} := \inf\{\|u\|_{\mathcal{I}}\|Q\| : P = u \circ Q, Q \in \mathcal{P}(^nE; G), u \in \mathcal{I}(G; F)\}.$$

Definition 2.2. (*Associated holomorphic mappings*) A holomorphic mapping f from an open subset U of a Banach space E to a Banach space F is said to be *associated* to $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$, written $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{I}\circ\mathcal{P}}(U; F)$, if its derivatives $\hat{d}^k f(a)$ belong to $\mathcal{I} \circ \mathcal{P}$ for all $k \in \mathbb{N}$ and all $a \in U$, and for every $a \in U$ there are $C, c \geq 0$ such that $\left\|\frac{1}{k!}\hat{d}^k f(a)\right\|_{\mathcal{I}\circ\mathcal{P}} \leq C \cdot c^k$ for all $k \in \mathbb{N}$.

Remark 2.1. The above definition rests heavily on the concept of *holomorphy type* of Nachbin [8], as generalized in [2].

*Kent State University, e-mail: aron@math.kent.edu
†Universidade Federal de Uberlandia, e-mail: botelho@ufu.br. Supported by INCTMat.
‡Universidade Federal da Paraba, e-mail: dmpellegrino@gmail.com
§Universidad de Valencia, e-mail: Pilar.Rueda@uv.es

3 Results

An operator ideal $\mathcal{I}$ is *surjective* if for every surjective operator $u \in \mathcal{L}(G;E)$ the following holds: if $v \in \mathcal{L}(E;F)$ and $v \circ u \in \mathcal{I}(G;F)$, then $v \in \mathcal{I}(E;F)$.

Theorem 3.1. *Let $\mathcal{I}$ be a closed and surjective Banach operator ideal and $f \in \mathcal{H}(E;F)$. Then the following conditions are equivalent:*
(a) *$f = u \circ g$, where G is a Banach space, $g \in \mathcal{H}(E;G)$ and $u \in \mathcal{I}(G;F)$.*
(b) *Every $a \in E$ admits an open neighborhood V_a such that $f|_{V_a} = u_a \circ g_a$, where G_a is a Banach space, $g_a \in \mathcal{H}(V_a;G_a)$ and $u_a \in \mathcal{I}(G_a;F)$.*
(c) *There is an open neighborhood V of 0 such that $f|_V = u \circ g$, where G is a Banach space, $g \in \mathcal{H}(V;G)$ and $u \in \mathcal{I}(G;F)$.*
(d) *$f \in \mathcal{H}_{\mathcal{I}\circ\mathcal{P}}(E;F)$.*

The proof of the theorem above depends on deep results due to González and Gutiérrez [5].

The following operator ideals are closed and surjective: compact operators, weakly compact operators operators, Rosenthal operators, Banach-Saks operators, separable operators, strictly cosingular operators, limited operators, Grothendieck operators and Asplund operators.

We also examine some of the most important non-surjective closed ideals. Specifically, we obtain conditions that allow us to reduce the case of spaces of entire mappings associated to the ideals of approximable, completely continuous, or strictly singular operators to the compact case.

For polynomials things work better:

Theorem 3.2. *Let $\mathcal{I}$ be a Banach operator ideal and $P : E \to F$ a continuous polynomial. Then the following conditions are equivalent:*
(a) *$P = u \circ Q$, where G is a Banach space, $Q : E \to G$ is a continuous polynomial and $u \in \mathcal{I}(G;F)$.*
(b) *$P \in \mathcal{H}_{\mathcal{I}\circ\mathcal{P}}(E;F)$.*

In this work we also show that Theorem 3.1 does not hold for spaces of bounded holomorphic mappings, that is: given a bounded holomorphic mapping $f\colon E \longrightarrow F$ and a closed surjective operator ideal $\mathcal{I}$, it is not always true that $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{I}\circ\mathcal{P}}(E;F)$ if and only if $f = u \circ g$, where G is a Banach space, $g\colon E \longrightarrow G$ is a bounded holomorphic mapping and $u \in \mathcal{I}(G;F)$. Our counterexample is built on the ideal of compact operators and depends on the construction of the predual of the space of bounded holomorphic mappings due to Mujica [7].

References

[1] R. M. Aron and M. Schottenloher, *Compact holomorphic mappings on Banach spaces and the approximation property*, J. Funct. Anal. **21** (1976), 7-30.

[2] G. Botelho, H.-A. Braunss, H. Junek and D. Pellegrino, *Holomorphy types and ideals of multilinear mappings*, Studia Math. **177** (2006), 43-65.

[3] G. Botelho, D. Pellegrino and P. Rueda, *On composition ideals of multilinear mappings and homogeneous polynomials*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **43** (2007), no. 4, 1139-1155.

[4] S. Dineen, *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Springer-Verlag, London, 1999.

[5] M. González and J. Gutiérrez, *Surjective factorization of holomorphic mappings*, Comment. Math. Univ. Carolinae **41** (2000), 469-476.

[6] J. Mujica, *Complex analysis in Banach spaces*, North-Holland Mathematics Studies **120**, North-Holland, 1986.

[7] J. Mujica, *Linearization of bounded holomorphic mappings on Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **324** (1991), 867-887.

[8] L. Nachbin, *Topology on spaces of holomorphic mappings*, Springer-Verlag, New York, 1969.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

MÉTODOS DE PONTOS FIXOS E SOLUÇÕES PERIÓDICAS PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS NÃO LINEARES

LUCIANO BARBANTI * & DAVID ZAVALETA VILLANUEVA †

A existência de soluções periódicas de equações diferenciais não lineares pode ser remetido ao estudo de pontos fixos de um operador completamente contínuo $\mathcal{M}_f$ construido a partir da equação,

$$\dot{x} = A(t)x + f(t,x) \tag{0.1}$$

em que

$$\begin{array}{llcll} A: & R \to R^{n^2} & \qquad & f: & R \times \Omega \to R^n \\ & t \mapsto A(t) & & & (t,x) \mapsto f(t,x) \end{array}$$

são contínuas e T-periódicas em relação a t, e Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$.

Isto pode ser visto em N. Rouche e J. Mawhin [2], J. Hale [1] e por L. Cesari [3], e consiste essencialmente em: Sejam as EDOs no $\mathbb{R}^n$:

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{0.2}$$

$$\dot{y} = -A^t(t)y. \tag{0.3}$$

as equações homogênea e adjunta respectivamente de (0.1).

Podemos definir no espaço das soluções periódicas;

Definição 0.1. $C_T = \{(x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n) : x$ *é contínua e T-Periódica* $\}$,

os operadores projeção: $\mathbb{P}$ que leva C_T no subespaço de C_T gerado pelas soluções T-periódicas de (0.2) e $\mathbb{Q}$ que leva C_T no subespaço de C_T gerado pelas soluções T-periódicas de (0.3).

Supondo A em (0.2), periódica, temos que em (0.1): f define um operador $\mathcal{M}_f$ cujos pontos fixos são soluções periódicas do (0.1).

Para cada isomorfismo $\mathcal{J}_J$ de $Im\ \mathbb{Q}$ em $Im\ \mathbb{P}$, e cada aplicação linear contínua $\mathbb{K} : Ker\mathbb{Q} \to Ker\mathbb{P}$, temos

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M}_f : & C_T \longrightarrow C_T & \\ & x \mapsto \quad \mathcal{M}_f(x) = \mathbb{P}x + \mathcal{J}_J\mathbb{Q}\mathcal{F}x + \mathbb{K}(I-\mathbb{Q})\mathcal{F}x, \end{array} \tag{0.4}$$

onde $\mathcal{F}x(t) = f(t, x(t))$ é o operador de Niemitskii gerado por f.

A construção do operador $\mathcal{M}_f$, cujos pontos fixos serão as soluções periódicas de uma equação diferencial T-periódica está ligado ao sistema (0.1).

1 Resultados

Teorema 1.1. *A equação (0.1) possui uma solução T-periódica se e somente se o operador $\mathcal{M}_f$ em (0.4) possui um ponto fixo.*

*Instituto de Matemática e Estatística, IME-USP, SP, Brasil, barbanti@ime.usp.br
†CCET-UFRN, Natal, RN, Brasil, e-mail: villanueva@ccet.ufrn.br

Prova: [4]. ■

Teorema 1.2. *A equação de Lienard de segunda ordem*

$$x'' + h(x)x' + g(x) = e(t),$$

onde $h, g, e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são funções contínuas, e* $e(\cdot)$ *é T-periódica e de valor médio nulo, possui uma solução T-periódica.*

Prova: [4]. ■

Referências

[1] Hale, J. - *Ordinary differential equations.*, Wiley-Interscience, New York, First edition, 1964.

[2] Rouche, N. and Mawhin, J. - *Équations diferentieles ordinaires*, Vol I,II, Masson, ET cie, 1973.

[3]Cesari,L.,*Functional analysis and periodic solutions of nonlinear differential equations*,Contrib. Differential Equations,(1)1963,149-1 87

[4]Zavaleta Villanueva, David, *Métodos de pontos fixos e soluções periódicas para equações diferenciais ordinárias não lineares*, tese de doutoramento em matemática, IME-USP, 2006.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

Aproximação fraca de pontos fixos em Espaços de Banach

Cleon S. Barroso *

Seja X um espaço de Banach e C um subconjunto limitado, fechado e convexo de X. A propriedade de aproximação fraca de pontos fixos para o conjunto C é aquela que diz que toda aplicação contínua $f\colon C \to C$ admite uma sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ tal que $(x_n - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge fracamente para zero em X. Diremos então que o espaço X possui a propriedade de aproximação fraca de pontos fixos se esta propriedade for verificada para todo subconjunto limitado, fechado e convexo de X. O estudo sobre essa propriedade foi inaugurado em 2009 no artirgo [1] no cenário geral dos espaços vetoriais topológicos. Mesmo num ambiente de um espaço de Banach, uma das grandes dificuldades na verificação de uma tal propriedade reside na incompatibilidade que há entre as topologias fraca e da norma. Observe que é exigido f ser somente norma-contínua. Além disso, vale a pena ressaltar que em geral o máximo que se pode esperar é a existência de uma sequência como descrita acima. De fato, existem resultados (veja, [4]) que garantem que se C é não-compacto na topologia da norma, a bola de X por exemplo, então aplicações Lipschitzs f de C em C podem ser construídas de tal sorte que

$$\inf_{x\in C} \|x - f(x)\| > 0.$$

Em outras palavras, esse fato não só inviabiliza a existência de pontos fixos para f como também a existência de uma aproximação de pontos fixos com respeito a topologia da norma. Dentre outros, no artigo [1] foi demonstrado o seguinte resultado:

Teorema 0.1. *Todo subconjunto fracamente compacto e convexo de um espaço de Banach possui a propriedade de aproximação fraca de pontos fixos.*

Ademais, lançamos o desafio de provar que tal resultado seria válido para qualquer subconjunto limitado, fechado e convexo de um espaço de Banach. Contudo em 2010, no artigo [2], observamos que tal questionamento envolvia de forma natural aspectos da geometria dos espaços de Banach. De fato, constatamos que se C não possui uma sequência equivalente à sequência básica do espaço ℓ_1 então um tal conjunto possui a propriedade de aproximação de pontos fixos. Tal é caso para conjuntos C's fracamente compactos. Mais geralmente, em parceria com o Professor Pei-Kee Lin, fomos capazes de provar o seguinte resultado geral:

Teorema 0.2. *Todo espaço de Banach Asplund possui a propriedade de aproximação fraca de pontos fixos.*

Contudo, ficou em aberto a questão se este último resulto seria válido em qualquer espaço de Banach não contendo uma cópia isomórfica do espaço ℓ_1. Ainda em 2010, o matemático Ondrej Kalenda publicou o artigo [3] onde resolve de forma afirmativa esse questionamento. Mais precisamente, Kalenda provou o seguinte teorema.

Teorema 0.3. *Um espaço de Banach possui a propriedade de aproximação fraca de pontos fixos se e somente se não possui uma cópia isomórfica do espaço ℓ_1.*

O objetivo desta palestra é expor tais recentes progressos sobre essa linha de pesquisa e também apresentar ao público novas perspectivas de pesquisas relacionadas ao estudo da propriedade de aproximação fraca de pontos fixos. Por exemplo, será que o Teorema 0.3 pode ser generalizado para os espaços localmente convexos? Essa e outras questões pertinentes estarão no bojo da proponente exposição.

*Universidade Federal do Ceará, UFC, CE, Brasil, cleonbar@mat.ufc.br

References

[1] BARROSO, C. S. - *The approximate fixed point property in Hausdorff topological vector spaces and applications,* Discrete Contin. Dyn. syst. **25** (2009), no. 2, 467–479.

[2] BARROSO, C. S. AND LIN, P.-K. - *On the weak approximate fixed points.*, J. Math. Anal. Appl. **365** (2010), 171–175.

[3] KALENDA, O. F. K. - *Spaces not containing ℓ_1 have the weak approximate fixed point property*, J. Math. Anal. Appl. **373** (2011), 134–137.

[4] LIN, P.-K. AND STERNFELD Y. - Convex sets with the Lipschitz fixed point property are compact, Proc. Amer. Math. Soc. **93** (1985), 633–639.

ON THE SCALING IN A CAFFARELLI-KOHN-NIRENBERG TYPE INEQUALITY

Aldo Bazán * & Wladimir Neves †

In [1] was applied the rescaling for obtain a necessary and sufficient condition for what the interpolation inequality mentioned there holds. In this work we recall this condition and obtain a parameter that permit us to give an alternative proof of the following interpolation inequality

$$\left(\int_{R^n} \|x\|^{\gamma r} |u|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left(\int_{R^n} \|x\|^{\alpha p} \|\nabla u\|^p \, dx\right)^{\frac{a}{p}} \left(\int_{R^n} \|x\|^{\beta q} |u|^q dx\right)^{\frac{1-a}{q}}.$$

This interpolation inequality contains the Sobolev inequality and the Hardy inequality as particular cases. In fact, we show that for a better understanding of this inequality, it is enough to understand the weighted Sobolev and Hardy inequalities. The principal fact for the proof will be to define the convenient parameter mentioned above, that appear among the conditions for what the inequality remains hold. Finally, we have some remarks about the weight functions, and an approach of this inequality in the case of riemannian manifolds.

References

[1] Caffarelli, L., Kohn, R., Nirenberg, L. - *First Order interpolation inequalities with weights.*, Comp. Math. Tome 53, N.3, 1984, p.259-275.

[2] Chou, K.S., Chu, C.W. - *On the best constant for a weighted Sobolev-Hardy inequality*, J. London Math. Soc. (2) 48 (1993) p. 137-151.

[3] Dacorogna, B. - *Direct Methods in the Calculus of Variations*, Springer, second edition, 2008.

*Instituto de Matemática , UFRJ, RJ, Brasil, aabp2003@pg.im.ufrj.br
†Instituto de Matemática , UFRJ, RJ, Brasil, wladimir@im.ufrj.br

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

DETECÇÃO DE OBJETOS ATRAVÉS DE UM PROBLEMA INVERSO DE ESPALHAMENTO E REGULARIZAÇÃO DE TIKHONOV

FERMÍN S. VILOCHE BAZÁN *

Problemas inversos envolvendo espalhamento de ondas acústicas estão presentes em áreas tais como imagens de radar e sonar, testes não destrutivos de materiais, imagens médicas, prospecção geofísica, etc. Em geral, a formulação de problemas inversos na área consiste na reconstrução de um objeto (o suporte de uma função) a partir de ondas refletidas, medidas numa região de interesse, como consequência da interação de ondas incidentes. Formalmente, o problema direto consiste em encontrar uma função u^s (onda espalhada) satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta u^s + k^2 u^s = 0, \;\; x \in \mathbb{R}^2/D, \\ u^s(x) + u^i(x) = 0, \; x \in \partial D, \\ \lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s\right) = 0 \end{cases} \tag{0.1}$$

onde k é o número de onda, $r = |x|, x \in \mathbb{R}^2/\overline{D}$, o limite acima é considerado em todas as direções $\hat{x} = x/|x|$ e u^i é um campo conhecido de ondas incidentes. Já o problema inverso, envolve a solução numérica de uma equação linear $Fg = f$, onde

$$(Fg_z)(\widehat{x}) = \int_{\mathcal{S}} u_\infty(\widehat{x}, d) g_z(d) ds(d), \; \widehat{x} \in \mathcal{S}, \tag{0.2}$$

F é um operador integral conhecido como o operador de espalhamento, $\mathcal{S}$ é a bola unitária em $\mathbb{R}^2$, d é a direção de propagação e u_∞ é a amplitude do espalhamento (far field pattern ou onda espalhada distante) [7, 8, 9]. Formalmente, usando a fórmula de Green demonstra-se que a onda espalhada u^s tem o seguinte comportamento assintótico

$$u^s(x) = u_\infty(\hat{x}, d)\frac{\exp(ikr)}{\sqrt{r}} + \mathcal{O}(r^{-3/2}), \;\; r \to \infty. \tag{0.3}$$

Na prática, apenas aproximações do núcleo do operador são disponíveis e a equação integral deve ser resolvida considerando-se uma versão discreta do operador perturbado $\widetilde{F} = F + E$, obtida através de alguma fórmula de quadratura ou técnicas de discretização tais como métodos espectrais ou elementos finitos. Outra dificuldade associada ao problema inverso é que o problema (0.2) pode não possuir solução. Ou seja, o problema é mal posto e técnicas de regularização precisam ser utilizadas.

Uma das técnicas de regularização utilizada frequentemente é o método de regularização de Tikhonov onde o parâmetro de regularização é escolhido por meio do critério da discrepância generalizada [9]. Neste caso, procuram-se "quase soluções" $g_{z,\lambda}$ tais que $\|Fg_{z,\lambda} - f_z\| < \epsilon$ para um conjunto de pontos z numa região que contém D, e a identificação do objeto é caracterizado pela norma $\|g_{z,\lambda}\|$ usando o fato que, para z dentro de D a norma é pequena, enquanto que para z fora de D a norma é muito grande [3]. A dificuldade encontrada nesta abordagem é que o nível de ruído nos dados (a norma da perturbação $\|E\|$) deve ser conhecido previamente: estimativas ruins de $\|E\|$ podem produzir soluções imprecisas.

A dificuldade da possível inexistência de solução do problema (0.2) foi contornada por Kirsch [8] quem introduziu o método da fatoração denotado por $F^*F^{1/4}$. De modo resumido, o método consiste em resolver para cada z na malha,

$$(F^*F)^{1/4} g_z = f, \tag{0.4}$$

e a identificação do objeto é análoga ao caso anterior. O resultado chave neste caso é descrito no seguinte teorema.

*Departamento de Matemática , UFSC, SC, Brasil,

Teorema 0.1. *Assuma que k^2 não é um autovalor de $-\Delta_2$ em D e que $\{u_j, v_j, \sigma_j\}_{j=1}^{\infty}$ um sistema singular de F. Então um ponto $z \in \mathbb{R}^2$ é um ponto que pertence a D se e somente se a série infinita*

$$\sum_j \frac{|(f, v_j)|^2}{|\sigma_j|}$$

converge, ou equivalentemente, se e somente se f pertence à imagem do operador $(F^*F)^{1/4}$.

A consequência prática do teorema é que a identificacação dos pontos dentro de D pode ser feita somando um número finito de termos da série: enquanto para pontos dentro de D a soma fica sob controle (dentro de limites razoáveis), para pontos fora de D a soma explode rapidamente. Um ponto importante é que a solução de (0.4) para o caso discreto se comporta análogamente como uma soma finita da série acima, o que justifica o uso do método. Embora a questão de existência tenha sido contornada, regularização ainda é necesária já que o operador F é compacto e apenas $\widetilde{F}$ é disponível.

Neste trabalho resolvemos o problema (0.4) usando o método de regularização de Tikhonov em conjunção com duas estratégias de escolha do parâmetro de regularização, a saber: o método do ponto fixo proposto recentemente por Bazán [1, 2], seguindo a abordagem descrita em [5] e uma nova estratégia chamada de *"O critério do produto máximo"*. A escolha é baseada no fato que ambas estratégias não precisam de qualquer informação prévia sobre o nível de ruído nos dados. Além disso, implementamos o método SVD-tail proposto em [6] e realizamos um estudo comparativo da eficiência de ambas as abordagens. O trabalho inclui resultados que envolvem a reconstrução de objetos usando dados reais coletados pela Força Aérea dos Estados Unidos e conhecidos como "*The Ipswich Data*"[9].

Referências

[1] F. S. V. Bazán, *Fixed-point iterations in determining the Tikhonov regularization parameter*, Inverse Problems, 24, 2008.

[2] F. S. V. Bazán and J. B. Francisco, *Improved Fixed-point algorithm for determining a Tikhonov regularization parameter*, Inverse Problems, 25, 2009.

[3] Colton D and Kress R 1992 *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory.* (New York:Springer-Verlag).

[4] Colton D and Kirsch A 1996 A simple method for solving the inverse scattering problems in the resonance region *Inverse Problems* **12** 383-393.

[5] K. H, Leem, G. Pelekanos and F. S. V. Bazán, Fixed-point iterations in determining a Tikhonov regularization parameter in Kirsch's factorization method. Submetido a Applied Mathematics and Computation.

[6] Fares M, Gratton S and Toint P 2009 SVD-tail: a new linear-sampling reconstruction method for inverse scattering problems *Inverse Problems* **25** 1-19

[7] G. Pelekanos and G. sevroglou, Shape reconstruction of a 2D-elastic penetrable object via the L-curve method, Inverse and Ill-poded problems, 2007.

[8] A. Kirsch, Characterization of the shape of a scattering obstacle using spectral data of the far field operator, Inverse Problems 14(1998), pp. 1489-1512.

[9] A. Kirsch and N. Grinberg, The factorization method for inverse problems, Oxford University Press, Oxford, 2008.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

Strong solutions for the motion of rigid polyelectrolytes

LUCIANO BEDIN *

We consider a rigid charged polymer (a polyelectrolyte) immersed in an aqueous solution containing a symmetric 1:1 salt. In the absence of external fields the system is in equilibrium and the ions in the solution concentrate in an interfacial layer near the boundary of the polymer [1]. Under the action of an external electrical field, the electrical body force acts in the interfacial layer and the polymer experiences a rigid-body motion [3]. We establish the existence and uniqueness of suitable strong solutions for a system of equations modeling this phenomenon. Let us suppose that, at the initial time, the polymer occupies a compact region $\overline{K_0}$, where $K_0 \subset \mathbb{R}^3$ is an open connected and bounded set. We assume that $\overline{K_0}$ is sufficiently far from the boundary of the enclosure containing the solution. As a consequence, this problem is usually modeled in a infinite region: the fluid occupies the whole space exterior to $\overline{K}_0$ [3]. An external homogeneous electrical field $\mathbf{E}_\infty(t)$ is imposed and we deal with the case where $\mathbf{E}_\infty(t)$ is sufficiently weak. Let us to consider $T > 0$ and define $K_t = Q(t)K_0$ as the position of the particle at time t, where $Q(t)$ is an affine isometry such that $Q(0) = I$. The electrical potential $\widetilde{\Psi}$ can be written as $\widetilde{\Psi} = \widetilde{\phi} + \widetilde{\Phi}$, where $\widetilde{\phi}$ is the electrical potential of the system at the thermal equilibrium and $\widetilde{\Phi}$ is the perturbed potential. If the dielectric constant of the particle and of the solvent are $\kappa_1 > 0$ and $\kappa_2 > 0$, respectively, the equilibrium potentials $\widetilde{\phi}_1 = \widetilde{\phi}|_{K_t}$ and $\widetilde{\phi}_2 = \widetilde{\phi}|_{\overline{K}_t^c}$, for each $t \in [0, T]$, are governed by the transmission problem

$$\kappa_1 \Delta \widetilde{\phi}_1(\mathbf{x}, t) = -4\pi e_c \sum_{i=1}^{J} z_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)), \quad \mathbf{x} \in K_t, \tag{0.1}$$

$$\kappa_2 \Delta \widetilde{\phi}_2(\mathbf{x}, t) - \frac{8\pi n_0 e_c^2}{\kappa_B \theta} \widetilde{\phi}_2(\mathbf{x}, t) = 0, \ \mathbf{x} \in \overline{K}_t^c, \tag{0.2}$$

$$\widetilde{\phi}_1(\mathbf{x}, t) = \widetilde{\phi}_2(\mathbf{x}, t), \quad (\kappa_1 \partial_\nu \widetilde{\phi}_1 - \kappa_2 \partial_\nu \widetilde{\phi}_2)(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial K_t, \tag{0.3}$$

subject to the growth condition at infinity

$$\widetilde{\phi}_2(\mathbf{x}, t) \to 0, \quad \left\langle \nabla \widetilde{\phi}_2(\mathbf{x}, t), \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right\rangle + \frac{8\pi n_0 e_c^2}{\kappa_2 \kappa_B \theta} \widetilde{\phi}(\mathbf{x}, t) = o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), \quad |\mathbf{x}| \to +\infty. \tag{0.4}$$

Here, δ is the Dirac measure concentrate in $\mathbf{0}$, $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots\} \subset K_0$, ν is the exterior unit normal vector to ∂K_t, e_c is the electron charge, z_i are the amount of charge in the position $\mathbf{x}_i(t) = Q(t)\mathbf{x}_i(0)$, n_0 is the bulk concentration of the solvent, κ_B is the Boltzmann constant and θ is the temperature of the system. The second equation in (0.1) is known as the linearized Poisson-Boltzmann equation. The perturbed potentials $\widetilde{\Phi}_1 = \widetilde{\Phi}|_{K_t}$ and $\widetilde{\Phi}_2 = \widetilde{\Phi}|_{\overline{K}_t^c}$ satisfy, for all $t \in [0, T]$,

$$\kappa_1 \Delta \widetilde{\Phi}_1(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in K_t, \qquad \kappa_2 \Delta \widetilde{\Phi}_2(\mathbf{x}, t) = 0, \ \mathbf{x} \in \overline{K}_t^c, \tag{0.5}$$

$$\widetilde{\Phi}_1(\mathbf{x}, t) = \widetilde{\Phi}_2(\mathbf{x}, t), \quad (\kappa_1 \partial_\nu \widetilde{\Phi}_1 - \kappa_2 \partial_\nu \widetilde{\Phi}_2)(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial K_t, \tag{0.6}$$

$$\widetilde{\Phi}_2(\mathbf{x}, t) + \mathbf{E}_\infty(t) \cdot \mathbf{x} \to 0, \quad |\mathbf{x}| \to +\infty. \tag{0.7}$$

The solvent velocity field $\mathbf{v}_f$ and the pressure p are governed by the Stokes equations for incompressible flows and satisfy suitable growth conditions at infinity

$$\overline{\mu}_f \partial_t \mathbf{v}_f - \eta \Delta \mathbf{v}_f(\mathbf{x}, t) + \nabla p(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \ (\mathbf{x}, t) \in \overline{K}_t^c \times (0, T) \tag{0.8}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_f(\mathbf{x}, t) = 0, \ (\mathbf{x}, t) \in \overline{K}_t^c \times (0, T), \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \to \mathbf{0}, \ p(\mathbf{x}, t) \to 0, \quad |\mathbf{x}| \to +\infty, \tag{0.9}$$

*Departamento de Matemática , UFSC, RS, Brasil, luciano@ufsc.br

where $\mathbf{F}(\mathbf{x},t) = -\frac{2n_0e_c^2}{\kappa_B\theta}(\widetilde{\phi}_2\nabla\widetilde{\Psi}_2)(\mathbf{x},t)$ is the electrical forcing term, p is the pressure, $\eta > 0$ and $\overline{\mu}_f > 0$ are the viscosity and the mass density of the fluid, respectively. Denoting $\mathbf{x}_c(t)$, $\mathbf{v}_c(t)$ and $\mathbf{w}(t)$ as the center of mass, the translational velocity and the rotation vector of the polymer at the time t, respectively, the evolution law for its motion is given by the Newtonian dynamic equations

$$M\frac{d\mathbf{v}_c}{dt}(t) = \int_{\partial K_t}\sigma_H(\mathbf{x},t)\cdot\nu(\mathbf{x},t)ds(\mathbf{x}) + \int_{\partial K_t}\sigma_E(\mathbf{x},t)\cdot\nu(\mathbf{x},t)ds(\mathbf{x}) \tag{0.10}$$

and

$$\mathcal{A}\frac{d\mathbf{w}}{dt}(t) = \int_{\partial K_t}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_c(t))\times(\sigma_H\cdot\nu)(\mathbf{x},t)ds(\mathbf{x}) + \int_{\partial K_t}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_c(t))\times(\sigma_E\cdot\nu)(\mathbf{x},t)ds(\mathbf{x}), \tag{0.11}$$

where σ_H is the stress tensor of the fluid, $\mathcal{A}$ and M are the inertial matrix and the mass of the particle, respectively. We require the velocities to be continuous at the interface between the solid body and fluid and satisfies suitable initial conditions

$$\mathbf{v}_f(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}_p(\mathbf{x},t) := \mathbf{v}_c(t) + \mathbf{w}(t)\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}_c(t)), \quad (\mathbf{x},t)\in\partial K_t\times(0,T), \tag{0.12}$$

$$\mathbf{v}_p(\mathbf{x},0) = \mathbf{v}_{p,0}(\mathbf{x}) := \mathbf{v}_{c,0} + \mathbf{w}_0\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}_c(0)),\ \mathbf{x}\in K_0, \quad \mathbf{v}_c(0)=\mathbf{v}_{c,0}, \quad \mathbf{w}(0)=\mathbf{w}_0, \tag{0.13}$$

$$\mathbf{v}_f(\mathbf{x},0) = \mathbf{v}_{f,0}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\overline{K}_0^c, \quad \mathbf{v}_{f,0}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_{p,0}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\partial K_0. \tag{0.14}$$

In order to eliminate the singular source term in (0.1) we consider G the fundamental solution of the Laplace equation in $\mathbb{R}^3$ and define $\Psi = \widetilde{\Phi} + \widetilde{\phi} - G$.

Definição 0.1. *Suppose $T > 0$, $(p, \mathbf{v}_f, \Psi, \mathbf{x}_c, \mathbf{w})$ is called a strong solution of (0.1)-(0.12) if $p \in L^2(0,T;H^1(\overline{K}_t^c)^3)$, $\mathbf{v}_f \in L^2(0,T;H^2(\overline{K}_t^c)^3)\cap H^1(0,T;L^2(\overline{K}_t^c)^3)\cap C([0,T];H^1(\overline{K}_t^c)^3)$, $\Psi \in L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}^3))$, $\nabla\Psi \in L^\infty(0,T;L^4(\overline{K}_t^c)^3)$, $\mathbf{x}_c \in H^2(0,T,\mathbb{R}^3)$, $\mathbf{w}\in H^1(0,T,\mathbb{R}^3)$, and satisfies (0.1)-(0.12) almost everywhere in $(0,T)$, K_t and $\overline{K}_t^c$ (or in the trace sense).*

The main result of the present work is

Teorema 0.1. *If ∂K_0 is of class C^2, $\mathbf{v}_{f,0} \in H^1(\overline{K}_0^c)^3$ and $\nabla\cdot\mathbf{v}_{f,0} = 0$ a. e. in $\overline{K}_0^c$, there exists $T > 0$ and a unique strong solution of the problem (0.1)-(0.12).*

The main ideas behind the proof are given below:

We follow the lines of the result established in [2] on the motion of rigid bodies in a viscous flow. However, the present problem is highly nonlinear, as $(\mathbf{x}_c, \mathbf{w})$ are *a priori* unknown and the source field $\mathbf{F}$ depends in a complex way of the potentials and the motion itself. Then we have to consider a sequence of non trivial modifications in the arguments. The proof consists in the use of a linearization technique: we choose $T > 0$, take $(\mathbf{x}_c, \mathbf{w})$ in $H^2(0,T,\mathbb{R}^3)\times H^1(0,T,\mathbb{R}^3)$ and replace it in the previous equations. The related polyelectrolyte positions $\overline{K}_t^c$ are completely determined by $(\mathbf{x}_c, \mathbf{w})$. Then we use a suitable change of the variables in order to reduce (0.1)-(0.12) to a problem in the cylindrical domain $\overline{K}_0\times(0,T)$. The problems (0.1) and (0.5) can be solved by singular integral arguments and, replacing $\widetilde{\Psi}$ and $\widetilde{\psi}$ in $\mathbf{F}$ we solve (0.8), (0.10) and (0.11) following an approach based on semigroup theory. Finally we search for the solution as a fixed point of a suitable mapping, using the contraction theorem.

References

[1] ANDERSON, J. L. - *Colloidal Transport by Interfacial Forces.* Ann. Rev. Fluid Mech., **21** (1989), pp. 61-99.

[2] TAKAHASHI, T. - *Analysis of strong solutions for the equations modeling the motion of a rigid-fluid system in a bounded domain.* Adv. Diff. Eq., **8**(12) (2003), pp. 1499-1532.

[3] TEUBNER, M. - *The Motion of Charged Particles in Electrical Fields.* J. Chem. Phys. **76**(11) (1982), pp. 5564–5573.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

Some results of partial equiasymptotic stability in measure for delay differential equations

Maria Aparecida Bená * & Sandra Maria Semensato de Godoy †

During the last years the stability concepts have been refined and further generalized in several directions. In particular, the concept of stability in terms of two measures, which has been proved to be very useful to unify a variety of stability concepts such as usual stability, partial stability, conditional stability and stability of invariant sets [1, 3]. Moreover, the concept of partial stability that has been studied by many authors [2, 4], is useful from the pratical point of view since in many situations one is interested in the behavior of some variables only. This type of stability arises naturally in applications in different areas. The aim of this work is to extend the concept of partial stability to partial stability in measure for delay differential equations by employing Liapunov theory.

For the sake of convenience, we introduce the following definitions and classes of functions:
$\Gamma = \{h \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}_+) : \inf_{(t,w)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^k} h(t,w) = 0\}$,
$\Gamma_0 = \{h_0 \in C(\mathbb{R}_+ \times C, \mathbb{R}_+) : \inf_{(t,\,\phi)\in\mathbb{R}_+\times C} h_0(t,\phi) = 0\}$,
$K = \{a \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) : a \,\text{is strictly increasing and}\, a(0) = 0\}$,
$CK = \{a \in C(\mathbb{R}^2_+, \mathbb{R}_+) : a(t,u) \in K,\, t \in \mathbb{R}_+\}$.

Let S be a Banach space. A function $h \in C(\mathbb{R}_+ \times X, \mathbb{R}_+)$ is called a measure in S (denoted by $h \in \Gamma$) if $\inf_{(t,s)\in\mathbb{R}_+\times S} h(t,s) = 0$.
Let $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ y = (y_1, y_2, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$, with norms $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ and $|y| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + ... + y_m^2}$, respectively. Let $z = (x, y) = (z_1, z_2, ..., z_{n+m}) \in \mathbb{R}^{n+m}$.
For $r \geq 0$, let $C = C([-r, 0], \mathbb{R}^{n+m})$ be a Banach space of continuous functions taking $[-r, 0]$ into $\mathbb{R}^{n+m}$. For a given $\psi = (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n)$ and $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$, let $\phi = (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_{n+m}) = (\psi, \lambda) \in C$.

Denote $||\psi|| = sup_{-r\leq\theta\leq0}\ h(\,t+\theta, \psi(\theta))$; $||\lambda|| = sup_{-r\leq\theta\leq0}\ h(\,t+\theta, \lambda(\theta))$; $||\phi|| = max\{\,||\psi||, ||\lambda||\,\}$; $B_H = \{\phi \in C : ||\phi|| \leq H\}$; $C_H = \{\phi \in C : ||\psi|| \leq H,\, ||\lambda|| < \infty\}$.

1 Mathematical Results

Consider the delay differential equation

$$z'(t) = f(t, z_t), \qquad z_{t_0} = \phi, \tag{1.1}$$

where $f \in C(\mathbb{R}_+ \times C_H, \mathbb{R}^{n+m})$, $f(t, 0) = 0$, f satisfies conditions of smoothness such that for each (t_0, ϕ), there exists a unique solution $z(t) = z(t, t_0, \phi) = (x(t), y(t)) = (x(t, t_0, \phi), y(t, t_0, \phi))$ of (1.1) which can be continued for all $t \geq t_0$, such that $h(t, x(t)) < H$.
If $z \in C([t_0 - r, \infty), \mathbb{R}^{n+m})$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$, we define $z_t = ((z_1)_t, (z_2)_t, ..., (z_{n+m})_t) = (x_t, y_t)$ by $z_t(\theta) = z(t + \theta), -r \leq \theta \leq 0$.
Let $h_0 \in \Gamma_0$, $h \in \Gamma$ and $z(t, t_0, \phi)$ be a solution of (1.1).
REMARK The study of the (h_0, h) - partial stability with respect to x of Equation (1.1) requires the control of ψ; λ does not, in principle, requires any monitoring (provided certain general conditions are observed). The above comment justifies the assumptions $\parallel \lambda \parallel < \infty$ and $\parallel \psi \parallel \leq H$, $H > 0$ constant.

*FFCLRP, USP, SP, Brasil, e-mail: mabena@ffclrp.usp.br
†ICMC, USP, SP, Brasil, e-mail: smsgodoy@icmc.usp.br

Definition 1.1. *If* $V \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}, \mathbb{R}_+)$ *and* $z(t, t_0, \phi)$ *is the solution of (1.1) through* (t_0, ϕ)*, define*

$$\dot{V}(t, z_t(t_0, \phi)) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \left[V(t+h, z_{t+h}(t_0, \phi)) - V(t, z_t(t_0, \phi))\right].$$

Definition 1.2. *Equation (1.1) is said to be*
(I) (h_0, h)*-partially equistable with respect to* x *(or* $(h_0, h) - x$ *equistable) if given* $\epsilon > 0$ *and* $t_0 \in \mathbb{R}_+$*, there exists a* $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ *that is continuous in* t_0 *for each* $\epsilon > 0$ *such that if* $h_0(t_0, \phi) < \delta$ *then* $h(t, x(t, t_0, \phi)) < \epsilon, \ t \geq t_0$*. If* $\delta = \delta(\epsilon)$*, i.e.,* δ *does not depend on* t_0*, then Equation (1.1) is called* (h_0, h)*- partially uniformly stable with respect to* x *(or* (h_0, h)*- uniformly* x *stable).*
(II) (h_0, h)*-partially attractive with respect to* x *(or* $(h_0, h) - x$ *attractive) if for every* $t_0 \in \mathbb{R}_+$*, there exists a* $\eta = \eta(t_0) > 0$ *and for every* $\epsilon > 0$ *and* ϕ *with* $h_0(t_0, \phi) < \eta$ *there exists* $\sigma = \sigma(\epsilon, t_0, \phi) > 0$ *such that* $h(t, x(t, t_0, \phi)) < \epsilon$*, for any* $t \geq t_0 + \sigma$*.*
(III) (h_0, h)*- equiattractive with respect to* x *(or* $(h_0, h) - x$ *equiattractive) if* σ *in (II) is independent of* ϕ*.*
(IV) (h_0, h)*-asymptotically* x *stable if it is* $(h_0, h) - x$ *stable and* $(h_0, h) - x$ *attractive.*
(V) (h_0, h)*-equiasymptotically* x *stable if it is* $(h_0, h) - x$ *stable and* $(h_0, h) - x$ *equiattractive.*

Definition 1.3. *Consider a functional* $V \in C(\mathbb{R}_+ \times C, \mathbb{R}_+)$ *and* $h \in \Gamma$*,* $h_0 \in \Gamma_0$*.* V *is said to be*
(i) $h - x$ *positive definite if* $V(t, 0) = 0$ *and there exist a* $\rho > 0$ *and a function* $a \in K$ *such that if* $h(t, \psi(0)) < \rho$ *then* $V(t, \phi) \geq a(h(t, \psi(0)))$*;*
(ii) h_0- *decrescent if there exist a* $\sigma > 0$ *and a function* $b \in K$ *such that if* $h_0(t, \phi) < \sigma$ *then* $V(t, \phi) \leq b(h_0(t, \phi))$*.*
iii) weakly h_0 *- decrescent if there exists* $\sigma > 0$ *and a function* $b \in CK$ *such that if* $h_0(t, \phi) < \sigma$ *then* $V(t, \phi) \leq b(t, h_0(t, \phi))$*.*

Definition 1.4. *Equation (1.1) is called* $(h_0, h) - y$ *bounded if* $h(t, x) < \xi < H$ *for* $t \geq t_0$ *implies that there exists a number* N_ξ *such that* $h(t, y) < N_\xi$*, for* $t \geq t_0$*.*

Theorem 1.1. *Suppose that: i) the measures* h_0 *and* h *satisfy the condition: if* $h_0(t, \phi) < \beta$ *then* $h(t, \psi(0)) \leq b(h_0(t, \phi)), b \in K$*; ii) there exists a functional* $V(t, \phi)$ *satisfying* $V(t, 0) = 0$*,* $V(t, \phi) \geq \xi(t)\, a\,(h(t, \psi(0)))$*,* $a \in K$*,* $\xi(t)$ *is a monotonically increasing function such that* $\xi(0) = 1$*,* $\lim_{t \to \infty} \xi(t) = \infty$*; iii)* $\frac{dV}{dt}(t, z_t(t_0, \phi)) \leq 0$*. Then Equation (1.1) is* (h_0, h) *- equiasymptotically* x *stable.*

Theorem 1.2. *Assume that there exist continuous functionals* $V(t, \phi)$ *and* $W(t, \phi)$ *satisfying the conditions : i)* $W(t, \phi)$ *is* $h - x$ *positive definite,* h_0 *- weakly decrescent and satisfies the condition i) of Theorem 1.1.; ii) for all* $t_0 \geq 0$*, there is* $M = M(t_0)$ *such that if* $h_0(t_0, \phi) < M$*, there exists a constant* $N = N(t_0, \phi) > 0$ *satisfying* $V(t, z_t(t_0, \phi)) \geq -N$*, for* $t \geq t_0$*; iii)* $\frac{dV}{dt}(t, z_t) \leq -W(t, z_t)$*; iv)* $\frac{dW}{dt}(t, z_t) \leq 0$*. Then Equation (1.1) is* $(h_0, h)-$ *equiasymptotically* x *stable.*

References

[1] GODOY, S. M. S.; BENÁ, M. A. - Stability criteria in terms of two measures of functional differential equations, *Appl. Math. Lett.*, Vol 18, 6 (2005), pp. 701-706.

[2] IGNATYEV, A. O. - On the partial equiasymptotic stability in functional differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, Vol 268, (2002), pp. 615-628.

[3] LIU, X. - Stability in terms of two measures for functional differential equations, *Differential and Integral Equations*, Vol 2, 1 (1989), pp. 13-20.

[4] VOROTNIKOV, V. I. - Partial stability and control: The state-of-the-art and development prospects (Reviews), *Automation and Remote Control*, Vol 66, 4 (2005), pp. 511-561.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

RESOLUBILIDADE GLOBAL DE UM SISTEMA DE EDP'S LINEARES PERIÓDICAS

ADALBERTO P. BERGAMASCO * & CLEBER DE MEDEIRA † & SÉRGIO L. ZANI ‡

Seja b uma 1-forma fechada, real e de classe C^∞ definida no toro tridimensional $\mathbb{T}^3$. Consideremos o subfibrado de posto 1 (*line subbundle*), T', do fibrado cotangente complexificado $\mathbb{C} \otimes T^*(\mathbb{T}^4)$ gerado pela 1-forma $dx - ib \in \bigwedge^1 \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^4)$, onde x denota a variável em $\mathbb{S}^1$. O fibrado ortogonal $\mathcal{V} = (T')^\perp$ é um subfibrado vetorial de $\mathbb{C} \otimes T(\mathbb{T}^4)$ cujas fibras têm dimensão 3. O subfibrado $\mathcal{V}$ é gerado pelos campos vetoriais

$$\mathbb{L} = \{L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + ib_j(t)\frac{\partial}{\partial x}, \quad j = 1, 2, 3$$

onde $(t, x) = (t_1, t_2, t_3, x)$ são as coordenadas em $\mathbb{T}^4$ e $b(t) = b_1(t)dt_1 + b_2(t)dt_2 + b_3(t)dt_3$. Definido desta forma, o subfibrado $\mathcal{V}$ é uma estrutura localmente integrável de codimensão um sobre $\mathbb{T}^4$ (veja [7]).

Estamos interessados na resolubilidade global de $\mathbb{L}$, em outras palavras, dadas funções $f_j \in C^\infty(\mathbb{T}^4)$ $j = 1, 2, 3$ satisfazendo certas condições naturais, procuramos obter condições necessárias e/ou suficientes para que exista solução u das equações diferenciais parciais

$$L_j u = f_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Equivalentemente podemos estudar o sistema de EDP's acima em $\mathbb{R}^4$, considerando b_j e f_j $j = 1, 2, 3$ como funções periódicas no $\mathbb{R}^4$. Estamos interessados em soluções periódicas desse sistema.

Em [6], Treves demonstrou que a *resolubilidade semiglobal* de $\mathbb{L}$ é intimamente relacionada com a propriedade de que os conjuntos de subnível (bem como os de supernível) de uma primitiva semiglobal da 1-forma b sejam conexos. Em [5], foi demonstrado que, quando b é uma forma exata, a *resolubilidade global* de $\mathbb{L}$ é equivalente à propriedade dos conjuntos de subnível (bem como os de supernível) de uma primitiva global da 1-forma b serem conexos. Em [1] Bergamasco e Kirilov estudaram a resolubilidade de 2 campos em $\mathbb{T}^3$ no caso incomensurável (ie, as médias das funções b_j são racionalmente independentes). Provaram que a *resolubilidade global* é equivalente à propriedade dos conjuntos de subnível (e supernível) da primitiva global (definida em $\mathbb{R}^3$) da 1-forma b serem conexos. De forma natural tentamos estender o resultado provado em [1] para 3 campos em $\mathbb{T}^4$.

1 Uma situação de não resolubilidade

Seja $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a primitiva da 1-forma fechada b definida em $\mathbb{R}^3$. Mostramos que numa situação bastante conveniente, $\mathbb{L}$ não é globalmente resolúvel. Sejam $b_{j0} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} b_j(0, .., t_j, .., 0)dt_j$ $j = 1, 2, 3$ as médias das funções b_j. Temos três situações a considerar, a saber

- As três médias são racionalmente independentes (caso incomensurável).
- Apenas duas das três médias são racionalmente independentes.
- As três médias são múltiplos racionais uma da outra.

Obs: No caso em que as três médias são nulas, temos que b é exata (neste caso veja [5]).

*ICMC, USP, SP, Brasil, e-mail: apbergam@icmc.usp.br
†ICMC, USP, SP, Brasil, e-mail: cleberm@icmc.usp.br
‡ICMC, USP, SP, Brasil, e-mail: szani@icmc.usp.br

Apresentamos aqui o caso incomensurável. Suponha que:
$i)$ $b_{30} < b_{20} < b_{10} < 0$;
$ii)$ O máximo da função $B_{|[0,2\pi]^3}$ não ocorre na fronteira do cubo $[0, 2\pi]^3$;
$iii)$ $B(0) = 0$.

Teorema 1.1. *Sob as condições acima, B possui supernível não conexo e o sistema $\mathbb{L}$ não é globalmente resolúvel.*

Demonstração: (idéia) Para verificar que $\mathbb{L}$ não é globalmente resolúvel apresentamos funções f_1,f_2 e f_3 em $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^4)$ satisfazendo as condições de compatibilidade do sistema, tal que não existe distribuição u que satisfaz

$$L_j u = f_j \quad j = 1, 2, 3.$$

Uma das condições naturais de compatibilidade do sistema é que $L_1L_2f_3 = L_1L_3f_2 = L_2L_3f_1$. Então o plano é começar com uma função $h \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^4)$ e usar a relação

$$h \doteq L_1L_2f_3 = L_1L_3f_2 = L_2L_3f_1$$

para encontrar os coeficientes parciais de Fourier das funções f_1, f_2 e f_3 que procuramos.

2 Caso desacoplado

Diremos que o sistema $\mathbb{L}$ é desacoplado, quando cada função b_j depender apenas da variável t_j, mais precisamente

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + ib_j(t_j)\frac{\partial}{\partial x}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Teorema 2.1. *O sistema (desacoplado) acima é globalmente resolúvel se e somente se existe um b_j não identicamente nulo que não muda de sinal.*

Nas condições do teorema acima, caso todos os b_j mudem de sinal, fazendo algumas mudanças de coordenadas em $\mathbb{R}^4$ mostramos que o sistema desacoplado recai nas condições $i), ii)$ e $iii)$.

Referências

[1] BERGAMASCO A. AND KIRILOV A. - Global solvability for a class of overdetermined systems, *J. Functional Analysis,* **252**, 603–629, 2007.
[2] BERGAMASCO A., NUNES W. AND ZANI S. - Global Analytic Hypoellipticity and Pseudoperiodic Functions, *Math. Contemp.* **18**, 43–57, 2000.
[3] BERGAMASCO A., NUNES W. AND ZANI S. - Global Properties for a Class of Overdetermined Systems, *J. Functional Analysis,* **200**, 31–64, 2003.
[4] BERGAMASCO A. AND PETRONILHO G. - Global solvability of a class of involutive systems, *J. Math. Anal. Appl.* **233**, 314–327, 1999.
[5] CARDOSO F. AND HOUNIE J. - Global Solvability of an Abstract Complex, *Proc. Amer. Math. Soc.* **65**, 117–124, 1977.
[6] TREVES F. - Solvability of a Model in the Theory of Complexes of Pseudo-differential Operators, *Ann. Math.* (2) **104**, 269–324, 1976.
[7] TREVES F. - *Hypoanalytic Structures (Local Theory)*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ 1992

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

Dual properties of the approximation properties determined by operator ideals

Sonia Berrios * & Geraldo Botelho †

Given Banach spaces E and F, by $\mathcal{L}(E;F)$ we denote the Banach space of all bounded linear operators from E to F. An *operator ideal* $\mathcal{I}$ is a subclass of the class of all continuous linear operators between Banach spaces such that for all Banach spaces E e F, the component $\mathcal{I}(E;F)=\mathcal{L}(E;F)\cap\mathcal{I}$ satisfy:
(a) $\mathcal{I}(E;F)$ is a linear subspace of $\mathcal{L}(E;F)$ which contains the finite rank operators.
(b) Ideal property: If $T\in\mathcal{L}(E;F)$, $R\in\mathcal{I}(F;G)$ and $S\in\mathcal{L}(G;H)$, then the composition $S\circ R\circ T$ is in $\mathcal{I}(E;H)$.

Some examples of ideals of linear operators are the family of finite rank, approximable, compact, weakly compact, p-nuclear, dualisable, separable, Dunford-Pettis, integral, strictly singular, strictly cosingular, K-convex, quasinuclear operators, which are denoted by $\mathcal{F}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{N}_p$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{DP}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{SS}$, $\mathcal{SC}$, $\mathcal{KC}$, $\mathcal{QN}$, respectively.

For a subset S of $\mathcal{L}(E;F)$, the symbol $\overline{S}^{\tau_c}$ represents the closure of S with respect to the compact-open topology τ_c. It is well known that a Banach space E has the approximation property (AP) if $\mathcal{L}(E;E)=\overline{\mathcal{F}(E;E)}^{\tau_c}$. A Banach space E has the compact approximation property (CAP) if $\mathcal{L}(E;E)=\overline{\mathcal{K}(E;E)}^{\tau_c}$. A Banach space E has the weakly compact approximation property (WCAP) if $\mathcal{L}(E;E)=\overline{\mathcal{W}(E;E)}^{\tau_c}$.

Having in mind that $\mathcal{F},\mathcal{K}$ and $\mathcal{W}$ are operator ideals, the properties above can be regarded as particular instances of the following general concept:

Definition 0.1. Let $\mathcal{I}$ be an operator ideal. A Banach space E is said to have the $\mathcal{I}$-approximation property (in short, E has $\mathcal{I}$-AP) if $\mathcal{L}(E;E)=\overline{\mathcal{I}(E;E)}^{\tau_c}$.

It is clear that if E has AP then E has $\mathcal{I}$-AP for every operator ideal $\mathcal{I}$. In particular, Banach spaces with Schauder basis (e.g., ℓ_p, $1\le p<\infty$, and c_0) have $\mathcal{I}$-AP for every operator ideal $\mathcal{I}$.

Let us stress that different ideals may give rise to different approximation properties: (i) Willis [8] showed that there are spaces with CAP but not with AP; (ii) Szankowski [7] proved that for $1\le p<2$, ℓ_p has a subspace S_p without CAP, so $S_{\frac{3}{2}}$ has WCAP but not CAP and S_1 has $\mathcal{CC}\cap\mathcal{C}_2$-AP but not CAP, where $\mathcal{CC}$ and $\mathcal{C}_2$ are the ideals of completely continuous and cotype 2 operators, respectively.

One important question about the AP is whether or not it passes to the dual space, the question in the opposite direction is equally important. Well known is that if the dual E' has the AP, then so does E, in general, the converse does not hold. But, the corresponding dual problem for the CAP is open (See Casazza [1], Problem 8.5). In this work we study the dual properties of the $\mathcal{I}$-approximation property.

1 Results

Given an operator ideal $\mathcal{I}$ and Banach spaces E and F, define

$$\mathcal{I}^{dual}(E;F)=\{S\in\mathcal{L}(E;F)\ \text{such that the adjoint operator}\ S'\in\mathcal{I}(F';E')\}.$$

It is well known that $\mathcal{I}^{dual}$ is an operator ideal.

*Universidade Federal de Uberlandia , MG, Brasil, e-mail: soniles@famat.ufu.br. Partially supported by Fapemig.
†Universidade Federal de Uberlandia, MG, Brasil, e-mail: botelho@ufu.br

Theorem 1.1. *Let $\mathcal{I}_1$ and $\mathcal{I}_2$ be operator ideals such that either $\mathcal{I}_2 \subseteq \mathcal{I}_1^{dual}$ or $\mathcal{I}_2^{dual} \subseteq \mathcal{I}_1$ and E be a reflexive Banach space.*
(a) *If E' has $\mathcal{I}_2$-AP then E has $\mathcal{I}_1$-AP.*
(b) *If E has $\mathcal{I}_2$-AP then E' has $\mathcal{I}_1$-AP.*

Corollary 1.1. *Let $\mathcal{I}$ be an operator ideal such that either $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^{dual}$ or $\mathcal{I}^{dual} \subseteq \mathcal{I}$ and E be a reflexive Banach space. Then E' has the $\mathcal{I}$-approximation property if and only if E has the $\mathcal{I}$-approximation property.*

Example 1.1. Let us see that there is plenty of ideals satisfying the conditions of Theorem 1.1 and Corollary 1.1.
(i) $\mathcal{N}_1^{dual} \subseteq \mathcal{J}$ [4, Ex. 16.9], $\mathcal{SS}^{dual} \subseteq \mathcal{SC}$ and $\mathcal{SC}^{dual} \subseteq \mathcal{SS}$ [5, 1.18], $\mathcal{N}_1^{dual} \subseteq \mathcal{QN}$ [4, Ex. 9.13(b)].
(ii) The following ideals are completely symmetric (that is $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{dual}$): $\mathcal{F}, \mathcal{A}, \mathcal{K}, \mathcal{W}$ [6, Proposition 4.4.7], $\mathcal{J}$ [4, Corollary 10.2.2], $\mathcal{KC}$ [4, 31.1].
(iii) The following ideals satisfy $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^{dual}$: $\mathcal{N}_1$ [4, 9.9] and $\mathcal{D}$ [6, Proposition 4.4.10].
(iv) The following ideals satisfy $\mathcal{I}^{dual} \subseteq \mathcal{I}$: $\mathcal{S}$ [6, Proposition 4.4.8] and $\mathcal{DP}$ [5, 1.15].

Our next aim is to show that the implication E' has $\mathcal{I}-$AP $\Longrightarrow E$ has $\mathcal{I}$-AP holds in some situations not covered by Corollary 1.1. A couple of concepts defined in [2] are needed:

Definition 1.1. Let E be a Banach space. The *weak*-topology* on $\mathcal{L}(E'; E')$ is the topology for which a net (T_α) in $\mathcal{L}(E'; E')$ converges to $T \in \mathcal{L}(E'; E')$ if and only if $\sum_{n=1}^{\infty}(T_\alpha(x_n'))x_n \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(T(x_n'))x_n$ for every $(x_n) \subseteq E$ and $(x_n') \subseteq E'$ satisfying $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n'\|\|x_n\| < \infty$.

Given a Banach space E, be w^* we mean the ordinary weak* topology on E'. For a given operator ideal $\mathcal{I}$, by $\mathcal{I}_{w^*}(E'; E')$ we denote the set of all operators belonging to $\mathcal{I}(E'; E')$ which are w^*-to-w^* continuous.
The dual space E' is said to have the *weak* density* for $\mathcal{I}$ (in short, E has $\mathcal{I}$-W*D) if $\mathcal{I}(E'; E') \subseteq \overline{\mathcal{I}_{w^*}(E'; E')}^{weak^*}$.

Example 1.2. There are nonreflexive dual Banach spaces having $\mathcal{I}$-W*D for every operator ideal $\mathcal{I}$. In [2, Proposition 2.7(a)] it is proved that ℓ_1 has $\mathcal{K}$-W*D. The only feature of compact operators used in the proof is the ideal property, so the same lines prove that $\ell_1 = (c_0)'$ is a nonreflexive dual Banach space having $\mathcal{I}$-W*D for every operator ideal $\mathcal{I}$.

So, formally Corollary 1.1 does not apply to dual spaces having $\mathcal{I}$-W*D. Anyway we have:

Proposition 1.1. *Let E be a Banach space and let $\mathcal{I}$ be an operator ideal such that $\mathcal{I}^{dual} \subseteq \mathcal{I}$. If E' has $\mathcal{I}$-AP and $\mathcal{I}$-W*D, then E has $\mathcal{I}$-AP.*

References

[1] P. G. Casazza, *Approximation properties*, Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. I, 271–316, North-Holland, Amsterdam, 2001.

[2] C. Choi and J. M. Kim, *On dual and three space problems for the compact approximation property*, J. Math. Anal. Appl. **323** (2006), 78–87.

[3] E. Çaliskan, *Ideal of homogeneous polynomials and weakly compact approximation in Banach spaces,* Czechoslovak Math. J. **57(132)** (2007), 763–776.

[4] A. Defant and K. Floret, *Tensor norms and operator ideals*, North-Holland Mathematics Studies 176, North-Holland, Amsterdam, 1993.

[5] J. Diestel, H. Jarchow and A. Pietsch, *Operator Ideals*, Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. I, 437–496, North-Holland, Amsterdam, 2001.

[6] A. Pietsch, *Operator Ideals*, North-Holland, 1980.

[7] A. Szankowski, *Subspaces without approximation property*, Israel J. Math. **30** (1978), 123–129.

[8] G. Willis, *The compact approximation property does not imply the approximation property*, Studia Math. **103** (1992), 99–108.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

UM ESTUDO SOBRE VERSÕES FRACAS DE ESPAÇOS DE BANACH

FÁBIO JOSÉ BERTOLOTO *

Sejam $T = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, $\Delta = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, F um espaço de Banach e F' seu dual topológico. Denote por $H^p(\Delta; F)$ o espaço de Hardy das funções holomorfas $f: \Delta \longrightarrow F$ tais que, para $1 \leq p < \infty$,

$$\|f\|_p = \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f(re^{i\theta})\|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

se $f \in H^p(\Delta; F)$ e

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in \Delta} \|f(z)\| < \infty.$$

se $f \in H^\infty(\Delta; F)$.

Denote por $L^p(T; F)$, para $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Banach das funções $f: T \longrightarrow F$ que são mensuráveis com respeito à medida de Lebesgue tais que

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f(e^{i\theta})\|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \qquad (1 \leq p < \infty)$$

e

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{0<\theta<2\pi} \|f(e^{i\theta})\|,$$

onde *ess sup* denota o supremo essencial.

Se denotarmos por $\mathcal{H}(\Delta; F)$ o espaço de Banach das funções holomorfas de Δ em F, então a versão fraca é dada por

$$\mathcal{H}_w(\Delta; F) = \{f: \Delta \longrightarrow F; \psi \circ f \in \mathcal{H}(\Delta; \mathbb{C}), \forall \psi \in F'\}.$$

De maneira análoga, temos para $1 \leq p \leq \infty$

$$L^p_w(T; F) = \{f: T \longrightarrow F; \psi \circ f \in L^p(T; \mathbb{C}), \forall \psi \in F'\}$$

os espaços fracamente Lebesgue integráveis e

$$H^p_w(\Delta; F) = \{f: \Delta \longrightarrow F; \psi \circ f \in H^p(\Delta, \mathbb{C}), \forall \psi \in F'\}$$

os espaços fracamente de Hardy.

Em Mujica [4, p. 65] é mostrado que $\mathcal{H}_w(\Delta; F) = \mathcal{H}(\Delta; F)$ para qualquer espaço de Banach F.

Fazemos a pergunta: o que ocorre se consideramos espaços de Hardy ou espaços Lebesgue integráveis nas respectivas versões fracas? Podem as versões fracas e fortes coincidirem, como no caso dos espaços de funções holomorfas?

Neste trabalho, veremos que nem sempre estas igualdades ocorrem. No caso das funções Lebesgue integráveis, se $1 \leq p < \infty$ provamos que é condição necessária e suficiente que F tenha dimensão finita, como vemos no seguinte resultado:

*Faculdade de Matemática , UFU, MG, Brasil, bertoloto@famat.ufu.br

Teorema 0.1. Para todo F temos:

1) $L_w^\infty(T;F) = L^\infty(T;F)$ se F é separável.

2) As seguintes afirmações são equivalentes:

a) $L_w^p(T;F) = L^p(T;F)$ para todo $1 \leq p < \infty$.

b) $L_w^p(T;F) = L^p(T;F)$ para algum $1 \leq p < \infty$.

c) O espaço de Banach F tem dimensão finita.

Se pensarmos nos espaços de Hardy, é conhecido que se F tem dimensão finita a igualdade é válida. No caso de dimensão infinita, concluímos que para uma série de espaços de Banach a igualdade não é verdadeira. Para isto, trabalhamos com espaços F satisfazendo a propriedade de que qualquer função em $H^\infty(D,F)$ tenha limites radiais quase sempre. Dizemos então que F tem a propriedade de Radon-Nikodym analítica (ARNP para abreviar). Esta propriedade foi considerada, primeiramente, por Bukhvalov e A.A. Danilevich [1], [2]. É conhecido que ter tal propriedade é equivalente ao fato de que funções em $H^p(\Delta, X)$ para algum (e equivalentemente para todo) $1 \leq p < \infty$ têm limites radiais quase sempre. Foi provado que a propriedade de Radon-Nikodym em um espaço F (RNP para abreviar) (ver Diestel [3] para definição) é equivalente à propriedade de que toda função harmônica limitada $f\colon \Delta \longrightarrow F$ tem limites radiais quase sempre. Assim, RNP implica em ARNP. Sabe-se que $F = c_0$ não tem a propriedade ARNP e que $L^1(\mu)$ é um espaço com a propriedade ARNP, mas sem RNP. Também trabalhamos com espaços que tenham a propriedade das sequências de Martingale serem incondicionalmente convergente (UMD para abreviar). Por Phillips [5], todo espaço UMD é também RNP. Mas, não vale a implicação contrária.

Foi provado, então, o seguinte:

Teorema 0.2. Se F e F' têm a propriedade ARNP e

$$H_w^p(\Delta;F) = H^p(\Delta;F) \tag{0.1}$$

é válida para algum $1 < p < \infty$, então F é UMD.

Deste último resultado, concluímos que como nem todo ARNP é UMD, nem sempre vale a igualdade (0.1).

Para $p = 1$ não temos resultados relacionados. Se $p = \infty$, sempre vale que $H^\infty(\Delta;F) = H^\infty(\Delta;F)$, independente do espaço de Banach F considerado.

A pergunta que fica é: seria a igualdade (0.1) equivalente ao fato de F ter dimensão finita?

Referências

[1] BUKHVALOV, A. V. EDANILEVICH, A. A. - *Boundary properties of analytic and harmonic functions with values in Banach space*, Mat. Zametki, **31**,203-214, 1982 [Russian]; Math. Notes Acad. Sci. USSR, **31**, 104-110, 1982.

[2] BUKHVALOV, A. V. AND DANILEVICH, A. A. - *On the analytic Radon-Kikodym property. Function Spaces*, Proc. Second Internatr. conf. Poznana, 1989, Teubner-Texte zur Math, **120**, 211-228, 1991.

[3] DIESTEL, J. AND UHL, J. J. - *Vector Measures*, AMER. MATH. SOC., 1977.

[4] MUJICA, J. - *Complex Analysis in Banach Spaces*, MATH. STUDIES, **120**, NORTH-HOLLAND, AMSTERDAM, 1986.

[5] PHILLIPS, R. S. - *On weakly compact subsets of a Banach space*, AMER. J. MATH, **64**, 108-136, 1943.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

HIPERCILICIDADE EM ESPAÇOS DE FUNÇÕES Θ-HOLOMORFAS DE TIPO LIMITADO

F. J. Bertoloto * & V. V. Fávaro † & A. M. Jatobá ‡

Sejam E um espaço de Banach, Θ um tipo de holomorfia e denote por $H(\mathbb{C}^n)$ o espaço de Fréchet de todas as funções inteiras de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}$, munido com a topologia compacto-aberta.

Godefroy e Shapiro [4, Theorem 5.1] provaram que todo operador de convolução contínuo, definido em $H(\mathbb{C}^n)$ e que não é múltiplo da identidade, é hipercíclico em $H(\mathbb{C}^n)$.

Em [2], foram introduzidos os conceitos de π_1 e π_2 tipos de holomorfia e o espaço $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ das funções $f: E \longrightarrow \mathbb{C}$ que são Θ-holomorfas de tipo limitado.

Neste trabalho, provaremos que se E' é separável e Θ é um π_1-π_2-tipo de holomorfia, então todo operador de convolução contínuo, definido em $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ e que não é múltiplo da identidade, é hipercíclico em $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$.

1 Definições e Resultados

Detalharemos agora os conceitos essenciais deste trabalho e enunciaremos o resultado principal deste trabalho (Teorema 1.1).

Definição 1.1. Sejam X um espaço vetorial topológico e $T: X \to X$ um operador linear contínuo. Dizemos que T *hipercíclico*, se existe $x \in X$, tal que a *órbita de* x, denotada por $\mathrm{Orb}(T, x) = \{x, Tx, T^2x, \ldots\}$, é densa em X. Neste caso, x é chamado de *vetor hipercíclico para* T.

Definição 1.2. Sejam E e F espaços de Banach. Um *tipo de holomorfia* Θ de E em F é uma sequência de espaços de Banach $(\mathcal{P}_\Theta(^jE; F), \|\cdot\|_\Theta)_{j=0}^\infty$ para a qual são válidas as seguintes afirmações:

1. Cada $\mathcal{P}_\Theta(^jE; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^jE; F)$.
2. $\mathcal{P}_\Theta(^0E; F)$ coincide com $\mathcal{P}(^0E; F) = F$ como um espaço vetorial normado.
3. Existe um número real $\sigma \geq 1$ tal que, dados $k \in \mathbb{N}_0$, $j \in \mathbb{N}_0$, $k \leq j$, $a \in E$, e $P \in \mathcal{P}_\Theta(^jE; F)$, temos que
$$\hat{d}^kP(a) \in \mathcal{P}_\Theta(^kE; F),$$
$$\|\frac{1}{k!}\hat{d}^kP(a)\|_\Theta \leq \sigma^j \cdot \|P\|_\Theta \cdot \|a\|^{j-k}.$$

Definição 1.3. Sejam $(\mathcal{P}_\Theta(^jE; F))_{j=0}^\infty$ um tipo de holomorfia de E em F e $f: E \longrightarrow F$ uma função inteira cuja série de Taylor em torno da origem é dada por $f(x) = \sum\limits_{j=0}^\infty \frac{1}{j!}\hat{d}^jf(0)(x)$. Dizermos que f é uma função Θ-*holomorfa de tipo limitado* de E em F se

1. $\frac{1}{j!}\hat{d}^jf(0) \in \mathcal{P}_\Theta(^jE; F)$ para todo $j = 0, 1 \ldots,$
2. $\lim\limits_{j\to\infty}\left(\frac{1}{j!}\|\hat{d}^jf(0)\|_\Theta\right)^{\frac{1}{j}} = 0.$

*Universidade Federal de Uberlândia , UFU, MG, Brasil, bertoloto@famat.ufu.br.
†Universidade Federal de Uberlândia , UFU, MG, Brasil, vvfavaro@gmail.com.
‡Universidade Federal de Uberlândia , UFU, MG, Brasil, marques@famat.ufu.br. Agradeço à FAPEMIG pelo apoio financeiro.

Denotaremos por $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$ o espaço de Fréchet de todas as funções Θ-holomorfas de tipo limitado de E em F, com a topologia localmente convexa dada pela sequência de seminormas $(p_n)_{n=1}^{\infty}$, definidas por

$$p_n(f) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{n^j}{j!} \|\hat{d}^j f(0)\|_{\Theta},$$

Quando $F = \mathbb{C}$ escrevemos $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;\mathbb{C}) = \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$.

Definição 1.4. Um *operador de convolução* em $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ é um operador linear contínuo $L\colon \mathcal{H}_{\Theta b}(E) \to \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ que comuta com translações, isto é,

$$L(\tau_a f) = \tau_a(Lf),$$

para todos $a \in E$ e $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$, onde $\tau_a f(z) = f(z+a)$.

Teorema 1.1. *Se E' é separável e $(\mathcal{P}_{\Theta}(^j E))_{j=0}^{\infty}$ é um π_1-π_2-tipo de holomorfia, então todo operador de convolução em $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ que não é múltiplo da identidade é hipercíclico.*

Corolário 1.1. *Seja E' um espaço de Banach separável e $(\mathcal{P}_{\Theta}(^j E))_{j=0}^{\infty}$ um π_1-π_2-tipo de holomorfia.*

(*i*) *Para cada $T \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$ que não é múltiplo escalar da função avaliação em zero, o operador*

$$\begin{array}{rcl} L_T\colon \mathcal{H}_{\Theta b}(E) & \longrightarrow & \mathcal{H}_{\Theta b}(E) \\ f & \mapsto & L_T(f) = T * f \end{array}$$

é hipercíclico, onde $T * f(x) := T(\tau_{-x} f)$ para todo $x \in E$.

(*ii*) *Todo operador de convolução em $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ não-nulo tem imagem densa em $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$.*

Referências

[1] R. ARON AND J. BÈS - *Hypercyclic Differentiation Operatos*, in Function Spaces (Edwardsville, IL, 1998), 39 46, Contemp. Math., 232, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1999.

[2] V. V. FÁVARO, , A. M. JATOBÁ, - *Holomorphy types and spaces of entire functions of bounded type on Banach spaces*, Czechoslovak Mathematical Journal, vol. 59 (2009), number 4, 909-927.

[3] R. M. GETHENER AND J. H. SHAPIRO .- *Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions.*, Proc. Amer. Math. Soc., 100 No. 2(1987),281-288.

[4] G. GODEFROY AND J. H. SHAPIRO.- *Operator whit dense, invariant, cyclic vector manifolds.*, J. Funct. Anal., 98: 229-269, 1991.

[5] C. P. GUPTA - *Convolution Operators and Holomorphic Mappings on a Banach Space*, Département de Mathématiques, Université de Sherbrooke, 1969.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$\underline{\text{o}}$ 4 Novembro 2010

Polinômios Univalentes e Ortogonais*

Vanessa Bertoni †

Seja $\mathbb{D}$ o disco unitário aberto no plano complexo $\mathbb{C}$, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ a circunferência unitária e $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ o conjunto de todas as funções analíticas em $\mathbb{D}$. Uma função $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ é *univalente* se é um-a-um em $\mathbb{D}$. Consideremos o conjunto de várias funções univalentes em $\mathbb{D}$: $\mathcal{N}_n(\mathbb{D})$ denota o conjunto de todos os polinômios de grau n da seguinte forma

$$p_n(z) = z + \sum_{k=2}^{n} b_k z^k, \tag{0.1}$$

enquanto $\mathcal{S}_n(\mathbb{D})$ denota o subconjunto de $\mathcal{N}_n(\mathbb{D})$ formado por polinômios univalentes.

Além disso, $\mathcal{K}_n(\mathbb{D})$ denota o subconjunto de $\mathcal{N}_n(\mathbb{D})$ composto por elementos cuja imagem através de $\mathbb{D}$ é um conjunto convexo. Para finalizar, a classe

$$\mathcal{C}_n(\mathbb{D}) = \{p \in \mathcal{N}_n(\mathbb{D}) : \mathrm{Re}(p'/e^{i\alpha}\varphi') \geq 0 \text{ para algum } \varphi \in \mathcal{K}_n(\mathbb{D}) \text{ and } \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Elementos de $\mathcal{K}_n(\mathbb{D})$ são chamados polinômios univalentes *convexos* e os de $\mathcal{C}_n(\mathbb{D})$ são chamados polinômios univalentes *close-to-convex*. Para esses últimos temos o seguinte resultado de Suffridge.

Teorema 0.1. *([4, Theorem 2]) Seja P um polinômio de grau n com todos os seus pontos críticos em $\mathbb{T}$. Se cada par de pontos críticos é separado por uma ângulo de pelo menos $2\pi/(n+1)$, então P é close-to-convex e portanto univalent em $\mathbb{D}$. Contrariamente, se P é close-to-convex em $\mathbb{D}$, então seus pontos críticos são separados por uma ângulo de pelo menos $2\pi/(n+1)$.*

Por outro lado, para os polinômios ortogonais temos uma ferramento muito poderosa que é a relação de recorrência de três termos. Seja $\{Q_m\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de polinômios gerada por

$$Q_{m+1}(z) = (z + \beta_{m+1})Q_m(z) - \alpha_{m+1} z Q_{m-1}(z), \quad m \geq 1, \tag{0.2}$$

com $Q_0 = 1$ e $Q_1(z) = z + \beta_1$, onde α_m e β_m são números complexos satisfazendo $\alpha_{m+1} \neq 0 \neq \beta_m$, $m \geq 1$.

Sabemos que para uma escolha particular de α_{m+1} e β_{m+1}, $m \geq 1$, os correspondentes polinômios satisfazem a propiedade da ortogonalidade. Por exemplo, mencionamos os polinômios de Szegő $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ introduzidos em [4].

Em 1989, Jones et. al [1] estudaram os polinômios relacionados com os polinômios Szegő $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$, os chamados polinômios *para-ortogonais*

$$B_n(z, \omega_n) = \rho_n(z) + \omega_n \rho_n^*(z), \qquad |\omega_n| = 1, \tag{0.3}$$

em que $\rho_n^*(z) = z^n \overline{\rho}_n(1/z)$ são os polinômios recíprocos. Estes polinômios estão associados a uma medida ν e a um parâmetro ω_n.

Uma outra propriedade interessante desses polinômios é que B_n possui n zeros simples todos em $\mathbb{T}$, veja em [1]. Na relação (0.2) para casos particulares de β_{m+1} e α_{m+1} os polinômios Q_m têm a mesma propriedade.

O comportamento dos zeros desses polinômios juntamente com o resultado de Suffridge para polinômios univalentes dado anteriormente, nos motivou a buscar uma ligação entre eles. Nós investigamos critérios de univalência para polinômios P_m tais que suas derivadas P_m' satisfazem uma relação da forma (0.2). Em seguida, consideramos polinômios U_n tais que suas derivadas U_n' são polinômios que satisfazem (0.3). Por exemplo, um dos resultados que obtemos é dado pelo teorema abaixo.

*Este trabalho tem apoio financeiro da FAPEMIG
†Faculdade de Matemática de Uberlândia - FAMAT - UFU, bertoni@famat.ufu.br

Teorema 0.2. *Sejam os polinômios U_{n+1} tais que suas derivadas são polinômios para-ortogonais. Suponhamos que as desigualdades*

$$0 < |a_n| \leq \frac{2}{n^2 + n - 2}, \quad n > 1, \tag{0.4}$$

são válidas. Então U_{n+1} é close-to-convex em $\mathbb{D}$.

Aqui, a_n são os coeficientes de reflexão para os polinômios de Szegő.

Consideramos também, alguns exemplos que se encaixam em nossos resultados.

Referências

[1] Jones, William B. and Njåstad, Olav and Thron, W. J. - Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle *Bull. London Math. Soc.*, **21**, 113–152, 1989.

[2] Sheil-Small, T. - *Complex polynomials, Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, 2002.

[3] Suffridge, T. J. - Starlike functions as limits of polynomials, 164–203. *Lecture Notes in Math.*, **505**, 164–203, Springer-Berlin, 1976.

[4] Szegő, G. - Orthogonal Polynomials *Amer. Math. Soc. - Amer. Math. Soc. Colloq. Publi.*, **23**, 1975.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

COMPUTING THE FIRST EIGENPAIR OF THE p-LAPLACIAN VIA ITERATION OF SUBLINEAR SUPER-SOLUTIONS

RODNEY J. BIEZUNER, * GREY ERCOLE † & EDER M. MARTINS ‡

Consider the following eigenvalue problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda \, |u|^{p-2} \, u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

where $\Delta_p u := \operatorname{div} |\nabla u|^{p-2} \nabla u$, $p > 1$, is the p-Laplacian operator and $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$, is any smooth, bounded domain.

We develop an iterative method to obtain the first eigenpair (λ_p, e_p) of (0.1), where λ_p denotes the first eigenvalue of this problem and e_p denotes the associated positive eigenfuntion satisfying $\|e_p\|_\infty = 1$.

When $p = 2$, we have $\Delta_p = \Delta$, the Laplacian operator, whose first eigenpair (λ_p, e_p) is well-known for domains with simple geometry (that is, domains which admit some kind of symmetry); for more general domains it can be determined by several numerical methods (see [4] and references therein). However, if $p \neq 2$ and $N \geqslant 2$, the first eigenpair is not explicitly known even for simple symmetric domains such as a square or a ball, and there are few available numerical methods for deal with these domains, see [3], [8] and [10].

On the other hand, several numerical methods are available to solve homogenous Dirichlet problems for equations of the form $-\Delta_p u = f$ for a given f depending only on $x \in \Omega$ (see [1, 2, 6, 7, 9]). This fact motivates the development of iterative methods to deal with the case in which the right hand side f depends on u, as in (0.1).

We presented in [3] an iterative method for the computation of the first eigenpair based on the inverse power method of finite dimensional linear algebra. If Ω is a N-dimensional ball, the convergence of the method was established and numerical evidences for its applicability when Ω is a 2-dimensional square were also presented. In the special case of the Laplacian operator, the method was proved to work in general domains and can also be used to obtain other eigenpairs (see [4]).

Recently in [5], estimates for the first eigenvalue for the unit N-dimensional ball were obtained by means of the coefficients of a local expansion in power series of the radial solution of an ODE associated to a suitable eigenfunction problem.

In this work we consider a different iterative approach which works for any smooth, bounded domain. It is based on positive solutions $v_{\mu,q}$ of the sublinear Lane-Emden type problem

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \mu \, |v|^{q-2} \, v & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{0.2}$$

For each $\mu > 0$ fixed, we constructively obtain the positive solution $v_{\mu,q}$ of (0.2), $1 < q < p$, by iterating a super-solution. We set

$$\mu_q := \frac{\mu}{\|v_{\mu,q}\|_\infty^{p-q}} \quad \text{and} \quad u_q := \frac{v_{\mu,q}}{\|v_{\mu,q}\|_\infty},$$

and show that $\mu_q \to \lambda_p$ and $u_q \to e_p$ in $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ when $q \to p^-$. Moreover, we prove that rate of convergence of $\mu_q \to \lambda_p$ is at least $O(p - q)$.

*UFMG, MG, Brasil, rodney@mat.ufmg.br
†UFMG, MG, Brasil, grey@mat.ufmg.br (supported by CNPq and Fapemig)
‡UFOP, MG, Brasil, eder@iceb.ufop.br

The main advantage of the method presented here is that approximations to both λ_p and e_p are obtained with the desired precision by an iteration process, which is numerically simple and, in the case of a ball, also explicit. The super-solution is a scalar multiple of the *torsion function* ϕ_p, that is, the solution of the *torsional creep problem*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = 1 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{0.3}$$

For example, if $\Omega = B_R(x_0)$, a ball centered at $x_0 \in \mathbb{R}^N$ with radius $R > 0$, it is easy to verify that ϕ_p is the radial function

$$\phi_p\,(r) = \frac{p-1}{pN^{\frac{1}{p-1}}}\left(R^{\frac{p}{p-1}} - |r|^{\frac{p}{p-1}}\right), \quad r = |x - x_0| \le R. \tag{0.4}$$

We use as sub-solution the eigenfunction e_p itself, suitably scaled by a factor arising from a special lower bound of λ_p, which is also obtained from the torsion function. The sub-solution is used only to bound from below the sequence of iterates described before. Thus, it plays only a theoretical role in the proofs.

We implemented the method for the unit ball of dimensions $N = 2, 3$ and 4. The results compare very well with the ones presented in [3].

References

[1] ANDREIANOV, B., BOYER, F. AND HUBERT, F. - On the finite-volume approximation of regular solutions of the p-Laplacian, *IMA J. Numer. Anal.* **26**, no. 3, 472–502, 2006.

[2] BARRETT. J. W. AND LIU, W. B. - Finite element approximation of the p-Laplacian, *Math. Comp.* **61**, no. 204, 523–537, 1993.

[3] BIEZUNER, R. J., ERCOLE, E. AND MARTINS, E. M. - Computing the first eigenvalue of the p-Laplacian via the inverse power method, *Journal of Functional Analysis* **257**, 243–270, 2009.

[4] BIEZUNER, R. J., ERCOLE, E. AND MARTINS, E. M. - Eigenvalues and eigenfunctions of the Laplacian via inverse iteration with shift, submitted.

[5] BOGNÁR, G. - Estimation on the first eigenvalue for some nonlinear Dirichlet eigenvalue problems, *Nonlinear Analysis*, **71**, no. 12, e2242–e2448, 2009.

[6] DIENING, L. AND KREUZER, C. - Linear convergence of an adaptative finite element method for the p-Laplacian equation, *SIAM J. Numer. Anal.* **46**, no. 2, 614–638, 2008.

[7] DRONIOU, J. - Finite volume schemes for fully non-linear elliptic equations in divergence form, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* **40**, no. 6, 1069–1100, 2007.

[8] LEFTON, L. AND WEI, D. - Numerical approximation of the first eigenpair of the p-Laplacian using finite elements and the penalty method, *Numer. Funct. Anal.Optim.* **18**, no. 3-4, 389–399, 1997.

[9] VEESER, A. - Convergent adaptive finite elements for the nonlinear Laplacian, *Numer. Math.* **92**, no. 4, 743–770, 2002.

[10] YAO, X. AND ZHOU, J. - Numerical methods for computing nonlinear eigenpairs. I. Iso-homogeneous cases, *SIAM J. Sci. Comput.* **29**, no. 4, 1355–1374, 2007.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

Existência global no caso tridimensional para um modelo do tipo campo de fases para materias puros

José Luiz Boldrini * & Fernando P. Souza †

Analisamos a existência de soluções para um modelo do tipo campo de fases para solidificação e/ou liquefação de materiais puros no caso em que o processo ocorre em um domínio limitado tridimensional. As equações que governam o comportamento de materiais puros incluem a equação para o campo de fases, uma equação para a temperatura e uma equação singular do tipo de Navier-Stokes com um termo do tipo Carman-Kozeni e também um termo do tipo Boussinesq.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto, limitado com fronteria $\partial\Omega$ suave, $T \in \mathbb{R}$ e $Q = \Omega \times (0, T)$. Consideremos o problema:

$$\begin{aligned}
&\varphi_t - \alpha\Delta\varphi + \alpha_0\mathcal{B}(\varphi) = -\varphi + 3\varphi^2 - 2\varphi^3 + (\theta_e - \theta)|\nabla\varphi| \quad \text{em } Q,\\
&\theta_t - \beta\Delta\theta + v\cdot\nabla\theta = \frac{L}{c_p}\varphi_t \quad \text{em } Q,\\
&v_t - \nu\Delta v + \nu_0\mathcal{A}(v) + v\cdot\nabla v + \nabla P = -\frac{\varphi^2}{1-\varphi}v + \vec{\sigma}\theta \quad \text{em } Q_{ml},\\
&\text{div } v = 0 \quad \text{em } Q_{ml},\\
&v = 0 \quad \text{em } Q_s,\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = \frac{\partial\theta}{\partial\nu} = 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega\times(0,T), \quad v = 0 \quad \text{na} \quad \partial Q_{ml},\\
&\varphi(0) = \varphi_0, \ \ \theta(0) = \theta_0, \quad \text{em } \Omega, \ \ v(0) = v_0 \quad \text{em } \Omega_{ml}(0).
\end{aligned} \tag{0.1}$$

onde $Q_{ml} = \{(x,t) \in Q : 0 \leq \varphi(x,t) < 1\}$ é a região não sólida, $Q_s = \{(x,t) \in Q : \varphi(x,t) = 1\}$ a região sólida. Os operadores $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são definidos respectivamente por

$$\mathcal{A}(v) = -\text{ div } (|\nabla v|^{p-2}\nabla v),$$

$$\mathcal{B}(\varphi) = -\text{ div } (|\nabla\varphi|^{q-2}\nabla\varphi).$$

O campo de fases é denotado por φ e as funções θ e v são respectivamente a temperatura e velocidade do material. Os argumentos principais utilizados estão baseados nos seguintes resultados e técnicas: o teorema do ponto fixo de Leray-Schauder juntamente com o método de Faedo-Galerkin para obtermos a existência de soluções para os problemas aproximados; a seguir, argumentos de compacidade são utilizados para passarmos ao limite.

1 Principal Resultado

Teorema 1.1. *Sejam $0 < T < \infty$, $p \geq 3$, $q \geq 5$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto, limitado, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2. Suponha também que*

$$\begin{aligned}
&\varphi_0 \in W^1_q(\Omega) \ \textit{tal que} \ 0 \leq \varphi_0 \leq 1 \ \textit{e} \ \frac{\partial\varphi_0}{\partial\nu} = 0 \ \textit{em} \ \partial\Omega,\\
&\theta_0 \in W^1_2(\Omega),\\
&v_0 \in H, \ \textit{com} \ v_0 = 0 \ \textit{em} \ \Omega_s(0) = \{x \in \Omega; \varphi_0(x) = 1\}.
\end{aligned}$$

*IMECC, UNICAMP, SP, Brasil, e-mail: boldrini@ime.unicamp.br
†DEX/CPTL, UFMS, MS, Brasil, e-mail: fermatmel@hotmail.com

Então existem funções $(\varphi, \theta, v, \chi)$, que constituem uma solução generalizada de (0.1) no seguinte sentido:

$$\begin{aligned}
&\varphi \in W_2^{2,1}(Q) \cap L^\infty(0,T;W_q^1(\Omega)), \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0, \ \varphi(0) = \varphi_0 \ \ e \ \ 0 \leq \varphi \leq 1,\\
&\theta \in W_2^{2,1}(Q), \frac{\partial\theta}{\partial\nu} = 0, \ \theta(0) = \theta_0,\\
&v \in L^p(0,T;V^p) \cap L^\infty(0,T;H), \ v(0) = v_0 \ \ em \ \Omega,\\
&\chi \in L^{p'}(0,T;(V^p)'),
\end{aligned}$$

e são tais que

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (\varphi_t, \omega) + \alpha \int_0^t (\nabla\varphi, \nabla\omega) + \alpha_0 \int_0^t (|\nabla\varphi|^{q-2}\nabla\varphi, \nabla\omega)\\
&= \int_0^t -(\varphi, \omega) + 3(\varphi^2, \omega) - 2(\varphi^3, \omega) + \int_0^t ((\theta_l - \theta)|\nabla\varphi|, \omega), \qquad (1.2)\\
&t \in (0,T), \ \ para \ qualquer \ \omega \in L^q(0,T;W_q^1(\Omega)),\\
&\theta_t - \beta\Delta\theta + v \cdot \nabla\theta = \frac{L}{c_p}\varphi_t \ \ q.s. \ \ em \ Q, \qquad (1.3)\\
&(v(t), \eta(t)) - \int_0^t (v, \eta_t)ds + \nu \int_0^t (\nabla v, \nabla\eta) + \nu_0 \int_0^t (\chi, \eta) + \int_0^t (v \cdot \nabla v, \eta)\\
&= (v_0, \eta(0)) - \int_0^t \left(\frac{\varphi^2}{1-\varphi}v, \eta\right) ds + \int_0^t (\vec{\sigma}\theta, \eta)ds, \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

$t \in (0,T)$, para qualquer $\eta \in \mathcal{W}_\varphi$, onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_\varphi = \{\eta \in L^p(0,T;V^p) : \ &\eta \ com \ suporte \ compacto \ em\\
&Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0) \cup \Omega_{ml}(T) \ \ e \ \eta_t \in L^{p'}(0,T;(V^p)')\},
\end{aligned}$$

e $Q_{ml} = \{(x,t) \in Q : 0 \leq \varphi(x,t) < 1\}$ e $\Omega_{ml} = \{x \in \Omega : 0 \leq \varphi(x,t) < 1\}$.

Além disso, $v = 0$ quase sempre em $Q_s = \{(x,t) \in Q : \varphi(x,t) = 1\}$.

As funções $(\varphi, \theta, v, \chi)$ constituem uma solução generalizada pois com as seguintes condições adicionais de regularidade: a condição de integrabilidade $\varphi^2/(1-\varphi) \in L^s(0,T;L^{1+\delta};(\Omega_{ml}(t)))$, para $s = p/(p-2)$ e algum $\delta > 0$ quando $p = 3$ ou $\delta = 0$ quando $p > 3$, e também a condição de aproximação $v \in \overline{\mathcal{W}_\varphi}$, onde o fecho é tomado na norma natural $||\cdot||_{L^p(0,T;V^p)} + ||\cdot||_{L^{p'}(0,T;(V^p)')}$, então podemos concluir que $\chi = \mathcal{A}v$ e a solução generalizada se torna uma solução fraca no sentido usual.

Referências

[1] C. Beckermann, H.J. Diepers, I. Steinbach, A. Karma, X. Tong - *Modeling melt convection in phase-field simulations of solidification* , J. Comp. Phys. 154 (1999) pp. 468-496.

[2] K.H. Hoffmann and L. Jiang - *Optimal Control a phase field model for solidification, Numer. Funct. Anal. Optimiz.* 13 (1 e 2) (1992) pp. 11-27.

[3] O. A. Ladyzenskaya, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'ceva, - *Linear and Quasi Linear Equations of Parabolic Type,* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.

[4] G. Planas, J.L. Boldrini - *A Tridimensional phase-field model with convection for phase change of an alloy,* Discrete and Continuous Dynamical Syztems, Vol. 13, (2005) pp. 429-450.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

COTYPE AND ABSOLUTELY SUMMING LINEAR OPERATORS

G. BOTELHO * & D. M. PELLEGRINO † & P. RUEDA ‡

New applications of cotype to the theory of absolutely summing linear operators between Banach spaces are proved in this paper. Among other consequences we extend/complement some classical results of Bennett [1] on the existence of non-absolutely summing operators between ℓ_p spaces and of Davis and Johnson [2] on the existence of compact non-absolutely summing linear operators. We also point out that some of our results are sharp. For the notation used along this resume we refer to the paper Cotype and absolutely summing linear operators, to appear in Mathematische Zeitschrift, in which these results will appear in a complete form.

Our first results are:

Theorem 0.1. *Let X and Y be infinite-dimensional Banach spaces, $2 \leq p < \infty$ and $q > 1$ such that $\cot Y \geq p > q$. If $\frac{pq}{p-q} > 2$ and $\mathcal{A}(X,Y) \subseteq \Pi_{q,1}(X,Y)$, then X has cotype $\frac{pq}{p-q}$.*

Observe that the result above is an interesting improvement of the linear case of [6, Corollary 2], because there, contrary to here, a Schauder basis for X is required.

A well known result due to Maurey and Pisier asserts that $\cot X = \inf\{2 \leq q \leq \infty : id_X \in \Pi_{q,1}(X,X)\}$ ([3, Theorem 14.5] and [5]). Next result is a significant improvement of the linear cases of [6, Theorem 7] and complements information from [5]:

Theorem 0.2. *Let X be an infinite-dimensional Banach space. If there is an infinite-dimensional Banach space Y with no finite cotype and such that $\mathcal{A}(X,Y) \subseteq \Pi_{q,1}(X,Y)$, then $\cot X \leq q$.*

The main results of the paper are:

Theorem 0.3. *Let X and Y be infinite-dimensional Banach spaces. If $\cot Y \geq p > q \geq r > \frac{2pq}{pq+2p-2q}$, then there exists an approximable non-(q,r)-summing linear operator from X to Y.*

A classical result due to Davis and Johnson [2] asserts that if X is superreflexive, then there exists a compact non-r-summing linear operator from X to any infinite-dimensional space Y. Let us see that for operators with range spaces Y with $\cot Y > \max\{2, r\}$ there is no need to impose any condition on the domain space X:

Corollary 0.1. *Let X and Y be infinite-dimensional Banach spaces with $\cot Y > \max\{2, r\}$. Then there exists an approximable (hence compact) non-r-summing linear operator from X to Y.*

Grothendieck's theorem $\Pi_1(\ell_1, \ell_2) = \mathcal{L}(\ell_1, \ell_2)$ makes clear that Theorem 0.3 and Corollary 0.1 are sharp in the sense that they are not valid for operators with range cotype 2 spaces. The case $\cot Y > 2$ is also close to optimality. In fact, from [3, Corollary 10.10] we know that if Y is an $\mathcal{L}_q$-space ($q > 2$) and $r > q = \cot Y$, then

$$\Pi_r(c_0; Y) = \mathcal{L}(c_0; Y).$$

A classical theorem due to Lindenstrauss and Pełczyński [4, Proposition 8.1(2)] asserts that if X and Y are infinite-dimensional and $\Pi_1(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y)$, then $\cot X = 2$. Part (c) of the next theorem improves this result in the sense that a stronger conclusion is obtained from a weaker assumption.

*Faculdade de Matemática, UFU, MG, Brasil, botelho@ufu.br
†DM, UFPB, PB, Brasil, e-mail dmpellegrino@gmail.com - Supported by CNPq Grant 620108/2008-8 (Ed. Casadinho),
‡Departamento de Análisis Matemático,Universidad de Valencia, Valencia, Spain, e-mail pilar.rueda@uv.es

Theorem 0.4.
(a) *Let X be an infinite-dimensional Banach space. If there is an infinite-dimensional Banach space Y with finite cotype such that $\mathcal{A}(X,Y) \subseteq \Pi_{\frac{2\cot Y}{2+\cot Y},1}(X,Y)$, then X has the Orlicz property (that is, id_X is $(2,1)$-summing).*
(b) *If X is infinite-dimensional and $\mathcal{A}(X,Y) \subseteq \Pi_r(X,Y)$ for some infinite-dimensional Banach space Y and some $1 \leq r < 2$, then $\cot Y = 2$.*
(c) *If X and Y are infinite-dimensional Banach spaces and every approximable linear operator from X to Y is 1-summing, then $\cot X = \cot Y = 2$.*

As announced in the introduction, we shall improve substantially the following information from Bennett [1, Proposition 5.2(i)]:
- $\Pi_{q,1}(\ell_1, \ell_p) \neq \mathcal{L}(\ell_1, \ell_p)$ whenever $2 \leq p < \infty$ and $q < \frac{2p}{2+p}$;
- $\Pi_{q,2}(\ell_1, \ell_p) \neq \mathcal{L}(\ell_1, \ell_p)$ whenever $2 \leq p < \infty$ and $q < p$.
- $\Pi_{q,1}(\ell_1; \ell_\infty) \neq \mathcal{L}(\ell_1; \ell_\infty)$ whenever $1 \leq q < 2$.

Our improvement says that ℓ_1 may be replaced by any infinite-dimensional Banach space, ℓ_p may be replaced by any infinite-dimensional Banach space with $\cot Y = p$ and the existence of a non-absolutely summing operator can be replaced by the existence of an approximable non-absolutely summing operator:

Theorem 0.5. *Let X and Y be infinite-dimensional Banach spaces.*
(a) *If $\cot Y < \infty$, then there exists an approximable non-$(q,1)$-summing linear operator from X to Y for every $q < \frac{2\cot Y}{2+\cot Y}$.*
(b) *If $\cot Y < \infty$, then there exists an approximable non-$(q,2)$-summing linear operator from X to Y for every $q < \cot Y$.*
(c) *If $\cot Y = \infty$, then there exists an approximable non-$(q,1)$-summing linear operator from X to Y for every $1 \leq q < 2$.*

A final application of our results illustrates, in one single result, the well known relevance of the space ℓ_1 and of the concept of cotype in the theory of absolutely summing operators:

Theorem 0.6. *Let X and Y be infinite-dimensional Banach spaces. Let $2 \leq r < \cot Y$ and $q \geq r$ be such that $\Pi_{q,r}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y)$. Then $\mathcal{L}(\ell_1, \ell_{\cot Y}) = \Pi_{q,r}(\ell_1, \ell_{\cot Y})$.*

References

[1] Bennett, G. *Schur multipliers*, Duke Math. Journal **44** (1977), pp. 603-639.

[2] davis, w. j. and johnson, w. b. *Compact non-nuclear operators*, Studia Math. **51** (1974), pp. 81-85.

[3] diestel, j. , jarchow, h. and tonge, a., *Absolutely summing operators*, Cambridge University Press, 1995.

[4] Lindenstrauss, j. and Pełczyński, a. *Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$ spaces and their applications.* Studia Math. **29** (1968), pp. 275-326.

[5] maurey, b. and pisier, g. *Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach*, Studia Math. **58** (1976), pp. 45-90.

[6] Pellegrino, d. *Cotype and absolutely summing homogeneous polynomials in $\mathcal{L}_p$ spaces*, Studia Math. **157** (2003), pp. 121-131.

[7] talagrand, m. *Cotype and (q,1)-summing norms in Banach spaces*, Invent. Math. **110** (1992), pp. 545-556.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

ESPAÇABILIDADE EM ESPAÇOS DE BANACH E QUASE-BANACH DE SEQUÊNCIAS

Geraldo Botelho [*], Diogo Diniz [†], Vinícius V. Fávaro [‡§] & Daniel Pellegrino [¶]

Seja X um espaço de Banach. Neste trabalho provaremos que, para uma grande classe de espaços de Banach ou quase-Banach E de sequências a valores em X, os conjuntos $E - \bigcup_{q\in\Gamma} \ell_q(X)$, onde Γ é um subconjunto qualquer de $(0,\infty]$, e $E - c_0(X)$ são espaçáveis (desde que sejam não-vazios), isto é, contém um subespaço fechado de E de dimensão infinita.

1 Definições e resultado principal

Definição 1.1. Seja $X \neq \{0\}$ um espaço de Banach.
(a) Dado $x \in X^{\mathbb{N}}$, denotamos por x^0 a versão de x livre de zeros, isto é: se x tem apenas um número finito de coordenadas não-nulas, então $x^0 = 0$; caso contrário, $x^0 = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ onde x_j é a j-ésima coordenada não-nula de x.
(b) Um *espaço de sequências invariantes sobre* X é um espaço de Banach ou quase-Banach de dimensão infinita $E(X)$ de sequências a valores em X, satisfazendo as seguintes condições:
(b1) Para $x \in X^{\mathbb{N}}$ tal que $x^0 \neq 0$, $x \in E$ se, e somente se, $x^0 \in E$ e, neste caso, $\|x\| \leq K\|x^0\|$ para alguma constante K dependendo somente de E.
(b2) $\|x_j\|_X \leq \|x\|_E$ para todo $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in E$ e todo $j \in \mathbb{N}$.
Um *espaço de sequências invariantes* é um espaço de sequências invariantes sobre sobre algum espaço de Banach X.

Vários espaços de sequências clássicos são espaços de sequências invariantes.

Exemplo 1.1. (a) Para $0 < p \leq \infty$,

(i) $\ell_p(X) =$ espaço das sequências de elementos de X que são absolutamente p-somáveis;

(ii) $\ell_p^w(X) =$ espaço das sequências de elementos de X que são fracamente p-somáveis;

(iii) $\ell_p^u(X) =$ espaço das sequências de elementos de X que são incondicionalmente p-somáveis;

são espaços de sequências invariantes sobre X com suas respectivas normas usuais (p-normas se $0 < p < 1$).
(b) Os espaços de Lorentz $\ell_{p,q}$, $0 < p < \infty$, $0 < q < \infty$ (veja [9, 13.9.1]), são espaços de sequências invariantes (sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
(c) Os espaços de Orlicz ℓ_M (veja [6, 4.a.1]), são espaços de sequências invariantes (sobre $\mathbb{K}$).
(d) Para $0 < p \leq s \leq \infty$, o espaço $\ell_{m(s;p)}(X)$ de todas as sequências misto (s,p)-somáveis sobre X (veja [9, 16.4]), é um espaço de sequências invariantes sobre X.

Agora podemos enunciar o resultado principal deste trabalho.

[*] Universidade Federal de Uberlândia, UFU, MG, Brasil, botelho@ufu.br.
[†] UAME-UFCG, Campina Grande, PB, Brasil, e-mail: diogodme@gmail.com.
[‡] Universidade Federal de Uberlândia, UFU, MG, Brasil, vvfavaro@gmail.com.
[§] Agradeço à FAPEMIG pelo apoio financeiro.
[¶] Universidade Federal da Paraíba, UFPB, PB, Brasil, dmpellegrino@gmail.com.

Teorema 1.1. *Seja E um espaço de sequências invariantes sobre o espaço de Banach X. Então*
(a) Para todo $\Gamma \subseteq (0, \infty]$, $E - \bigcup_{q \in \Gamma} \ell_q(X)$ é vazio ou espaçável.
(b) $E - c_0(X)$ é vazio ou espaçável.

Corolário 1.1. *Seja E um espaço de sequências invariantes sobre $\mathbb{K}$.*
(a) Se $0 < p \leq \infty$ e $\ell_p \subset E$, então $E - \ell_p$ é espaçável.
(b) Se $c_0 \subset E$, então $E - c_0$ é espaçável.
Aqui estamos considerando ambas as inclusões sendo própias.

Corolário 1.2. *$\ell_{m(s;p)}(X) - \ell_p(X)$ e $\ell_p^u(X) - \ell_p(X)$ são espaçáveis para $0 < p \leq s < \infty$ e para todo espaço de Banach X de dimensão infinita. Consequentemente $\ell_p^w(X) - \ell_p(X)$ também é espaçável.*

Como caso bastante particular do Teorema 1.1, obtemos o seguinte resultado:

Corolário 1.3. *$\ell_p - \bigcup\limits_{0<q<p} \ell_q$ é espaçável, para todo $p > 0$.*

Referências

[1] R. M. ARON, V. I. GURARIY, J. B. SEOANE-SEPÚLVEDA - *Lineability and spaceability of sets of functions on* $\mathbb{R}$, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005) 795–803.

[2] R. M. ARON, F. J. GARCÍA-PACHECO, D. PÉREZ-GARCÍA, J. B. SEOANE-SEPÚLVEDA - *On dense-lineability of sets of functions on* $\mathbb{R}$, Topology **48** (2009) 149–156.

[3] G. BOTELHO, D. DINIZ, D. PELLEGRINO AND E. TEIXEIRA - *A note on lineability*, arXiv:0905.2677 (2009).

[4] N. J. KALTON - *The basic sequence problem*, Studia Math. **116** (1995), 167-187.

[5] D. KITSON AND R. TIMONEY - *Some applications of operator ranges*, preprint.

[6] J. LINDENSTRAUSS AND L. TZAFRIRI - *Classical Banach spaces I and II*, Springer, 1996.

[7] M. C. MATOS - *Mappings between Banach spaces that send mixed summable sequences into absolutely summable sequences*, J. Math. Anal. Appl. **297** (2004), 833-851.

[8] G. MUÑOZ-FERNANDEZ, N. PALMBERG, D. PUGLISI E J. B. SEOANE-SEPÚLVEDA - *Lineability in subsets of measure and function spaces*, Linear Algebra Appl. **428** (2008), 2805-2812.

[9] A. PIETSCH - *Operator ideals*, North-Holland Publishing Company, 1980.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

SISTEMAS BIORTOGONAIS CUJOS FUNCIONAIS TÊM SUPORTES FINITOS

CHRISTINA BRECH * & PIOTR KOSZMIDER †

Se X é um espaço de Banach e X^* é seu dual topológico, então $(x_i, x_i^*)_{i \in I} \subseteq X \times X^*$ é um sistema biortogonal se $x_i^*(x_i) = 1$ e $x_i^*(x_j) = 0$ se $i \neq j$, para todo $i, j \in I$. Sistemas biortogonais têm um importante papel na teoria de espaços de Banach, pois os vetores de qualquer tipo de base em espaços de Banach são, em particular, os vetores de um sistema biortogonal (veja [3]).

Estamos interessados em sistemas biortogonais em espaços de Banach $C(K)$, cujo dual é isométrico ao espaço $M(K)$, das medidas de Radon sobre K, com a norma da variação. Se K é um espaço compacto e $x \in K$, δ_x é o funcional em $C(K)$ definido por $\delta_x(f) = f(x)$, para $f \in C(K)$.

A pergunta que motivou este trabalho é a seguinte: *Se existe um sistema biortogonal não enumerável $C(K) \times M(K)$, será que também existe um $(f_\xi, x_\xi^*)_{\xi \in \omega_1}$ cujos funcionais são da forma*

$$x_\xi^* = \delta_{x_\xi} - \delta_{y_\xi}$$

para $x_\xi, y_\xi \in K$?

A origem deste problema é que, em todas as situações concretas analisadas na literatura até aqui, a pergunta acima tem resposta positiva. Isto tem um motivo forte, a saber, um resultado recente de Todorcevic [4] garante que sob o axioma de Martin e a negação da hipótese do contínuo, a pergunta acima tem resposta positiva.

Definição 0.1. *Seja K um espaço compacto e $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que os funcionais de uma sequência $(f_\xi, \mu_\xi)_{\xi \in \omega_1} \subseteq C(K) \times M(K)$ são n-suportados se cada μ_ξ é uma medida atômica cujo suporte consiste de não mais que n pontos de K.*

Nosso principal resultado de [1] é o seguinte:

Teorema 0.1. *Para cada natural $n > 1$, é consistente que existe um compacto K_{2n} tal que não existem sistemas biortogonais não enumeráveis em $C(K_{2n})$ cujos funcionais sejam $2n-1$-suportados, mas existe um sistema biortogonal não enumerável cujos funcionais são $2n$-suportados.*

Para $n = 1$, sabemos que se K é o intervalo bifurcado, então $C(K)$ não tem sistema biortogonal não enumerável cujos suportes sejam 1-suportados, mas admite um sistema biortogonal cujos suportes são 2-suportados (veja [2]).

Por outro lado, não sabemos o que acontece no caso geral: *será que para cada n existe um espaço $C(K)$ para o qual não existem sistemas biortogonais não enumeráveis cujos funcionais sejam $n-1$-suportados, mas existe um sistema biortogonal não enumerável cujos funcionais são n-suportados?* Está claro apenas que nosso método não pode resolver este problema.

Referências

[1] BRECH, C. AND KOSZMIDER, P. - On biorthogonal systems whose functionals are finitely supported. *submitted*, 2010.

*Instituto de Matemática e Estatística, USP, SP, Brasil, brech@ime.usp.br
†Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej, Łódź, Polônia, e-mail: pkoszmider.politechnika@gmail.com

[2] FINET, C. AND GODEFROY, G. - Biorthogonal systems and big quotient spaces. *Contemp. Math.*, **85**, 87-110, 1989.

[3] HÁJEK, P. AND MONTESINOS SANTALUCÍA, V. AND VANDERWERFF, J. AND ZIZLER, V. - *Biorthogonal systems in Banach spaces*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 26, Springer, New York, 2008.

[4] TODORCEVIC, S. - Biorthogonal systems and quotient spaces via Baire category methods. *Math. Ann.*, **335**, no.3, 687-715, 2006.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

CONTINUITY ON EQUILIBRIA OF QUASILINEAR PARABOLIC PROBLEMS

Simone M. Bruschi * & Cláudia B. Gentile † & Marcos R. T. Primo ‡

In 1974 N. Chafee and E. F. Infante completely described the set of stationary solutions of a semilinear parabolic problem like

$$\begin{cases} u_t = \lambda u_{xx} + u - u^3, & (x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \ 0 \le t < +\infty \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,1), \end{cases} \tag{0.1}$$

where λ is a positive parameter and the initial data are sufficiently smooth. The set of equilibrium states, E_λ, is taken as function of λ and, roughly speaking, the authors obtain that, for large values of λ, the only stationary solution is zero, and all nonconstant equilibria bifurcate from zero, two by two, while λ cross the values of a sequence λ_n, obtained from the eigenvalues of the linearized problem. For details see [3].

A similar problem, involving the p-Laplacian operator was studied by Takeuchi and Yamada in 2000. They consider the problem

$$\begin{cases} u_t = \lambda(|u_x|^{p-2}u_x)_x + |u|^{q-2}u(1-|u|^r), & (x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & 0 \le t < +\infty \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,1), \end{cases} \tag{0.2}$$

where $p > 2$, $q \ge 2$, $r > 0$ and $\lambda > 0$. In this case the set of equilibrium points, E_λ, is always infinity if $p > q$ and, if $p = q$ or $p < q$, E_λ is a finite set only for large values of λ. However, in each of the three cases, there is the possibility of the existence of continuum equilibrium sets, which does not happen in the semilinear case, $p = 2$. Notice that problem (0.1) can be seen as a limit problem of (0.2) taking $p = q = r = 2$.

If we consider only the case $p = q$ in (0.2), there are several similarities between this problem and (0.1). In fact, although there is the possibility of bifurcation of a continuum equilibrium set in (0.2), the numbers of connected components of E_λ is always finite for fixed values of λ, and the scheme of bifurcation of this components is the same of (0.1). The stability properties of equilibria are the same, that is, in both cases the trivial solution is asymptotically stable for large values of the diffusion parameter λ and became unstable when appears the first pair of nontrivial stationary solutions, which are asymptotically stable as long as they exist. Any other stationary solution is unstable, for any p and q. Another interesting similarity we can point out is that, in both problems, the lap-number does not increase through orbits, if the initial conditions are continuous. With this information we can determinate which equilibrium points can belong to the ω-limit set of any initial data. The non-increasing property of lap-number was obtained for (0.1) and (0.2) by Matano in 1982 and by Gentile and Bruschi in 2005 respectively, [8, 4].

Let E_p be the equilibria of the problem (0.2) and E_2 be the equilibria of the problem (0.1). In this work we will prove the the continuity of the family E_p at $p = 2$. The proofs of the results presented here can be found in [2].

*UNB, Brasília, Distrito Federal, Brasil
†UFSCAR, São Carlos, São Paulo, Brasil
‡UEM, Maringá, Paraná, Brasil, mrtprimo@uem.br

Referências

[1] H. Brèzis, *Operateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, (1973).

[2] S. M. Bruschi, C. B. Gentile and M. R. T. Primo, Continuity properties on p for p-Laplacian parabolic problems. Nonlinear Analysis, 72 (2010), pp. 1580-1588.

[3] N. Chafee and E. F. Infante, A Bifurcation Problem for a Nonlinear Partial Differential Equation of Parabolic Type. *Applicable Analysis* **4**, (1974), pp 17-37.

[4] C. B. Gentile and S. M. Bruschi, Lap number properties for p-Laplacian problems investigated by Lyapunov methods. Nonlinear Anal. 66 (2007), no. 5, 1005–1015.

[5] J. K. Hale, *Asymptotic Behaviour of Dissipative Systems*, Mathematical Surveys and Monographs, **25**, American Mathematical Society, (1989).

[6] Hale, J.K., *Ordinary Differential Equations*, Wiley Interscience, (1969).

[7] Henry, D., *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Mathematics, 840. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1981.

[8] H. Matano, Nonincrease of the Lap-number of a Solution for a One-dimensional Semilinear Parabolic Equation, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect., 1A Math.* **29**, 401-441, (1982).

[9] A. T. Plant, Four Inequalities for Monotone Gradient Vector Fields, *Arch. Rational Mech. Anal.* **82**, 4 (1983), pp. 377-389.

[10] S. Takeuchi and Y. Yamada, Asymptotic Properties of a Reaction-Diffusion Equation with Degenerate p-Laplacian, *Nonlinear Analysis,* **42**, 41-61, (2000).

[11] R. Temam, *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Applied Mathematical Sciences, vol 68, Springer-Verlag, New York, (1988).

[12] I. I. Vrabie, *Compactness Methods for Nonlinear Evolutions*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, London (1987). (1963), pp. 5042-5044.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

A QUASILINEAR PROBLEM INVOLVING TWO PARAMETERS

H. BUENO[*], G. ERCOLE[†] & A. ZUMPANO[‡]

We consider the existence of positive solutions for the Dirichlet problem in two parameters:

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda \omega_1(x) u^{q-1} + \beta \omega_2(x) u^a |\nabla u|^b & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

where λ and β are positive parameters, a and b are positive constants satisfying $a+b=p-1$, $\omega_1(x)$ and $\omega_2(x)$ are nonnegative weights, $1 \le q \le p$, and $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N>1)$ is a smooth, bounded domain.

In the case $q=p$, we remark that the problem (0.1) is *homogeneous*, in the sense that if u solves it for fixed parameters λ and β, then ku is also a solution, for any positive constant k (note that we are assuming $a+b=p-1$).

We define $\omega(x) = \max\{\omega_1(x), \omega_2(x)\}$ and consider the torsional creep problem (0.2):

$$\begin{cases} -\Delta_p \phi &= \omega & \text{in } \Omega \\ \phi &= 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{0.2}$$

It is well known that $\phi > 0$ in Ω. The solution ϕ of this problem will be called *torsion function.*

We set

$$\alpha = (\|\phi\|_\infty)^{-(p-1)} \quad \text{and} \quad \mu = \frac{\|\nabla\phi\|_\infty}{\|\phi\|_\infty}, \tag{0.3}$$

where $\|\cdot\|_\infty$ denotes the sup-norm.

We denote by λ_1 the first eigenvalue and u_1 the correspondent positive eigenfunction (with $\|u_1\|_\infty = 1$) of

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda_1 \omega u^{p-1} & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.4}$$

Our main result in the case $1 \le q < p$ is

Teorema 0.1. *If $1 \le q < p$, $\lambda > 0$ and $0 \le \beta < \frac{\alpha}{\mu^b}$, then (0.1) has at least one positive solution $u \in C^{1,\tau}(\overline{\Omega})$ satisfying the bounds*

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{p-q}} u_1 \le u \le \left(\frac{\lambda}{\alpha - \beta\mu^b}\right)^{\frac{1}{p-q}} \frac{\phi}{\|\phi\|_\infty}. \tag{0.5}$$

The proof of this result is a consequence of the sub- and super-solution method. A super-solution is obtained as a special multiple of the torsion function ϕ, while the sub-solution is obtained as an adequate multiple of the first eigenfunction of (0.4).

In the case $q=p$, our main result is

Teorema 0.2. *For each $0 \le \beta < \frac{\alpha}{\mu^b}$, there exist $\lambda_\beta > 0$ and $u_\beta \in C^{1,\tau}\left(\overline{\Omega}\right)$ such that*

$$\begin{cases} -\Delta_p u_\beta &= \lambda_\beta \omega_1(x) u_\beta^{p-1} + \beta \omega_2(x) u_\beta^a |\nabla u_\beta|^b & \text{in } \Omega \\ u_\beta &= 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.6}$$

where $0 < u_\beta \le 1$ in Ω and $\alpha - \beta\mu^b \le \lambda_\beta \le \lambda_1$.

Our prove applies Theorem 0.1, by considering a sequence $q_n < p$ such that $q_n \to p$ and applying compactness arguments.

[*]UFMG, Brasil, hamilton@mat.ufmg.br
[†]UFMG, Brasil, ercole@mat.ufmg.br
[‡]UFMG, Brasil, zumpano@mat.ufmg.br

References

[1] BOCCARDO, L., MURAT, F. AND PUEL, J.-P. - Résultats d'existence pour certains problèmes elliptiques quasilinéaires, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **11** (1984), no 2, 213-235.

[2] BUENO, H., ERCOLE, G., FERREIRA, W.M. AND ZUMPANO, A. - Existence of positive solutions for the p-Laplacian with dependence on the gradient, submitted.

[3] BROCK, F., ITURRIAGA, L. AND UBILLA, P. - Semi-linear singular elliptic equations with dependence on the gradient, *Nonlinear Anal.* **65** (2006), no. 3, 601-614.

[4] BUENO, H., ERCOLE, G. AND ZUMPANO, A. - Positive solutions for the p-Laplacian and bounds for its first eigenvalue, *Adv. Nonlinear Stud.* **9** (2009), no. 2, 313-338.

[5] DE FIGUEIREDO, D., SÁNCHEZ, J AND UBILLA, P. - Quasilinear equations with dependence on the gradient, *Nonlinear Anal.* **71** (2009), no. 10, 4862-4868.

[6] GUO, Z.M. AND ZHANG, Z.T. - $W^{1,p}$ versus C^1 local minimizers and multiplicity results for quasilinear elliptic equations, *J. Math. Anal. Appl.* **286** (2003), no. 6, 32-50.

[7] LIEBERMAN, G.M. - Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations, *Nonlinear Anal.* **12** (1988), no. 1, 1203-1219.

[8] RUIZ, D. - A priori estimates and existence of positive solutions for strongly nonlinear problems, *J. Differential Equations* **199** (2004), no. 1, 96-114.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

CONTROLABILIDADE DE UM SISTEMA DE CAMPO DE FASE PARA SOLIDIFICAÇÃO

BIANCA M. R. CALSAVARA * & FÁGNER D. ARARUNA † & JOSÉ LUIZ BOLDRINI ‡

Neste trabalho é investigada um problema de controlabidade para um modelo de campo de fase para solidificação por uma única função de controle. O sistema estudado é constituido de uma equação para a função relacionada à temperatura, com um controle localizado associado a fontes e sorvedouros de calor, acoplada a uma equação para a função de campo de fase não linear.

O sistema de campo de fase citado é dado por

$$u_t - \Delta u + l\phi_t = v\mathbf{1}_{\mathcal{O}} \quad \text{em} \quad Q, \tag{0.1}$$

$$\phi_t - \Delta\phi - \left(a\phi + b\phi^2 - \phi^3\right) - u = 0 \quad \text{em} \quad Q \tag{0.2}$$

$$\partial u/\partial\nu = \partial\phi/\partial\nu = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T) \tag{0.3}$$

$$u(0) = u_0, \quad \phi(0) = \phi_0 \quad \text{em} \quad \Omega \tag{0.4}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto com fronteira regular, $\mathcal{O} \subset Q$ é um (pequeno) subconjunto aberto não vazio, $T > 0$ e $Q = \Omega \times (0,T) \in \mathbb{R}^4$ é um domínio cilíndrico; por $\nu = \nu(x)$ denotamos o vetor normal unitário exterior a Ω no ponto $x \in \partial\Omega$.

Aqui, a função $u = u(x,t)$ está relacionada à tempertaura do material; $\phi = \phi(x,t)$ é a função de campo de fase usada para identificar $\mathbf{1}_{\mathcal{O}}$ denota a função caracteristica de $\mathcal{O}$; v é uma funçã de controle a ser determinada, que corresponde fontes e sorvedouros de calor aplicadas em $\mathcal{O}$ para controlar o processo de solidificação; chamada de função de controle. As constantes $l > 0$, $a > 0$ e b dependem das propriedades físicas do material; em particular l está relacionada ao calor latente.

Vale ressaltar que as condições de fronteira em (0.1)-(0.4) são condições de Neumann. Para a função de campo de fase esta é a condição natural a ser imposta, pois este tipo de condição corresponde ao fato de que não há fluxo de fase na fronteira. Para a temperatura outros tipos de condições de fronteira podem ser considerados.

O modelo acima foi estudado por Hoffman and Jiang in [1], onde foram provados resultados sobre existência, unicidade e regularidade de solução para o sistema. Além disso, neste mesmo trabalho foi estudado um problema de controle ótimo associado a este modelo.

1 Resultado Principal

Teorema 1.1. *Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio aberto com fronteira regular, $\mathcal{O} \subset Q$ é um (pequeno) subconjunto aberto não vazio, $T > 0$ e $Q = \Omega \times (0,T) \in \mathbb{R}^4$. Sejam l e a constantes positivas e b uma constante real. Então existe $r_0 > 0$ tal que para qualquer dado inicial $(u_0, \phi_0) \in [W_s^{2-2/s}(\Omega) \cap V]^2$, com $s > 5/2$ e $V = \left\{f \in H^2(\Omega) \ : \ \partial f/\partial\nu = 0 \text{ em } \partial\Omega\right\}$, satisfazendo*

$$\|\{u_0, \phi_0\}\|_{[W_s^{2-2/s}(\Omega)]^2} < r_0,$$

*FCA, UNICAMP, SP, Brasil, e-mail: biancamrc@yahoo.com
†DM, UFPB, PB, Brasil, e-mail: fagner@mat.ufpb.br
‡IMECC, UNICAMP, SP, Brasil, e-mail: boldrini@ime.unicamp.br

existe uma função de controle $v \in L^2(\Omega)$ *tal que a solução correspondente* (u, ϕ) *do problema* $(0.1) - (0.4)$ *satisfaz*

$$u(\cdot, T) = \phi(\cdot, T) = 0 \quad em \quad \Omega.$$

Para mostrar este resultado, primeiramente são considerados um sistema linearizado relacionado ao sistema (0.1)-(0.4) e o sistema adjunto correspondente ao sistema linearizado. Usando desigualdades do tipo Carleman adequadas e estimativas de energia, mostra-se um resultado de observabilidade para o sistema adjunto. Tal resultado nos permite obter um resultado de controlabilidade nula para o sistema linearizado utilizando duas funções de controle. Posteriormente são utilizados sistemas auxiliares para eliminar a função de controle da equação para função de campo de fase. Obtendo assim um resultado de controlabilidade nula para o sistema linearizado com somente um controle. Finalmente, para provar a controlabilidade nula do sistema (0.1)-(0.4), ou seja, o Teorema 1.1 são utilizados o resultado de controlabilidade nula obtido para o problema linearizado e o Teorema de ponto fixo de Kakutani.

Referências

[1] HOFFMAN, K. AND JIANG, L. - Optimal control of a phase field model for solidification. *Numer. Funct. Anal. and Optimiz.*, **13**, 11-27, 1992.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

PULLBACK ATTRACTORS FOR A NONAUTONOMOUS PLATE EQUATION WITH CRITICAL NONLINEARITIES

V. L. CARBONE [*] & M. J. D. NASCIMENTO [†] & K. SCHIABEL-SILVA [‡] & R. P. SILVA [§]

In this work we are concerned with existence of pullback attractors for the equation:

$$\begin{array}{ll} u_{tt} + a(t,x)u_t - \Delta u_t + (-\Delta)^2 u + \lambda u = f(u) & \text{in } \Omega, \\ u = \Delta u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{array} \tag{1.1}$$

where Ω is a bounded smooth domain in $\mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$ and $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a nonlinearity with critical growth to be specified later.

The standard way to study the problem (1.1) is to consider it as the first order system

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -I \\ A^2 + \lambda I & A + a(t,x)I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(u) \end{bmatrix}, \tag{1.2}$$

where $-A$ denote the Laplacian operator with homogeneous Dirichlet boundary condition. It is well known that A^2 is a positive self-adjoint operator in $L^2(\Omega)$ with compact resolvent and domain $D(A^2) = \{u \in H^4(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) : \Delta u_{|\partial\Omega} = 0\}$. Setting the Hilbert space $X^0 = (H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)) \times L^2(\Omega)$ we consider the elastic operator $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X^0 \to X^0$, defined by

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ A^2 + \lambda I & A \end{bmatrix},$$

with domain $D(\mathcal{A}) = D(A^2) \times D(A)$. Writing $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A} + \mathcal{B}(t)$, where $\mathcal{B}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a(t,x)I \end{bmatrix}$, under certain hypothesis about $a(t,x)$, the family $\{\mathcal{B}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ is uniformly sectorial, and the map $t \mapsto \mathcal{B}(t)$ is uniformly Hölder continuous in the sense of [4]. If X^α denotes the domain of $\mathcal{A}^\alpha$ with the graph norm and if f is a ε-regular (critical growth) map, in the sense of

Definition 1.1. [1] *f is ε-regular relatively to pair (X^1, X^0) if there exists $\rho > 1$, $\gamma(\varepsilon)$ with $\rho\varepsilon \leqslant \gamma(\varepsilon) < 1$, and $c > 0$, such that $f : X^{1+\varepsilon} \to X^{\gamma(\varepsilon)}$ and*

$$\|f(x) - f(y)\|_{X^{\gamma(\varepsilon)}} \leqslant c\|x - y\|_{X^{\gamma(\varepsilon)}}\left(\|x - y\|^{\rho-1}_{X^{\gamma(\varepsilon)}} + \|x - y\|^{\rho-1}_{X^{\gamma(\varepsilon)}} + 1\right),\ \forall\, x, y \in X^{\gamma(\varepsilon)}, \tag{1.3}$$

we are able to garantee the existence of solution for (1.2).

Theorem 1.1. [4] *For each $u_0 \in X^1$, there is an unique $x : [0,\tau] \to X^1$ (ε-regular mild) solution of (1.2), $x \in C([0,\tau], X^1) \cap C((0,\tau], X^{1+\varepsilon})$ and*

$$x(t) = U(t,0)x_0 + \int_0^t U(t,s)f(s,x(s))\,ds, \tag{1.4}$$

where $\{U(t,s) : t \geqslant s\}$ is the solution operator associated to homogeneous problem.

[*] Departamento de Matemática, UFSCar, SP, Brasil, e-mail: schiabel@dm.ufscar.br
[†] Departamento de Matemática, UFSCar, SP, Brasil, e-mail: marcelo@dm.ufscar.br
[‡] Departamento de Matemática, UFSCar, SP, Brasil, e-mail: carbone@dm.ufscar.br
[§] Departamento de Matemática, UNESP, Rio Claro, SP, Brasil, e-mail: rpsilva@rc.unesp.br

Under some considerations it is possible to show that solutions in Theorem 1.1 are globally defined and we can consider the evolution process $\{S(t,s) : s \leqslant t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(X^0)$ associated to solution given by (1.4).

For this evolution process we expect to prove the existence of pullback attractor $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset X^0$ following [3], based on the following result:

Theorem 1.2. [3] *Let $\{S(t,s) : t \geqslant s\}$ be a pullback strongly bounded process such that $S(t,s) = T(t,s) + U(t,s)$, where $U(t,s)$ is compact and there exists a non-increasing function $k : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, with $k(\sigma,t) \to 0$, when $\sigma \to \infty$, and for all $s \leqslant t$ and $x \in X^0$ with $\|x\|_{X^0} \leqslant r$, $\|T(t,s)x\|_{X^0} \leqslant k(t-s,r)$. Then, the process $\{S(t,s) : t \geqslant s\}$ is pullback asymptotically compact.*

This theorem is a fundamental step in the applications to get the main result

Theorem 1.3. [3] *If an evolution process $\{S(t,s) : t \geqslant s\}$ is pullback strongly bounded dissipative and pullback asymptotically compact, then $\{S(t,s) : t \geqslant s\}$ has a pullback attractor $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$.*

References

[1] J. M. Arrieta, A. N. Carvalho, *Abstract parabolic problems with critical nonlinearities and applications to Navier-Stokes and Heat equations*, Transactions of the American Mathematical Society, v. 352, **1** (2009), 285-310.

[2] T. Caraballo, G. Lukaszewicz, J. Real, *Pullback attractors for asymptotically compact non-autonomous dynamical systems*, Nonlinear Analysis **64** (2006), 484-498.

[3] T. Caraballo, A. N. Carvalho, J. A. Langa and F. Rivero, *Existence of pullback attractors for pullback asymptotically compact process*, Nonlinear Analysis **72** (2010), 1967-1976.

[4] A. N. Carvalho and M. J. D. Nascimento, *Singularly non-autonomous semilinear parabolic problems with critical exponents and applications*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, v. 2, **3** (2009), 449-471.

[5] S. Chen, R. Triggiani, *Proof of extensions of two conjectures on structural damping for elastic systems*, Pacific Journal of Mathematics, v. 136, **1** (1989).

[6] V. V. Chepyzhov and M. I. Vishik, *Attractors for Equations of Mathematical Physics.* Providence, AMS Colloquium Publications **49**, (2002).

[7] J. K. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative System.* American Mathematical Society, 1989.

[8] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations.* Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[9] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, New York, 1983.

[10] L. Yang, *Uniform attractor for non-autonomous plate equation with a localized damping and a critical nonlinearity*, J. Math. Anal. Appl. **338** (2008) 1243-1254.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES RADIAIS PARA UMA CLASSE DE PROBLEMAS ENVOLVENDO O BIHARMÔNICO

P. C. Carrião * & Reginaldo Demarque † & O. H. Miyagaki ‡

Neste trabalho estudamos problemas envolvendo o biharmônico do tipo

$$\begin{cases} \Delta^2 u + V(|x|)u = f(u) \ \ para \ \ x \in \mathbb{R}^N; \\ u \in D^{2,2}(\mathbb{R}^N) \ \ N \geq 5. \end{cases} \tag{0.1}$$

onde o potencial $V : [0, \infty) \to (0, \infty]$ é uma função mensurável, a não-linearidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e satisfazem:

(V_α) Existem $A, \alpha > 0$ tais que $V(s) \geq \frac{A}{s^\alpha}$ para quase todo $s > 0$.

(f_p) Existem $M > 0$ e $p > 2$ tais que $|f(s)| \leq M|s|^{p-1}$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

Podemos ver que a propriedade (V_α) implica que V tem uma singularidade na origem, enquanto que $(V)_1$ permite outras singularidades. O caso mais simples no qual nossos resultados são válidos é dado pelo problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u + \dfrac{A}{|x|^\alpha} u = |u|^{p-2}u \\ u \in D^{2,2}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}), \ \ N \geq 5 \end{cases} \tag{0.2}$$

onde $A > 0$.

Problemas análogos ao problema (0.1) envolvendo os operadores Laplaciano e p-Laplaciando são estudados em [1] e [2]. Com base nestes artigos conseguimos mostrar resultados de existência de soluções fracas radiais não triviais para o problema (0.1) com expoentes subcríticos ou supercríticos de acordo com cada um dos seguintes casos:

a) $p \in (m_\alpha, 2^{**}), \forall, \ \alpha \in (0, 4)$;

b) $p \in (2^{**}, m_\alpha), \forall, \ \alpha \in (4, 2N-4)$;

c) $p \in (2^{**}, 2^{**}_\alpha), \forall, \ \alpha \in [2N-4, \infty)$,

onde $m_\alpha := 2 + \frac{4\alpha}{2N-4-\alpha}$ e $2^{**}_\alpha := 2 + \frac{2\alpha}{N-4}$.

Nossos principais resultados são apresentados a seguir.

1 Resultados

Sejam $N \geq 5$ e $V : [0, \infty) \to (0, \infty]$ uma função mensurável tal que $V \in L^1(a, b)$ para algum intervalo (a, b) com $b > a > 0$. Definimos o Espaço de Sobolev com peso

$$W^{2,2}(\mathbb{R}^N; V) := \left\{ u \in D^{2,2}(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)|u|^2 dx < \infty \right\}, \tag{1.3}$$

*Instituto de Ciências Exatas, UFMG, MG, Brasil, e-mail carrion@mat.ufmg.br
†Departamento de Ciência e Tecnologia , UFF – Puro, RJ, Brasil, reginaldodr@vm.uff.br
‡Instituto de Ciências Exatas, UFJF, MG, Brasil, e-mail ohmiyagaki@gmail.com

com a norma dada por

$$\|u\| := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 + V(|x|)|u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

Seja $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e defina $F(s) := \int_0^s f(t)dt$. Considere as seguintes propriedades:

$(V)_2$ Existem $B, \beta, \mu_0 > 0$ tais que $V(\mu s) \leq \mu^{-\beta} BV(s)$ para quase todo $\mu > \mu_0$ e $s > 0$;

$(f)_1$ existe $\gamma > 2$ tal que $\gamma F(s) \leq f(s)s$, $\forall s \in \mathbb{R}$;

$(f)_2$ $F(s_*) > 0$ para algum $s_* \in (0,\infty)$;

$(f)_3$ $F(s) > 0$, $\forall s \in (0,\infty)$;

$(f)_4$ f é ímpar;

(F_p) existe $\eta > 0$ tal que $F(s) \geq \eta |s|^p$, $\forall \in \mathbb{R}$.

Denote por $2^{**} := \frac{2N}{N-4}$ o expoente crítico da imersão de Sobolev em dimensão $N \geq 5$. Além disso, defina $m_\alpha := 2 + \frac{4\alpha}{2N-4-\alpha}$ para $\alpha \in (0, 2N-4)$.

Teorema 1.1. *Sejam $V : [0,\infty) \to (0,\infty]$ uma função mensurável satisfezendo $(V)_1$ e $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ satisfazendo $(f)_1$. Suponha válidas (f_p) e (V_α) com $\alpha \in (0,4)$ e $p \in (m_\alpha, 2^{**})$ ou $\alpha \in (4, 2N-4)$ e $p \in (2^{**}, m_\alpha)$, ou $\alpha \in [2N-4,\infty)$ e $p \in [2^{**},\infty)$. Suponha ainda que ou V satisfaz $(V)_2$ e f satisfaz $(f)_2$, ou f satisfaz $(f)_3$. Então o problema (0.1) tem uma solução radial não trivial $u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^N, V)$ no seguinte sentido*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Delta u \cdot \Delta h + V(|x|)uh \; dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)h \; dx, \;\; \forall h \in W^{2,2}(\mathbb{R}^N, V). \tag{1.4}$$

Teorema 1.2. *Sejam $V : [0,\infty) \to (0,\infty]$ uma função mensurável satisfezendo $(V)_1$ e $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ satisfazendo $(f)_1$ e $(f)_4$. Suponha válidas (f_p), (V_α) e (F_p) $\alpha \in (0,4)$ e $p \in (m_\alpha, 2^{**})$ ou $\alpha \in (4, 2N-4)$ e $p \in (2^{**}, m_\alpha)$, ou $\alpha \in [2N-4,\infty)$ e $p \in (2^{**},\infty)$. Então o problema (0.1) admite infinitas soluções radiais $u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^N, V)$ no seguinte da equação (1.4).*

Referências

[1] M. Badiale, S. Rolando - *A note on nonlinear elliptic problems with singular potentials*, Rend. Lincei MAt. Appl. 17 (2006) 1–13.
[2] J. Su, Z-Q. Wang, M. Willem - *Weighted Sobolev embedding with unbounded and decaying radial potentials*, J. Differential Equations 238 (2007) 201–219.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2009

BIHOLOMORPHIC FUNCTIONS IN DUAL BANACH SPACES

H.CARRIÓN *, P.GALINDO † & M. L. LOURENÇO ‡

We present an infinite-dimensional version of Cartan-Carathéodory-Kaup-Wu theorem about the analyticity of the inverse of a given analytic mapping. It is valid for a class of domains in separable Banach dual spaces that includes all bounded convex domains.

1 Introduction

In this note we aim to extend the result of Cima et al. [1] that shows that an analytic self map of a bounded convex domain of a separable Hilbert space with a fixed point such that its derivative at the fixed point is triangularizable with spectrum in the unit sphere is biholomorphic. We check that such result also holds for separable dual Banach spaces, such as the ℓ_p spaces, $1 \leq p < +\infty$, and a class of domains that includes all bounded convex domains. To do this we use their technique and sharpen some of their intermediate steps; for instance we are able to remove the convexity assumption, answering partially to a question they raise at the very end of their paper.

Next we introduce some notations and definitions. Throughout this note, all the Banach spaces considered are complex. Let E, F be Banach spaces and G an open set of E, we will denote by $\mathcal{H}(G, F)$ the space of all holomorphic functions from G into F. If f belongs to $\mathcal{H}(G, F)$ we denote the derivative of f at the point $p \in G$ by Df_p. We refer to [2] for non-explained notation regarding holomorphic mappings.

Let $T \in L(E, E)$ be a bounded linear operator. We call T triangularizable if there is a total, i. e., with dense span, linearly independent sequence $\{e_1, e_2, ...e_n, ...\}$ of E such that for all $x \in span\{e_1, e_2, ..., e_n\}$

$$T(x) \in span\{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

for every $n \in \mathbb{N}$. In this case, $T(e_k) = \sum_{j=1}^{k} \beta_j^k e_j$, for all $k = 1, 2, \cdots, n$. So, the matrix of T when restricted the subspace generated by $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ is an upper-triangular matrix, whose main diagonal is given by $\beta_1^1, \beta_2^2, \cdots \beta_k^k$. We shall refer to the sequence (β_k^k) as the diagonal entries.

Notice that the existence of a triangularizable operator on E implies that E is separable. As usual, I_X denotes the identity operator on the Banach space X.

As a consequence of our main result (Theorem 2.1, below) a holomorphic self-function of a convex bounded domain in a reflexive space with fixed point and triangularizable derivative at such point with diagonal entries of modulus 1 is biholomorphic.

In addition we derive a global version of the Implicit Function Theorem for holomorphic mappings.

2 Mathematical Results

Definition 2.1. *We say that an open set $A \subset E$ has the separation property if for every $u \in \overline{A} \setminus A$, there is an analytic function h in a neighborhood of $\overline{A}$ such that $h(u) = 1$ and $|h(x)| < 1$ for all $x \in A$.*

For instance if A is a relatively compact strictly pseudoconvex open set in $\mathbb{C}^n$ with a $\mathcal{C}^2$ boundary, then A has the separation property. Recall that every domain in $\mathbb{C}$ with $\mathcal{C}^2$ boundary is strictly pseudoconvex . Notice as well

*IME-USP, SP, Brasil, e-mail: leinad@ime.usp.br
†Univerdidad de Valencia- Spain e.mail: pablo.galindo@uv.es
‡IME-USP, SP, Brasil, e-mail: mllouren@ime.usp.br

that any convex domain Ω has the separation property: Indeed, if $u \notin \Omega$, by the Hahn-Banach separation theorem, then there are $\alpha \in \mathbb{R}$ and $\varphi \in E^*$ such that $\Re e\varphi(w) < \alpha \leq \Re e\varphi(u)$ for all $w \in \Omega$. Thus $h := e^{\varphi - \varphi(u)}$ has absolute value less than 1 on Ω and $h(u) = 1$.

Theorem 2.1. *Let E be the dual of a Banach space and $G \subset E$ a bounded domain with the separation property E such that its weak* closure coincides with its norm closure. Let $f : G \to G$ be a holomorphic mapping such that*

1. $f(p) = p$.
2. *$Df(p)$ is triangularizable with diagonal entries of modulus* 1.

Then f is a biholomorphic mapping.

In particular, the above result holds for convex domains G in reflexive spaces. It is worth to point out that there are non convex sets to which Theorem 2.1 applies: Pick some nonconvex domain D in $\mathbb{C}$ with $\mathcal{C}^2$ boundary and set $G = D \times B_{\ell_p}$ as an open set in ℓ_p. Its weak closure coincides with $\overline{D} \times \overline{B_{\ell_p}}$, that is, its norm closure and it has the separation property.

Our next result is a type of Schwarz lemma that states that a holomorphic self-map of the unit ball B of a separable Hilbert space fixing 0 whose components have partial derivative with modulus 1, are automorphisms.

Corollary 2.1. *If f is a holomorphic self-map of the unit ball B of a separable Hilbert space, with $f(0) = 0$ and*

$$| < Df_0(e_i), e_i > | = 1, \quad \textit{for all vectors } e_i \textit{ in an orthonormal basis,}$$

then f is biholomorphic.

Next we present as an application of Theorem 2.1 an Implicit Function type Theorem.

Theorem 2.2. *Let E, F be dual Banach spaces, $U \subset E$ and $V \subset F$ bounded domains such that $U \times V$ has the separation property and that the weak* closure of $U \times V$ coincides with its norm closure. Let $G : U \times V \to V$ be a holomorphic mapping such that for some $(u, v) \in U \times V$, $G(u, v) = v$. Let $(e_n) \subset E$ and $(f_m) \subset F$ be total linearly independent sequences. Put $F_n = span \{(0, f_1), ..., (0, f_n)\} \subset E \times F$. Assume that both $DG_{(u,v)}(e_i, 0)$ and $DG_{(u,v)}(0, f_i)$ belong to $span \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ for $i = 1, 2, ..., n$. and further that the matrix of $DG_{(u,v)}|_{F_n}$ with respect to $\{f_m\}_1^n$ is upper triangular, that is,*

$$DG_{(u,v)}|_{F_n} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & & \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

And moreover

$$DG_{(u,v)}((e_{n+1}, 0)) \in span\{f_1, f_2, ..., f_n\}.$$

Then there is a holomorphic map, $g : U \to V$ such that $G(x, y) = v$ implies $g(x) = y$.

References

[1] J.A.. CIMA, I. GRAHAM, K. T. KIM AND S. KRANTZ, *The Caratheodory-Cartan-Kaup-Wu theorem on an infinite dimensional Hilbert space.* Nagoya Math. J. Vol.185 (2007) 17-30.

[2] J. MUJICA, *Complex Analysis in Banach Spaces.* North- Holland Mathematics Studies. 120, (1986).

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

A NOTE ON EXISTENCE OF ANTISYMMETRIC SOLUTIONS FOR A CLASS OF NONLINEAR SCHRODINGER EQUATIONS

JANETE S. CARVALHO * & LILIANE A. MAIA † & OLIMPIO H. MIYAGAKI ‡

In this work we establish the existence of a special class of sign changing solutions for the elliptic problem

$$-\triangle u + V(x)u = f(u) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N, \tag{0.1}$$

with

$$u(\tau x) = -u(x),$$

where $N \geq 3$ and $1 < p < 2^* - 1$. Moreover, $\tau : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ is a nontrivial orthogonal involution that is a linear orthogonal transformation on $\mathbb{R}^N$ such that $\tau \neq Id$ and $\tau^2 = Id$, here Id being the identity on $\mathbb{R}^N$. We assume that V is invariant under an orthogonal involution and show the existence of a particular type of sign changing solution. For this, we set the basic assumptions on $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$,

(V1) V is continuous and there exist $V_0 > 0$ such that $V(x) \geq V_0$;

(V2) $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = V_\infty, \quad V_\infty > 0, \quad V(x) \lneqq V_\infty$;

(V3) $V(\tau x) = V(x)$.

(V4) $V(x) \leq V_\infty - Ce^{-\gamma|x|}$ for all $x \in \mathbb{R}^N$ with $0 < \gamma < \sqrt{V_\infty}$ and $C > 0$.

The hypotheses for the function f are:

(f1) $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;

(f2) $f(0) = 0 = f'(0)$;

(f3) there are constants $a_1, a_2 > 0$ and $1 < p < 2^* - 1$ such that

$$|f'(s)| \leq a_1 + a_2|s|^{p-1} \quad \text{for all} \quad s \in \mathbb{R};$$

(f4) there is a constant $\mu > 2$ such that , if $F(s) := \int_0^s f(t)dt$,

$$0 < \mu F(s) \leq sf(s) \quad \text{and} \quad (\mu - 1)sf(s) < f'(s)s^2 \quad \text{for all } s \neq 0;$$

(f5) f is odd.

1 Main theorem

Teorema 1.1. *If $(V1) - (V4)$ and $(f1) - (f5)$ are satisfied, then problem (0.1) has a nontrivial τ-antisymmetric solution which changes sign exactly once, that is, $u \in H_0^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$ such that $u(\tau x) = -u(x)$.*

The method applied in order to find the antisymmetric solution is minimization of the associated functional constrained to a τ-antisymmetric Nehari manifold. The basic tool employed here is the Concentration–Compactness Principle.

*Departamento de Matemática , UnB, DF, Brasil, j.s.carvalho@mat.unb.br
†Departamento de Matemática, UnB, DF, Brasil, e-mail: lilimaia@unb.br
‡Departamento de Matemática, UFJF, MG, Brasil, e-mail: ohmiyagaki@gmail.com

References

[1] CARVALHO, J. S., MAIA, L. A. AND MIYAGAKI, O.H. - *A note on existence of antisymmetric solutions for a class of nonlinear Schrdinger equations,* Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik (Printed ed.), p. 10.1007/s00033-, 2010. .

[2] CARVALHO, J. S., MAIA, L. A. AND MIYAGAKI, O.H. - *Antisymmetric solutions for the nonlinear Schrodinger equation*, preprint.

[3] CASTRO, A. AND CLAPP, M. - *The effect of the domain topology on the number of minimal nodal solutions of an elliptic equation at critical growth in a symmetric domain,* Nonlinearity. **16** (2003), no 2, pp. 579-590.

[4] FURTADO, M. F. - *A note on the number of nodal solutions of an elliptic equation with symmetry*, Applied Mathematics Letters. **19** (2006), pp. 326-331.

[5] FURTADO, M. F. , MAIA, L. A. AND MEDEIROS, E. S. - *Positive and nodal solutions for a nonlinear Schrodinger equation with indefinite potential*, Advanced Nonlinear Studies. **8** (2008), no. 2, pp.353–373.

[6] GHIMENTI, M. AND MICHELETTI, A. M. - *Existence of minimal nodal solutions for the nonlinear Schrodinger equations with* $V(\infty) = 0$, Advances in Differential Equations. **11** (2006), no. 12, pp. 1375-1396.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

ON LAPLACE-BELTRAMI DIFFERENTIABILITY OF POSITIVE DEFINITE KERNELS ON THE SPHERE

MARIO H. CASTRO *, VALDIR A. MENEGATTO † & CLAUDEMIR P. OLIVEIRA ‡

Let n be an integer at least 2 and S^{n-1} the unit sphere in $\mathbb{R}^n$. In this paper, we investigate some questions related to term by term Laplace-Beltrami differentiability of nonzero kernels on S^{n-1}. In order to make the questions clear, we introduce the type of kernels we are interested most, followed by the pertinent notation and definitions.

The kernels we intend to deal with are absolutely and uniformly expansions of the form

$$K(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k Y_k(x)\overline{Y_k(y)}, \quad x,y\in S^{n-1}, \tag{1.1}$$

where $a_k>0$ for all k and $\{Y_k : k=0,1,\ldots\}$ is a $L^2(S^{n-1})$-orthonormal sequence of continuous complex functions on S^{n-1}. Orthogonality refers to the inner product

$$\langle f,g\rangle_2=\frac{1}{\sigma_{n-1}}\int_{S^{n-1}} f(y)\,\overline{g(y)}\,d\sigma_{n-1}(y), \quad f,g\in L^2(S^{n-1}), \tag{1.2}$$

in which $d\sigma_{n-1}$ is the usual surface element of S^{n-1} while σ_{n-1} stands for the surface of the sphere S^{n-1}. In practice, the orthonormal sequence may be taken as an $L^2(S^{n-1})$-complete set of spherical harmonics. The uniform convergence of the series defining K allows one to integrate it to deduce the recovery formula

$$\sigma_{n-1}Y_k=\frac{1}{a_k}\int_{S^{n-1}} K(\cdot,y)Y_k(y)d\sigma_{n-1}(y). \tag{1.3}$$

Expansions as in (1.1) define *positive definite kernels* in the following sense:

$$\sum_{i,j=1}^{N}\overline{c}_i\,c_j K(x_i,x_j)\geq 0, \tag{1.4}$$

whenever $N\geq 1$, $\{x_1,\ldots,x_N\}\subset S^{n-1}$ and $\{c_1,\ldots,c_N\}\subset\mathbb{C}$.

Having introduced the kernels, we proceed recalling the notion of spherical translation, a crucial component in the definition of differentiability we are concerned with. For ϵ in $(-1,1)$, let S_ϵ^{n-1} denote the usual *spherical translation operator* defined by the formula

$$S_\epsilon^{n-1}(f)(x):=\frac{1}{\sigma_{n-2}(1-\epsilon^2)^{(n-2)/2}}\int_{x\cdot y=\epsilon} f(y)dy, \quad x\in S^{n-1}, \tag{1.5}$$

where "$\cdot$"is the usual inner product of $\mathbb{R}^n$ and dy denotes the measure element of the rim $\{y\in S^{n-1}: x\cdot y=\epsilon\}$ of the spherical cap $\{y\in S^{n-1}: x\cdot y\geq\epsilon\}$. Also, let $\Delta_\epsilon := I-S_\epsilon^{n-1}$, in which I denotes the identity operator.

Let X denote either $L^p(S^{n-1})$ or $C(S^{n-1})$. A function $f\in X$ is said to be *differentiable in the sense of Laplace-Beltrami* if there is a function $\mathcal{D}f\in X$ such that

$$\lim_{\epsilon\to 1^-}\left\|(1-\epsilon)^{-1}\Delta_\epsilon(f)-\mathcal{D}f\right\|_X=0. \tag{1.6}$$

The function $\mathcal{D}f$ is then called the *Laplace-Beltrami derivative* of f. Higher order derivatives are defined inductively by the formulas $\mathcal{D}^1=\mathcal{D}$ and $\mathcal{D}^r:=\mathcal{D}^1\circ\mathcal{D}^{r-1}$, $r=2,3,\ldots$.

*CAPES e ICMC , USP, SP, Brasil, tunwest@gmail.com
†ICMC , USP, SP, Brasil, menegatt@icmc.usp.br
‡ICE-DMC, UNIFEI, MG, Brasil, oliveira@unifei.edu.br

Spaces of differentiable functions in the sense just described are defined as

$$W_X^r := \{f \in X : \mathcal{D}^r f \in X\}, \quad r = 1, 2, \ldots, \tag{1.7}$$

with norm given by $\|f\|_{W_X^r} = \|f\|_X + \|\mathcal{D}^r f\|_X$, $f \in W_X^r$.

It is instructive to observe that the space $\mathcal{H}_k^n$ of all k-th degree spherical harmonics in n variables is a subset of W_X^r and

$$\mathcal{D}^r Y = \frac{k^r(k+n-2)^r}{(n-1)^r} Y, \quad Y \in \mathcal{H}_k^n. \tag{1.8}$$

A fact of major importance is that the linear operator $\mathcal{D}^r : W_X^r \subset X \to X$ is closed. In the L^p setting, if $f = g$ a.e. and $\mathcal{D}^r f$ exists then $\mathcal{D}^r g$ exists and $\mathcal{D}^r f = \mathcal{D}^r g$ a.e.. In its non-operator form, the Laplace-Beltrami derivative first appeared in Rudin's paper [4]. The additional theory, in the operator form we use here, was probably developed by Wehrens ([5], [6]). The derivative enters in the definition of the so-called r-th spherical modulus of smoothness; their use can be ratified in references such as, [1] and [3].

1 Mathematical Results

The main results we intend to show are now stated. The symbol $D^{\alpha,\beta}$ relates to usual derivatives on the sphere.

Teorema 1.1. *Let r be positive integer. If $K \in C^{2r\times 2r}(S^{n-1} \times S^{n-1})$ and K is positive definite then $\mathcal{D}^{r,r}K$ is positive definite.*

Teorema 1.2. *Let α be a nonzero multi-index. Let K be a kernel for which $D^{\alpha,\alpha}K$ exists and is continuous in $S^{n-1} \times S^{n-1}$. Then $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathcal{D}_x^s Y_k(x) \mathcal{D}_y^t \overline{Y_k}(y)$ converges uniformly to $\mathcal{D}^{s,t}K$ in $S^{n-1} \times S^{n-1}$, as long as $2s, 2t \leq |\alpha|$.*

Teorema 1.3. *Assume each Y_k belongs to $C^{2r}(S^{n-1})$, for some nonnegative integer r. Let s and t be integers such that $2s, 2t < r$. If $\sum_{k=0}^{\infty} a_k D_x^{2\alpha} Y_k(x) D_y^{2\beta} \overline{Y_k}(y)$ converges uniformly when $|\alpha| < s$ and $|\beta| < t$ then $\mathcal{D}^{s,t}K(x,y)$ exists, is continuous and*

$$\mathcal{D}^{s,t}K(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathcal{D}_x^s Y_k(x) \mathcal{D}_y^t \overline{Y_k}(y).$$

References

[1] LIZORKIN, P. I.; NIKOL'SKIĬ, S. M. - Approximation theory on the sphere, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 172 (1987), 295-302.

[2] MENEGATTO, V. A.; OLIVEIRA, C. P.; PERON, A. P. - Differentiable positive definite kernels on spheres. *J. Appl. Anal.*, 15 (2009), no. 1, 101-117.

[3] PAWELKE, S. - Über die Approximationsordnung bei Kugelfunktionen und algebraischen Polynomen. (German) *Tôhoku Math. J.* (2) 24 (1972), 473-486.

[4] RUDIN, W. - Uniqueness theory for Laplace series. *Trans. Amer. Math. Soc.* 68, (1950), 287-303.

[5] WEHRENS, M. - Best approximation on the unit sphere in $\mathbb{R}^k$, Functional analysis and approximation (Oberwolfach, 1980), pp. 233-245, Internat. Ser. Numer. Math., 60, Birkhäuser, Basel-Boston, Mass., 1981.

[6] WEHRENS, M. - Legendre-Transformationsmethoden und approximation von funktionen auf der einheitskugel in $\mathbb{R}^3$. Doctoral Dissertation, RWTH Aachen, 1980.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

Some non-local population models with non-linear diffusion

Francisco Julio S.A. Corrêa * & Manuel Delgado and Antonio Suárez †

In this note we study the following equation, arising in some cases from the population dynamics, of the form

$$\begin{cases} -\Delta w^m = wf\left(x, \int_\Omega w^r\right) & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

with $r > 0$, f is a regular function and $m \geq 1$. Here, we are assuming that Ω is fully surrounded by an inhospitable area, since the population density is subject to homogeneous Dirichlet boundary conditions. The real parameter m represents the velocity of diffusion, the rate of movement of the species from high-density regions to low-density ones. In this context, $m > 1$ means that the diffusion is slower than in the linear case ($m = 1$), which seems to give more realistic models, see [1]. The term $m > 1$ was introduced in [1], see also [2], by describing the dynamics of biological population whose mobility depends upon their density. Finally, f denotes the crowding effect. Observe that this term includes a non-local term. Non-local terms have been introduced at least to our knowledge, in population dynamic models in [3]. The presence of the nonlocal terms in (0.3), from the biological point of view means that the crowding effect depends not only on their own point in space but also depends on the entire population.

The change $w^m = u$ transforms the problem (0.1) into

$$\begin{cases} -\Delta u = u^q f\left(x, \int_\Omega u^p\right) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.2}$$

with $0 < q < 1,\ p > 0$. Specifically, in this note, we are concerned with the the nonlocal elliptic problem

$$\begin{cases} -\Delta u = u^q \left(\lambda + a(x) \int_\Omega b(x) u^p\right) & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.3}$$

where Ω is a bounded and regular domain of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $a, b \in C(\overline{\Omega})$, $b \geq 0$, $b \not\equiv 0$,

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 < q \leq 1, \quad p > 0,$$

and a verifies either $a > 0$ or $a < 0$.

The above equation is a nonlocal counterpart of the well known logistic equation, whose more general version is given by

$$\begin{cases} -\Delta u = u^q \left(\lambda + a(x) u^p\right) & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.4}$$

where λ, p, q and a are as above.

*Universidade Federal de Campina Grande , PB, Brasil, e-mail: fjsacorrea@gmail.com
†Universidad de Sevilla, España, e-mail: madelgado@us.es , suarez@us.es

Let us point an important fact on equations (0.4) and (0.3). When $q = 1$, the strong maximum principle implies that any *positive* solution u (positive means non-negative and non-trivial) is *strictly positive* ($u(x) > 0$ for all $x \in \Omega$.) This means that there are uniquely two kinds of solutions in this case: the trivial solution (the species is dead) and the strictly positive solution (the species survives in whole domain). However, when $q < 1$ appears a new type of solution: a non-negative and non-trivial solution u but vanishing in a part of the domain $\Omega_0 \subset \Omega$, that is $u(x) = 0$ for $x \in \Omega_0$. This set is called dead-core, see [4] and [5] where conditions on the coefficients are given for assure the existence of dead cores.

With respect to the mathematical analysis of (0.3) we consider two situations:

(i) The Homogeneous Case. Here we suppose that a is a constant and we use fixed point to obtain existence results. In this case we are able to describe exactly the set of positive solution of (0.3).

(ii) The Non-Homogeneous Case. Here we consider the situation in which a depends on $x \in \Omega$. In this case, bifurcation theory and sub-supersolution method plays a key role.

Referências

[1] M. E. Gurtin and R. C. MacCamy - *On the diffusion of biological populations, Math. Biosci.*, **33** (1977), 35-49.

[2] T. Namba - Density-dependent dispersal and spatial distribution of a population *J. Theor. Biol.*, **86** (1980), 351-363.

[3] J. Furter and M. Grinfeld - Local vs. nonlocal interactions in population dynamics. *J. Math. Biol.* **27**, (1989), no. 1, 65-80.

[4] M. A. Pozio and A. Tesei - Support properties of solutions for a class of degenerate parabolic problems, *Commun. Partial Differential Eqns.*,, **12** (1987), 47-75.

[5] M. Delgado and A. Suárez - On the existence of dead cores for degenerate Lotka-Volterra models, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **130** (2000) 743-766.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

MODELOS MATEMÁTICOS APLICADOS A LA INVESTIGACIÓN DE NUEVAS ESTRATEGIAS DE TRATAMIENTO DEL CÁNCER: ASPECTOS TEÓRICOS Y NUMÉRICOS

PATRICIO CUMSILLE * CRISTÓBAL QUIÑINAO † & CARLOS CONCA ‡

El objetivo principal de este trabajo es estudiar la efectividad de nuevos medicamentos que atacan el proceso de angiogénesis, y también las terapias mixtas que además utilizan los tratamientos tradicionales contra el cáncer, como lo es la radioterapia o la quimioterapia, que actúan impidiendo la reproducción de las células cancerígenas. Basados en [1] hemos creado un modelo matemático, más estable con respecto a los parámetros, y al mismo tiempo robusto como para predecir el crecimiento tumoral, junto con la angiogénesis tumoral y terapias anti-proliferativa y anti-angiogénica. En esta exposición se mostrarán simulaciones numéricas del modelo, las cuales concuerdan con el resultado del paper [1], sin incluir aún el efecto de los medicamentos. Queda en etapa de desarrollo un algoritmo numérico que busque la mejor forma de posicionar el tamaño y la administración de las dosis de medicamentos, de manera tal de conseguir la mejor combinación de estos en el sistema.
Nuestro modelo consiste en un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de advección-difusión-reacción, que describe tanto la evolución como la interacción entre las variables. Las reglas que regulan dichas interacciones son en general expresiones no lineales de los coeficientes de las ecuaciones. Las notaciones utilizadas en nuestro modelo son: Ω el dominio computacional, P, Q, y N la densidad de las células tumorales en proliferación, en quiescencia, y necróticas, respectivamente, S la densidad de células del tejido sano, ρ la densidad de células endoteliales inestables, α la concentración de VEGF, C la concentración de oxígeno, M_1 la concentración de fármaco anti-proliferativo, y M_2 la concentración de fármaco anti-angiogénico. El modelo completo que proponemos para la evolución del crecimiento tumoral, acoplado con la angiogénesis tumoral, y con la acción de los fármacos anti-neoplásicos se escribe como sigue:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial t} + \underbrace{\nabla \cdot (Pv)}_{\textbf{advección}} &= \underbrace{\gamma(C)P}_{\textbf{crecimiento celular}} - \underbrace{(h_2(C) + h_3(M_1) + h_4(C))\, P}_{\textbf{hipoxia, necrósis y anti-proliferantes}} + \underbrace{h_5(C)Q}_{\textbf{hiperventilación}}, && (0.1)\\
\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot (Qv) &= h_2(C)P - (h_5(C) + h_6(C))\, Q, && (0.2)\\
\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot (Nv) &= h_6(C)Q + (h_3(M_1) + h_4(C))\, P, && (0.3)\\
\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (Sv) &= 0, && (0.4)\\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) + \underbrace{\nabla \cdot (\chi \rho \nabla \alpha)}_{\textbf{angiogénesis}} &= \underbrace{\pi(\alpha)\rho}_{\textbf{proliferación}}, && (0.5)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial \alpha}{\partial t} - \underbrace{\nabla \cdot (D_1 \nabla \alpha)}_{\textbf{difusión}} = \underbrace{-\rho\alpha}_{\textbf{consumo}} + \underbrace{h_0(Q, C, \alpha)}_{\textbf{producción}},
$$

*Grupo de Matemáticas Aplicadas Dpto. de Ciencias Básicas, Universidad del Bío-Bío, Campus Fernando May, Av. Andrés Bello s/n, Casilla 447 Chillán, Chile e Instituto de Dinámica Celular y Biotecnología, Universidad de Chile, pcumsille@ubiobio.cl
†Dpto. de Ingeniería Matemática - Centro de Modelamiento Matemático (UMI CNRS 2807), Universidad de Chile, Av. Blanco Encalada 2120, Casilla 170-3, Correo 3, Santiago, Chile, toba@dim.uchile.cl
‡Dpto. de Ingeniería Matemática - Centro de Modelamiento Matemático (UMI CNRS 2807), Av. Blanco Encalada 2120, Casilla 170-3, Correo 3, Santiago, Chile e Instituto de Dinámica Celular y Biotecnología, Universidad de Chile, cconca@dim.uchile.cl

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \nabla \cdot (D_2 \nabla C) = -\alpha_C PC - \beta_C QC + C_{sou} h_1(C)\rho,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_1}{\partial t} - \nabla \cdot (D_3 \nabla M_1) &= -\alpha_{M_1} PM_1 - \beta_{M_1} QM_1 - \underbrace{\gamma_{M_1} M_1}_{\textbf{decaimiento natural}} \\ &\quad + h_7(M_1)\rho(\delta_{M_1,1}\chi_{[T_1,T_2]} + \ldots + \delta_{M_1,n}\chi_{[T_{2n-1},T_{2n}]}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_2}{\partial t} - \nabla \cdot (D_4 \nabla M_2) &= -\alpha_{M_2} PM_2 - \beta_{M_2} QM_2 - \gamma_{M_2} M_2 \\ &\quad + h_8(M_2)\rho(\delta_{M_2,1}\chi_{[T_1,T_2]} + \ldots + \delta_{M_2,n}\chi_{[T_{2n-1},T_{2n}]}).\end{aligned}$$

En las ecuaciones anteriores hemos denotado por D_i, $i = 1, 2, 3, 4$, los coeficientes de difusión para las diferentes variables. Estos dependen de la cantidad que está difundiendo, y de la zona del espacio en donde difunde (tejido sano o tumoral). Además la función $\gamma(\cdot)$ y las funciones h_i, $i = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ modelan la tasa de proliferación de células tumorales y las tasas de transición de un estado celular a otro, respectivamente. Los parámetros α_C, β_C son constantes positivas que representan las tasas de consumo de oxígeno por las células proliferativas y quiescientes respectivamente; la misma interpretación se tiene para los otros coeficientes $(\alpha_{M_i}, \beta_{M_i}, i = 1, 2)$. Los parámetros $\delta_{M_i,j}$, $i = 1, 2, j = 1, \ldots, n$, representan las dosis de administración de las drogas M_1 (respectivamente M_2) y $[T_i, T_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, 2n-1$, representan los intervalos de tiempo en los cuales dichas dosis son administradas. Suponemos la condición:

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{M_i,j}(T_{2j} - T_{2j-1}) = \text{constante}, \quad i = 1, 2$$

esto es, la cantidad total de droga total está predeterminada.

La sensibilidad χ es una función que depende de ρ y de M_2 y modela el efecto de M_2, que actúa disminuyendo la sensibilidad de los receptores de VEGF.

Las ecuaciones (0.1)-(0.5), combinadas con el hecho de que la densidad de células por unidad de volumen no varía $(P + Q + N + S + \rho = \text{constante})$, implican que, salvo normalización $\nabla \cdot v = \gamma(C)P + \pi(\alpha)\rho - \nabla \cdot (\chi\rho\nabla\alpha)$. Así suponiendo válida la ley de Darcy, $v = -k\nabla\varphi$, donde φ es un potencial y k es la porosidad del medio dada por $k = k_1(S + \rho) + k_2(P + Q + N)$, donde k_1 representa la porosidad del tejido sano y k_2 la porosidad del tejido cancerígeno ($0 < k_1 < k_2$, ambas constantes), obtenemos que:

$$-\nabla \cdot (k\nabla\varphi) = \gamma(C)P + \pi(\alpha)\rho - \nabla \cdot (\chi\rho\nabla\alpha).$$

Este sistema de ecuaciones se cierra con condiciones de borde e iniciales apropiadas.

Agradecimientos

El primer y tercer autor agradecen al Instituto de Dinámica Celular y Biotecnología por su apoyo parcial a través del proyecto ICM P05-001-F. Además el primer autor agradece el apoyo parcial del Gobierno Chileno a través del proyecto Fondecyt-Conicyt 11080222.

Referências

[1] BILLY, F., RIBBA, B., SAUT, O., MORRE-TROUILHET, H., COLIN, T., BRESCH, D., BOISSEL, J. P., GRENIER, E. AND FLANDROIS, J. P. - *A pharmacologically-based multiscale mathematical model of angiogenesis and its use in investigating the efficacy of a new cancer treatment strategy*, Journal of Theoretical Biology, 260 (4) (2009) 545-562.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

STRONG RESONANCE ELLIPTIC PROBLEMS USING VARIATIONAL METHODS

EDCARLOS D. DA SILVA *

1 Introduction

In this notes we discuss the existence and multiple solutions of the Dirichlet boundary value problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda_1 |u|^{p-2}u + f(x,u) \text{ in } \Omega, \\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded open domain with smooth boundary $\partial\Omega$, $1 < p < N$ and $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a Carathéodory function such that

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{f(x,t)}{|t|^{p-1}} = 0. \tag{1.2}$$

Here $\triangle_p$ denotes the p-Laplacian operator, that is, $\triangle_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$. When $p = 2$, it is the usual Laplacian operator.

From a variational stand point of view, finding solutions of (1.1) in $W_0^{1,p}(\Omega)$ is equivalent to finding critical points of the C^1 functional J given by

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda_1}{p}\int_\Omega |u|^p dx - \int_\Omega F(x,u)dx, \ \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{1.3}$$

where $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds$ and the Sobolev space $W_0^{1,p}(\Omega)$ is a Banach space endowed with the norm $\|u\| = (\int_\Omega |\nabla u|^p dx)^{\frac{1}{p}}$.

It is well known that the p-homogeneous boundary value problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda_1 |u|^{p-2}u \ \ in\ \Omega, \\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.4}$$

has the first eigenvalue $\lambda_1 > 0$ that is simple and has an associated eigenfunction denoted by Φ_1 which is positive in Ω.

Therefore, by (1.2), the problem (1.1) presents the resonance phenomena at the first eigenvalue. These problems are very interesting and they have a vast literature which starts by celebrated work [2].

The main goal of this notes is find existence and multiple solutions of problem (1.1) assuming strong resonance conditions at infinity. These problems has been studied since the appearance of work [1]. More specifically, we consider the following restrict situations

$$\lim_{|t|\to\infty} f(x,t) = 0, \text{ and } |F(x,t)| \le C, \ \forall\,(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Moreover, we make some conditions which are weaker than the non-quadricity condition at infinity introduced by [4]. More specifically, we introduce the following hypothesis

$(H0)$ There are functions $a, b \in L^1(\Omega)$ such that

*Instituto de Matemática , UFG, GO, Brazil, edcarlos@mat.ufg.br

$$\limsup_{|t|\to\infty} tf(x,t) \leq a(x) \preceq 0, \; \forall\; x \in \Omega, \tag{1.6}$$

or

$$\liminf_{|t|\to\infty} tf(x,t) \geq b(x) \succeq 0, \; \forall\; x \in \Omega. \tag{1.7}$$

Here the inequality $a(x) \preceq 0$ means that $a(x) \leq 0, \forall\; x \in \Omega$ with strict inequality holding on some subset $\overline{\Omega} \subseteq \Omega$ which has positive Lebesgue measure.

2 Results

In this section we presents the main results. Here, we will always use the Variational Methods and Morse Theory. First, we can prove the following result

Teorema 2.1. *(Existence) Suppose* $(SR), (H0)$. *Then the problem (1.1) has at least one solution* $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Now, we take $F(x,0) \equiv 0, f(x,0) \equiv 0$ which implies that $u = 0$ is a trivial solution of problem (1.1). In this case the key point is assure the existence of nontrivial solutions. We need some additional hypothesis

$(H1)$ There are $\delta > 0$ and $\alpha \in (0, \lambda_1)$ such that

$$F(x,t) \leq \frac{\alpha - \lambda_1}{p}|t|^p, \; \forall\; |t| \leq \delta, \; \forall x \in \Omega.$$

$(H2)$ There is $t_\star \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ such that

$$\int_\Omega F(x, t_\star \Phi_1(x))dx > 0.$$

Thus, combining Ekeland's Variational Principle and Mountain Pass Theorem, we can prove the following multiplicity result

Teorema 2.2. *Suppose* $(SR), (H0), (H1), (H2)$. *Then the problem (1.1) has at least two nontrivial solutions* $u_0, u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Next, we consider the following hypothesis

$(H3)$ There are $r > 0$ and $\epsilon \in (0, \lambda_2 - \lambda_1)$ such that

$$0 \leq F(x,t) \leq \frac{\lambda_2 - \lambda_1 - \epsilon}{p}|t|^p, \; \forall\; |t| \leq r, \; \forall x \in \Omega.$$

Then, using the Three-Critical Point Theorem, we can show the following result

Teorema 2.3. *Suppose* $(SR), (H0), (H3)$. *Then the problem (1.1) has at least two nontrivial solutions.*

Referências

[1] P. Bartolo, V. Benci, D. Fortunato - *Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with "strong" resonance at infinity,* Nonlinear Anal. 7 (1983), no. 9, pp 981-1012.

[2] E.M. Landesman and A. C. Lazer - *Nonlinear pertubations of linear elliptic boundary value problems at resonance,* J. Math. Mech. 19, (1969/1970), pp 609-623.

[3] D. G. Costa and C. A. Magalhães - *Variational Elliptic Problems Which are Nonquadratic at Infinity,* Nonlinear Anal. 23 (1994), no. 11, 1401-1412.

[4] Edcarlos D. da Silva - *Quasilinear elliptic problems under strong resonance conditions,* Nonlinear Analysis, Volume 73, Issue 8, 15 October 2010, Pages 2451-2462.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edition N$^{\underline{0}}$ 4 November 2010

On a Variational Inequality for a Micropolar Fluid System

G. M. de Araújo *

Let $\Omega \in \mathbb{R}^n (n=3)$ be a bounded connected open set with the boundary $\partial\Omega$ regular enough. For $T>0$, we denote by Q_T the cylinder $(0,T)\times\Omega$, with lateral boundary $\Sigma_T=(0,T)\times\partial\Omega$. We consider the nonlinear coupled system

$$\left| \begin{array}{l} u' - (\nu_0 + \nu_1\|u\|^2)\Delta u + (u.\nabla)\, u + \nabla p = \operatorname{rot} w + f \;\text{ in }\; Q_T \\ w' - \Delta w - \nabla(\nabla.w) + (u.\nabla)\, w = \operatorname{rot} u + g \;\text{ in }\; Q_T \\ \operatorname{div} u = 0 \quad\text{in}\quad Q_T,\;\; u=w=0 \quad\text{on}\quad \Sigma_T,\;\; u(x,0)=u_0(x) \quad\text{and } w(x,0)=w_0(x) \quad\text{in}\quad \Omega, \end{array}\right. \tag{0.1}$$

Here, $u(x,t)\in\mathbb{R}^3$, $w(x,t)\in\mathbb{R}^3$ and $p(x,t)\in\mathbb{R}$, denotes for $(x,t)\in Q$, respectively, the velocity field, the angular velocity and the hidrostatic pressure of the fluid. To our best knowledge, micropolar fluid were introduced by A. C. Eringen[4]. The main difference with respect to modeled fluids by the Navier-Stokes is that the rotation of the particles is taken into account. In particular, the nonlinear coupled system (0.1) can be used to model the behavior of liquid crystals, polymeric fluids and blood under some circumstances(see for instance [6]). These systems have been mainly analyzed by G. Lukaszewicz in [5]. Here, we propose the variational inequality system

$$\left| \begin{array}{l} u' - (\nu_0 + \nu_1\|u\|^2)\Delta u + (u.\nabla)\, u + \nabla p \geq \operatorname{rot} w + f \;\text{ in }\; Q_T \\ w' - \Delta w - \nabla(\nabla.w) + (u.\nabla)\, w \geq \operatorname{rot} u + g \;\text{ in }\; Q_T \\ \operatorname{div} u = 0 \quad\text{in}\quad Q_T,\;\; u=w=0 \quad\text{on}\quad \Sigma_T,\;\; u(x,0)=u_0(x) \quad\text{and } w(x,0)=w_0(x) \quad\text{in}\quad \Omega, \end{array}\right. \tag{0.2}$$

Also we define the following spaces: $\mathcal{V}=\{\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)^n;\quad \operatorname{div}\varphi=0\}$, $V=V(\Omega)=\overline{\mathcal{V}}^{H_0^1(\Omega)^n}$ and $H=H(\Omega)=\overline{\mathcal{V}}^{L^2(\Omega)^n}$, V and H with inner product and norm denoted, respectively by $((u,z))=\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\frac{\partial z_i}{\partial x_j}(x)\,dx$, $\|u\|^2=\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\right)^2dx$, and $(u,v)=\sum_{i=1}^n\int_\Omega u_i(x)v_i(x)\,dx$, $\quad |u|^2=\sum_{i=1}^n\int_\Omega |u_i(x)|^2\,dx$.

Remark 0.1. *V and H are Hilbert's spaces, $V\hookrightarrow H\hookrightarrow V'$ with embedding dense and continuous.*

Let K and $\widetilde{K}$ be a closed and convex subset of V and $H_0^1(\Omega)$ with $0\in K,\widetilde{K}$. We introduce the following bilinear and the trilinear form

$$a(u,v)=\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)\,dx=((u,v)),\;\; b(u,v,w)=\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega u_i(x)\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x)w_j(x)\,dx.$$

Next we shall state the main results of this paper.

Theorem 0.1. *If $n\le 3$, $f\in L^{4/3}(0,T;H^{-1}(\Omega)), g\in(L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, then there exists functions $\{u,w\}$ such that*

$$u\in L^4(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H), w\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\;\; u(t)\in K, a.e., w(t)\in\widetilde{K}, a.e. \tag{0.3}$$

$$\begin{gathered}\int_0^T[\langle\varphi',\varphi-u\rangle+a(u,\varphi-u)+b(u,u,\varphi-u)+\|u\|^2a(u,\varphi-u)]dt\ge\int_0^T[(\operatorname{rot} w,\varphi-u)+\langle f,\varphi-u\rangle]dt,\\ \forall\varphi\in L^4(0,T;V),\varphi'\in L^{4/3}(0,T;V'),\varphi(0)=0,\;\varphi(t)\in K\;\; a.e.\end{gathered} \tag{0.4}$$

$$\int_0^T[\langle\phi',\phi-w\rangle+a(w,\phi-w)+b(u,w,\phi-w)-(\nabla\operatorname{div} w,\phi-w)]dt\ge\int_0^T[(\operatorname{rot} u,\phi-w)+\langle f,\phi-w\rangle\,dt], \tag{0.5}$$
$\forall\phi\in L^4(0,T;H_0^1(\Omega)),\phi'\in L^{4/3}(0,T;H^{-1}(\Omega)),\phi(0)=0,\;\phi(t)\in\widetilde{K}\;\; a.e.$

*Instituição UFPA , FM, Belém-Pará, Brasil, gera@fpa.br

The proof of Theorem 0.1 will be given by the penalty method. We solve the mixed problem (0.6) and the estimates obtained for the local solution, allow us pass to limits, when ϵ, ε goes to zero, in order to obtain functions $\{u, w\}$ which is the solution of Theorem (0.1).

First of all, let us consider the penalty operators $\beta : V \longrightarrow V'$ and $\widetilde{\beta} : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ associated to the closed convex sets K and $\widetilde{K}$, cf. Lions [2], p.370. The operators β and $\widetilde{\beta}$ are monotonous, hemicontinuous, takes bounded sets of V and $H_0^1(\Omega)$ into bounded sets of V' and $H^{-1}(\Omega)$, its kernel are K and $\widetilde{K}$, $\beta : L^4(0,T;V) \longrightarrow L^{4/3}(0,T;V')$, $\widetilde{\beta} : L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \longrightarrow L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ are equally monotone and hemicontinous.

The penalized problem associated with the variational inequalities (0.2) consists in given $0 < \epsilon, \varepsilon < 1$, find $\{u_\epsilon, w_\epsilon\}$ solution in Q of the mixed problem

$$\left| \begin{array}{l} u_\epsilon - (\nu_0 + \nu_1 \|u_\epsilon\|^2)\Delta u_\epsilon + (u_\epsilon.\nabla)\, u_\epsilon + \dfrac{1}{\epsilon}\beta u_\epsilon + \nabla p = \operatorname{rot} w_\varepsilon + f \ \text{ in } \ Q_T \\ w'_\varepsilon - \Delta w_\varepsilon - \nabla(\nabla . w_\varepsilon) + (u_\epsilon.\nabla)\, w_\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon}\widetilde{\beta} w_\varepsilon = \operatorname{rot} u_\epsilon + g \ \text{ in } \ Q_T \\ \operatorname{div} u_\epsilon = 0 \quad \text{in} \quad Q_T, \ u_\epsilon = w_\varepsilon = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma_T, \ u_\epsilon(x,0) = u_{\epsilon 0}(x) \text{ and } w_\varepsilon(x,0) = w_{\varepsilon 0}(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \end{array} \right. \tag{0.6}$$

Definition 0.1. *Let $u_{\epsilon 0} \in H$, $w_{\varepsilon 0} \in L^2(\Omega)$, $f, g \in L^{4/3}(0,T;H^{-1}(\Omega))$. A weak solution to the boundary value problem (0.6) is a functions $\{u_\epsilon, w_\varepsilon\}$, such that $u_\epsilon \in L^4(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$, $w_\varepsilon \in L^4(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, for $T > 0$, satisfying the identity*

$$\left| \begin{array}{l} (u'_\epsilon, \varphi) + \nu_0 a(u_\epsilon, \varphi) + b(u_\epsilon, u_\epsilon, \varphi) + \langle \mathcal{A} u_\epsilon, \varphi \rangle + \dfrac{1}{\epsilon}(\beta u_\epsilon, \varphi) = (\operatorname{rot} w_\varepsilon, \varphi) + (f, \varphi) \\ (w'_\varepsilon, \phi) + a(w_\varepsilon, \phi) + (\operatorname{div} w_\varepsilon, \operatorname{div} \phi) + b(u_\epsilon, w_\varepsilon, \phi) + \dfrac{1}{\varepsilon}(\widetilde{\beta} w_\varepsilon, \phi) = (\operatorname{rot} u_\epsilon, \phi) + (g, \phi) \\ \forall \varphi \in V, \ \phi \in H_0^1(\Omega), \ u_\epsilon(0) = u_{\epsilon 0}, \ w_\varepsilon(0) = w_{\varepsilon 0}, \ \operatorname{div} \varphi = 0 \end{array} \right. \tag{0.7}$$

Remark 0.2. *We denote by $\mathcal{A}$ the monotonous, hemicontinous and bounded operator $\mathcal{A} : V \longrightarrow V'$, $\langle \mathcal{A} u, v \rangle = \|u\|^2 a(u,v)$ (see, for example, Lions [2], p. 218). We have that $\mathcal{A} u = -\nu_1 \|u\|^2 \Delta u$.*

The solution of the (0.7) is given by the following theorem:

Theorem 0.2. *If $f \in L^{4/3}(0,T;H^{-1}(\Omega))$, $g \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, $u_{\epsilon 0} \in V$ and $w_{\varepsilon 0} \in H_0^1(\Omega)$, then for each $0 < \epsilon, \varepsilon < 1$ there exists a functions $\{u, w\}$ defined for $(x,t) \in Q_T$, solution to the problem (0.6) in the sense of Definition 0.1.*

References

[1] G. M. De Araújo and S. B. De Menezes On a Variational Inequality for the Navier-stokes Operator with Variable Viscosity, Communicatios on Pure and Applied Analysis. Vol. 1, N.3, 2006, pp.583-596.

[2] J.L. Lions, Quelques Méthodes de Resolution Des Problémes Aux Limites Non Linéaires, Dunod, Paris, 1969.

[3] H. Brézis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications, Masson, Paris, 1983.

[4] A. C. Eringen, Theory of micropolar fluids, J. Math. Mech. 16 (1996), 1-18.

[5] G.Lukaszewick, Micropolar Fluids, Theory and applications, Modeling and simulations in Science, Engineering and Technology , Birkhäuser Boston, Inc.,Boston, MA, 1999.

[6] C. Calmelet-Eluhu, D. R. Majudamar, Flow of a micropolar fluid through a circular cylinder subject to longitudinal and torsional oscillations, math. Comput. Modelling 27(8)(1998), 69-78.

[7] W.L. Wilkinson- Non-Newtonian fluids, Pergamon Press, Oxford, 1960.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

BIHARMONIC EQUATIONS OF THE HENON TYPE: EXISTENCE RESULTS

Djairo G. de Figueiredo * Ederson M. dos Santos † & Olímpio H. Miyagaki ‡ §

Starting with the pioneering work of Ni [5], a special attention has been devoted to the study of the Dirichlet problem

$$-\Delta u = |x|^{\alpha}|u|^{p-1}u \quad \text{in} \quad B, \quad \text{with} \quad u = 0 \quad \text{on} \quad \partial B, \tag{0.1}$$

where B stands for the open unit ball in $\mathbb{R}^N$ and $N \geq 3$. The term $|x|^{\alpha}$ in (0.1) modifies the range of the values p for which the problem has a solution. The critical exponent, which in the case of $\alpha = 0$ is $2^* := 2N/(N-2)$, is changed by the presence of $|x|^{\alpha}$, and it is then $2^{\diamondsuit} := (2N + 2\alpha)/(N-2)$. By the classical Pohozaev argument one proves that (0.1) has no classical solution if $p \geq 2^{\diamondsuit} - 1$. Existence of a positive radial solution for $1 < p < 2^{\diamondsuit} - 1$ was proved by Ni [5]. Later, Badiale, Serra [1] proved the following theorem.

Teorema 0.1. *[1, Theorem 1.1] Assume $N \geq 4$ and $1 < p < (N+1)/(N-3)$. Then, for all large α, problem (0.1) has at least $[N/2] - 1$ different positive non radial solutions.*

In this paper we consider the boundary value problem

$$\Delta^2 u = |x|^{\alpha}|u|^{p-1}u \quad \text{in} \quad B, \quad \text{with} \quad \mathcal{B}u = 0 \quad \text{on} \quad \partial B, \quad \alpha > 0 \tag{0.2}$$

where either $\mathcal{B}u = u,\ \Delta u$ (Navier boundary condition) or $\mathcal{B}u = u,\ \frac{\partial u}{\partial \nu}$ (Dirichlet boundary condition), and our aim is to prove existence, multiplicity and regularity of solutions obtained by variational methods, which to start with lie in some Sobolev spaces.

As far as we know, the first work on this type of problem is due to Dalmasso [4]. In that paper, possibly motivated by Ni [5], Dalmasso considers (0.2) under Dirichlet's boundary condition and he proves the following result.

Teorema 0.2. *[4, Corollaire 2.1 and Théoreme 1.1] Let $N \geq 5$. Consider (0.2) under Dirichlet's boundary condition.*

1. *If $p \geq [N + 2(2+\alpha)]/(N-4)$, then (0.2) has no classical positive ($u > 0$ in B) solution $u \in C^4(\overline{B})$.*
2. *If $1 < p < [N + 2(2+\alpha)]/(N-4)$, then (0.2) has a classical positive ($u > 0$ in B) radial solution $u \in C^4(\overline{B})$ which is strictly radially decreasing.*

The proof of item 1. is based on Pohozaev argument, meanwhile the proof of item 2. is based on a Radial Lemma for functions in $H^2_{0,\mathrm{rad}}(B)$, which reads (see [4, Lemme 3.1]) as follows:

$$|u(x)| \leq C \frac{\left[\int_B |\Delta u|^2 dx\right]^{1/2}}{|x|^{(N-4)/2}}, \quad \forall\, x \in B\backslash\{0\}, \quad \forall\, u \in H^2_{0,\mathrm{rad}}(B).$$

To our knowledge we are the first to consider (0.2) under Navier's boundary condition and our approach in this case has some intersection with Calanchi, Ruf [2] who treat, in particular, a Hamiltonian system with weights of Henon's type. Our first result is the following theorem.

*IMECC-UNICAMP,Campinas, SP, Brasil, djairo@imecc.unicamp.br
†ICMC-USP, São Carlos, SP, Brasil, e-mail: ederson@icmc.usp.br
‡Dep. Matemática-UFJF, Juiz de Fora, MG, Brasil, e-mail: ohmiyagaki@gmail.com
§E.M. dos Santos has been partially supported by FAPESP. O.H. Miyagaki has been partially supported by CNPq/Brazil and INCTmat/MCT-Brazil.

Teorema 0.3. *Let $N \geq 5$. Consider (0.2) under Navier's boundary condition (note $u > 0$ in B iff $-\Delta u > 0$ in B).*

1. *If $p \geq [N + 2(2 + \alpha)]/(N - 4)$, then (0.2) has no positive classical solution $u \in C^4(\overline{B})$.*
2. *If $1 < p < [N + 2(2 + \alpha)]/(N - 4)$, then (0.2) has a positive solution $u \in C^4(\overline{B})$. In addition, u and $-\Delta u$ are radial and strictly radially decreasing.*

In order to prove the above theorem, we present sharp pointwise estimates for radial functions in the Sobolev space $W^{m,p}_{\mathrm{rad}}(B)$ for every $m \geq 1$. We apply these estimates to get compact imbeddings and to prove classical regularity of any weak radial solution of (0.1) with $0 < p < [N + 2(1 + \alpha)]/(N - 2)$ and (0.2) with $0 < p < [N + 2(2 + \alpha)]/(N - 4)$.

In addition, we present some general Sobolev imbeddings for functions which possess partial radial symmetry. Such result provides the most important parts in the proof of the Theorem 0.4 below. Observe that similar results are given by Theorem 0.1 in the case of the Laplacian under Dirichlet boundary condition and by [3, Theorem 1.1] in the case of the p-Laplacian under Dirichlet boundary condition.

Teorema 0.4. *Assume $N \geq 4$, $p > 1$ and, if $N \geq 6$ also assume $p < (N + 3)/(N - 5)$. Then there exists $\alpha_0 > 0$ such that (0.2) has at least $[N/2] - 1$ non radial $C^4(\overline{B})$ solutions for every $\alpha > \alpha_0$. In addition:*

1. *if $\mathcal{B}u = u, \Delta u$, then all these solutions satisfy $u, -\Delta u > 0$ in B and*
2. *if $\mathcal{B}(u) = u, \frac{\partial u}{\partial \nu}$, then all these solutions satisfy $u > 0$ in B and Δu changes sign in B.*

References

[1] BADIALE,M. AND SERRA, E. -Multiplicity results for the supercritical Henon equation. *Adv. Nonlinear Stud.*, **4**, 453–467, 2004.

[2] CALANCHI,M. AND RUF, B.- Radial and non radial solutions for Hardy-Henon type elliptic systems. *Calc. Var. Partial Differential Equations*,**38**, 111-133, 2010.

[3] CARRIÃO, P.C.,DE FIGUEIREDO,D.G. AND MIYAGAKI,O.H. -Quasilinear elliptic equations of the Henon-type: existence of non-radial solutions.*Commun. Contemp. Math.*,**11**, 783–798, 2009.

[4] DALMASSO. R. -Probléme de Dirichlet homogene pour une equation biharmonique semi-linéaire dans une boule. *Bull. Sci. Math.*,**114** , 123–137, 1990.

[5] NI, W-N.I -A nonlinear Dirichlet problem on the unit ball and its applications, *Indiana Univ. Math. J.* ,**31**, 801–807, 1982

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

ALGEBRAS OF LORCH ANALYTIC MAPPINGS

Luiza A. Moraes * & Alex F. Pereira †

In this work, we describe the spectra of some algebras of Lorch analytic mappings. For a commutative Banach algebra E with unit and an open connected subset U of E, we say that $f : U \longrightarrow E$ has an **(L)-derivative** $f'(w_0) \in E$ at $w_0 \in U$ if for each $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ can be found such that for all $h \in E$ satisfying $\|h\| < \delta$ we have

$$\|f(w_0 + h) - f(w_0) - h\,f'(w_0)\| < \varepsilon\|h\|.$$

We say that f is **(L)-analytic** in U if f has an (L)-derivative at each point of U (see [7]). It is known that f is (L)-analytic in U if and only if given any $w_0 \in U$ there exists $\rho > 0$ and there exist unique elements $a_n \in E$, such that $f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(w - w_0)^n$ for all w in $\|w - w_0\| < \rho$. For details, see for instance the Theorems 3.19.1 and 26.4.1 in [6]. In particular, $f : E \longrightarrow E$ is (L)-analytic in E if and only if there exist unique elements $a_n \in E$, such that $\lim \|a_n\|^{\frac{1}{n}} = 0$ and $f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ for all $w \in E$. It is easy to verify that $\mathcal{H}_L(U, E) \subset \mathcal{H}(U, E)$ where $\mathcal{H}(U, E)$ denotes the space of holomorphic mappings from U into E. We refer to [3] and [9] for background on holomorphic mappings between Banach spaces.

We denote by $\mathcal{H}_L(U, E)$ the space of the (L)-analytic mappings from U into E. When $U = E$ we write $\mathcal{H}_L(E)$ instead of $\mathcal{H}_L(E, E)$. Given $a \in E$, we denote by $\tilde{f}_a$ the constant mapping $\tilde{f}_a(w) = a$ for all $w \in U$. We show that $(\mathcal{H}_L(E)\,,\,\tau_b)$ is a commutative Fréchet algebra with unit $\tilde{f}_e$, where e is the unit of E and τ_b is the topology of uniform convergence on the bounded subsets of E.

For each $n = 1, 2, ...$ let B_E denote the open ball $\{w \in E; \|w\| < 1\}$ and let $\mathcal{A}_L(nB_E)$ be the space of all $f : \overline{nB_E} \longrightarrow E$ that are (L)-analytic in nB_E and uniformly continuous on $\overline{nB_E}$ endowed with the topology generated by the norm defined by $\|f\|_n := \sup\{\|f(w)\|; w \in \overline{nB_E}\}$ for every $f \in \mathcal{A}_L(nB_E)$. It is easy to verify that $\mathcal{A}_L(nB_E)$ is a commutative Banach algebra with unit $\tilde{f}_e$. We denote by $\mathcal{H}^{\infty}_L(B_E)$ the space of all bounded (L)-analytic mappings from B_E into E. It is easy to check that $\mathcal{H}^{\infty}_L(B_E)$ endowed with de sup norm is a commutative Banach algebra with unit $\tilde{f}_e$. The proofs of the results announced in this note can be found in [8].

1 The Results

If $\mathcal{A}$ is a commutative Fréchet algebra, we denote by $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ the spectrum of $\mathcal{A}$. By definition, the **radical** of an algebra $\mathcal{A}$ is the intersection of all maximal ideals in $\mathcal{A}$. We will denote the radical of $\mathcal{A}$ by $\mathcal{R}(\mathcal{A})$. An algebra $\mathcal{A}$ is called **semi-simple** if $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \{0\}$. We refer to [5] for background on Fréchet algebras and to [1], [2], [4] and [10] for previous results about spectra of algebras of holomorphic mappings.

Theorem 1.1. *Let E be a commutative Banach algebra with a unit element e. The mapping $\delta : \mathcal{M}(E) \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{H}_L(E))$ defined by $\delta(\varphi, \lambda)(f) = \varphi(f(\lambda e))$ for every $f \in \mathcal{H}_L(E)$ is injective and onto. Moreover, the inverse Π is continuous.*

Given any $n \in \mathbb{N}$, let $\overline{\Delta}_n = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq n\}$, $\|f\|_{\overline{\Delta}_n} = \sup\{\|f(\lambda e)\|\,;\, \lambda \in \overline{\Delta}_n\}$ for all $f \in \mathcal{H}_L(E)$ and $A_n = \{\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_L(E)) : |\phi(f)| \leq \|f\|_{\overline{\Delta}_n}$ for every $f \in \mathcal{H}_L(E)\}$. If $n = 1$ we write $\overline{\Delta}$ instead of $\overline{\Delta}_1$.

Theorem 1.2. *Let E be a commutative Banach algebra with a unit element e and let $\Pi : \mathcal{M}(\mathcal{H}_L(E)) \longrightarrow \mathcal{M}(E)\times\mathbb{C}$ be the inverse of the mapping δ defined in the Theorem 1.1. Then Π defines an homeomorphism from A_n onto $\mathcal{M}(E) \times \overline{\Delta}_n$ for all $n \in \mathbb{N}$.*

*Instituto de Matemática, UFRJ, RJ, Brasil, luiza@im.ufrj.br
†Instituto de Matemática, UFRJ, RJ, Brasil, alexpereira@im.ufrj.br

Theorem 1.3. *The spectrum $\mathcal{M}(\mathcal{A}_L(nB_E))$ of $\mathcal{A}_L(B_E)$ is homeomorphic to $\mathcal{M}(E) \times \overline{\Delta}_n$.*

Corollary 1.1. *E is semi-simple if and only if $\mathcal{H}_L(E)$ is semi-simple.*

Corollary 1.2. *E is semi-simple if and only if $\mathcal{A}_L(nB_E)$ is semi-simple.*

To each $\varphi \in \mathcal{M}(E)$ and $\lambda \in \Delta$ we associate the mapping $\delta(\varphi, \lambda) : \mathcal{H}_L^\infty(B_E) \longrightarrow \mathbb{C}$ defined by $\delta(\varphi, \lambda)(f) = \varphi(f(\lambda e))$ for every $f \in \mathcal{H}_L^\infty(B_E)$. It is easy to check that $\delta(\varphi, \lambda) \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_L^\infty(B_E))$.

Proposition 1.1. *The mapping $\delta : \mathcal{M}(E) \times \Delta \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{H}_L^\infty(B_E))$ that associates to each $(\varphi, \lambda) \in \mathcal{M}(E) \times \Delta$ the function $\delta(\varphi, \lambda)$ defined above is injective but $\delta(\mathcal{M}(E) \times \Delta) \subsetneqq \mathcal{M}(\mathcal{H}_L^\infty(B_E))$.*

Proposition 1.2. *The following are equivalent:*

(a) $\overline{\delta(\mathcal{M}(E) \times \Delta)} = \mathcal{M}(\mathcal{H}_L^\infty(B_E))$.

(b) For any family $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{H}_L^\infty(B_E)$ satisfying that there exists $\delta > 0$ such that for every $\lambda \in \Delta$ and for every $\varphi \in \mathcal{M}(E)$,

$$\sum_{i=1}^{n} |\varphi(f_i(\lambda e))| \geq \delta$$

holds, there exists $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{H}_L^\infty(B_E)$ such that

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(w) g_i(w) = e \quad \text{for all } w \in B_E$$

References

[1] ARON, R. M., COLE, B. J. AND GAMELIN, T.W. - *Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space*, J.Reine Angew. Math. **415** (1991) 51-93.

[2] BURLANDY, P. A. AND MORAES, L. A. - *The spectrum of an algebra of weakly continuous holomorphic mappings*, Indag. Math. (N.S.) **11** (4) (2000) 525-532.

[3] DINEEN, S. - *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Springer Monogr. Math., Springer Verlag, London, Berlin, Heidelberg, 1999.

[4] GARCIA, D., LOURENÇO, M. L., MORAES, L. A. AND PAQUES, O. - *The spectra of some algebras of analytic mappings*, Indag. Math. (N.S.) **10** (3) (1999) 393-406.

[5] GOLDMANN, H. - *Uniform Fréchet Algebras*, Math. Studies 162, North Holland, Amsterdam, 1990.

[6] HILLE, E. AND PHILLIPS R.S. - Functional Analysis and Semi-groups, American Mathematical Society, Colloquium Publications XXXI, Baltimore, 1957.

[7] LORCH, E.R. - *The theory of analytic functions in normed abelian vector rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **54** (1943), 414–425.

[8] MORAES, L.A. AND PEREIRA, A.F. - *The spectra of algebras of Lorch analytic mappings*, Topology **48** (2009), 91–99.

[9] MUJICA, J. - *Complex Analysis in Banach Spaces*, North-Holland Math. Stud., **120**, Amsterdam, 1986.

[10] SCHARK, I. J. - *Maximal Ideals in an algebra of bounded analytic functions*, J. of Math. and Mech. **10**.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$\underline{\text{o}}$ 4 Novembro 2010

CONTROLE DE PROLIFERAÇÃO DE INSETOS

MILTON L. OLIVEIRA * & JOSE L. BOLDRINI † & ANDERSON L. A. ARAUJO ‡

A proliferação de mosquitos em regiões habitadas é uma importante questão de saúde pública, uma vez que tais insetos são vetores de várias doenças infecciosas e consequentemente causam grandes transtornos à população humana dessas regiões.

Dessa forma, o estudo de técnicas de controle de populações de mosquitos são relevantes na busca da eficiência no seu combate. Para isto, a compreensão adequada de modelos matemáticos que descrevem tais situações pode lançar alguma luz sobre quais procedimentos de controle são os mais adequados a cada situação específica.

Neste trabalho temos interesse tanto em realizar análises matemáticas rigorosas de certos modelos de disseminação e controle de populações de mosquitos em uma dada região, quanto na proposição de algorítmos para o cálculo das correspondentes estratégias ótimas e suas simulações numéricas.

Iniciaremos o trabalho pelo estudo de um problema de controle apresentado em Araujo [1] .

Pretende-se controlar a população de mosquitos em uma região através da aplicação de inseticida por uma unidade volante de pulverização.

Para isto, analisa-se um modelo simplificado de controle ótimo distribuído, correspondente a uma situação onde deseja-se encontrar uma trajetória ótima para a unidade de pulverização em um sentido que será esclarecido a seguir.

As trajetórias admissíveis começam em um ponto fixado que, sem perda de generalidade, podemos tomar como sendo a origem do sistema de referências fixado; cada uma destas trajetórias admissíveis é então determinada por uma função suficentemente regular $\gamma : [0,T] \to \mathbf{R}^2$, com $0 < T < \infty$ um tempo final fixado. Em outras palavras, elas são as possíveis trajetórias de um dispositivo de pulverização, a qual é assumida por simplicidade ser feita de forma contínua ao longo do percurso dado por γ, na tentativa de controlar uma população de mosquitos presente em uma região limitada $\Omega \subset \mathbf{R}^2$.

Em termos matemáticos, o problema de controle em que estamos interessados é o de encontrar uma trajetória $\gamma^* : [0,T] \to \mathbf{R}^2$, que é a requerida estratégia ótima (controle ótimo), satisfazendo

$$F(\gamma^*) = \min\{F(\gamma) : \gamma \in \mathcal{A}\},$$

onde,

$$\mathcal{A} = \{(\gamma \in H^1(0,T))^2 : \gamma(0) = 0\}$$

é o conjunto dos controles adimissíveis e

$$F(\gamma) = J(\gamma, u) = \mu_0 \int_0^T |\gamma(t)|^2 dt + \mu_1 \int_0^T |\gamma'^2 dt + \mu_2 \int_Q |u(x,t)|^2 dxdt.$$

Em [1], Araujo analisou o modelo anterior e mostrou a existência de trajetórias ótimas, bem como obteve a caracterizaremos de tais trajetórias por sua correspondente condição de otimalidade de primeira ordem.

Esta caracterização foi obtida usando a metodologia de Dubovistskii e Milyutin(veja por exemplo Girsanov [3]) e para o modelo considerado as condições de otimalidade são as seguintes.

*Departamento de Matemática , UFPB, PB, Brasil, milton@mat.ufpb.br
†IMECC, UNICAMP, SP, Brasil, e-mail: boldrini@ime.unicamp.br
‡Departamento de Matematica, UFV, MG, Brasil, e-mail: anderson_laa@yahoo.com.br

Denotando por $\gamma^*(.)$ o controle ótimo, e por $u^*(.,.)$ e $p^*(.,.)$ respectivamente os correspondentes estado ótimo e estado adjunto, as condições de otimalidade são:

$$
\begin{cases}
u_t^* - \alpha\Delta u^* = a\,u^* - b\,k(x-\gamma^*)u^* & \text{em } Q,\\
(\partial/\partial n)(u^*) = 0 & \text{em } S,\\
u^*(0) = u_0 & \text{em } \Omega,\\
\\
-p_t^* - \alpha\Delta p^* = a\,p^* - b\,k(x-\gamma^*)p^* - u^* & \text{em } Q,\\
(\partial/\partial n)(p^*) = 0 & \text{em } S,\\
p^*(T) = 0 & \text{em } \Omega,\\
\\
-\mu_1 {\gamma^*}'' + \mu_0\gamma^* - \mu_2 \displaystyle\int_\Omega p^* u^* \nabla k(x-\gamma^*)dx = 0 & \\
 & \text{em } (0,T),\\
\gamma^*(0) = 0, \quad {\gamma^*}'(T) = 0. &
\end{cases}
$$

Consideramos o trabalho de [1] e analisamos algumas técnicas para derivação das condições de otimalidade, no interesse de propor um algorítmo de busca de trajetórias ótimas que aproveite as condições de otimalidade já derivadas. Para isto, utilizaremos idéias expostas por exemplo em Aleésev *et al.* [2] e Gunzburger [4]. A seguir, faremos simulações de tais trajetórias, bem como análise comparativas.

Referências

[1] A.L.A. Araujo, Análise Matemática de um Modelo de Controle de Populações de Mosquitos, Dissertação de Mestrado, IMECC-Unicamp, 2008.

[2] V. Alexeév, S. Fomine, V. Tikomirov, Commande Optimale. Moscou, Mir, 1982.

[3] I.V. Girsanov, Lectures on mathematical theory of extremum problem., Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems, 67, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[4] M.D. Gunzburger. Perspectives in Flow Control and Optimization, SIAM, 2003.

[5] F. Hecht, Freefem++, third edition, version 3.5, Laboratorie Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris, http://www.freefem.org/ff++.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

UNIQUENESS OF POSITIVE RADIAL SOLUTIONS OF SEMILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS

HUGO A. C. DINIZ * & MARCO A. S. SOUTO †

We establish uniqueness of positive solutions of the semilinear equation

$$\begin{cases} -\Delta u + u = g(u), \text{ in } \mathbb{R}^N, \ N \geq 3 \\ \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0 \end{cases}$$

where g belongs to a class of nonlinearities which includes $g(s) = s^p + \lambda s^q$ with $1 < q < p \leq \frac{N}{N-2}$.

1 Introduction

In this paper we discuss about the uniqueness of positive solutions, which are radially symmetric around the origin, of the second order nonlinear elliptic problem

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) \quad \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

where either $\Omega = B$ is a ball of radius $b > 0$ centered in origin, or Ω is the whole space $\mathbb{R}^N$, with $N \geq 3$; and f is a C^1 real function defined on $[0, \infty)$ such that:

(f_1) $f(0) = 0$, $f'(0) < 0$ and then there is a $\theta > 0$ such that, $f'(\theta) > 0$

$$\begin{cases} f(s) < 0 \quad \text{for all } 0 < s < \theta, \\ f(s) > 0 \quad \text{for all } s > \theta. \end{cases}$$

(f_2) $f(s)/s$ is a non-decreasing function in $s > 0$ and increasing in $s > \theta$.
(f_3) The function $G(s) = \frac{sf'(s)}{f(s)}$ is a non-increasing when $G(s) \geq \frac{N}{N-2}$ and $s > \theta$.
Here $u|_{\partial\Omega} = 0$ means $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$ when $\Omega = \mathbb{R}^N$.

In two well known papers ([3] and [4]) Gidas, Ni & Nirenberg have proved that every classical solution of problem (1.1) must be radially symmetric in the case $\Omega = B$, and the same result holds when $\Omega = \mathbb{R}^N$, (up to a translation) with f satisfying some very reasonable conditions (for example if (f_1) holds and $f \in C^{1,\sigma}$, $\sigma > 0$). Then, if $u(x) = u(r)$, $r = |x|$, $x \in \Omega$ is a such solution, it must satisfy the following second order ordinary differential equation:

$$u'' + \frac{N-1}{r}u' + f(u) = 0, \text{ for all } r = |x|, \text{ with } x \in \Omega \text{ and } u'(0) = 0.$$

Thus, we can skip our problem to establish uniqueness of radially symmetric solutions. Our result is the following:

Teorema 1.1. *Under conditions $(f_1) - (f_3)$ and $N \geq 3$, problem (1.1) possesses at most one radially symmetric positive classical solution in both cases: $\Omega = B$ ball or $\Omega = \mathbb{R}^N$ (up to a translation). Moreover, this solution u is nondegenerate in the sense that the problem: $-\Delta\omega = f'(u)\omega$, Ω; has no radially symmetric solution in $H^1_{rad}(\Omega)$.*

*Instituto de Ciências da Educação, UFOPA, PA, Brasil, hdiniz@ufpa.br
†Unidade Acadêmica de Matemática e Estatística, UFCG, PB, Brasil, marco@dme.ufcg.edu.br
Research partially supported by the Milênio Project/CNPq/Brazil.

Observação 1.1. *From conditions (f_1) and (f_2), the functions f and $F(s) = \int_o^s f(\tau)d\tau$ satisfy:*

- *(i) F is decreasing in $s < \theta$ and increasing in $s > \theta$.*
- *(ii) $sf'(s) - f(s) \geq 0$, for all $s > 0$ and $sf'(s) - f(s) > 0$ in $s > \theta$.*

We remark that, in order to obtain existence of a solution to problem (1.1), the function F must be positive in some point in $s > 0$. Thus, we suppose that F satisfies this necessary condition:
(f_4) There is $\phi > \theta$ such that $F(\phi) = 0$.

Several results about uniqueness of such problems have been established. We can cite, among others, the articles: [1], [2] [5], [6], [7], [8], [9] and [10]. According to Kwong & Zhang in [6], this study can be traced back to Coffman in [2], where it is considered the case $N = 3$ and $f(s) = s^3 - s$.

None among these works deal with nonlinearities like $f(s) = s^p + \mu s^q - s$, with $1 < q < p \leq \frac{N}{N-2}$, $\mu > 0$, which is a typical example covered by this article.

Moreover, our condition (f_3) is easier to check than the others contained in the reference [6].

Here we will make use of the approach used by Kwong & Zhang in [6] (The Coffman's method). This approach consists in studying the zeros of the first variation of an ODE, using Sturm's comparison theorem arguments.

References

[1] **Coffman, C. V.,** *On the positive solution of boundary-value problems for a class of nonlinear differential equations,* Journal of Diff. Equations, 3, 92-111 (1967)

[2] **Coffman, C. V.,** *Uniqueness of the ground state solution for $\Delta u - u + u^3 = 0$ and a variational characterization of other solutions,* Arch. Rational Mech. Anal., 46, 82-95 (1972)

[3] **Gidas, B., Ni, W-M & Niremberg, L.,** *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic problem in* $\mathbb{R}^N$, Math. Analysis and Appl., Part A, Adv. in Math. Suppl. Studies, Vol 7A, 369-402(1981)

[4] **Gidas, B., Ni, W-M & Niremberg, L.,** *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Commun. Math. Phys., 68, 209-243 (1979)

[5] **Kwong, M. K.,** *Uniqueness of positive solutions of $\Delta u + f(u) = 0$ in $\mathbb{R}^N$,* Arch. Rational Mech. Anal., 105, 243–266 (1989)

[6] **Kwong, M. K. & Zhang, L.,** *Uniqueness of the positive solutions of $\Delta u + f(u) = 0$ in an annulus,* Diff. and Int. Equations, Vol. 4, No. 3, 583-599 (1991)

[7] **McLeod, K.,** *Uniqueness of positive radial solutions of $\Delta u + f(u) = 0$ in $\mathbb{R}^N$, II,* Trans. of the AMS, V. 339, No. 2, 495-505 (1993)

[8] **McLeod, K. & Serrin, J.,** *Uniqueness of positive radial solutions of $\Delta u + f(u) = 0$ in $\mathbb{R}^N$*,Arch. Rational Mech. Anal., 99, 115-145 (1983)

[9] **Peletier, L. A. & Serrin, J.,** *Uniqueness of positive solutions of semilinear equations in* $\mathbb{R}^N$, Arch. Rational Mech. Anal., 81, 181-197 (1983)

[10] **Peletier, L. A. & Serrin, J.,** , *Uniqueness of non-negative solution of semilinear equations in* $\mathbb{R}^N$, Journal of Diff. Equations, 61, 380-397 (1986)

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

Algumas soluções da EDP $u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0$

Maria L. Espindola *

1 Introdução

Na extensão do método apresentado em Espindola [1,2], podemos obter soluções para EDPs de segunda ordem desde que estas possam ser transformadas em equações diferenciais parciais do tipo $F(f(x)p, h(y)q) = G(x)$, onde $p = u_x$, $q = u_y$ e $u = u(x, y)$. Este método é desenvolvido utilizando uma transformação semelhante a de Legendre e o teorema para formas diferenciais Pfaffianas. Como a solução obtida depende de uma função arbitrária logo o método fornece sempre uma solução geral.

A equação

$$u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0 \tag{1.1}$$

é uma equação diferencial parcial p-harmônica (ou p-Laplace) definida em $\Re^2$, para $p \to \infty$ foi estudada por G. Aronsson [3,4]. As soluções obtidas para esta equação diferencial parcial trazem informações importantes em diversas situações desde esta é uma equação diferencial parcial não linear. No caso as funções $u = u(x, y)$ são as soluções de viscosidade ∞-harmônicas de $\Delta_\infty u = 0$, onde

$$\Delta_\infty u = |\nabla u|^{-2} \sum_{i,j} u_{x_i} u_{x_i x_j} u_{x_j}.$$

Neste artigo iremos ampliar o conjunto soluções de (1.1) apresentados em outros artigos, como nos de G. Aronsson [3,4] e o de Peres [5]. Com este intuito utilizaremos o método de Monge para equações diferenciais parciais uniformes, como efetuado em Snedonn [6], reduzindo esta equação diferencial parcial de segunda ordem no sistema de Monge, cuja solução resulta numa EDP de primeira ordem do tipo $f(p, q) = 0$. Então aplicamos o método desenvolvido em Espindola [1] para determinar a solução geral desta e portanto uma solução com uma função arbitrária de (1.1).

2 Solução dependente de uma função arbitrária

A equação diferencial parcial p-harmônica (1.1) pode ser reescrita como

$$p^2 r + 2pqs + q^2 t = 0, \tag{2.2}$$

onde $r = p_x$, $t = p_y$ e $s = p_y = q_x$.

O método de Monge, que é deduzido em Sneddon [6], pode ser aplicada para esta equação que sendo quasilinear, uniforme e homogênea resulta no seguinte sistema de Monge:

$$p^2 (dy)^2 - 2pqdxdy + q^2 (dx)^2 = 0 \tag{2.3}$$
$$p^2 dpdy + q^2 dqdx = 0. \tag{2.4}$$

A partir da equação (2.3) temos

$$(pdy - qdx)^2 = 0,$$

*Universidade Federal da Paraíba, DM/CCEN, PB, Brasil, mariia@mat.ufpb.br

ou

$$dy = \frac{p}{q}\, dx.$$

Que substituída em (2.4) fornece a forma diferencial

$$pdp + qdq = 0,$$

cuja solução é

$$p^2 + q^2 = \lambda^2,$$

onde λ é uma constante arbitrária.

Como a equação diferencial parcial é da forma $F(p, q) = 0$ portanto sua solução, obtida pelo método desenvolvido por Espindola [1], é

$$u = x\sqrt{\lambda^2 - q^2} + yq + \varphi(q), \tag{2.5}$$

com a condição

$$\varphi\prime(q) = \frac{xq}{\sqrt{\lambda^2 - q^2}} - y, \tag{2.6}$$

onde $\varphi(q)$ é uma função arbitrária. Portanto temos uma solução de (1.1) com uma função arbitrária.

3 Exemplo

Considere

$$\varphi(q) = arcsin\left(\frac{q}{\lambda}\right) + \mu, \tag{3.7}$$

onde μ é uma constante arbitrária. Da equação (2.6) temos

$$q = \frac{x \pm y\sqrt{\lambda^2(x^2 + y^2) - 1}}{x^2 + y^2}. \tag{3.8}$$

A solução de (1.1) é obtida substituindo (3.7) e (3.8) em (2.5)

$$u = x\left[\lambda^2 - \left(\frac{x \pm y\sqrt{\lambda^2(x^2+y^2)-1}}{x^2+y^2}\right)^2\right]^{1/2} + y\left(\frac{x \pm y\sqrt{\lambda^2(x^2+y^2)-1}}{x^2+y^2}\right) + \text{arcsin}\left(\frac{x \pm y\sqrt{\lambda^2(x^2+y^2)-1}}{x^2+y^2}\right) - \mu.$$

Agradecimentos

Ao Dr. Nelson Lima Teixeira (in memoriam) e ao Dr. Oslim Espindola (in memoriam) pelas edificantes conversas.

Referências

[1] Espindola, M. L. - Método de solução das EDPs : $F(u_x, u_y) = 0$; $F(f(x)u_x, u_y) = 0$; $F(u_x, h(y)u_y) = 0$. *Resumos dos trabalhos do II ENAMA*, **II**, 84-86, 2008.

[2] Espindola, M. L. - Solução geral da equação de Hamilton-Jacobi unidimensional. *Resumos dos trabalhos do III ENAMA*, **III**, 64-66, 2009.

[3] Aronsson, G. - On the partial differential equation $u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0$. *Arkiv för Matematic*, **7**, 395-425, 1968.

[4] Aronsson, G. - On certain singular solutions of the partial differential equation $u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0$. *Manuscripta Mathematica*, **47**, Numbers 1-3, 133-151, 1984.

[5] Peres, Y.;Schramm, O.; Sheffield, S.; Wilson, D. B. - Tug-of-war and the infinity Laplacian . *J. Amer. Math. Soc.*, **22**, 167-210, 2009.

[6] Sneddon, I. - *Elements of Partial Differential Equations*, MCGRAW-HILL, Kogakusha, First edition, 1957.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

ESTRUTURA LINEAR EM CERTOS CONJUNTOS DE OPERADORES SOBRE $C(K)$.

ROGÉRIO FAJARDO * & LEONARDO PELLEGRINI †

1 Introdução

O tema *espaços de Banach com poucos operadores* originou-se do artigo [1], no qual Gowers and Maurey constroem um espaço de Banach hereditariemante indecomponível. Nesse espaço, todo operador pode ser escrito na forma $\lambda I + S$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e S é estritamente singular. A indecomponibilidade surge da existência de poucos operadores e, em particular, da não existência de projeções não-triviais. Recentemente, Argyros e Haydon [2] construíram um espaço de Banach no qual todos os operadores são da forma $\lambda I + S$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e S é um operador compacto.

No caso particular de espaços de Banach da forma $C(K)$ – o espaço de Banach das funções contínuas em um compacto Hausdorff infinito K, munido da norma do supremo – foi mostrado em [3] não existe um espaço $C(K)$ onde todo operador $gI + C$, com $g \in C(K)$ e C compacto, ou da forma $\lambda I + S$, com $\lambda \in \mathbb{R}$ e S estritamente singular. Neste mesmo trabalho, Koszmider mostrou a existência de um espaço $C(K)$ no qual todo operador é da forma $gI + S$, com $g \in C(K)$ e S fracamente compacto. Tais operadores são frequentemente chamados de *multiplicações fracas*. Dizemos então que um espaço de Banach da forma $C(K)$ tem poucos operadores se todo operador é uma multiplicação fraca.

A grande dificuldade nesse tema está em encontrar noções intermediárias de poucos operadores. Seguindo essa direção, neste trabalho estaremos interessados em espaços da forma $C(K)$ que não tem poucos operadores, e mediremos, de alguma forma, a quantidade de operadores que não são multiplicações fracas.

Mostramos que, na maioria dos casos, o conjunto dos operadores que não são multiplicações fracas é *espaçável* e portanto $C(K)$ tem muitos operadores em um certo sentido. Lembramos que um subconjunto M de um espaço de Banach X é dito espaçável se $M \cup \{0\}$ contém um subespaço fechado de dimensão infinita de X.

2 Resultados

A fim de facilitar a escrita, diremos ao longo deste trabalho que $C(K)$ tem muitos operadores se o conjunto dos operadores que não são multiplicações fracas é espaçável.

Na prática, muitas vezes é mais fácil trabalhar com o conceito de *multiplicadores fracos*:

Definição 2.1. *Um operador $T : C(K) \longrightarrow C(K)$ é um multiplicador fraco se para toda sequência limitada $(e_n : n \in \mathbb{N})$ de elementos dois a dois disjuntos de $C(K)$, e toda sequência $(x_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq K$ tal que $e_n(x_n) = 0$, temos*

$$\lim_{n\to\infty} T(e_n)(x_n) = 0.$$

Aqui $\mathbb{N}$ denota o conjunto dos números inteiros não negativos.

Como toda multiplicação fraca é um multiplicador fraco (ver [3]), para mostrar que determinados espaços da forma $C(K)$ tem muitos operadores iremos mostrar que o conjunto dos operadores que não são multiplicadores fracos é espaçável.

*EACH, USP, SP, Brasil, rfajardo@usp.br
†IME, USP, SP, Brasil, e-mail: leonardo@ime.usp.br

Teorema 2.1. *Se K tem sequência convergente não-trivial então $C(K)$ tem muitos operadores.*

Prova: (Ideia) Seja $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ uma sequência de elementos distintos de K que converge para $\overline{x}$. Usando normalidade de K, fixe uma sequência de funções contínuas $f_k : K \longrightarrow [0,1]$ de suportes dois a dois disjuntos tais que $f_k(x_k) = 1$ e $f_k(\overline{x}) = 0$, para todo k. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina o operador $T_n : C(K) \longrightarrow C(K)$ como

$$T_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)(f(x_{k+n}) - f(\overline{x})).$$

Tais operadores formam uma base de Schauder para um subespaço fechado de $\mathcal{L}(C(K))$. Todos os operadores de tal subespaço, exceto o operador nulo, não são multiplicadores fracos. Isso mostra que o conjunto dos operadores que não são multiplicação fraca é espaçável. $\blacksquare$

O teorema anterior, apesar de contemplar muitos espaços da forma $C(K)$, deixa de fora um espaço clássico importante, a saber $\ell_\infty \equiv C(\beta\mathbb{N})$, onde $\beta\mathbb{N}$ é a compactificação de Stone-Čech de $\mathbb{N}$. Para tal espaço temos o seguinte resultado:

Teorema 2.2. *Se $C(K)$ é isomorfo ao seu quadrado (isto é, $C(K) \simeq C(K) \bigoplus C(K)$), então $C(K)$ tem muitos operadores.*

Prova: (Ideia) Se K possui sequência convergente não trivial, o resultado segue do teorema anterior. Suponhamos então que K não tem sequência convergente.

Sejam X_0 e Y_0 subespaços de $C(K)$ isomorfos a $C(K)$ tais que $C(K) = X_0 \bigoplus Y_0$. Construímos por indução X_n e Y_n subespaços de X_{n-1} tais que $X_{n-1} = X_n \bigoplus Y_n$ sendo ambos isomorfos a $C(K)$.

Para cada $n \in N$ seja T_n um isomorfismo de norma 1 de $C(K)$ em Y_n. Como Y_n é um subespaço de $C(K)$, T_n pode ser visto como operador em $C(K)$.

O conjunto $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ forma uma base de Schauder para $Z = \overline{[T_n : n \in \mathbb{N}]}$ e portanto cada elemento de Z é da forma $\Sigma_{n=1}^{\infty} \alpha_n T_n$.

Tome $T = \Sigma_{n=1}^{\infty} \alpha_n T_n$, onde α_n's não são todos nulos. Como cada T_n é injetor, e têm imagens disjuntas, T é injetor. Logo, é um isomorfismo sobre a imagem. Mas T não é sobrejetor, pois tem imagem disjunta de X_0. Como K não possui sequência convergente, segue de [3, teorema 2.3] que T não é multiplicador fraco, concluindo a demonstração. $\blacksquare$

Observação 2.1. Ainda está em aberto se existe um espaços $C(K)$ que não tenha poucos operadores e que não se encaixe nas hipóteses dos teoremas anteriores. Todos os espaços da forma $C(K)$ com poucos operadores explícitos na literatura ou são isomorfos ao quadrado ou são tais que K possui sequência convergente. Em particular, permanece em aberto se existe $C(K)$ tal que o conjunto dos operadores que não são multiplicações fracas não é vazio nem espaçável.

Referências

[1] GOWERS, W. T. AND MAUREY, B. - The unconditional basic sequence problem. *Journal of American Mathematical Society*, **6**, 851-874, 1993.

[2] ARGYROS, S.A. AND HAYDON, R. G. - An hereditarily indecomposable $\mathcal{L}_\infty$-space that solves the scalar-plus-compact problem. *arXiv:0903.3921v2*

[3] KOSZMIDER, P. - Banach spaces of continuous functions with few operators. *Mathematische Annalen*, **330**, 151-183, 2004.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

ON A CLASS OF QUASILINEAR ELLIPTIC SYSTEM IN EXTERIOR DOMAINS WITH NONLINEARITY INVOLVING GRADIENT TERMS

LUIZ F. O. FARIA * OLÍMPIO H. MIYAGAKI † & FÁBIO R. PEREIRA ‡

In this work, we study the existence of solutions for the following system

$$(P_{t,s})\qquad \begin{cases} -div(\xi_1(x)\nabla u) + u = tf_1(x,u,v,\nabla u,\nabla v) & \text{in} \quad \Omega \\ -div(\xi_2(x)\nabla v) + v = sf_2(x,u,v,\nabla u,\nabla v) & \text{in} \quad \Omega \\ \xi_1(x)\partial_\nu u + \alpha_1(x,u,v)u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \\ \xi_2(x)\partial_\nu v + \alpha_2(x,u,v)v = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is a smooth exterior domain in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, that is, Ω is the complement of a bounded domain Ω_0 with smooth boundary (in this case, $\partial\Omega$ will be indicated by $\partial\Omega_0$), t, s are real parameters, ν is the unit vector of the outward normal on $\partial\Omega$, ξ_1, ξ_2 are positive continuous functions, $f_1(x,u,v,\nabla u,\nabla v) = h_1(x,u,v) + g_1(x,\nabla u,\nabla v)$, $f_2(x,u,v,\nabla u,\nabla v) = h_2(x,u,v) + g_2(x,\nabla u,\nabla v)$.

Our set of assumptions on the nonlinearities $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$ and $\mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2)$ are the following:

(H_1) For $i = 1,2$, the functions $h_i : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ and $g_i : \Omega \times \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$ are locally Hölder continuous, $\xi_i : \Omega \to \mathbb{R}$ are functions in $C^1(\Omega)$, and there exist constants $k_i^0 > 0$ such that $k_i^0 \leq \xi_i(x)$, $\forall x \in \Omega$.

(H_2) For $i = 1,2$, there are positive constants such that $0 < r_{2,i}, r_{3,i} < 1$, $0 < r_{4,i} + s_{4,i} < 1$, and continuous functions a_0, $a_{1,i} \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $a_{2,i} \in L^{\frac{2}{1-r_{2,i}}}(\mathbb{R}^N)$, $a_{3,i} \in L^{\frac{2}{1-r_{3,i}}}(\mathbb{R}^N)$ and $a_{4,i} \in L^{\frac{2}{1-(r_{4,i}+s_{4,i})}}(\mathbb{R}^N)$ such that
$0 < a_0(x) \leq h_i(x,\mu,\eta) \leq a_{1,i}(x) + a_{2,i}(x)|\mu|^{r_{2,i}} + a_{3,i}(x)|\eta|^{r_{3,i}} + a_{4,i}(x)|\mu|^{r_{4,i}}|\eta|^{s_{4,i}}$, $\forall\ (x,\mu,\eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^2$.

(H_3) For $i = 1,2$, there are positive constants such that $0 < r_{6,i}, r_{7,i} < 1$, $0 < r_{8,i} + s_{8,i} < 1$, and continuous functions $a_{5,i} \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $a_{6,i} \in L^{\frac{2}{1-r_{6,i}}}(\mathbb{R}^N)$, $a_{7,i} \in L^{\frac{2}{1-r_{7,i}}}(\mathbb{R}^N)$ and $a_{8,i} \in L^{\frac{2}{1-(r_{8,i}+s_{8,i})}}(\mathbb{R}^N)$ such that $0 \leq g_i(x,\mu,\eta) \leq a_{5,i}(x) + a_{6,i}(x)|\mu|^{r_{6,i}} + a_{7,i}(x)|\eta|^{r_{7,i}} + a_{8,i}(x)|\mu|^{r_{8,i}}|\eta|^{s_{8,i}}$, $\forall\ (x,\mu,\eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^{2N}$.

(H_4) For $i = 1,2$, the functions $\alpha_i : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ are continuous if $(\mu,\eta) \neq (0,0)$ and satisfies

$$0 \leq \alpha_1(x,\mu,\eta) \leq b_1|\mu|^{p-2} + b_2|\eta|^{q-2} + b_3|\mu|^{p-3}|\eta|,$$

$$0 \leq \alpha_2(x,\mu,\eta) \leq b_1|\mu|^{p-2} + b_2|\eta|^{q-2} + b_3|\mu||\eta|^{q-3},$$

$\forall\ (x,\mu,\eta) \in \Omega \times (\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$ and $\alpha_i(x,0,0) = 0$, where $2 < p,q < \frac{2(N-1)}{N-2}$ and b_j $(j = 1,2,3)$ are non-negative constants.

With respect to our approach, we combine Galerkin method with some a priori estimates. Actually, we borrow some arguments used in [1] (see also [2, 3]), which consists in consider a class of auxiliary problems $(P_R)_{t,s}$, given below, which is defined in a bounded smooth domain $\Omega_R \subset \mathbb{R}^N$. Namely, we consider the problem

$$(P_R)_{t,s}\qquad \begin{cases} -div(\xi_1(x)\nabla u) + u = tf_1(x,u,v,\nabla u,\nabla v) & \text{in} \quad \Omega_R \\ -div(\xi_2(x)\nabla v) + v = sf_2(x,u,v,\nabla u,\nabla v) & \text{in} \quad \Omega_R \\ \xi_1(x)\partial_\nu u + \alpha_1(x,u,v)u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega_R \\ \xi_2(x)\partial_\nu v + \alpha_2(x,u,v)v = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega_R, \end{cases}$$

*Departamento de Matemática , UFJF, MG, Brasil, e-mail: luiz.faria@ufjf.edu.br
†Departamento de Matemática , UFJF, MG, Brasil, e-mail: ohmiyagaki@gmail.com
‡Departamento de Matemática , UFJF, MG, Brasil, e-mail: fabio.pereira@ufjf.edu.br

where $\Omega_R = B_R(0) \cap \Omega$ is such that $\overline{\Omega}_0 \subset B_R(0)$. Notice that $\partial\Omega_R = \partial\Omega \cup \partial B_R(0)$. Fixing $(t,s) \neq (0,0)$, and using Galerkin's method, we show the existence of a solution to problem $(P_R)_{t,s}$. Taking $R = n$, we obtain a family of solutions $\{(u_n, v_n)\}$ to problem $(P_n)_{t,s}$. Combining an *a priori* estimate with a diagonal argument, and passing to the limit in $(P_n)_{t,s}$ as $n \to \infty$, we obtain a solution (u,v) of $(P_{t,s})$.

By a solution of problem $(P_{t,s})$ we mean a pair of functions $(u,v) \in (C^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)) \times (C^2(\Omega) \cap H^1(\Omega))$ verifying the system weakly in Ω.

1 Mathematical Results

Our main result is the following.

Teorema 1.1. *Assume the conditions $(H_1) - (H_4)$.*

(i) If $(t,s) < (0,0)$, problem $(P_{t,s})$ has at least one solution. In this case, all the solutions should be either negative or sign changing solutions.

(ii) If $(t,s) > (0,0)$, problem $(P_{t,s})$ has at least one solution. In this case, all the solutions should be either positive or sign changing solutions.

(iii) If $(t,s) = (0,0)$, problem $(P_{t,s})$ has only one solution $(u,v) \equiv (0,0)$.

(iv) If $t < 0$ and $s > 0$ (or $t > 0$ and $s < 0$), problem $(P_{t,s})$ has at least one solution (u,v) such that u should be either negative or sign changing and v should be either positive or sign changing (or u should be either positive or sign changing and v should be either negative or sign changing).

(v) If $t = 0$ and $s \neq 0$, problem $(P_{t,s})$ has at least one solution of the type $(0,v)$ such that v should be either negative if $s < 0$ (or positive if $s > 0$) or sign changing function.

(vi) If $t \neq 0$ and $s = 0$, problem $(P_{t,s})$ has at least one solution of the type $(u,0)$ such that u should be either negative if $t < 0$ (or positive if $t > 0$) or sign changing function.

References

[1] ALVES, C.O. AND DE FIGUEIREDO, D.G. - *Nonvariational elliptic systems via Galerkin methods*, Function spaces, differential operators and nonlinear analysis (Teistungen, 2001), Birkhaüser, Basel, 2003, 47-57.

[2] ALVES, C.O., CARRIÃO, P.C. AND FARIA, L.F.O. - On a class of singular elliptic equation with convection term via Galerkin method. *Elect. J. Diff. Eqns.* **12**, 1-12, 2010.

[3] FARIA, L.F.O., MIYAGAKI, O.H. AND PEREIRA, F.R. - Existence results for quasilinear elliptic exterior problems involving convection term and nonlinear Robin boundary conditions. *J. Math. Anal. Appl.* **368** 578-586, 2010.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

AN EXTENSION OF MERCER'S THEOREM VIA REPRODUCING KERNEL HILBERT SPACES

JOSÉ C. FERREIRA * & VALDIR A. MENEGATTO †

Let X be a metric space endowed with a strictly positive measure ν. In this work, we apply an extension of Mercer's theorem in order to describe the reproducing kernel Hilbert space (RKHS) for the generating kernel of certain positive integral operators on $L^2(X,\nu)$ as the range of the unique square root of the operator. Reproducing kernel Hilbert spaces techniques are very useful in many branches of mathematics, including approximation theory and learning theory. The description presented here has connections with recent results found in the references [1, 2, 3, 4, 5, 6] and others quoted there.

Basic setting

The integral operator referred to in the introduction above is the operator $\mathcal{K} : L^2(X,\nu) \to L^2(X,\nu)$ given by the formula

$$\mathcal{K}(f)(x) := \int_X K(x,y)f(y)\,d\nu(y), \quad f \in L^2(X,\nu), \quad x \in X.$$

Its positivity refers to the fact that the generating kernel $K : X \times X \to \mathbb{C}$ is continuous and $L^2(X,\nu)$-*positive definite kernel* in the sense that

$$\langle \mathcal{K}(f), f\rangle_2 := \int_X \left(\int_X K(x,y)f(y)\,d\nu(y) \right) \overline{f(x)}\,d\nu(x) \geq 0, \quad f \in L^2(X,\nu).$$

It is a common sense to transfer the positivity to K and just say that K belongs to $L^2PD(X,\nu)$. The continuity is included in order to have positive definiteness in the usual sense ([2, 4], [3, Theorem 2.3]), that is,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \overline{c_i} c_j K(x_i,x_j) \geq 0,$$

for all $n \geq 1$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ and $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$. The RKHS of K is the Hilbert space defined as the completion of the linear span of the set

$$\{K^x := K(\cdot,x) : x \in X\}$$

with respect to the inner product given by the formula

$$\langle K^x, K^y \rangle_K := K(y,x), \quad x,y \in X.$$

The most common notation for such space is $\mathcal{H}_K$. Its main feature is the so-called *reproducing property* described as

$$f(x) = \langle f, K^x \rangle_K, \quad f \in \mathcal{H}_K, \quad x \in X.$$

Among other things, this property ensures that $\mathcal{H}_K$ is composed of continuous functions only. The structure of the Hilbert space $\mathcal{H}_K$ itself and its relation to positive integral operators enter in the solution of many problems, a popular one being the following question from learning theory ([5, 6]): to minimize the expression

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - y_i|^2 + \lambda \|f\|_K^2, \quad f \in \mathcal{H}_K,$$

*Thanks to the support of FAPEMIG. ICEx, UNIFAL-MG, MG, Brasil, jose.ferreira@unifal-mg.edu.br
†ICMC, USP, SP, Brasil, e-mail: menegatt@icmc.usp.br

for a fixed set $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^m \subset X \times \mathbb{C}$ and some $\lambda > 0$.

The result

The result we intend to describe refers to the subset $\mathcal{A}(X, \nu)$ of $L^2PD(X, \nu)$ formed by all continuous kernels K for which the mapping $x \in X \to K(x, x)$ belongs to $L^1(X, \nu)$. The main tool in is proof is the following extension of the classical Mercer's Theorem ([3, 4]) on series representation for kernels and operators.

Teorema 0.1. *If K belongs to $\mathcal{A}(X, \nu)$ then there exists an orthonormal set $\{\phi_n\}$ in $L^2(X, \nu)$ and a sequence $\{\lambda_n(\mathcal{K})\}$ decreasing to 0 such that $\{\lambda_n(\mathcal{K})\phi_n\} \subset C(X)$ and*

$$\mathcal{K}(f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})\langle f, \phi_n\rangle_2 \phi_n(x), \quad x \in X, \quad f \in L^2(X, \nu).$$

The (unique) positive square root of $\mathcal{K}$ is representable in the form

$$\mathcal{K}^{1/2}(f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})^{1/2}\langle f, \phi_n\rangle_2 \phi_n(x), \quad x \in X, \quad f \in L^2(X, \nu),$$

while

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})\phi_n(x)\overline{\phi_n(y)}, \quad x, y \in X.$$

The first two series are absolutely and uniformly convergent on compact subsets of X and the third one is absolutely and uniformly convergent on compact subsets of $X \times X$.

The characterization for the RKHS we give below was known in simpler settings (see [1] for a typical case). We believe the result can be used in the deduction of other theoretical properties of $\mathcal{H}_K$.

Teorema 0.2. *If K belongs to $\mathcal{A}(X, \nu)$ then the operator $\mathcal{K}^{1/2}$ is an isometric isomorphism between the closure of the linear span $\{K^x : x \in X\}$ in $L^2(X, \nu)$ and $\mathcal{H}_K$. Also,*

$$\mathcal{H}_K = \{\mathcal{K}^{1/2}(f) : f \in L^2(X, \nu)\}$$

while the inner product of $\mathcal{H}_K$ can be described by

$$\langle \mathcal{K}^{1/2} f, \mathcal{K}^{1/2} g\rangle_K = \langle f, g\rangle_2, \quad f, g \in L^2(X, \nu).$$

References

[1] CUCKER, F. AND SMALE, S. - On the mathematical foundations of learning, *Bull. Amer. Math. Soc. (New Series)* **39**, no. 1, 1–49, 2001.

[2] FERREIRA, J. C. AND MENEGATTO, V. A. - A connection between two concepts of positive definiteness, *Proccedings of II ENAMA*, **url:** http://www.enama.org/Resumos_IIENAMA.pdf, 4–5, 2008.

[3] FERREIRA, J. C. AND MENEGATTO, V. A. - Eigenvalues of integral operators defined by smooth positive definite kernels, *Integral Equations Operator Theory* **64**, 61-81, 2010.

[4] FERREIRA, J. C. AND MENEGATTO, V. A. - Reproducing kernel Hilbert spaces associated with kernels on topological spaces, submitted to publication.

[5] SUN, H. - Mercer theorem for RKHS on noncompact sets, *J. Complexity* **21**, no. 3, 337–349, 2005.

[6] SUN, H. AND WU, Q. - Application of integral operator for regularized least-square regression, *Math. Comput. Modelling* **49**, 276–285, 2009.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA-Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

On the well-posedness and large time behavior for Boussinesq equations in Morrey spaces

Lucas C. F. Ferreira * & Marcelo Almeida †

In this paper we concern with Boussinesq equations which model heat transport by natural convection inside a viscous incompressible fluid in $\mathbb{R}^n$. We prove well-posedness of mild solutions and existence of self-similar ones in the framework of Morrey spaces. Our results allow to consider singular and unbounded gravitational field.

1 Introduction

In this work we concern ourselves with the initial value problem (IVP) for the following convection problem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \frac{1}{\rho}\nabla p = \kappa\,\theta f \, + F_1 \quad x\in\mathbb{R}^n,\ t>0, \tag{1.1}$$

$$\text{div } u = 0 \qquad x\in\mathbb{R}^n,\ t>0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \chi\Delta\theta + (u\cdot\nabla)\theta = F_2, \qquad x\in\mathbb{R}^n,\ t>0, \tag{1.3}$$

$$u(x,0)=u_0,\ \theta(x,0)=\theta_0 \text{ and div } u_0 = 0, \qquad x\in\mathbb{R}^n, \tag{1.4}$$

where $p(x,t)\in\mathbb{R}$, $u(x,t)\in\mathbb{R}^n$ and $\theta(x,t)\in\mathbb{R}$ represent respectively the pressure, velocity field and temperature of a viscous incompressible fluid filling whole space $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$. The term F_2 is the reference temperature, F_1 is an external force and f is a gravitational vector field. The positive constants ν and ρ stand for the viscosity and density of fluid, and the volume-expansion coefficient and thermal conductance are denoted by κ and χ, respectively. For our purpose we assume $\kappa>0$ and there is no loss of generality in taking $\nu=\rho=\chi=1$ and $F_1\equiv F_2\equiv 0$.

The system (1.1)-(1.3) is known as Boussinesq equations (BE) and models heat transport by means of natural convection inside a viscous incompressible fluid. The notion of solution for this system can be derived from Duhamel's Principle and after applying the Leray projector $\mathbb{P}$ in (1.1); precisely we say that a vector $[u,\theta]\in H_p = BC((0,\infty);\mathbb{P}\mathcal{M}_{p,\mu}\times\mathcal{M}_{p,\mu})$ is a mild solution if

$$\begin{bmatrix} u(t)\\ \theta(t)\end{bmatrix} = e^{-tL}\begin{bmatrix} u_0\\ \theta_0\end{bmatrix} - \int_0^t \nabla e^{-(t-s)L}\begin{bmatrix}\mathbb{P}(u\otimes u)\\ u\theta\end{bmatrix}(s)ds + \int_0^t e^{-(t-s)L}\begin{bmatrix}\kappa\mathbb{P}(\theta f)\\ 0\end{bmatrix}(s)ds, \tag{1.5}$$

and $[u(t),\theta(t)]\rightharpoonup[u_0,\theta_0]$ in the sense of distributions as $t\to 0^+$. Here $L(u,\theta)=-(\Delta u,\Delta\theta)$. The issues of existence of solutions for Boussinesq equations have attracted the attention of many authors, especially in the last fifteen years. For instance we mention the works [1, 2, 3, 4].

2 Main theorems

One of the aims of this work is to study existence global solutions for (1.1)-(1.4) in a new framework, namely Morrey spaces $\mathcal{M}_{p,\lambda}$, which are defined as the set of all mensurable functions in the ball $B(x_0,r)\subset\mathbb{R}^n$ such that

$$\|f\|_{p,\lambda} = \sup_{x_0\in\mathbb{R}^n, r>0} r^{-\lambda/p}\|f\|_{L^p(B(x_0,r)\to\mathbb{R})} < \infty.$$

*IMEEC, Universidade Estadual de Campinas, SP, Brazil, e-mail: lcff@ime.unicamp.br, supported by project CNPQ 305542/2009-5.
†DMAT, Universidade Federal de Pernambuco, PE, Brazil, e-mail: marcelof.almeida@ufpe.br

These spaces contain interesting functions which may be strongly rough and not to decay as $|x| \to \infty$. In comparison to previous works, we will be able to consider a larger class of singular fields f and initial data. We prove well-posedness of global small mild solutions in Morrey spaces with the right homogeneity to allow existence of self-similar solutions.

Let $\alpha \neq \beta$ positive numbers and define

$$H_{q,r} = \{[u,\theta] \in H_p : [t^{\frac{\alpha}{2}}u, t^{\frac{\beta}{2}}\theta] \in BC((0,\infty); \mathbb{P}\mathcal{M}_{q,\mu} \times \mathcal{M}_{r,\mu})\}, \quad \mu = n-p.$$

Now with the following appropriate conditions under exponents. Putting $\|f\|_{\vartheta,(b,\mu)} = \sup_{t>0} t^{\vartheta}\|f(\cdot,t)\|_{b,\mu}$, $\vartheta \geq 0$ we obtain:

Theorem 2.1. *(Well-posedness) Let $p \leq \min\{n, 2b\}$, $r' < b < \frac{rp}{r-p}$, $r' < q < \infty$. Assume that $[u_0,\theta_0] \in \mathbb{P}\mathcal{M}_{p,n-p} \times \mathcal{M}_{p,n-p}$ and $t^{\vartheta} f \in BC((0,\infty);(\mathcal{M}_{b,\mu})^n)$. If $\|f\|_{\vartheta,(b,\mu)}$ is small enough, then there exists $0 < \varsigma < 1$, $\varepsilon > 0$ and $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ such that if $\|[u_0,\theta_0]\|_{p,n-p} \leqslant \delta$, the IVP (1.1)-(1.4) has a global mild solution $[u,\theta] \in H_{q,r}$ with initial data $[u_0,\theta_0]$. Moreover, the solution $[u,\theta]$ is unique in the closed ball $B(0,\frac{2\varepsilon}{1-\varsigma}) \subset H_{q,r}$.*

Among other fields, our results cover the Newtonian gravitational case, namely $f = -Gx\,|x|^{-3} \in (\mathcal{M}_{p/2,n-p})^n$. From a physical view point, in the latter case the system (1.1)-(1.4) can be regarded as a mathematical version in whole space of the famous Bnard problem.

Theorem 2.2. *(Bnard problem) Let $n \geq 3$ and $p > 2$. Assume that the coefficient of volume expansion κ is small enough. Then we can consider in Theorem 2.1 the physical case in which f is the Newtonian gravitational field.*

When the field f presents certain scaling property, we obtain existence of self-similar solutions.

Theorem 2.3. *(Self-similarity) Under the hypotheses of Theorem 2.1. Assume that $[u_0,\theta_0]$ is a homogeneous vector-function of degree -1 and that the gravitational field satisfies $f(x,t) = \lambda^2 f(\lambda x, \lambda^2 t)$ for all $\lambda > 0$, $t > 0$ and $x \in \mathbb{R}^n$. Then the solution $[u,\theta]$ obtained through Theorem 2.1 is self-similar, that is, $[u(x,t),\theta(x,t)] = \lambda[u(\lambda x,\lambda^2 t),\theta(\lambda x,\lambda^2 t)]$ for all $\lambda > 0$, $t > 0$ and $x \in \mathbb{R}^n$.*

References

[1] Cannon, J. R., DiBenedetto, E., *The initial value problem for the Boussinesq equations with data in L^p*, Approximation methods for Navier-Stokes problems, Lecture Notes in Math. 771 (1980), 129–144.

[2] Ferreira, L.C.F., Villamizar-Roa, E.J., Existence of solutions to the convection problem in a pseudomeasure-type space*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* 464 (2008), 1983-1999.

[3] Karch, G., Prioux, N., Self-similarity in viscous Boussinesq equations. *Proc. Amer. Math. Soc.* 136 (2008), 879-888.

[4] Ferreira, L.C.F., Villamizar-Roa, On the stability problem for the Boussinesq equations in weak-L^p spaces*, Commun. Pure Appl. Anal.* 9 (2010), 667 - 684.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

EQUAÇÕES DE ONDAS EM DOMÍNIOS COM FRONTEIRA NÃO LOCALMENTE REAGENTE

CÍCERO LOPES FROTA * & LUIS ADAUTO MEDEIROS † & ANDRÉ VICENTE ‡

Condições de fronteira da acústica foram discutidas em [10] e sua versão dependente do tempo foi formulada em [2] por J. T. Beale e S. I. Rosencrans, onde o modelo proposto é formado basicamente pelas três equações

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \;\text{ em } \Omega\,, \tag{1.1}$$

$$f\delta_{tt} + g\delta_t + h\delta = -\rho u_t \;\text{ em } \Gamma\,, \tag{1.2}$$

$$\delta_t = \frac{\partial u}{\partial \nu} \;\text{ em } \Gamma\,, \tag{1.3}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado com fronteira suave Γ, com um fluido em seu interior o qual está em repouso, exceto pela presença de ondas acústicas; ρ é a densidade do fluido; e f, g, h são funções não negativas definidas na fronteira Γ e estão relacionadas com a massa por unidade de área, resistividade e elasticidade da fronteira. Mais precisamente, se u é a velocidade potencial (do fluido) no domínio Ω, então u deve satisfazer a equação diferencial parcial (1.1). A equação diferencial ordinária (1.2) modela o deslocamento δ, do ponto x no instante de tempo t, na direção normal à fronteira e (1.3) é uma condição de compatibilidade que expressa a impenetrabilidade da fronteira.

Problemas de valores iniciais e de fronteira com condições de fronteira da acústica (1.2)-(1.3) foram estudados por vários autores (ver [1], [3-9] e suas referências). Ressaltamos que a equação (1.2) diz que cada ponto da fronteira reage, ao excesso de pressão da onda, como um oscilador harmônico resistivo, isto significa que cada ponto da superfície Γ age como uma mola em resposta ao excesso de pressão, e a interação entre os pontos vizinhos de Γ é desprezada. No contexto físico diz-se que a fronteira Γ é *localmente reagente*.

É fato que as condições de fronteira dependentes do tempo (1.2)-(1.3) são mais adequadas para aplicações concretas, do que condições de fronteira homogênea mas, ainda são restritivas. Podemos pensar em algo mais geral considerando que a fronteira é *não localmente reagente*. Neste caso, torna-se natural considerar a fronteira Γ sendo uma membrana elástica. Esta abordagem conduz a um modelo mais geral com uma equação diferencial parcial na fronteira, mais precisamente, uma equação de ondas envolvendo o operador de Laplace-Beltrami sobre uma superfície, em substituição a equação (1.2). Neste trabalho consideramos problemas deste tipo, com condição de Dirichlet homogênea sobre uma parte da fronteira (parte absorvente) e condições de fronteira da acústica para fronteira *não localmente reagente* sobre o restante (parte elástica).

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou $n = 3$) um subconjunto aberto, limitado e conexo, situado localmente de um mesmo lado de sua fronteira Γ, uma variedade $(n-1)$-dimensional, compacta, C^∞, sem fronteira. Suponha que Γ está dividida em duas partes Γ_0 e Γ_1, ambas com medida positiva, onde Γ_1 é um subconjunto aberto, conexo de Γ com fronteira suave $\partial\Gamma_1$ e $\Gamma_0 = \Gamma \setminus \Gamma_1$ ($\overline{\Gamma_1} = \Gamma_1 \cup \partial\Gamma_1$ é uma variedade $(n-1)$-dimensional, compacta, C^∞, com

*DMA, UEM, PR, Brasil, e-mail: clfrota@uem.br
†IM, UFRJ, RJ, Brasil, e-mail: luizadauto@gmail.com
‡CCET, Unioeste, PR, Brasil, avicente@unioeste.br

fronteira). Procuramos um par de funções (u,δ), com $u:\Omega\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$ e $\delta:\Gamma_1\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$, satisfazendo

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{ll} u'' - M\left(\displaystyle\int_\Omega u^2\,dx\right)\Delta u + \alpha u' + \beta|u'|^\rho u' = 0 & \text{em } \Omega\times(0,\infty); \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_0\times(0,\infty); \\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu} = \delta' & \text{em } \Gamma_1\times(0,\infty); \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{ll} f\delta'' - k^2\Delta_\Gamma\delta + g\delta' + h\delta = -u' & \text{em } \Gamma_1\times(0,\infty); \\ \delta = 0 & \text{em } \partial\Gamma_1\times(0,\infty); \end{array}\right. \\ u(x,0) = u_0(x),\ u'(x,0) = u_1(x)\,, \qquad x\in\Omega; \\ \delta(x,0) = \delta_0(x),\ \delta'(x,0) = \dfrac{\partial u_0}{\partial\nu}(x)\,, \qquad x\in\Gamma_1, \end{array}\right. \tag{1.4}$$

onde $' = \dfrac{\partial}{\partial t}$; $\Delta = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, é o operador de Laplace; $\Delta_\Gamma = \nabla_\tau\cdot\nabla_\tau$ é o operador de Laplace-Beltrami definido sobre a fronteira e ∇_τ é o gradiente tangencial; ν é o vetor normal unitário exterior a Γ; α, β, ρ e k constantes não negativas; $M:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f,g,h:\overline{\Gamma_1}\to\mathbb{R}$, $u_0,u_1:\Omega\to\mathbb{R}$ e $\delta_0:\Gamma_1\to\mathbb{R}$ são funções dadas.

Neste trabalho provamos a existência, unicidade e estabilidade assintótica de soluções globais para o problema (1.4), e assim estenderemos os resultados de [6] para o caso de fronteira *não localmente reagente.* Para isto, utilizamos o método de Faedo-Galerkin, argumentos de compacidade e o método da Energia para provar a existência e unicidade, e o Lema de Nakao (ver [11]) para a estabilidade assintótica.

Referências

[1] Beale, J. T. - Spectral Properties of an Acoustic Boundary Condition. *Indiana Univ. Math. J.,* **Vol 25**, Number 9, p. 895-917, 1976.

[2] Beale, J. T.; Rosencrans, S. I. - Acoustic Boundary Conditions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **80**, Number 6, p. 1276-1278, 1974.

[3] Frigeri, S. - Attractors for semilinear damped wave equations with an acoustic boundary condition. *Journal of Evolution Equations* **10**, p. 29-58, 2010.

[4] Frota, C. L.; Cousin, A. T.; Larkin, N. A. - Global Solvability and Asymptotic Behaviour of a Hyperbolic Problem with Acoustic Boundary Conditions. *Funkcialaj Ekvacioj,* **Vol 44**, Number 3, p. 471-485, 2001.

[5] Frota, C. L.; Cousin, A. T.; Larkin, N. A. - On a System of klein-Gordon Type Equations with Acoustic Boundary Conditions. *J. Math. Anal. Appl.,* **Vol 293**, p. 293-309, 2004.

[6] Frota, C. L.; Goldstein, J. A. - Some Nonlinear Wave Equations With Acoustic Boundary Conditions. *J. Diff. Eq.,* **164**, p. 92-109, 2000.

[7] Gal, C. G.; Goldstein, G. R.; Goldstein, J. A. - Oscilatory Boundary Conditions for Acoustic Wave Equations. *Journal of Evolution Equations,* **3**, p. 623-635, 2003.

[8] Kobayashi, Y. ; Tanaka, N. - An application of semigroups of locally Lipschitz operators to Carrier equations with acoustic boundary conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **338**, p. 852-872, 2008.

[9] Mugnolo, D. - Abstract wave equations with acoustic boundary conditions. *Mathematische Nachrichten*, **279**, Number 3, p. 299-318, 2006.

[10] Morse, P. M.; Ingard, K. U. - Theoretical Acoustic. *McGraw-Hill*, New York, 1968.

[11] Nakao, M. - A Difference Inequality and its Application to Nonlinear Evolution Equations. *J. Math. Soc. Japan,* **Number 4**, p. 747-762, 1978.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

ON A QUASILINEAR WAVE EQUATION ARISING ON ELASTO-PLASTIC FLOWS

MA TO FU * & M. A. J. DA SILVA †

In this talk we are concerned with the global solutions for a class of partial differential equations arising in elasto-plastic flows

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta_p u - \Delta u_t + f(u) = 0, \qquad \Omega \times \mathbf{R}^+, \qquad p \geq 2,$$

with clamped boundary condition, and where Ω is a bounded domain of $\mathbf{R}^n$. The long-time behaviour of this kind of initial-boundary value problems where studied by Yang [4]. This problem is also related to the 2-D Kirchhoff-Boussinesq equation

$$u_{tt} + ku_t + \Delta^2 u = div(f_0(\nabla u)) + \Delta(f_1(u)) - f_2(u),$$

with clamped boundary condition, which was considered by Chueshov and Lasiecka [3].

We are concerned with a visco-elastic version of this elasto-plastic model by adding a memory term $g * \Delta u$. This can be also considered as a viscoelastic plate equation with a lower order perturbation of p-Laplacian type. Our main result can be summarized as follows:

1 Mathematical Results

Teorema 1.1. *Suppose that kernel $g \geq 0$ is exponentially decreasing and initial data $(u_0, u_1) \in (H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega)$. Then under some sub-critical growth condition for $f(u)$ and p, problem*

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta_p u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds - \Delta u_t + f(u) = 0, \qquad \Omega \times \mathbf{R}^+, \qquad p \geq 2,$$

has a unique strong global solution which decays exponentially.

The proof of the global existence is based on Faedo-Galerkin approximations. The energy decay is shown by a perturbed energy method. The arguments are close to the one in Cavalcanti et al [2].

References

[1] AN, L. J. AND PEIRCE, A. - A weakly nonlinear analysis of elastoplastic-microstructure models. *SIAM J. Appl. Math.*, **55**, 136–155, 1995.

[2] CAVALCANTI, M.M., DOMINGOS CAVALCANTI, V.N. AND MA, T.F. - Exponential decay of the viscoelastic Euler-Bernoulli equation with a nonlocal dissipation in general domains. *Differential Integral Equations*, **17**, 495-510, 2004.

[3] CHUESHOV, I. AND LASIECKA, I. - Existence, uniqueness of weak solutions and global attractors for a class of nonlinear 2D Kirchhoff-Boussinesq models. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **15**, 777-809, 2006.

[4] ZHIJIAN YANG - Longtime behavior for a nonlinear wave equation arising in elasto-plastic flow. *Math. Methods Appl. Sci.*, **32**, 1082-1104, 2009.

*ICMC, USP, São Carlos, SP, Brasil, e-mail: matofu@icmc.usp.br
†UEL, Londrina, PR, Brasil, e-mail: marcioajs@uel.br

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PERIÓDICAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS IMPULSIVAS

ANDRÉ LUIZ FURTADO * & MÁRCIA FEDERSON † & PIERLUIGI BENEVIERI ‡

Recentemente, Meili Li *et al*, em [1], estudaram a existência de soluções periódicas da equação diferencial

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t-\tau)),\ t \geq 0,\ t \neq t_k \tag{0.1}$$

sendo $\tau \in [0, \infty)$ está fixado e $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Em [1], a equação (0.1) está sujeita a condição impulsiva

$$x(t_k^+) - x(t_k) = b_k x(t_k)$$

sendo $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais maiores do que -1.

No presente trabalho, usamos o teorema da continuação da teoria do grau coincidente para estabelecer condições que garantem a existência de solução periódica para uma classe de equações diferenciais funcionais sujeitas a condições impulsivas. O problema investigado é o seguinte:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t),\ t \geq 0,\ t \neq t_k,\ k \in \mathbb{N} \\ x(t_k^+) - x(t_k) = b_k x(t_k),\ k \in \mathbb{N} \\ \\ x(t) = \phi(t),\ t \leq 0. \end{cases} \tag{0.2}$$

Como é usual, neste trabalho a notação $x(t_k^+)$ indica $\lim\limits_{t\to t_k^+} x(t)$. Analogamente, $x(t_k^-)$ denotará $\lim\limits_{t\to t_k^-} x(t)$.

A seguir, caracterizamos em detalhes o problema (0.2): ϕ e f são duas funções reais dadas, a primeira definida em $(-\infty, 0]$ e a segunda no produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathcal{G}$, sendo $\mathcal{G}$ o conjunto das funções reais definidas na semi-reta não positiva. Além disso, supomos que são satisfeitas as condições seguintes:

(A1) $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k < \ldots$ e $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$;

(A2) Para cada $\varphi \in \mathcal{G}$ fixada, a função $f(\cdot, \varphi) : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é localmente limitada, Lebesgue mensurável e T-periódica;

(A3) Para cada $t \in [0, \infty) \in \mathbb{R}$ fixado, a função $f(t, \cdot) : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e sua restrição a qualquer subconjunto de $\mathcal{G}$ constituído por funções limitadas é limitada.

(A3) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $b_k > -1$ e a função $B : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$, dada por $B(t) = 1$ se $t \in (-\infty, t_1]$ e $B(t) = \prod\limits_{t_k<t} (1+b_k)$ se $t \in (t_1, \infty)$ é T-periódica em (t_1, ∞).

Uma função $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ será uma solução do problema (0.2) quando:

(i) x for uma função absolutamente contínua nos intervalos $[0, t_1]$ e $(t_k, t_{k+1}]$, $k \in \mathbb{N}$;

(ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $x(t_k^+) = (1 + b_k)x(t_k)$ e $x(t_k^-) = x(t_k)$;

(iii) x satisfizer a equação diferencial dada em (0.2) em quase todo ponto de $[0, \infty) \setminus \{t_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ e satisfizer a condição inicial $x(t) = \phi(t)$ em $(-\infty, 0]$.

*Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, USP, SP, Brasil, e-mail: andrelf@icmc.usp.br
†Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, USP, SP, Brasil, e-mail: federson@icmc.usp.br
‡Instituto de Matemática e Estatística, USP, SP, Brasil, e-mail: pluigi@ime.usp.br

1 Resultados

A seguir apresentamos um resultado que nos permite reduzir a análise do problema de existência de solução periódica do problema (0.2) ao estudo de um problema não-impulsivo a ele associado.

Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = h(t, u_t), \quad t \geq 0 \\ u(t) = \phi(t), \quad t \in (-\infty, 0] \end{cases} \tag{1.3}$$

sendo $h : [0, \infty) \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$h(t, \varphi) = \frac{f(t, B_t\varphi)}{B(t)}.$$

Uma função $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ será uma solução do problema (1.3) quando:

(i) u for absolutamente contínua;

(ii) u satisfizer a equação diferencial dada em (1.3) em quase todo ponto de $[0, \infty)$ e satisfizer a condição inicial $u(t) = \phi(t)$ em $(-\infty, 0]$.

Lema 1.1. *Se u for uma solução do problema (1.3), então a função definida em $\mathbb{R}$ e dada por $t \mapsto x(t) = B(t)u(t)$, será uma solução do problema (0.2).*

A seguir apresentamos o resultado principal deste trabalho. Suponha que existam constantes positivas, M e N, tais que:

(H1) Se $\varphi \in \mathcal{G}$ for tal que $|\varphi(\theta)| \geq M$, para algum $\theta \in (-\infty, 0]$, então $\varphi(\theta)h(t, \varphi) > 0$, qualquer que seja $t \in [0, \infty)$;

(H2) Se $\varphi \in \mathcal{G}$ for tal que $\varphi(\theta) \leq -M$, para algum $\theta \in (-\infty, 0]$, então $h(t, \varphi) \geq -N$, qualquer que seja $t \in [0, \infty)$;

(H3) Se $\varphi \in \mathcal{G}$ for tal que $\varphi(\theta) \geq M$, para algum $\theta \in (-\infty, 0]$, então $h(t, \varphi) \leq N$, qualquer que seja $t \in [0, \infty)$.

Teorema 1.1. *Se as condições $(H1)$-$(H3)$ forem satisfeitas, então o Problema (0.2) possuirá pelo menos uma solução T-periódica.*

Prova: Pelo Lema 1.1, basta mostrar que o problema (1.3) possui uma solução T-periódica. Para isso usamos o teorema da continuação da teoria do grau coincidente (ver Mawhin [2]), que enunciamos a seguir:

Sejam L um operador de Fredholm de índice zero e N uma aplicação L-compacta em $\overline{\Omega}$. Suponha que

(i) Se $x \in D(L) \cap \partial\Omega$, então $Lx \neq \lambda Nx$, qualquer que seja $\lambda \in (0, 1)$;

(ii) Se $x \in Ker\ L\ \cap\ \partial\Omega$ então $Nx \notin Im(L)$;

(iii) $deg\{QN,\ \Omega \cap Ker\ L,\ 0\} \neq 0$.

Nessas condições, a equação $Lx = Nx$ possuirá pelo menos uma solução $x \in D(L) \cap \overline{\Omega}$.

Referências

[1] LI, M.; KOU, C. AND DUAN, Y. - *The existence of periodic solution of impulsive functional differential equation with infinite delay. J. Appl. Math. Comput.*, **29**, 341-348, 2009.

[2] GAINES, R. E. AND MAWHIN, J. - *Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations.*, Lecture Notes in Math. 568, Springer, 1977.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$\underline{\text{o}}$ 4 Novembro 2010

Incompressible flows through granular porous media: reproductive solution

Luis Friz, Marko A. Rojas-Medar *and
Elder J. Villamizar-Roa †

Prieur duPlessis and Masliyah [3] developed a generalized Navier-Stokes model applied to the description of incompressible viscous flows through a rigid isotropic granular non consolidated porous medium of spatially varying permeability. This model, which has been considered a good model to treat empirical situations occurring in industry, is based on an approach of interspersed continua and the mean geometrical properties of an idealized granular porous microstructure (see [3]). This model is given by the following system of partial differential equations:

$$\left\{\begin{aligned} \rho\mathbf{u}_t - \mu\Delta\mathbf{u} + \rho\mathbf{u}\cdot\nabla(\frac{\mathbf{u}}{\eta}) + \eta\nabla p + \mu F(\eta)\mathbf{u} = \rho\eta\mathbf{g},\ t\in(0,T),\ x\in\Omega,\\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0,\ t\in(0,T),\ x\in\Omega,\\ \mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x),\ x\in\Omega,\\ \mathbf{u}(x,t) = 0,\ t\in(0,T),\ x\in\partial\Omega,\end{aligned}\right. \tag{0.1}$$

where $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n, n=2$ or 3, is a smooth enough bounded domain corresponding to the granular region where the fluid is occurring, and $(0,T)$ is a time interval. The unknowns are $\mathbf{u}(x,t)\in\mathbb{R}^n$ and $p(x,t)\in\mathbb{R}$, respectively denoting, the velocity and the hydrostatic pressure of the fluid at a point $x\in\Omega$, and at a time $t\in(0,T)$. The functions η and F are given and denote the porosity and a porosity force, respectively, which characterize the porous medium. The porosity is defined as a ratio of volume of the void space to the bulk volume of a porous medium and it changes from zero to one, that is, $0<\eta(x,t)\leq 1$. In this sense, in the points (t_0,x_0) such that $\eta(t_0,x_0)=0$, the material is purely solid and they can be excluded of the flow region. The force F, which reflects the frictional effects introduced by the presence of the porous medium, only depends on porosity η and it is a continuous, decreasing and positive function, which becomes infinite as η approaches zero, that is, $\lim_{\eta\to 0}F(\eta)=\infty$ and $\lim_{\eta\to 1}F(\eta)=0$. So, it is clear that if $\eta=1$, the system (0.1) corresponds with the classical incompressible Navier-Stokes equations. However, the presence of the porosity in the system (0.1) preserves a structural difference compared with the classical Navier-Stokes model as can be verified below. Finally, in (0.1) μ and ρ denote the fluid viscosity and the density of the fluid, which, without lost of generality, will be assumed to be one. The first successful mathematical analysis of (0.1) was done by Boldrini and Lukaszczyk in [1] (see also [4]). Following the ideas given in [3] and [2], we prove the existence of reproductive solutions for a incompressible flows through granular porous media, more precisely we seek solutions of the system:

$$\left\{\begin{aligned} \rho\mathbf{u}_t - \mu\Delta\mathbf{u} + \rho\mathbf{u}\cdot\nabla(\frac{\mathbf{u}}{\eta}) + \eta\nabla p + \mu F(\eta)\mathbf{u} = \rho\eta\mathbf{g},\ t\in(0,T),\ x\in\Omega,\\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0,\ t\in(0,T),\ x\in\Omega,\\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}(T),\\ \mathbf{u}(x,t) = 0,\ t\in(0,T),\ x\in\partial\Omega,\end{aligned}\right. \tag{0.2}$$

As the reader can see, the usual initial condition has been changed by a time periodic condition. Our results read as:

*Grupo de Matemática Aplicada, Departamento de Ciencias Básicas, Universidad del Bío-Bío, Chillán, Chile, lfriz@ubiobio.cl marko@ueubiobio.cl
†Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia, e-mail: ejvillamizarr@unal.edu.co

Theorem. For any $\mathbf{g} \in L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$, $F:(0,1] \to \mathbb{R}^+$. If $\eta : \Omega \times (0,T) \to (0,1]$ verifies

$$\begin{aligned}
&\eta \in L^\infty(0,T;L^\infty),\ 0 < \eta_0 \le \eta(x,t) \le 1,\ \forall (x,t) \in \Omega \times (0,T),\\
&\eta_t \in L^2(0,T;L^{3/2}(\Omega)) \cap L^1(0,T;L^\infty(\Omega))\\
&\nabla\eta \in L^2(0,T;\mathbf{L}^\infty(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;\mathbf{L}^3(\Omega)),
\end{aligned}$$

there exists a reproductive weak solution of the incompressible flows through granular porous media. (0.2).

Acknowledgments

Luis Friz has been partially supported by Fondecyt-Chile, Projet Nro. 1090510. M.A. Rojas-Medar and E.J. Villamizar-Roa has been partially supported by Fondecyt-Chile, Projet Nro. 1080628. Moreover, third author is also supported by the project Nro. MTM2009-12927 del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

References

[1] BOLDRINI, J.L., LUKASZCZYK, J.P.- Isotropic granular (non consolidated) porous media, *Resenhas IME-USP*, **3**, 25-44, 1997.

[2] CLIMENT-EZQUERRA, B., GUILLÉN-GONZÁLEZ, F., ROJAS-MEDAR, M.A.- A review on reproductivity and time periodicity for incompressible fluids, *Bul. Soc. Esp. Mat. Apl.*, **41**, 101-116, 2007.

[3] DUPLESSIS, P.J., MASLIYAH, J.H.- Flow through isotropic granular porous media, *Transport in Porous Media*, **6**, 207-221, 1991.

[4] LUKASZCZYK, J.P.- Fluxos incompressíveis em meios porosos não consolidados. Ph.Thesis. Unicamp, 1996, Brazil.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

PERIODIC SLOWLY SPIRALLING SOLUTIONS OF THE KALDOR-KALECKI MODEL

MARTA C. GADOTTI *

Consider the following system

$$\dot{y}(t) = \alpha\left[I\big(y(t), k(t)\big) - S\big(y(t), k(t)\big)\right], \quad \dot{k}(t) = I\big(y(t-T), k(t)\big) - \delta k(t),$$

named Kaldor-Kalecki model by the authors Krawiec and Szydłowski in [5]. The dot denotes derivative with respect to t, I and S are the investment and the savings functions, respectively, y is the national income, k is the capital stock, α is the adjustment coefficient in the goods market, usually referred to as speed of adjustment, δ is the depreciation rate of the capital stock, and $T > 0$. This is a delay differential system describing interactions between the national gross product y and the capital stock k. The delay is a constant inherent to the specific economy.

In a previous work we obtain a sequence of Hopf bifurcations, when $\alpha = \alpha_n$, $n = 0, 1, 2, ...$ In this work we do the global continuation of a first branch of periodic solutions by the use of the concept of ejective fixed points, see [2]. A central hypothesis is that the part of the investment depending on the income equals the savings.

This is a joint work with M. V. S. Frasson, S. H. J. Nicola and P. Z. Táboas.

1 Return map and periodic solutions

We assume that the investment function $I(y, k)$ satisfies $I(y, k) = J(y) + N(k)$, where $J(0) = N(0) = 0$, $[dJ/dy]_{y=0} = \eta$, $[dN/dk]_{k=0} = \beta$, with $\beta < 0 < \eta$. The savings function depends only on the income, $S(y, k) = S(y)$, and $[dS/dy]_{y=0} = \gamma \in (0, 1)$.

Since the delay only affects the variable y, we shall deal with the phase space $C_0 = C([-1, 0], \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$. If $z = (y, k)$ is a solution of the system

$$\dot{y}(t) = \alpha N(k(t)), \quad \dot{k}(t) = J(y(t-1)) + N(k(t)) - \delta k(t). \tag{1.1}$$

existing in $[t-1, t]$, $z_t \in C_0$ is defined by $z_t = \Big(y_t, k(t)\Big)$, where $y_t \in C\Big([-1, 0], \mathbb{R}\Big)$ is given by $y_t(\theta) = y(t+\theta)$ for all $\theta \in [-1, 0]$, as it is usual.

Given a pair $\Phi = (\varphi, c) \in C_0$, and any $\sigma \in \mathbb{R}$ there exists a unique solution of (1.1) $z = z(\cdot\,; \sigma, \Phi, \alpha) = \big(y(\cdot\,; \sigma, \Phi, \alpha), k(\cdot\,; \sigma, \Phi, \alpha)\big)$ through Φ at $t = \sigma$, that is, $z_\sigma(\cdot\,; \sigma, \Phi, \alpha) = \Phi$. If $\sigma = 0$ we use the shorter notation $z(\cdot\,; \Phi, \alpha) = z(\cdot\,; 0, \Phi, \alpha)$.

Some additional hypotheses are needed. The functions J and N are supposed to be bounded,

$$-E_1 = \inf J(y), \qquad E_2 = \sup J(y), \qquad -H_1 = \inf N(k), \qquad H_2 = \sup N(k), \tag{1.2}$$

with E_1, E_2, H_1, $H_2 > 0$ and

$$|J(y)| \leqslant |\eta y|, \qquad |N(k)| \leqslant |\beta k|. \tag{1.3}$$

*IGCE-Departamento de Matemática, Unesp, Rio Claro-SP, Brasil, martacg@rc.unesp.br

Let $G(y,k) = J(y) + N(k) - \delta k$ so that (1.1) can be written as

$$\dot{y}(t) = \alpha N(k(t) \qquad \dot{k}(t) = G(y(t-1),\, k(t)). \tag{1.4-α}$$

Consider the level curve $\Gamma:\ G(y,k) = 0$ and define the numbers $L_1,\, L_2 > 0$ by the equations $N(-L_1) + \delta L_1 = E_1$ e $N(L_2) - \delta L_2 = E_2$. Therefore Γ has two asymptotes $k = -L_1$, $k = L_2$ and divides the plane in two open connected sets:

$$\mathcal{P} = \{(y,k) \mid G(y,k) > 0\}, \quad \mathcal{N} = \{(y,k) \mid G(y,k) < 0\}.$$

Definição 1.1. *Let $K \subset C_0$ be the closed convex set $K = \{(\varphi, 0) \in C_0;\ \varphi \in\uparrow,\, \varphi(-1) \geq 0\}$.*

Lema 1.1. *If $A = \delta - \beta$ and $D_0 = D_0(A) = -\alpha_0 \beta \eta$. Then $A^2 < D_0 \ \Leftrightarrow\ A < \bar{A}$, where $\bar{A} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\, \arctan \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.*

A nontrivial solution of this system is said to be *slowly spiralling* if it encircles the origin of the yk plane and takes more than twice the delay to complete one lap. The theorem below states the existence of slowly spiralling solutions for the Kaldor-Kalecki system (1.1) and defines the steps to construct a return map in K.

Teorema 1.1. *If $A < \bar{A}$, the following statements hold for $\alpha > 0$:*

(i) There exists a continuous map $\tau_\alpha : K \setminus \{0\} \to (2, \infty)$ such that

$$\Phi \in K \setminus \{0\} \quad \Rightarrow \quad z_{\tau_\alpha(\Phi)}(\cdot\,; \Phi, \alpha) \in K.$$

(ii) For any $\Phi \in K \setminus \{0\}$ the solution $z(\cdot\,; \Phi, \alpha) = (y,k)$ of (1.1) is slowly spiralling. Precisely, the zeros of k and y form sequences $0 = t_1 < t_3 < \ldots$ and $t_2 < t_4 < \ldots$, respectively, in such a way that the sequences $\big(y(t_{2n-1})\big)$ and $\big(k(t_{2n})\big)$, $n = 1, 2, \ldots$, are alternating, $y(t_1)$, $k(t_2) > 0$ and $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < \ldots$. Moreover, $t_{2n+1} - t_{2n} > 1$, $n = 1, 2, \ldots$

Now we define the return map. Let $\beta < 0 < \delta, \eta$ be constants and suppose $A < \bar{A}$. The map $T : K \times (0, \infty) \to K$ is defined by

$$T(\Phi,\, \alpha) = z_{\tau_\alpha(\Phi)}(\cdot\,; \Phi, \alpha), \quad 0 < \alpha < \infty, \quad \Phi \in K \setminus \{0\}, \qquad e \qquad T(0,\, \alpha) = 0, \quad 0 < \alpha < \infty.$$

Thus for any $\alpha > 0$, a nontrivial fixed point of $T(\cdot,\, \alpha)$ is an initial condition $\Phi \in K$ which gives rise to a periodic slowly spiralling solution of (1.1). We prove that the origin is a ejective point of T and we use the next result.

Teorema 1.2. *If M is a closed convex infinite-dimensional set in a Banach space X, $A : M \setminus \{0\} \to M$ is a completely continuous map, $0 \in M$ is an ejective point of A, and there exists a number $r > 0$ such that $Ax = \lambda x$, $x \in M \cap S_r$ implies $\lambda < 1$, then A has a fixed point in $M \cap B_r \setminus \{0\}$.*

Referências

[1] FRASSON, M.V.S., GADOTTI, M.C., NICOLA, S.H.J. AND TABOAS, P.Z. - *Periodic orbits of the Kaldor-Kalecki trade cycle model – Permanence*, pre-print.

[2] HALE, J. AND VERDUYN LUNEL, S. M. - *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[3] KALDOR, N. - *A model of the trade cycle*, Economic Journal, Vol. 50, **197**, 78-92, 1940.

[4] KALECKI, M. - *A macrodynamic theory of business cycles*, Econometrica **3**, 327-344, 1935.

[5] KRAWIEC, A. AND SZYDŁOWSKI, M. - *The Kaldor-Kalecki business cycle model*, Annals of Operations Research **89**, 89-100, 1999.

[6] NUSSBAUM, R. - *Periodic solutions of some nonlinear autonomous functional differential equations*, Ann. Math. Pura Appl. **10**, 263-306, 1974.

[7] NUSSBAUM, R. - *A global bifurcation theorem with applications to functional differential equations.* J. Functional Anal. **19**, 319-339, 1975.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

EXISTENCE AND CONCENTRATION OF POSITIVE SOLUTIONS FOR A QUASILINEAR ELLIPTIC EQUATION IN $\mathbb{R}$

ELISANDRA GLOSS *

In this work, we consider the quasilinear elliptic equation

$$-\varepsilon^2 u'' - \varepsilon^2 (u^2)'' u + V(x)u = h(u) \quad \text{in } \mathbb{R} \tag{0.1}$$

where $\varepsilon > 0$ is a small real parameter. Here our goal is to prove, by a variational approach, the existence and concentration of positive weak solutions. We say that $u \in H^1(\mathbb{R})$ is a (weak) solution of (0.1) if

$$\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^N} (1 + 2u^2) u'\varphi' \,\mathrm{d}x + 2\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^N} |u'|^2 u\varphi \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u\varphi \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} h(u)\varphi \,\mathrm{d}x \quad \text{for all} \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Solutions of equations like (0.1) are related with existence of standing wave solutions for quasilinear equations of the form

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\varepsilon^2 \psi'' + W(x)\psi - \eta(|\psi|^2)\psi - \varepsilon^2 \kappa [\rho(|\psi|^2)]'' \rho'(|\psi|^2)\psi \tag{0.2}$$

where $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, κ is a positive constant, $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a given potential and $\eta, \rho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ are suitable functions. Quasilinear equations of the form (0.2) arise in several areas of physics in correspondence to different type of functions ρ.

Here we consider the case where $\rho(s) = s$. Looking for standing wave solutions of (0.2) we set $\psi(t,x) = e^{-i\xi t}u(x)$, where $\xi \in \mathbb{R}$ and $u > 0$ is a real function. So one obtains a corresponding equation of elliptic type which has the formal variational structure given by (0.1), where without loss of generality we set $\kappa = 1$.

We assume that $V \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfies the assumptions

(V1) V is bounded from below by a positive constant; that is,

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} V(x) = V_0 > 0;$$

(V2) there exists a bounded domain Ω in $\mathbb{R}$ such that

$$m \equiv \inf_{x \in \Omega} V(x) < \inf_{x \in \partial\Omega} V(x).$$

Hereafter we use the following notation:

$$\mathcal{M} \equiv \{x \in \Omega : V(x) = m\}$$

and without loss of generality we may assume that $0 \in \mathcal{M}$. We emphasize that besides the local condition (V2), introduced in [3] and so far well known for semilinear elliptic problems, we do not require any global condition other than (V1). We also suppose that $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ is a locally Lipschitz continuous function satisfying:

(H1) $\lim_{t \to 0^+} h(t)/t = 0$;

(H2) there exists $T > 0$ such that

$$h(T) > mT, \quad H(T) = \frac{m}{2}T^2, \quad H(t) < \frac{m}{2}t^2 \quad \text{for all } t \in (0, T)$$

where $H(t) = \int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s$.

*Dept. de Matemtica, UFPB, PB, Brasil, elisandra@mat.ufpb.br

Similar hypothesis on the nonlinearity were used in [2] for the semilinear case. Following the strategy developed there and using variational methods, we shall prove existence and concentration of positive solutions for (0.1) without assuming Ambrosetti-Rabinowitz and monotonicity conditions on h. In particular we improve the results in [1] where h is a pure power.

1 Main result

Our main result is stated below

Theorem 1.1. *Suppose that* (V1)-(V2), (H1)-(H2) *hold. Then there exists* $\varepsilon_0 > 0$ *such that (0.1) has a positive solution* $u_\varepsilon \in C^{1,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ *for all* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$*, satisfying the following:*

(i) u_ε *admits a maximum point* x_ε *such that* $\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{dist}(x_\varepsilon, \mathcal{M}) = 0$ *and for any sequence* $\varepsilon_n \to 0$ *there exist* $x_0 \in \mathcal{M}$ *and a solution* u_0 *of*

$$-u'' - (u^2)''u + mu = h(u), \quad u > 0, \quad u \in H^1(\mathbb{R}) \tag{1.3}$$

such that, up to subsequences,

$$x_{\varepsilon_n} \to x_0 \quad \textit{and} \quad u_{\varepsilon_n}(\varepsilon_n \cdot + x_{\varepsilon_n}) \to u_0 \quad \textit{in } H^1(\mathbb{R}) \textit{ as } \quad n \to \infty.$$

(ii) There exist positive constants C *and* ζ *such that*

$$u_\varepsilon(x) \le C \exp\big(-\frac{\zeta}{\varepsilon}(|x - x_\varepsilon|)\big) \quad \textit{for all } x \in \mathbb{R}.$$

The proof of this theorem relies on the study of a semilinear equation obtained after making the chance of variables introduced in [5]. In order to prove existence of solutions for this equation we study some properties of the least energy solutions for a limit equation obtained from (1.3) by the same change of variables. Using these properties, after some technical lemmata, we can find a bounded Palais-Smale sequence in a suitable space for the associated functional. Thus we obtain a solution for the semilinear equation which gives us a solution for the original problem (0.1).

References

[1] C. O. Alves, O. H. Miyagaki and S. H. M. Soares, *On the existence and concentration of positive solutions to a class of quasilinear elliptic problems on* $\mathbb{R}$, to appear

[2] J. Byeon, L. Jeanjean and K. Tanaka, *Standing waves for nonlinear Schrödinger equations with a general nonlinearity: one and two dimensional cases*, Comm. Partial Differential Equations **33** (2008), 1113-1136.

[3] M. del Pino and P. L. Felmer, *Local mountain passes for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Calc. Var. Partial Differential Equations **4** (1996), 121-137.

[4] E. Gloss, *Existence and concentration of positive solutions for a quasilinear elliptic equation in* $\mathbb{R}$, Electron. J. Diff. Equ., **2010** (2010), 1-23.

[5] J. Liu, Y. Wang and Z.-Q. Wang, *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations II*, J. Differential Equations **187** (2003), 473-493.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

RESOLUBILIDADE GLOBAL DE CERTAS CLASSES DE OPERADORES DIFERENCIAIS PARCIAIS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

RAFAEL B. GONZALEZ * ADALBERTO P. BERGAMASCO †

O estudo da resolubilidade global de operadores diferenciais parciais lineares consiste em determinar a sua imagem, sendo que a melhor situaï¿½ï¿½o ocorre quando o operador em questï¿½o ï¿½ sobrejetor. Quando o operador nï¿½o ï¿½ sobrejetor, podemos questionar se sua imagem ï¿½ um subespaï¿½o fechado, ou ainda, se sua imagem possui codimensï¿½o finita.

No artigo [1] foi feito o estudo da resolubilidade global da seguinte classe de campos vetoriais definidos no toro $\mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$,

$$L \doteq \partial_t + a(x)\partial_x,$$

onde $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ ï¿½ uma funï¿½ï¿½o a valores reais.

Os autores de [1] caracterizaram a imagem de um operador do tipo L, exibindo condiï¿½ï¿½es necessï¿½rias e suficientes para que a imagem de L fosse fechada. Tal caracterizaï¿½ï¿½o foi feita no espaï¿½o de funï¿½ï¿½es $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$ e no espaï¿½o de distribuiï¿½ï¿½es $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$.

A grande contribuiï¿½ï¿½o de [1] ocorreu no caso em que $\emptyset \neq a^{-1}(0) \neq \mathbb{T}$. Os autores de [1] demonstraram que a ordem de anulamento dos zeros da funï¿½ï¿½o a determina quando a imagem de um operador do tipo L ï¿½ fechada.

Em [1] ficou provado o seguinte teorema.

Teorema 0.1. *Para o operador $L = \partial_t + a(x)\partial_x$, as seguintes condiï¿½ï¿½es sï¿½o equivalentes:*

(I) $L\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$ ï¿½ um subespaï¿½o fechado de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$.

(II) $L\mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ ï¿½ um subespaï¿½o fechado de $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$

(III) Uma das seguintes situaï¿½ï¿½es ocorre:

(III.1) $a^{-1}(0) = \mathbb{T}$;

(III.2) $a^{-1}(0) = \emptyset$ e $\alpha \doteq (2\pi)^{-1}\displaystyle\int_0^{2\pi}(1/a)$ ï¿½ racional ou irracional nï¿½o Liouville;

(III.3) $\emptyset \neq a^{-1}(0) \neq \mathbb{T}$ e cada $x \in a^{-1}(0)$ ï¿½ um zero de ordem finita.

No caso em que $a^{-1}(0) = \mathbb{T}$, um campo vetorial do tipo L se reduz a ∂_t. No caso em que $a^{-1}(0) = \emptyset$, um campo vetorial do tipo $a^{-1}L : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$ se reduz a um campo vetorial da forma $\tilde{L} = \partial_X + \alpha\partial_T$, atravï¿½s da mudanï¿½a de variï¿½veis $X = x$, $T = t + \alpha - \int_0^x a^{-1}$. Em ambos os casos temos campos vetoriais com coeficientes constantes e o teorema (0.1) ï¿½ uma consequï¿½ncia de resultados em [2, 3, 4].

Quando L ï¿½ um operador em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ e $a^{-1}(0) = \emptyset$, tambï¿½m podemos reduzir o operador L a um operador com coeficientes constantes, utilizando composiï¿½ï¿½o de distribuiï¿½ï¿½es com difeomorfismos. Entretanto, utilizaremos outra abordagem, com o objetivo de exemplificar que ao estudar a imagem de um campo vetorial do tipo

*Instituto de Ciï¿½ncias Matemï¿½ticas e de Computaï¿½ï¿½o, USP, Sï¿½o Carlos - SP, Brasil, rafael@icmc.usp.br
†Instituto de Ciï¿½ncias Matemï¿½ticas e de Computaï¿½ï¿½o, USP, Sï¿½o Carlos - SP, Brasil, apbergam@icmc.usp.br

L no espaï¿½o de distribuiï¿½ï¿½es $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$, aparece, via transposto, uma outra classe de operadores diferenciais parciais lineares de primeira ordem, que sï¿½o perturbaï¿½ï¿½es dos campos vetoriais do tipo L, a saber,

$$P \doteq \partial_t + \partial_x(a\cdot).$$

Por exemplo, supondo que $a^{-1}(0) = \emptyset$, desejamos demonstrar que $L\mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ ï¿½ um subespaï¿½o fechado de $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ se, e somente se, α ï¿½ racional ou irracional nï¿½o Liouville.

Suponha que jï¿½ demonstramos o seguinte resultado:

Proposição 0.1. *$P\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$ ï¿½ um subespaï¿½o fechado de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$ se, e somente se, α ï¿½ racional ou irracional nï¿½o Liouville.*

Entï¿½o, se α ï¿½ racional ou irracional nï¿½o Liouville, segue que $L\mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ ï¿½ fechado em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$, pois o operador P possui imagem fechada em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$ e $-L = {}^tP$.

Reciprocamente, suponha que α seja um nï¿½mero irracional de Liouville. Queremos provar que $L\mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ nï¿½o ï¿½ fechado em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$. Sabemos que P nï¿½o tem imagem fechada em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$. Se a imagem de L fosse fechada em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$, entï¿½o a imagem de ${}^tL$ seria fechada no dual de $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$, $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)'$, que ï¿½ isomorfo (na categoria de espaï¿½os vetoriais topolï¿½gicos) ao espaï¿½o $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$, com isomorfismo dado pela aplicaï¿½ï¿½o canï¿½nica $J(x)(x') = x'(x)$. Como $P = J^{-1} \circ {}^{tt}P \circ J = -J^{-1} \circ {}^t(L) \circ J$, terï¿½amos $P\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2) = -J^{-1}({}^t(L)\mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)')$ e portanto, $P\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$ seria fechado em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$, o que nï¿½o ocorre.

Agora, para demonstrar a proposiï¿½ï¿½o (0.1), utilizamos novamente a mudanï¿½a de variï¿½veis $X = x$, $T = t + \alpha - \int_0^x a^{-1}$, para reduzirmos o operador $a^{-1}P$ ao operador $\tilde{P} = (a'a^{-1}\cdot) + \partial_x + \alpha\partial_t$. Entï¿½o $a\tilde{P} = (a'\cdot) + a\partial_x + \alpha\partial_t(a\cdot) = \partial_x(a\cdot) + \alpha\partial_t(a\cdot) = \tilde{L}(a\cdot)$ e novamente de resultados em [2, 3, 4], segue que a imagem de P ï¿½ um subespaï¿½o fechado de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$ se, e somente se, α ï¿½ racional ou irracional nï¿½o Liouville.

Na verdade, com os argumentos utilizados em [1], tambï¿½m ï¿½ possï¿½vel demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 0.2. *Para o operador $P = \partial_t + \partial_x(a\cdot)$, as seguintes condiï¿½ï¿½es sï¿½o equivalentes:*

(I) $P\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$ ï¿½ um subespaï¿½o fechado de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$.

(II) $P\mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ ï¿½ um subespaï¿½o fechado de $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$.

(III) Uma das seguintes situaï¿½ï¿½es ocorre:

(III.1) $a^{-1}(0) = \mathbb{T}$;

(III.2) $a^{-1}(0) = \emptyset$ e $\alpha \doteq (2\pi)^{-1} \displaystyle\int_0^{2\pi} (1/a)$ ï¿½ racional ou irracional nï¿½o Liouville;

(III.3) $\emptyset \neq a^{-1}(0) \neq \mathbb{T}$ e cada $x \in a^{-1}(0)$ ï¿½ um zero de ordem finita.

O propï¿½sito do nosso trabalho ï¿½ demonstrar, com detalhes, os teoremas (0.1) e (0.2) no caso $(III.3)$.

Referências

[1] BERGAMASCO, A. P. AND PETRONILHO, G. - Closedness of the Range for Vector Fields on the Torus. *Journal of Diferential Equations* **154**, 132-139, 1998.

[2] HERZ, C. - Functions which are divergences, *Amer. J. Math.* **92**, 641-656, 1970.

[3] GREENFIELD, S. AND WALLACH, N. - Global hypoellipticity and Liouville numbers. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **31**, 112-114, 1972.

[4] HOUNIE, J. - Globally hypoelliptic and globally solvable first order evolutions equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **252**, 233-248, 1979.

[5] TREVES, F. - Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels. *Academic Press.* Fourth Printing, 1973.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

DIFFERENTIABILITY IN REPRODUCING KERNEL HILBERT SPACES ON THE SPHERE

THAÍS JORDÃO * & VALDIR A. MENEGATTO †

We analyze the smoothness of functions in the reproducing kernel Hilbert space (RKHS) associated to Mercer-like kernels on the sphere, when the generating kernel is sufficiently smooth. In particular, we embed the RKHS into a space of smooth functions on the sphere. The boundedness and compactness of the embedding are also considered.

1 Introduction

Let S^m be the unit sphere in $\mathbb{R}^{m+1}$ endowed with its usual normalized surface measure σ_m and consider the usual space $L^2(S^m, \sigma_m)$. Its inner product is given by

$$\langle f, g\rangle_2 = \int_{S^m} f(x)\overline{g(x)}d\sigma_m(x), \quad f, g \in L^2(S^m, \sigma_m).$$

We will deal with Mercer-like kernels on S^m, i.e., continuous and positive definite functions of the form $K : S^m \times S^m \to \mathbb{C}$ having an uniformly and absolutely convergent series representation in the form

$$K(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \lambda_n \phi_n(x)\overline{\phi_n(y)}, \quad x, y \in S^m, \tag{1.1}$$

in which the set $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ is an orthonormal sequence in $L^2(S^m, \sigma_m)$, $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ is a sequence of positive real numbers decreasing to 0 and $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$.

If we write $(\mathcal{H}_K, \langle\cdot,\cdot\rangle_K)$ to denote the unique RKHS associated to K, Mercer's theory implies that the set $\{\lambda_n^{1/2}\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ is an orthonormal basis for $(\mathcal{H}_K, \langle\cdot,\cdot\rangle_K)$. The basic information mentioned above is to be found in [1] while additional information on positive definiteness, reproducing kernel Hilbert spaces and series representation for kernels can be found in [1, 5, 6].

There are several differentiability concepts for functions on S^m. In this note, we will focus on the standard one, that defined through the radial extension of the function to $\mathbb{R}_*^{m+1} := \mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$ and very well explored in [4]. Shortly, the differentiability of a function $f : S^m \to \mathbb{R}$ will require the corresponding differentiability of its radial extension $\tilde{f} : \mathbb{R}_*^{m+1} \to \mathbb{R}$ given by $\tilde{f}(x) = f(x\|x\|^{-1})$. For instance, if α is a multi-index in $\mathbb{Z}_+^{m+1}$, the derivative $D^\alpha f$ is, by definition, the restriction of $D^\alpha \tilde{f}$ to S^m. Using real and imaginary parts, we may transfer the differentiability to complex functions too. To close this discussion, we inform that we will use the symbol $C^k(S^m)$ to denote the set of all functions $f : S^m \to \mathbb{C}$ for which $\tilde{f} \in C^k(\mathbb{R}_*^{m+1})$.

The very same concepts can be adapted for kernels. We will write $C^{k,k}(S^m \times S^m)$ to denote the set of all kernels $K : S^m \times S^m \to \mathbb{C}$ for which $D^{\alpha,\beta}\tilde{K} = D^{(\alpha,\beta)}\tilde{K}$, $|\alpha|, |\beta| \le k$, exist and are continuous on $\mathbb{R}_*^{m+1} \times \mathbb{R}_*^{m+1}$. Here we need to interpret (α, β) as a multi-index with $2m + 2$ components. The derivative $D^{\alpha,\beta}K$ ([3]) is the restriction of $D^{\alpha,\beta}\tilde{K}$ to $S^m \times S^m$. Finally, for α, β in $\mathbb{Z}_+^{m+1}$ and x in $\mathbb{R}_*^{m+1}$, $(D^{\alpha,\beta}\tilde{K})^x$ will represent the function $D^{\alpha,\beta}\tilde{K}(x, \cdot)$.

2 Results

A Mercer-like kernel K as in the previous section generates a compact and selfadjoint integral operator on $L^2(S^m, \sigma_m)$, the functions ϕ_n being its eigenfunctions corresponding to the eigenvalues λ_n. This information is

*ICMC - USP, São Carlos,SP, Brasil, tjordao@icmc.usp.br. Partially supported by FAPESP grant, # 08/57085 − 0.
†ICMC - USP, São Carlos,SP, Brasil, menegatt@icmc.usp.br

crucial in the proof of the result below on smoothness of the elements in the basis $\{\lambda_n^{1/2}\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$.

Teorema 2.1. *Let K be a Mercer-like kernel representable as in (1.1). If K belongs to $C^{k,k}(S^m\times S^m)$, then*

$$D^\alpha\tilde{\phi}_n(x)=\frac{1}{\lambda_n}\langle\phi_n,(D^{0,\alpha}\tilde{K})^x|_{S^m}\rangle_2,\quad x\neq 0,\quad |\alpha|\leq k,\quad n\in\mathbb{Z}_+. \tag{2.1}$$

Under the very same assumptions in Theorem 2.1, we can prove

$$D^{\alpha,\beta}K(x,y)=\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\lambda_n D^\alpha\phi_n(x)\overline{D^\beta\phi_n(y)},\quad x,y\in S^m,\quad |\alpha|,|\beta|\leq k, \tag{2.2}$$

with uniform and absolute convergence of the series. This representation leads to the next result.

Teorema 2.2. *Let K be a Mercer-like kernel representable as in (1.1). If K belongs to $C^{k,k}(S^m\times S^m)$, then $(D^{0,\alpha}K)^x\in\mathcal{H}_K$ whenever $x\in S^m$ and $|\alpha|\leq k$.*

Replacing the inner product of $L^2(S^m,\sigma_m)$ in the formula (2.1) with the inner product of $(\mathcal{H}_K,\langle\cdot,\cdot\rangle_K)$ leads to the following refinement.

Teorema 2.3. *Let K be a Mercer-like kernel representable as in (1.1). If K belongs to $C^{k,k}(S^m\times S^m)$, then*

$$D^\alpha\phi_n(x)=\langle\phi_n,(D^{0,\alpha}K)^x\rangle_K,\quad x\in S^m,\quad n\in\mathbb{Z}_+,\quad |\alpha|\leq k,\quad n\in\mathbb{Z}_+. \tag{2.3}$$

The very same formula holds for all the functions in RKHS.

Teorema 2.4. *Let K be a Mercer-like kernel representable as in (1.1). If K belongs to $C^{k,k}(S^m\times S^m)$ then $\mathcal{H}_K$ can be embedded in $C^k(S^m)$. In addition,*

$$D^\alpha f(x)=\langle f,(D^{0,\alpha}K)^x\rangle_K,\quad f\in\mathcal{H}_K,\quad x\in S^m. \tag{2.4}$$

The embedding $i:\mathcal{H}_K\hookrightarrow C^k(S^m)$ given by $i(f)=f$ has some interesting properties and is relevant in some

Teorema 2.5. *Let K be a Mercer-like kernel representable as in (1.1). If K belongs to $C^{k,k}(S^m\times S^m)$, then the embedding i is compact and bounded. In addition, $\|i(f)\|_{C^k}\leq\|K\|_{C^{k,k}}^{1/2}\|f\|_K$, $f\in\mathcal{H}_K$.*

The references [2,7] consider similar problems but the context there does not include the spherical setting. Reference [2] investigates the case in which the Mercel-like kernel is defined on an open and bounded subset of $\mathbb{R}^{m+1}$.

References

[1] Cucker, F.; Zhou, Ding-Xuan, Learning theory: an approximation theory viewpoint. With a foreword by Stephen Smale. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. *Cambridge University Press, Cambridge*, 2007.

[2] Ferreira, J. C.; Menegatto, V. A., Derivative reproducing properties of Mercer-Like kernels, submitted.

[3] Menegatto, V. A.; Oliveira, C. P.; Peron, A. P., On the differentiability of positive definite kernels on spheres. *J. Appl. Anal.*, 15 (2009), no. 1, 101-117.

[4] Morimoto, Mitsuo, Analytic functionals on the sphere. Translations of Mathematical Monographs, 178. *American Mathematical Society, Providence, RI*, 1998.

[5] Saitoh, S., Integral transforms, reproducing kernels and their applications. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 369. *Longman, Harlow,* 1997.

[6] Sun, Hongwei, Mercer theorem for RKHS on noncompact sets. *J. Complexity* 21 (2005), no. 3, 337–349.

[7] Zhou, Ding-Xuan, Derivative reproducing properties for kernel methods in learning theory. *J. Comput. Appl. Math.* 220 (2008), 456–463.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

A GENERALIZED BERSTEIN THEOREM

MARCIA KASHIMOTO *

Weierstrass' first theorem states that any real-valued continuous function f defined on the closed interval [0,1] is the limite of a uniformly convergent sequence of algebraic polynomials. One of the most elementary proofs of this classic result is that which uses the Berstein polynomials of f

$$(B_n f, x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}, \qquad x \in [0,1]$$

for each natural number n. Berstein theorem states that $B_n(f) \to f$ uniformly on [0,1] and, since each $B_n(f)$ is a polynomial, we have as a consequence Weierstrass theorem. (See, e.g., Lorentz [1]). The operator B_n defined on the space $C([0,1])$ with values in the vector subspace of all polynomials of degree at most n has the property that $B_n(f) \geq 0$ whenever $f \geq 0$. Thus Berstein's theorem also establishes the fact that each positive continuous real-valued function on $[0,1]$ is the limit of a uniformly convergent sequence of positive polynomials.

Consider a compact Hausdorff space X and the convex cone

$$C^+(X) := \{f \in C(X) : f \geq 0\}.$$

A generalized Berstein's theorem would be a theorem stating when a convex cone contained in $C^+(X)$ is dense in it.

If W is a nonempty subset of $C(X)$, a function $\phi \in C(X; [0,1])$ is called a multiplier of W if $\phi f + (1-\phi)g \in W$ for any $f, g \in W$.

Prolla [3] proved the following result.

Teorema 0.1. *Let $W \subset C^+(X)$ be a convex cone satisfying the following conditions:*

(a) *given any two distinct points x and y in X, there is a multiplier ϕ of W such that $\phi(x) \neq \phi(y)$;*

(b) *given any $x \in X$, there is $g \in W$ such that $g(x) > 0$.*

Then W is uniformly dense in $C^+(X)$.

Our aim is to generalize Prolla's result to weighted spaces. In order to proof it, we use a Stone Weierstrass theorem type [2].

Let X be a locally compact Hausdorff space. We introduce a set V of non-negative upper semicontinuous functions on X, whose elements are called *weights*. We assume that V is directed, in the sense that, given $v_1, v_2 \in V$, there exist $\lambda > 0$ and $v \in V$ such that $v_1 \leq \lambda v$ and $v_2 \leq \lambda v$.

Let V be a directed set of weights. The vector subspace of $C(X)$ of all functions f such that vf vanishes at infinity for each $v \in V$ will be denoted by $CV_\infty(X)$.

When $CV_\infty(X)$ is equipped with the locally convex topology ω_V generated by the seminorms

$$\begin{aligned} p_v : CV_\infty(X) &\to R^+ \\ f &\mapsto sup\ \{v(x)|f(x)| : x \in X\} \end{aligned}$$

for each $v \in V$, we call $CV_\infty(X)$ a *weighted space*.

*Instituto de Matemática , UNIFEI, MG, Brasil, kaxixi@unifei.edu.br

We present some examples of weighted spaces.

(a) If V consists of the constant function $\mathbf{1}$, defined by $\mathbf{1}(x) = 1$ for all $x \in X$, then $CV_\infty(X)$ is $C_0(X)$, the vector subspace of all functions in $C(X)$ that vanish at infinity. In particular, if X is compact then $CV_\infty(X) = C(X)$. The corresponding weighted topology is the topology of uniform convergence on X.

(b) Let V be the set of characteristic functions of all compact subsets of X. Then the weighted space $CV_\infty(X)$ is $C(X)$ endowed with the compact-open topology.

(c) If V consists of characteristic functions of all finite subsets of X, then $CV_\infty(X)$ is $C(X)$ endowed with the topology of pointwise convergence.

We state the following result.

Teorema 0.2. *Let $W \subset CV_\infty^+(X)$ be a convex cone satisfying the following conditions:*

(a) *given any two distinct points x and y in X, there is a multiplier ϕ of W such that $\phi(x) \neq \phi(y)$;*

(b) *given any $x \in X$, there exists $g \in W$ such that $g(x) > 0$.*

Then W is ω_V-dense in $CV_\infty^+(X)$.

References

[1] LORENTZ, G. G. - Approximation of Functions, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.

[2] PROLLA, J. B. AND KASHIMOTO, M. S. - *Simultaneous Approximation and Interpolation in Weighted Spaces*, Rend. Del Circ. Mat. di Palermo, Serie II, Tomo LI, (2002), 485-494.

[3] PROLLA, J. B. - *A Generalized Berstein Approximation Theorem,* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **104**, (1988), 317-330.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

ON THE EFFECTS OF ROTATIONS FOR THE M_1 AND THE HENSTOCK-KURZWEIL INTEGRALS

PEDRO L. KAUFMANN *

Efforts have been made to modify the multidimensional Henstock-Kurzweil integral in order to obtain a satisfactory Divergence Theorem. In the one-dimensional case, the Henstock-Kurzweil integral operation is defined on *all* derivatives, a property lacked by the Lebesgue integral; we have the Fundamental Theorem of Calculus valid for a wider class of functions when the integral symbol is considered to be the Henstock-Kurzweil integral instead of the Lebesgue integral. For more than one dimension, the problem is that there are some differentiable functions F such that the natural generalization of the Henstock-Kurzweil integral operation is not even defined for $div\, F$. Some good results in adapting the Henstock-Kurzweil integral to get a Divergence Theorem valid for a wide class of functions were obtained in [2] and [8] by maintaining the approach of Riemann sums using interval-based partitions, but imposing to the partitions certain regularity conditions. For instance, the M_1-integral presented by Jarník, Kurzweil and Schwabik in [2] is suitable for a most general Divergence Theorem, and satisfies all good properties of the two-dimensional Henstock-Kurzweil integral (except for Fubini's Theorem; we refer to [5] and [6] for a discussion on the level of incompatibility between the Divergence Theorem and Fubini's Theorem when one wishes to define an integration process).

In [4] (see also [6]) we show that the mentioned M_1-integral is sensitive to rotations, in the sense highlighted by Proposition 0.1 below. This result relays on the following example from [3]:

Exemplo 0.1. *Let $(a_n)_n$ be a sequence of real numbers such that $a_0 = 0$, $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$ and $a_n \to 1$, and let $(b_n)_n$ be a sequence of strictly positive real numbers converging to zero but such that $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n = +\infty$. Let us define for each natural number n the following subsets of $[0,1]\times[0,1]$:*

$$K_n \doteq [a_{n-1}, a_n] \times [a_{n-1}, a_n], \text{ and } K_n^+ \doteq \{(x,y) \in K_n : y \geq x\}.$$

It is straghtforward to define a function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfying, for each natural n:

1. *f is continuous in K_n and equals zero in ∂K_n;*
2. *$f(x,y) = -f(y,x)$, for each $(x,y) \in K_n$;*
3. *$f(x,y) \geq 0$, for each $(x,y) \in K_n^+$;*
4. *$\int_{K_n^+} f = b_n$*

and such that $f(x,y) = 0$ for each $(x,y) \notin \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Note that f is discontinuous only in $(1,1)$.

The function f defined above is M_1-integrable, but this integrability is sensitive to rotations:

Proposição 0.1. 1. *The function f given by example 0.1 is M_1-integrable;*

2. *the $\frac{\pi}{4}$rad clockwise rotation of f is not M_1-integrable. That is, if $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is defined by $T \doteq \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, then $f \circ T^{-1}$ is not M_1-integrable.*

*Instituto de Matemática e Estatística, USP, SP, Brasil, plkaufmann@gmail.com

The fact that $f \circ T^{-1}$ is not M_1-integrable is a consequence of the additivity of the M_1-integral with respect to intervals. Otherwise, since *supp* $f \circ T^{-1} \subset [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \times [-1,1]$, $f \circ T^{-1}$ should be M_1-integrable over $[0,\sqrt{2}] \times [0,1]$, and that would contradict hypothesis $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n = +\infty$.

We can prove the M_1-integrability of f directly by using Proposition 0.2 below. That result was proven for the two-dimensional Perron integral by Karták in [3]; here we present a M_1-integral version.

Proposição 0.2. *Consider $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ and $A \in \mathbb{R}$. Then the following assertions are equivalent:*

1. *f is M_1-integrable in $[0,1]^2$ and $(M_1)\int f = A$;*
2. *f is M_1-integrable in $K_{(x,y)} \doteq [0,1]^2 \setminus [x,1] \times [y,1]$ for each x, y satisfying $0 < x, y < 1$, and the limit*

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} (M_1)\int_{K_{(x,y)}} f \tag{0.1}$$

exists and equals A.

The results mentioned above can be re-written for the two-dimensional Henstock-Kurzweil integral as well; the proofs are the same if we skip all the regularity arguments. The result for the Henstock-kurzweil was already known, since this integral is equivalent to the Perron integral and, as we mentioned, a version of Proposition 0.1 was proven by Karták for this integral. Our proof has the advantage of being more direct, since we do not need the equivalence between the Henstock-Kurzweil and the Perron integrals.

Example 0.1 motivates the search for nonabsolute integration processes which are invariant through rotations and, moreover, through C^1-transformations. In [1], Jarník and Kurzweil present a two-dimensional nonabsolute integral which satisfies a very general Divergence Theorem and is invariant through C^1-transformations, though it is very complicated to prove even the simpler properties for this integral. We refer to [7] (see also [6]), where a modification of the M_1-integral, called Δ-integral, is presented and the problem is solved up to affine transformations. The Δ-integral works similarly to the M_1-integral, but using triangle-based partitions instead of interval-based ones, and satisfy all the good properties of the M_1-integral.

References

[1] J. Jarník, J. Kurzweil: *A nonabsolutely convergent integral which admits C^1-transformations.* Časopis Pěst. Mat., 109:157–167, 1984. Zbl 0555.26005

[2] J. Jarník, J. Kurzweil, Š Schwabik: *On Mawhin's approach to multiple nonabsolutely convergent integral.* Časopis Pěst. Mat., 108:356–380, 1983. Zbl 0555.26004

[3] K. Karták: *On multidimensional integration theory (K teorii vícerozměrného integrálu).* Časopis Pěst. Mat., 80:400–414, 1955.

[4] P. L. Kaufmann: *On the effects of rotations for the M_1 and the henstock-kurzweil integrals.* To appear.

[5] P. L. Kaufmann, R. Bianconi: *Divergence Theorem versus Fubini's Theorem for a general integration process.* To appear.

[6] P. L. Kaufmann: *Nonabsolute integration in $\mathbb{R}^2$ using triangle-based partitions (Integração não-absoluta em $\mathbb{R}^2$ usando partições triangulares).* PhD thesis, IME-USP, 2009.

[7] P. L. Kaufmann, R. Bianconi: *Triangle integral - a nonabsolute integration process suitable for piecewise linear surfaces.* To appear.

[8] J. Mawhin: *Generalized multiple Perron integrals and the Green-Goursat theorem for differentiable vector fields.* Czechoslovak Math. J. *31 (106)* (1981), no. 4, 614–632. Zbl 0562.26004

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

Magnetohydrodynamics's type equations over Clifford Algebras

Igor Kondrashuk * & Eduardo A. Notte-Cuello † & Marko A. Rojas-Medar ‡

We study a system of equations modeling the stationary motion of incompressible electrical conducting fluid. Based on methods of Clifford analysis, we rewrite the system of magnetohydrodynamics fluid in the hypercomplex formulation and represent its solution in Clifford operator terms.

The Clifford algebra $\mathcal{C}l(V,g)$ of a metric vector space (V,g) is defined as the quotient algebra [5, 6, 7]

$$\mathcal{C}l(V,g) = \frac{T(V)}{J_g},$$

where $J_g \subset T(V)$ is the bilateral ideal of $T(V)$ generated by the elements of the form $u \otimes v + v \otimes u - 2g(u,v)$, with $u, v \in V \subset T(V)$. The elements of $\mathcal{C}l(V,g)$ are sometime called *Clifford numbers.*

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ and $\Gamma = \partial\Omega$. Then functions u defined in Ω with values in $Cl_{0,n}$ ($p = 0$ and $q = n$) are considered. These functions may be written as

$$u(x) = \sum_A e_A u_A(x), \qquad x \in \Omega,$$

where $u_A(x) \in \mathbb{R}$. Properties such as continuity, differentiability, integrability, and so on, which are ascribed to u have to be possessed by all components $u_A(x)$. In this way, the usual Banach space of these functions are denoted by $\mathcal{C}^\alpha(\Omega, Cl_{0,n}), \mathcal{L}_q(\Omega, Cl_{0,n})$ and $\mathcal{W}_q^k(\Omega, Cl_{0,n})$ or in abbreviated form $\mathcal{C}^\alpha(\Omega), \mathcal{L}_q(\Omega)$ and $\mathcal{W}_q^k(\Omega)$ [2, 3, 4]. The Dirac operator is

$$D = \sum_{K=1}^{n} e_k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

is easy prove that $D^2 = -\Delta$, where Δ is the Laplacian operator.

The equations of magnetohydrodynamics (MHD) can be reduced to the following form for $u^*, \mathbf{h}^* : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ and $p^*, w^* : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ as [1, 5, 6, 7]

$$\begin{aligned}
&-\Delta\mathbf{u}^* + \frac{\rho}{\eta}(\mathbf{u}^* \cdot \nabla)\mathbf{u}^* - \frac{\mu}{\eta}(\mathbf{h}^* \cdot \nabla)\mathbf{h}^* + \frac{1}{\eta}\nabla\pi^* = \frac{\rho-\mu}{2\eta}\overline{\mathbf{f}}^*, \\
&-\Delta\mathbf{h}^* + \mu\sigma(\mathbf{u}^* \cdot \nabla)\mathbf{h}^* - \mu\sigma(\mathbf{h}^* \cdot \nabla)\mathbf{u}^* = -\mu\sigma \,\mathrm{grad}\, w^*, \\
&\mathrm{div}\,\mathbf{u}^* = 0 \qquad ; \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{h}^* = 0,
\end{aligned} \tag{0.1}$$

where $\pi^* = p^* + \frac{\mu}{2}\mathbf{h}^{*2}$ and we set $\frac{\rho-\mu}{2\eta}\overline{\mathbf{f}}^*$ instead $\frac{\rho}{\eta}\mathbf{f}^*$ to facilitate the computations. For this system we consider the following boundary conditions

$$\mathbf{u}^*(x) = 0, \quad \mathbf{h}^*(x) = 0 \quad \text{on } \partial\Omega = \Gamma. \tag{0.2}$$

Here, $\mathbf{u}^*$ and $\mathbf{h}^*$ are respectively the unknown velocity and magnetic fields; p^* is the unknown hydrostatic pressure; w^* is an unknown function related to the motion of heavy ions (in such way that the density of electric current, j_0,

*Grupo de Matemática Aplicada, Dpto. de Ciencias Básicas, Facultad de Ciencias, Universidad del Bío-Bío, Campus Fernando May, Casilla 447, Chillán, Chile, igor.kondrashuk@ubiobio.cl, supported by Fondecyt (Chile) grants 1040368, 1050512 and by DIUBB grant (UBB, Chile) 102609.

†Dpto. de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de La Serena, Av. Cisternas 1200, La Serena, Chile, enotte@userena.cl, supported by Dirección de Investigación de la Universidad de La Serena, DIULS, grant CD091501.

‡Grupo de Matemática Aplicada, Dpto. de Ciencias Básicas, Facultad de Ciencias, Universidad del Bío-Bío, Campus Fernando May, Casilla 447, Chillán, Chile, marko@ueubiobio.cl, supported by DGI-MEC (Spain) Grant MTM2009-12927 and Fondecyt Grant 1080628

generated by this motion satisfies the relation rot $j_0 = -\sigma\nabla w^*$); ρ is the density of mass of the fluid (assumed to be a positive constant); $\mu > 0$ is the constant magnetic permeability of the medium; $\sigma > 0$ is the constant electric conductivity; $\eta > 0$ is the constant viscosity of the fluid; $\mathbf{f}^*$ is an given external force field.

Now, we can write the system (0.1)-(0.2) in the Clifford formalism [5, 6, 7] with

$$\mathbf{u}(x), \mathbf{h}(x), \overline{\mathbf{f}}(x) \in Cl^1_{0,3} \hookrightarrow Cl_{0,3}$$

as

$$\begin{aligned}
&DD\mathbf{u} + \frac{\rho}{\eta}M(\mathbf{u}) - \frac{\mu}{\eta}M(\mathbf{h}) + \frac{1}{\eta}D\pi = 0 \\
&DD\mathbf{h} + \mu\sigma N(\mathbf{u}, \mathbf{h}) - \mu\sigma N(\mathbf{h}, \mathbf{u}) = Dw \\
&ScD\mathbf{u} = 0 \qquad ; \qquad ScD\mathbf{h} = 0 \\
&\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{h} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega = \Gamma.
\end{aligned} \tag{0.3}$$

where $\pi = p + \frac{\mu}{2}\mathbf{h}^2$, $-\Delta = DD = D^2$ and $M(\mathbf{u})$, $N(\mathbf{u}, \mathbf{h})$ are the operators defined by

$$M(\mathbf{u}) = [Sc(\mathbf{u}D)]\mathbf{u} - \overline{\mathbf{f}}/2; \qquad N(\mathbf{u}, \mathbf{h}) = [Sc(\mathbf{u}D)]\mathbf{h}.$$

1 Resultado

Theorem 1. This theorem has been proven in [7]: *If* $\overline{\mathbf{f}} \in \mathcal{W}_q^{-1}(\Omega)$ *satisfies*

$$(\rho/\eta)\|\overline{\mathbf{f}}\|_{\mathcal{W}_q^{-1}(\Omega)} \leq (16C_1^2C_2^2)^{-1}$$

with $C_1 = (\frac{\rho}{\eta})\|\widetilde{T}\|_{[\mathcal{L}_q \cap imQ, \mathcal{W}_q^1]}\|Q\|_{[\mathcal{L}_q, \mathcal{L}_q \cap imQ]}\|\widetilde{T}\|_{[\mathcal{W}_q^{-1}, \mathcal{L}_q]}$ *and* $\frac{n}{2} \leq q < \infty$, *then the system (0.3) has a unique solution* $(\mathbf{u}, p, \mathbf{h}, w) \in \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_q^1(\Omega) \cap \operatorname{Ker}\operatorname{div} \times \mathcal{L}_q(\Omega) \times \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}_q^1(\Omega) \cap \operatorname{Ker}\operatorname{div} \times \mathcal{L}_q(\Omega)$.

Referências

[1] Rojas-Medar M.A. and Boldrini J. L., Global strong solutions of equations of Magnetohydrodynamic type, *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, 38 (1997), 291-306.

[2] Cerejeiras P., Kähler U. Elliptic boundar value problems of fluids dynamics over unbounded domain, *Math. Meth. Appli. Sci.*, 23 (2000), 81-101.

[3] Gürlebeck K. and Kähler U., Ryan J. and Sprössig W., Clifford analysis over unbounded domains, *Advance in applied mathematics*, 19 216-239 (1997).

[4] Gürlebeck K. and Sprössig W., Quaternionic analysis and elliptic boundary values problems, Akademieverlag: Berlin, 1989.

[5] Kondrashuk I., Notte-Cuello E. and Rojas-Medar M. A., Stationary asymmetric fluids and Hodge operator. *Boletín de la Sociedad Española de Matemáticas Aplicadas*, Nro. 47 (2009), 99-106.

[6] Kondrashuk I., Notte-Cuello E. and Rojas-Medar M. A., Hodge operator and asymmetric fluid in unbounded domains, *Revista "Integración", Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander*, Vol. 27, No.1 (2009) 1-13.

[7] Kondrashuk I., Notte-Cuello E. and Rojas-Medar M. A., Magnetohydrodynamics's type equations over Clifford Algebras, to appear in Journal of Nonlinear Mathematical Physics

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

OBSERVAÇÕES SOBRE UMA PERTUBAÇÃO NÃO LINEAR DA EQUAÇÃO DE KIRCHHOFF

J. Límaco *

Neste trabalho estuda-se a existência e unicidade de suluções globais da equação de Kirchhoff com uma pertubação não linear. O modelo de Kirchhoff [1] foi proposto para pequenas vibrações de uma corda elástica com extremos fixos, o qual é dada por

$$u_{tt}(x,t) - \Big(a + b\int_0^L |u_x(x,t)|^2 dx\Big) u_{xx}(x,t) = 0 \ \text{ em } \ 0 < x < L, \ \ t > 0.$$

Posteriormente, o modelo acima foi generalizado, para $n \geq 1$, por Pohozaev [5] e Lions [2]. Ou seja, foi considerado o problema misto

$$\left| \begin{array}{l} u'' - \Big(a + b\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)\Delta u = 0 \ \text{ em } \ Q = \Omega \times (0,T), \\ u = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) \quad \text{com} \quad x \in \Omega, \end{array} \right. \tag{1.1}$$

onde Ω é um aberto, limitado com fronteira bem regular de $\mathbb{R}^n$. O problema (1.1) com uma pertubação não linear do tipo $\delta u' + u^2$ foi estudado em Medeiros [3] e foram estabelecidos resultados de existência e unicidade de soluções globais. Em Medeiros, Límaco e Menezes [4] há uma vasta bibliografia sobre trabalhos relacionados com o problema (1.1).

Neste trabalho, considera-se o problema (1.1) com uma pertubação não linear do tipo $\delta u' + |u|^\rho$ com $\rho \geq 1$ e $\delta > 0$. Ou seja,

$$\left| \begin{array}{l} u'' - \Big(a + b\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)\Delta u + \delta u' + |u|^\rho = 0 \ \text{ em } \ Q = \Omega \times (0,T), \\ u = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) \quad \text{com} \quad x \in \Omega, \end{array} \right. \tag{1.2}$$

o qual generaliza o trabalho de Medeiros [3].

Para alcançar os objetivos deste trabalho, denota-se por $|\cdot|$ e $\|\cdot\|$ as normas dos espaços de Lebesgue $L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$, respectivamente. Além disso, define-se:

$$\left| \begin{array}{l} H_0 = \|u_1\|^2 + \dfrac{6\delta^2}{32}\|u_0\|^2 + \dfrac{3a}{4}|\Delta u_0| + \dfrac{b}{2}\|u_0\||\Delta u_0|^2; \\ K(\|u_0\|, |u_1|) = \dfrac{1}{2}|u_1|^2 + \dfrac{a}{2}\|u_0\|^2 + \dfrac{b}{4}\|u_0\|^4 + \dfrac{C_0^{\rho+1}}{\rho+1}\|u_0\|^{\rho+1}, \\ \text{onde } C_0 \text{ é a constante de imersão de } H_0^1(\Omega) \text{ em } L^{\rho+1}(\Omega); \\ P(\lambda) = \dfrac{a}{2}\lambda^2 - \dfrac{C_0^{\rho+1}}{\rho+1}\lambda^{\rho+1}; \quad \lambda_0 = \Big(\dfrac{a}{C_0^{\rho+1}}\Big)^{1/(\rho-1)}; \quad P(\lambda_0) = \dfrac{a^{(\rho+1)/(\rho-1)}}{C_0^{2(\rho+1)/(\rho-1)}}\Big(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\rho+1}\Big). \end{array} \right.$$

Para estabelecer os resultados deste trabalho considera-se as seguntes hipóteses:
(H1) $a, b, \delta \in \mathbb{R}^+$; $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e $u_1 \in H_0^1(\Omega)$;

*GMA - IM - UFF, e-mail: jlimaco@vm.uff.br

(H2) $1 < \rho \leq \dfrac{n}{n-2}, \quad \|u_0\| < \lambda_0; \quad K(\|u_0\|, |u_1|) < P(\lambda_0); \quad \dfrac{\lambda_0^{2(\rho-1)}}{a} < \dfrac{\delta^2}{32};$

$$\Big(\frac{\rho^2 C_2^2}{2}\Big)\Big(\frac{32}{\delta^2}\Big)^{\rho-1} H_0^{\rho-1} + \frac{128b}{\delta^2} H_0^2 + C_1\Big(\frac{32}{\delta^2}\Big)^{(\rho-1)/2} H_0^{(\rho-1)/2} < \frac{a}{2},$$

onde C_1, C_2 são constantes de imersão definidas por $| v\| \leq C_1|\Delta v|$ para $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e $\|\cdot\|_{L^{2\rho}(\Omega)} \leq C_2\|\cdot\|$, respectivamente.

O principal resultado do trabalho é estabelecido no seguinte teorema.

Teorema 1.1. *Nas condições das hipóteses (H1) e (H2), existe uma única função $u : Q \to \mathbb{R}$ solução do problema misto (1.2) com regularidade:*

$$u \in L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right), \quad u' \in L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right) \quad e \quad u'' \in L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right),$$

e u satisfaz (1.2) no seguinte sentido:

$$\int_Q u''\phi\, dxdt + \int_Q \left(a + b\|u\|^2\right) \nabla u \nabla\phi\, dxdt + \int_Q \left(\delta u' + |u|^\rho\right)\phi\, dxdt = 0,$$

para todo $\phi \in L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right)$. Além disso,

$$u(0) = u_0 \quad u'(0) = u_1.$$

Referências

[1] G. R. Kirchhoff, *Vorlesungen über mechanik,* Tauber Leipzig, Germany (1883).

[2] J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires,* Dnod, Paris (1960).

[3] L. A. Medeiros, *On some nonlinear perturbation of Kirchhoff - Carrier operator,* Comp. And Appl. Math., Vol. 13, No. 3 (1994) pp.225-233.

[4] L. A. Medeiros, J. Límaco, S. B. Menezes, *Vibrations of elastic strings: Mathematical Aspects. Part one,* Journal of Computational Analysis and Applications, A (2002) pp. 91-127.

[5] S. L. Pohozaev, *On a class of quasilinear hyperbolic equations,* Math. USSR Sbornik, (1975) pp. 145-158.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

ISOMORFISMOS ENTRE ESPAÇOS DE APLICAÇÕES HOLOMORFAS EM ESPAÇOS DE BANACH

KUO PO LING [*†]

Resumo. Sejam E e F espaços de Banach complexos. Nosso objetivo neste trabalho é encontrar condições para que, se os espaços duais E' e F' são isomorfos, os espaços de aplicações holomorfas de tipo finito em E e F sejam isomorfos também. Estudamos também o problema correspondente para os espaços de aplicações holomorfas de um determinado tipo, como por exemplo, nuclear de tipo finito, compacto de tipo finito ou fracamente compacto de tipo finito.

1 Introdução

No recente artigo [7], usamos seqüências de Nicodemi encontrando condições para que, se os espaços duais E' e F' são isomorfos, os espaços de aplicações multilineares (resp. polinômios homogêneos) em E e F sejam isomorfos também. Estudamos também o problema correspondente para os espaços de aplicações multilineares (resp. polinômios homogêneos) de um determinado tipo, como por exemplo, de tipo finito, nuclear, compacto ou fracamente compacto.

Neste trabalho, usamos a mesma aproximação para encontrar condições para que, se os espaços duais E' e F' são isomorfos, os espaços de aplicações holomorfas de tipo finito em E e F sejam isomorfos também. Estudamos também o problema correspondente para os espaços de aplicações holomorfas de um determinado tipo, como por exemplo, nuclear de tipo finito, compacto de tipo finito ou fracamente compacto de tipo finito.

As letras D,E e F representam sempre espaços de Banach complexos. $\mathbb{N}$ denota o conjunto de todos os números inteiros estritamente positivos. Denotaremos por $L(^mE;G)$ o espaço de Banach de todas as aplicações $m-$ lineares contínuas de E^m em G sob a norma natural. Escreveremos $L(^mE)$ em vez de $L(^mE;\mathbb{C})$ e $L(E;G)$ em vez de $L(^1E;G)$ e denotaremos $L(E)$ por E', o dual topológico de E. Denotaremos por $\mathcal{P}(^mE;G)$ o espaço de Banach de todos os polinômios $m-$ homogêneos contínuos de E em G sob a norma natural. Denotaremos por $\mathcal{P}_N(^mE;G)$ o espaço de Banach de todos os polinômios m-homogêneos de E em G que são nucleares, sob a norma nuclear. Denotaremos por $\mathcal{P}_K(^mE;G)$ (resp. $\mathcal{P}_{WK}(^mE;G)$) o espaço de todos os polinômios m-homogêneos compactos (resp. fracamente compactos) de E em G. Seja $U \subset E$ um conjunto aberto não vazio. Uma aplicação $f : U \to G$ é dita holomorfa se para cada $a \in U$ existe uma série de potência $\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-a)$, com $P_m \in \mathcal{P}(^mE;G)$ para cada $m \in \mathbb{N}$, que converge uniformemente para $f(x)$ em uma vizinhança de a. Para cada m, P_m, chamado m- ésimo polinômio $m-$ homogêneo na série de Taylor de$f$ em a, é denotado por $P^m f(a)$. O espaço de todas as aplicações holomorfas de U em G é denotado por $\mathcal{H}(U;G)$. Para $\Theta = N, K$ ou WK, seja

$$\mathcal{H}_\Theta(U;G) = \{f \in \mathcal{H}(U;G) : P^m f(a) \in \mathcal{P}_\Theta(^mE;G) \text{ para todo } m \in \mathbb{N}, a \in U\},$$

$$\mathcal{H}_b(E;G) = \{f \in \mathcal{H}(E;G) : \text{ f é limitada em conjuntos limitados }\},$$

e

$$\mathcal{H}_{\Theta b}(E;G) = \mathcal{H}_\Theta(E;G) \cap \mathcal{H}_b(E;G).$$

Nós consultamos [5] e [9] para as propriedades de aplicações multilineares, polinômios homogêneos e aplicações holomorfas.

*Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil, e-mail : kuo@famat.ufu.br
†A autora agradece o apoio financeiro à FAPEMIG e à PROPP-UFU.

2 Resultados Principais

Teorema 2.1. *Se E e F são simetricamente Arens - regular, e E' e F' são isomorfos, então $\mathcal{H}_b(^mE)$ e $\mathcal{H}_b(^mF)$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Teorema 2.2. *Se E e F são simetricamente Arens - regular, e E' e F' são isomorfos, então $\mathcal{H}_b(^mE; G')$ e $\mathcal{H}_b(^mF; G')$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Teorema 2.3. *Se E' e F' são isomorfos, então $\mathcal{H}_{Nb}(^mE)$ e $\mathcal{H}_{Nb}(^mF)$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Teorema 2.4. *Se E' e F' são isomorfos, então $\mathcal{H}_{Nb}(^mE; G')$ e $\mathcal{H}_{Nb}(^mF; G')$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Teorema 2.5. *Se E e F são simetricamente Arens - regular, e E' e F' são isomorfos, então $\mathcal{H}_{\Theta b}(^mE; G')$ e $\mathcal{H}_{\Theta b}(^mF; G')$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$, onde $\Theta = K$ ou WK.*

Referências

[1] ARON, R. BERNER, P. - *A Hahn - Banach extension theorem for analytic mappings,* Bull. Soc. Math. France 106 (1978), 3-24.

[2] CABELLO SÁNCHEZ, F. CASTILLO, J. GARCÍA, r. - *Polynomials on dual-isomorphic spaces,* Ark. Mat. 38(2000), 37-44.

[3] CARANDO, D. LASSALLE, S. - *E' and its relation with vector - valued functions on E*, Ark. Mat. 42(2004), 283-300.

[4] DÍAZ, J. C. DINEEN, S. - *Polynomials on stable spaces*,Ark. Mat. 36(1998), 87-96.

[5] DINEEN, S. - *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Springer-Verlag, London, 1999.

[6] GALINDO. P. GARCÍA, D. MAESTRE, M. MUJICA, J. *Extension of multilinear mappings on Banach spaces*, Studia Math. 108 (1994), 55-76.

[7] KUO, P. L. *Isomorphisms between spaces of multilinear mappings or homogeneous polynomials*, To appear in Note di Matematica 29, n.2

[8] LASSALLE, S. ZALDUENDO, I. *To what extent does the dual Banach space E' determine the polynomials over E ?*, Ark. Mat. 38 (2000), 343-354.

[9] MUJICA, J. *Complex Analysis in Banach Spaces*, North-Holland, Amsterdam, 1986, reprinted by Dover, Mineola, New York, 2010.

[10] NICODEMI, O. *Homomorphisms of algebras of germs of holomorphic functions, in: Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory*, S. Machado (ed.), Lecture Notes in Math. 843, Springer, Berlin, 1981, pp. 534-546.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

LARGE DEFORMATIONS IN VISCOELASTICITY − ANALYSIS OF A MATHEMATICAL MODEL

I-SHIH LIU, ROLCI CIPOLATTI, MAURO A. RINCON *

The behavior of large deformations of materials are characterized by some nonlinear constitutive relations, which leads to a system of nonlinear partial differential equations. To solve boundary value problems for these nonlinear systems, we propose a method based on a successive updated referential formulation of linear approximations.

For the applications we have in mind, we shall consider a nearly incompressible viscous material with the constitutive equation $T = -pI + \mathcal{T}(F, \dot{F})$, where

$$\mathcal{T}(F, \dot{F}) = s_1 B + s_2 B^{-1} + \lambda \operatorname{tr}(D) I + 2\mu D,$$

$B = FF^T$ is the left Cauchy-Green tensor and D is the rate strain tensor, i.e, $D = \frac{1}{2}(L + L^T)$, $L = \dot{F}F^{-1}$. The parameters s_1, s_2, λ and μ are assumed to be constant. Since the elastic component of this constitutive equation is the well known Mooney-Rivlin model, we will refer this material as a *Mooney-Rivlin type isotropic viscoelastic solid*.

An appropriate linearization of the Piola-Kirchhoff tensor $T_\kappa = \det(F) T F^{-T}$ at time τ with respect to the state at the present time $t < \tau$ leads to following expression

$$T_\kappa(\tau) = T_0 + \operatorname{tr}(H)(T_0 + \beta I) - T_0 H^T + L[H] + M[\dot{H}],$$

where F_0 is the deformation gradient at time t, $T_0 = \mathcal{T}(F_0, 0)$ is the elastic Cauchy stress at the present time t, $H = \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}(\tau, x)$ is the displacement vector and $\beta := \rho \frac{dp}{d\rho}$ is a material parameter. The symmetric linear operators $L[H]$ and $M[\dot{H}]$ are defined by

$$\begin{aligned} L[H] &= s_1(HB_0 + B_0H^T) - s_2(B_0^{-1}H + H^T B_0^{-1}), \quad B_0 = F_0F_0^T, \\ M[\dot{H}] &= \lambda \operatorname{tr}(\dot{H}) I + \mu \dot{H} + \mu \dot{H}^T. \end{aligned}$$

We consider the following boundary value problem

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} T_\kappa(\tau) &= \rho(t) \boldsymbol{g}(\tau) \text{ in } \Omega, \\ T_\kappa(\tau) \boldsymbol{n}_\kappa &= \boldsymbol{f}(\tau) \text{ on } \Gamma_1, \\ \boldsymbol{u}(\tau) \cdot \boldsymbol{n}_\kappa &= 0 \text{ on } \Gamma_2, \\ T_\kappa(\tau)\boldsymbol{n}_\kappa \times \boldsymbol{n}_\kappa &= 0 \text{ on } \Gamma_2, \\ \boldsymbol{u}(0, x) &= 0 \text{ in } \Omega, \end{aligned}$$

where Ω is a domain of $\mathbb{R}^2$ corresponding to the present configuration of the material viscoelastic body, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$ and $\boldsymbol{n}_\kappa$ is the unitary exterior normal vector on $\partial\Omega$. This boundary value problem can be formulated as the following evolution variational problem: find $\boldsymbol{u} : [0, T] \to V$ such that

$$\mathcal{M}(\dot{\boldsymbol{u}}(\tau), \boldsymbol{w}) + \mathcal{L}(\boldsymbol{u}(\tau), \boldsymbol{w}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{w}), \quad \forall \boldsymbol{w} \in V, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = 0, \tag{2}$$

*Instituto de Matemática, UFRJ, RJ, Brasil, liu@im.ufrj.br, cipolatti@im.ufrj.br, rincon@dcc.ufrj.br

where V is the Hilbert space of admissible displacement vector, namely $V = \{\boldsymbol{v} \in H^1(\Omega)^2\,;\, \boldsymbol{v} \cdot n_\kappa = 0 \text{ on } \Gamma_2\}$.

The bilinear forms $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}$ and the linear form $\mathcal{N}$ are defined as

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := \int_\Omega M[\nabla \boldsymbol{v}] \cdot \nabla \boldsymbol{w}\, d\boldsymbol{x},$$

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := \int_\Omega \Big(\operatorname{tr}(\nabla \boldsymbol{v})(T_0 + \beta I) - T_0(\nabla \boldsymbol{v})^T + L[\nabla \boldsymbol{v}]\Big) \cdot \nabla \boldsymbol{w}\, d\boldsymbol{x}.$$

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{w}) := \int_\Omega \rho(t)\boldsymbol{g}(\tau) \cdot \boldsymbol{w}\, dx + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{f}(\tau) \cdot \boldsymbol{w}\, dS - \int_\Omega T_0 \cdot \nabla \boldsymbol{w}\, d\boldsymbol{x}.$$

We assume that Ω satisfies the following geometric property (**GH**): *There does not exist a constant vector $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2$ such that $\boldsymbol{n}_k(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{c} = 0$ for all $\boldsymbol{x} \in \Gamma_2$.* Under this assumption, $||\boldsymbol{v}||_V^2 := ||\nabla v_1||_{L^2}^2 + ||\nabla v_2||_{L^2}^2$ is an equivalent norm for V.

Our main results are the following:

Theorem 1. *We assume that Ω satisfies (GH), $\beta > 0$ and $s_2 < 0 < s_1$. If*

$$\sup_{\boldsymbol{x}} \big|p_0(\boldsymbol{x}) - s_2 \operatorname{tr} B_0^{-1}(\boldsymbol{x})\big| < \sqrt{-s_1 s_2},$$

the bilinear form $\mathcal{L}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ is coercive in V for β large enough. In particular, the variational problem

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{w}), \quad \forall \boldsymbol{w} \in V$$

has a unique solution $\overline{\boldsymbol{u}} \in V$.

Theorem 2. *We assume the hypothesis of Theorem 0.1. If $\mu > 0$ and $\lambda + \mu > 0$, then for any $T > 0$, the variational problem (1)-(2) has a unique solution $\boldsymbol{u} \in C\big([0, T]; V\big)$. Moreover, there exist positive constants C_1 and C_2 such that*

$$||\boldsymbol{u}(\tau) - \overline{\boldsymbol{u}}||_V^2 \leq C_1 \exp(-C_2 \tau).$$

References

[1] LIU, I-S., CIPOLATTI, R. AND RINCON, M.A. - *Incremental linear approximation for finite elasticity*, Proceedings of International Conference on Numerical and Applied Mathematics 2006 (ICNAAM), Wiley-VCH Verlag, (2006), pp. 199-202.

[2] LIU, I-S., CIPOLATTI, R. AND RINCON, M.A. - *Successive linear approximation for finite elasticity*, to appear in Comp. Appl. Mathematics.

[3] LIU, I-S., CIPOLATTI, R., RINCON, M.A., PALERMO L.A - *Numerical simulation of salt migration - Large deformation in viscoelastic solid bodies*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (CMAME), submited (2010).

[4] CIARLET, P.G. - *Mathematical Elasticity, Vol. 1*, North-Holland, Amsterdam, 1988.

[5] LIU, I-S. - *Continuum Mechanicas*, Springer, Berlin Heilderberg, 2002.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

NONLOCAL SOLUTION FOR A UNILATERAL PROBLEM INVOLVING CARRIER OPERATOR

IVO F. LOPEZ [*], M. D. G. DA SILVA [†] & A. C. BIAZUTTI [‡]

Consider the open hypercube $\Omega = (0,1)^n$ of $\mathbb{R}^n$ with boundary denoted by Γ. By $Q = \Omega \times (0,T)$, for $T > 0$ a real number, we denote a cylinder of $\mathbb{R}^{n+1}$ with lateral boundary $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$.

In this work we obtain nonlocal solution for a unilateral problem related to the Carrier operator

$$Lu(x,t) = u''(x,t) - \left(1 + \int_\Omega u(x,t)^2 dx\right) \Delta u(x,t) \text{ on } \Omega,$$

by making use of the penalty method, cf. Lions[5], considering the closed convex set

$$K = \left\{ v \in H_0^1(\Omega); |\nabla v| \leqslant 1 \text{ a.e. in } \Omega \right\}.$$

In studies involving mixed problems for the Carrier equation, it has been proved the existence of nonlocal or global solutions only if some dissipative term is added, as in [2] and [4]. For a survey on the Carrier and Kirchhoff equations, see Medeiros et al. [7]

Medeiros & Larkin[6] have obtained a similar result for a unilateral problem using Kirchhoff-Carrier operator, considering the two-dimensional case when Ω is a rectangle. Frota[1] has extended the result for the n-dimensional case when Ω is a hyperrectangle. Frota & Larkin[3] have also obtained nonlocal solution for a unilateral problem related to a Kirchhoff type operator on a general open set Ω of $\mathbb{R}^n$, using a different closed convex set and more regular initial data.

1 Mathematical Result

The main result is contained in the following theorem:

Theorem 1.1. *Suppose $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in K$ and $f \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ with $f' \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$. Then, there exists one function $u : Q \to \mathbb{R}$, such that*

$$u \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega));\ u' \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap L^4(0,T; W_0^{1,4}(\Omega));\ u'' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$$

$$u'(t) \in K \quad a.e. \quad in \quad (0,T)$$

$$\int_0^T \int_\Omega Lu(x,t)\,(z(x,t) - u'(x,t))\,dxdt \geqslant \int_0^T \int_\Omega f(x,t)\,(z(x,t) - u'(x,t))\,dxdt,$$

for all $z \in L^4(0,T; W_0^{1,4}(\Omega))$, with $z(t) \in K$ a.e. in $(0,T)$, $u(y,0) = u_0(y)$ and $u'(y,0) = u_1(y)$ in Ω.

The proof for theorem 1.1 follows from the next theorem and the penalty method. We make use of the penalty operator β related to the closed convex K, cf. Lions [5], defined bellow.

For each $u \in W_0^{1,4}(\Omega)$, consider the continuous linear form $\beta(u)$ such that, for all $v \in W_0^{1,4}(\Omega)$,

$$< \beta(u), v >= \int_\Omega (1 - |\nabla u|^2)^- \nabla u . \nabla v dx.$$

The penalty operator $\beta : W_0^{1,4}(\Omega) \to W^{-1,4/3}(\Omega)$ is monotone, hemicontinuous, takes bounded sets of $W_0^{1,4}(\Omega)$ into bounded sets of $W^{-1,4/3}(\Omega)$ and its kernel is K.

[*] Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brasil, ivolopez@ufrj.br
[†] Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brasil, darci@im.ufrj.br
[‡] Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brasil, biazutti@im.ufrj.br

Theorem 1.2. *Suppose $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in K$ and $f \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ with $f' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Then there exists one function $u_\epsilon : Q \to \mathbb{R}$ such that*

$$u_\epsilon \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega));\ u'_\epsilon \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^4(0,T;W_0^{1,4}(\Omega));\ u''_\epsilon \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$
$$\int_0^T \int_\Omega Lu_\epsilon(x,t)z(x,t)dxdt + \frac{1}{\epsilon}\int_0^T < \beta(u'_\epsilon(t)), z(t) > dt = \int_0^T \int_\Omega f(x,t)z(x,t)dxdt$$

for all $z \in L^4(0,T;W_0^{1,4}(\Omega))$, with $u_\epsilon(y,0) = u_0(y)$ and $u'_\epsilon(y,0) = u_1(y)$ in Ω, for all $\epsilon > 0$ sufficiently small.

Proof. By Faedo-Galerkin's method. □

Acknowledgements. We thank Professor Luis Adauto Medeiros for having drawn our attention to this question and for his assistance.

References

[1] FROTA, C. L. - *Global Solutions for a Nonlinear Unilateral Problem*, An. Acad. Bras. de Ciências, Vol. 66, pp.1-11 (1994).

[2] FROTA, C. L. , COUSIN, A. T. AND LARKIN, N. A. - *Existence of Global Solutions and Energy Decay for the Carrier Equation with Dissipative Terrm*, Differential and Integral Equations, Vol. 12, pp. 453-459 (1999).

[3] FROTA, C. L. AND LARKIN N.A. - *On Global Existence and Uniqueness for the Unilateral Problem Associated to th Degenerated Kirchhoff Equation*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Vol. 28, pp. 443-452 (1997).

[4] LIMACO, J. AND CLARK, H.R. - *Remarks on Carrier Evolution Equations*, Matemaática Contemporânea, Vol. 32, pp.169-191 (2007).

[5] LIONS, J. L. - *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéares.*, Dunod-Gauthier Villars, Paris, First edition (1969).

[6] MEDEIROS,L.A. AND LARKIN N.A. - *Nonlocal Unilateral Problemas for a Nonlinear Hyperbolic Equation of the Theory of Elasticity*, Matemática Comtemporânea, Vol. 3, pp 109-126 (1992).

[7] MEDEIROS,L.A., LIMACO J. AND MENENZES S.B. - *Vibrations os Elastic Strings: Mathematical Aspects - Parts One and Two*, Journal of Computational Analysis and Applications, vol. 4 pp. 91-127 & pp. 211-263 (2002).

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edition N$^{\underline{o}}$ 4 November 2010

Nonlinear Boundary Dissipation for a Coupled System of Kirchhoff Equations

Aldo T. Lourêdo * & M.Milla Miranda †

Introduction

The small transverse vibrations of an elastic stretched string of length L, when it supposes that the tension, in each point of the string, has only vertical component, can be studied by the mathematical model:

$$\left|\begin{array}{l} u_x(x,t)+\dfrac{1}{2}\left(v_x^2(x,t)+w_x^2(x,t)\right)=\dfrac{1}{2L}\displaystyle\int_0^L\left[v_x^2(x,t)+w_x^2(x,t)\right]dx,\\ 0<x<L,\ t>0,\\ v_{tt}(x,t)-\left(m_0+m_1\displaystyle\int_0^L[v_x^2(x,t)+w_x^2(x,t)]dx\right)v_{xx}(x,t)=0,\\ 0<x<L,\ t>0,\\ w_{tt}(x,t)-\left(m_0+m_1\displaystyle\int_0^L[v_x^2(x,t)+w_x^2(x,t)]dx\right)w_{xx}(x,t)=0,\\ 0<x<L,\ t>0,\end{array}\right. \tag{0.1}$$

where $\{u,v,w\}$ denotes the displacement of the points of the string. This system was introduced by A.H. Nayfeh and D.T. Mook [11]. The second equation of (0.1) with $w(x,l)\equiv 0$ was studied by G.Kirchhoff [1].

Let Ω be an open bounded set of $\mathbb{R}^n$ with boundary Γ of class C^2. Assume that Γ is constituted by two non empty closed disjoint parts Γ_0 and Γ_1. Denote by $\nu(x)$ the unit outward normal vector at $x^0\in\Gamma_1$. Represent by V the Hilbert space defined by $V=\{v\in H^1(\Omega); v=0 \text{ on } \Gamma_0\}$ equipped with de Dirichlet scalar product $((u,v))$ and norm $\|u\|$.

1 Main Results

Introduce the following hypotheses $(i=1,2)$:
(H1) $M_i\in W^{1,\infty}_{loc}(]0,\infty[\times]0,\infty[\times]0,\infty[)$ with $M_i(t,\lambda,\xi)\geq m_i>0,$ *with* $(m_i$ *constant*$),\ \forall\{t,\lambda,\xi\}\in([0,\infty[)^3$,
(H2) $h_i(s)$ a lipschitzian function verifying $h_i(0)=0$ and $[h_i(s)-h_i(r)](s-r)\geq d_i(s-r)^2$, $\forall s,r\in\mathbb{R}$ (d_i positive constant),
(H3) $\delta\in W^{1,\infty}(\Gamma_1)$, $\delta(x)\geq\delta_0>0$, $\forall x\in\Gamma_1$ (δ_0 constant).
Theorem 1.1. *Assume that $M_i,\ h_i$ (i=1,2) and δ satisfy hypotheses $(H1)-(H3)$. Consider $\{u^0,u^1\}\in(V\cap H^2(\Omega))^2$ and $\{v^0,v^1\}\in V^2$ satisfying*

$$\frac{\partial u^0}{\partial\nu}+\delta(x)h_1(u^1)=0,\ \frac{\partial v^0}{\partial\nu}+\delta(x)h_2(v^1)=0\ \ on\ \ \Gamma_1.$$

Then there exist a real number $T_0>0$ and an unique pair of functions $\{u,v\}$ in the class

$$\begin{array}{l}\{u,v\}\in(L^\infty(0,T_0;V\cap H^2(\Omega)))^2,\\ \{u',v'\}\in(L^\infty(0,T_0;V)^2,\\ \{u'',v''\}\in(L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega)))^2\end{array}$$

*Instituição, DM-UEPB, PB, Brasil, aldotl@uepb.edu.br,
†Instituição (Visiting Professor), DM-UEPB, PB, Brasil, milla@im.ufrj.br

satisfying the equations

$$\left| \begin{array}{l} u'' - M_1(t, \|u\|^2, \|v\|^2)\triangle u = 0 \ in \ L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)), \\ v'' - M_2(t, \|v\|^2, \|u\|^2)\triangle v = 0 \ in \ L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)) \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \delta(x) h_1(u') = 0 \ in \ L^2(0, T_0; L^2(\Gamma_1)), \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} + \delta(x) h_2(v') = 0 \ in \ L^2(0, T_0; L^2(\Gamma_1)), \end{array} \right.$$

and the initial conditions $u(0) = u^0, \ u'(0) = u^1,$ *and* $v(0) = v^0, \ v'(0) = v^1.$

Proof 1.1. *Theorem 1.1 follows by applying the Faedo-Galerkin method with a special basis of* $V \cap H^2(\Omega)$ *and Fixed Point Theorem of Banach.* ■

Remark 1.1. *Under the hypotheses*

$$M_i(t, \lambda, \xi) = M(t, \lambda + \xi) \geq m_0 > 0 \ (i = 1, 2),$$

where $M \in C^1([0, \infty)^2)$, *and* $\{u^0, v^0\}$, $\{u^1, v^1\}$ *having small norms, we obtain global solutions and the exponential decay of the energy of* (0.1).

References

[1] Kirchhoff, G. Vorlesungen über mechanik, Tauber Leipzig (1983)

[2] Komornik,V. Exact controllability and stabilization. John Wiley & Sons, (1994).

[3] Komornik,V and E. Zuazua. A direct method for boundary stabilization of the wave equation, J. Math. Pure Appl. 69(1990) 33-54.

[4] Lasiecka, I and J. Ong. Global solvability and uniform decays of solutions to quasilinear equation with nonlinear boundary dissipation, Com. Partial Differential Equations 24 (1999) 2069-2107.

[5] Lasiecka, I and R. Triggiane., Uniform stabilization of the wave equation with Dirichlet or Neumann feedback control without geometric condition, Applied Math. Optimiz. 25(1992), 189-224.

[6] Lions, J.L., Quelques Méthodes de Résolutions des Problèms aux Limites Non-Linéaires, Dunod, Paris. 1969.

[7] Lions, J.L. and Magenes, E., Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications, Vol.1, Dunod, Paris, 1968.

[8] Marcelo M. C and et al., Global Existence and Uniform Decay Rates for the Kirchhoff-Carrier Equation with Nonlinear Dissipation.,Advances in Differential Equations, vol6, Num 6, June 2001, 701-730.

[9] Milla Miranda, M and Medeiros, L.A. On a boundary value problem for wave equation:Existence uniqueness-asymptotic behavior. Revista de Matemáticas Aplicadas, Univerdad de Chile, 1996.

[10] Milla Miranda, M and L.P.San Gil Jutuca. Existence and Boundary Stabilization of Solutions for the Kirchhoff Equation., Commun. in Partial Differential Equations, 24(9 & 10), 1759-1880(1999).

[11] Nayfeh, A.H and Mook, D.T. Nonlinear Oscillations, John Wiley & Sens, New York, 1979, pg. 487-490.

[12] Ono, K. A stretched string equation with a boundary dissipation. Kyushu Tournal of Mathematics vol. 48, no. 2, 1994, pp. 265-281.

[13] Tucsnak,M. Boundary stabilization for the stretched string equation. Differential integral equations 6 (1993), no. 4, 925-935.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edition N$^{\underline{o}}$ 4 November 2010

On a Kirchhoff-Carrier equation in Banach spaces

Aldo T. Lourêdo[*], Alexandro M. Marinho[†], Marcondes R.Clark[‡]

Introduction

In this work, we investigate the existence of local solutions for abstract nonlinear evolution equation

$$u'' + M(\|u(t)\|_W^2)Au + F(u) + Au' = 0,$$

where A is an positive self adjoint operator defined on a real separable Hilbert space V, F is an operator defined on a real separable Hilbert space H and M is a smooth real function such that $M(\lambda) \geq m_0 > 0$. Further, W is an real Banach's space with dual W' strictly convex. Moreover, we do not need to assume that V is compactly immersed into W.

1 Basics Results and Main Result

Let V and H be Hilbert spaces with inner product and norm represented, respectively, by $((\cdot,\cdot))$, $||\cdot||$ and $(\cdot)$, $|\cdot|$. We consider $A : V = D(A) \subset H \to H$, where A is an unbounded positive self-adjoint linear operator defined on H.
Let $F : V \to H$ be a continuous application satisfying:

$$(H_1)\left|\begin{array}{l}\text{For all constant } c>0, \text{ there exists a constant } \alpha_c>0 \text{ such that}\\ |F(u)-F(v)| \leq \alpha_c\|u-v\| \text{ if } u,v\in V \text{ and } \|u\|^2+\|v\|^2\leq c.\end{array}\right.$$

$$(H_2)\left|\begin{array}{l}\text{There exists constants } k_0>0 \text{ and } \mu>0 \text{ such that}\\ \displaystyle\int_0^t (F(u(s)),u'(s))ds \geq -k_0\|u(0)\|^{\mu}.\end{array}\right.$$

$$(H_3)\left|\ \text{For } (u,v)\in D(A)\times V \text{ we have } F(u(.))\in V.\right.$$

$$(H_4)\left|\begin{array}{l}\text{For all constant } c>0 \text{ there exists a constant } \beta_c>0 \text{ such that}\\ |F(u(\cdot),v)| \leq \beta_c|Au|\|v\| \text{ if } \|v\|\leq c.\end{array}\right.$$

$$(H_5)\left|\begin{array}{l}\text{For all constant } c>0 \text{ there exists a constant } \gamma_c>0 \text{ such that}\\ |F(u(.))| \leq \gamma_c \text{ if } \|Au\|\leq c.\end{array}\right.$$

Further, let W be an Banach's space with dual W' strictly convex and V no compactly immersed into W. We consider also the Hilbert's space $D(A^\sigma)$ equipped with inner product

$$(u,v)_{D(A^\sigma)} = (A^\sigma u, A^\sigma v), \text{with } \sigma \geq 0.$$

In H we study the existence of a local solution for the problem

$$\left|\begin{array}{l} u''+M(\|u(t)\|_W^2)Au+F(u)+Au'=0\\ u(0)=u^0; \quad u'(0)=u_1,\end{array}\right. \tag{1.1}$$

where M is a function in $W^1_{loc}((0,\infty))$ with $M(\lambda)\geq m_0>0$. The local solution of the problem (1.1) is determined by the follows result:

[*]Instituição, DM-UEPB, PB, Brasil, aldotl@uepb.edu.br,
[†]Instituição DM-UFPI-CMRV, Brasil, nagasaki@ig.br
[‡]Instituição DM-UFPI, PI, Brasil, mclark@ufpi.br

Theorem 1.1. *Under the hypothesis on M, W and assuming $(H_1)-(H_5)$, if $u^0 \in D(A^{\frac{3}{2}})$, $u^1 \in D(A)$ then there exists a unique function $u : [0,\infty) \to H$ in the class*

$$u \in L^\infty_{loc}(0,\infty; D(A^{\frac{3}{2}}));$$
$$u' \in L^\infty_{loc}(0,\infty; D(A^{\frac{1}{2}}));$$
$$u'' \in L^\infty_{loc}(0,\infty; H),$$

and satisfies

$$\left| \begin{array}{l} u'' + M(\|u\|^2_W)Au + F(u) + Au' = 0 \quad in \quad L^\infty_{loc}(0,\infty; H) \\ u(0) = u^0, \;\; u'(0) = u^1. \end{array} \right.$$

Proof 1.1. *Theorem 1.1 follows by applying the Faedo-Galerkin method with a special basis of H and the method of the successive approaches.* ∎

References

[1] Aldo, T. Louredo, Milla. M. Miranda and Lima, O. A., On a Coupled System in Banach Space. Proceeding do III ENAMA, UEM, Novembro 2009.

[2] Aldo, T. Louredo, A.O. Marinho and M.R. Clark, Local Solution for a Coupled System in Banach Space, to appear.

[3] Araruna, F. D., Clark, M.R. and Lima O.A., On Internal Elastic Membrane with Strong Damping, to appear.

[4] Arosio, A. and Garavaldi, S., On the mildly degenerate Kirchhoff string. Math. Appl. Science 14(1991), 177-195.

[5] Ebihara, Y., Medeiros, L.A e Milla Miranda, M., Local solutions for a nonlinear degerate hyperbolic equations, Nonlinear Anal. TMA 10(1986), 27-40.

[6] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, Vol. III, Springer-Verlag, New York, 1985.

[7] Izaguirre, R., Fuentes, R. and Milla Miranda, M., Global and decay of solutions of a damped Kirchhoff-Carrier equation in Banach spaces,*Matemática Contemporânea*, 32(2007),147-168.

[8] Izaguirre, R., Fuentes, R. and Milla Miranda, M., Existence of local solutions of the Kirchhoff-Carrier equation in Banach spaces, *Nonlinear Analysis* 68 (2008), 3565-3580.

[9] L. A. Medeiros, J. Limaco and S. B. Menezes, Mathematical vibrations of elastic string: mathematical aspects, part one, J. Comp. Analysis and applications, 4(2002), 91-127.

[10] Lima, O. A. and Oliveira, M. L., Exponential decay of the solutions of the beams system. Nonlinear Analysis 42 (2000), 1271-1291.

[11] Pohozaev, S. I., On a class of quasilinear hyperbolic equations, Math. Sbornik 96(1975), 97-127.

[12] R. R. Carvalho and M. Milla Miranda, Existence and decay of solutions of a damped Kirchhoff-Carrier Equation in Banach Spaces, Nonlinear Analysis, 2010(05)(038), 1-16.

[13] Souza, S. S. and Milla Miranda, M., Existence and decay of solutions of a damped Kirchhoff equation, *Int. J. of Pure and Appl. Math.,* 32 (2006), 483-508.

[14] V. F. Silva, Equação da Viga em Espaços de Banach: Existência, Unicidade e Comportamento Assintótico, Tese de Doutorado, IM-UFRJ, maio de 2010.

[15] Vasconcelos, C. F. and Teixeira, L.M., Strong Solution and Exponential Decay for a Nonlinear Hyperbolic Equation, Applicable Analysis, Vol. 51, pp. 155-173, 1993.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edition N$^{\underline{0}}$ 4 November 2010

System of Elasticity with Nonlinear Boundary Conditions

Aldo T. Lourêdo * & M.Milla Miranda † & Osmundo A. Lima ‡

Introduction

Let Ω be an open bounded of $\mathbb{R}^n$ with boundary of class C^2 and $T > 0$ be a real number. Assume that Γ is constituted by two nonempty disjoint closed sets Γ_0 and Γ_1. Denote by $\nu(x)$ the outward unit normal vector at $x \in \Gamma_1$. Consider the mixed problem:

$$(*)\quad \left|\begin{array}{l} u''(x,t) - \mu b(t)\triangle u(x,t) - (\lambda+\mu)b(t)\mathrm{div}u(x,t) = 0 \ in\ \Omega\times]0,T[, \\ u = 0 \ in\ \Gamma_0\times]0,T[, \\ \mu b(t)\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) + (\lambda+\mu)b(t)\nu(x)\mathrm{div}u(x,t) + \delta(x)h(u'(x,t)) = 0 \ in\ \Gamma_1\times]0,T[, \\ u(x,0) = u^0(x),\quad u'(x,0) = u^1(x)\quad in\ \Omega, \end{array}\right.$$

where $u = (u_1, \ldots, u_n)$ is a vectorial function; $b(t)$ a real function; $\lambda \geq 0$ and $\mu > 0$, the Lamé coefficients; $h(x)$, a Lischitz continuous function defined on $\mathbb{R}^n$; and $\delta(x)$ a function defined on Γ_1.

1 Notations and Results

Let us represented by $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ the Hilbert space

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ on } \Gamma_0\},$$

equipped with the Derichlet scalar product $((u,v))_{\Gamma_0}$ and norm $\|u\|_{\Gamma_0}$. Introduce the Hilbert spaces

$$H = (L^2(\Omega))^n,\quad (u,v)_H = \sum_{i=1}^n (u_i, v_i),\ \forall u, v \in H$$

and

$$V = (H^1_{\Gamma_0}(\Omega))^n,\quad ((u,v))_V = \sum_{i=1}^n ((u_i,v_i))_{H^1_{\Gamma_0}(\Omega)},\ \forall u, v \in V.$$

Consider the following hypotheses
(**H1**) $b \in W^{1,\infty}_{loc}(0,+\infty),\ b(t) \geq b_0 > 0,\ \forall t \in [0,\infty)$
(**H2**) $W^{1,\infty}(\Gamma_1),\quad \delta(x) \geq \delta_0 > 0,\ \forall x \in \Gamma_1;$
(**H3**) $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ where $h(x_1,\ldots,x_n) = (h_1(x_1), h_2(x_2)\ldots, h_n(x_n))$ with $h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschiz continuous functions, $h_i(0) = 0$ and $[h_i(s) - h_i(r)](s-r) \geq d_i(s-r)^2,\ \forall s, r \in \mathbb{R},\ d_i > 0$ constant, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Theorem 1.1. *Assume that hypotheses $(H1)-(H3)$ are satisfied. Consider $u^0 \in V \cap (H^2(\Omega))^n$ and $u^1 \in V$ verifying $\mu b(0)\frac{\partial u^0}{\partial \nu} + (\lambda+\mu)b(0)\nu div u^0 + \delta(x)h(u^1) = 0$ on Γ_1. Then there exists a unique function u in the class*

$$u \in L^\infty(0,T; V \cap (H^2(\Omega))^n),\ u' \in L^\infty(0,T;V),\ u'' \in L^\infty(0,T;H),$$

*Instituição, DM-UEPB, PB, Brasil, aldotl@uepb.edu.br,
†Instituição (Visiting Professor), DM-UEPB, PB, Brasil, milla@im.ufrj.br
‡Instituição DM-UEPB, PB, Brasil, osmundomatematica@yahoo.br

such that u satisfies

$$u'' - \mu b \triangle u - (\lambda+\mu) b \nabla divu = 0 \ in \ L^\infty(0,T;H);$$
$$\mu b \frac{\partial u}{\partial \nu} + (\lambda+\mu) b \nu divu + \delta(x) h(u') = 0 \ in \ L^\infty(0,T;(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))^n);$$
$$u(0) = u^0, \ u'(0) = u^1 \ in \ \Omega.$$

Proof 1.1. *The above theorem follows by applying the Galerkin method with a special basis of* $V \cap (H^2(\Omega))^n$. *This work is a nonlinear version of the paper of C.S.Quiroga de Caldas [2].*

Remark 1.1. *The weak solutions of* $(*)$ *with h continuous and the exponential decay of its energy will be published later on.*

References

[1] Aldo T. Louredo and M.Milla Miranda., Nonlinear Boundary Dissipation for a Coupled System of Klein-Gordon, Equations Electronic Journal Differential Equations, Vol. (2010), No. 120, pp. 1-19.

[2] C.S. Quiroga de Caldas., On a elasticity system with coefficients depending on the time and mixed boundary conditions, Panamerican Mathematical Journal 7(4)(1997), 91-109.

[3] Komornik, V., Exact Controllability and Stabilization,The Multiplier Method, John Wiley & Sons and Masson, 1994.

[4] Komornik, V and Rao, B., Boundary stabilization of compactly coupled wave equations, *Asymptotic Anal.* 14(1997),339-359.

[5] Komornik, V and Zuazua, E., A direct method for the boundary stabilization of the wave equation, *J. Math. Pure Appl.* 69(1990),33-54.

[6] Lasiecka, I and Tataru. D, Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary damping, *Diff. Integral Equations* 6(1993),507-533.

[7] Lions, J.L., Problèms aux Limites dans les Équations aux Derivées Partielles, Les Presses de l'Université de Montreal, Montreal, 1965.

[8] Lions, J.L., Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites Non-Linéaires, Dunod, Paris. 1969.

[9] J.L.Lions, Contrôlabilité Exacte, Pertubations et Stabilisation de Systèmes Distribués, Vol. 1 & 2, Masson, RMA, Paris, 1988.

[10] Lions, J.L. and Magenes, E., Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications, Vol.1, Dunod, Paris, 1968.

[11] Milla Miranda, M and Medeiros, L.A., On a boundary value problem for wave equations: Existence- uniqueness-asymptotic behavior, *Rev. de Mat. Apl., Univ. de Chile* 17(1996),47-73.

[12] Milla Miranda, M., Análise Espectral em Espaços de Hilbert, Textos de Métodos Matemáticos 28, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1994.

[13] Strauss, W.A., On weak solutions of semilinear hyperbolic equations, *An. Acad. Brasil. Ciênc.* 42(1970),645-651.

[14] Zuazua, E., Uniform stabilization of the wave equation by nonlinear boundary feedback, *SIAM J. Control Optim.* 28(1990),466-478.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

STABILITY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PIECEWISE CONSTANT ARGUMENT VIA ASSOCIATED DISCRETE EQUATIONS

S. A. S. MARCONATO * & M. A. BENÁ †

1 Summary

The study of stability of differential equations with piecewise continuous argument using dichotomic maps has been subject of investigations; Bená and Dos Reis [1], Carvalho and Cooke [2], Carvalho and Marconato [3], Marconato [4] and Marconato and Bená [5]. These equations include, as a particular case, differential equations with constant argument in intervals, such as (1.1) $x'(t) = f(t, x(t), x([t]))$ where $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is a continuous map with $f(t, 0, 0) = 0$, for all $t \in \mathbb{R}$. We denote by $x(., t_o, \psi)$ the solution of (1.1) with $x_{t_o}(., t_o, \psi) = \psi$ and $x_t(., t_o, \psi)(\theta) = x(t + \theta, t_o, \psi), \theta \in [-1, 0]$, $\psi \in C$, where C denotes Banach space of the continuous maps from [-1,0] into $\mathbb{R}^n$. The solution through $\psi \equiv 0$, that is, $x(., t_o, 0)$, is the null solution.
Our purpose is to study stability of such equations by means of the analysis of stability of the associated discrete equation, via dichotomic maps. Let us consider equation (1.1) with initial condition $x_{t_o}(., t_o, \psi) = \psi$ and $t_o = n_o \in N$. Let $x(t) = x(t, n_o, \psi)$ be the solution defined in $[n_o, w)$ and $x_n(t)$ be the restriction of $x(t)$ to the interval $[n, n+1) \subset [n_o, w[$, $n+1 < w$. If $c_n = x_n(n)$, then $x_n(t)$ satisfies the Initial Value Problem $x'(t) = f(t, x(t), c_n)$ with $x(n) = c_n$ and so $x_n(t) = c_n + \int_n^t f(s, x(s), c_n)\, ds$. From the continuity of $x(t)$ in the integers, one can easily show, taking the limit as $t \to (n+1)^-$, that (1.2) $c_{n+1} = c_n + \int_n^{n+1} f(s, x(s), c_n)\, ds$, which is an equation of discrete type, called associated discrete equation to (1.1).

Definition 1.1. *Given a map $V : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ and a nonnegative integer number k, we define the k-th variation of V along the solutions of (1.2) with $x(n_o) = x_o$, by $\Delta_k V(n, x_n(x_o)) = V(n, x_n(x_o)) - V(n-k, x_{n-k}(x_o))$, $n \geq n_o + k$.*

In the autonomous case, that is, (1.3) $x_{n+1} = g(x_n), n \in \mathbb{N}$ with the initial condition $x_o = y$, the following definitions can be stated, where Ω is a neighborhood of the origin in $\mathbb{R}^n$, $V : \Omega \to \mathbb{R}$ is a continuous map and $j = 1, 2, ..., k$:
$\Omega^j_+(k) = \{y \in \Omega : \Delta_j V(x_k(y)) > 0\}$, $\Omega^j_o(k) = \{y \in \Omega : \Delta_j V(x_k(y)) = 0\}$,
$\Omega^j_-(k) = \{y \in \Omega : \Delta_j V(x_k(y)) < 0\}$, $\Omega^j_{o^-}(k) = \Omega^j_-(k) \cup \Omega^j_o(k)$.

Definition 1.2. *We say that V is dichotomic with respect to (1.3) if there exists an integer k, $k \geq 2$, such that $[\overline{\Omega^1_+}(k) \cup \Omega^1_o(k)] \subset \bigcup_{j=2}^k \Omega^j_{o^-}(k)$.*

Definition 1.3. *If, in addition to the condition of the above definition, we have (i) $\left[\overline{\Omega^1_+}(k) \cup \Omega^1_o(k)\right]^* \subset \bigcup_{j=2}^k \Omega^j_-(k)$ and (ii) $\Omega^1_o(k) \cap \Omega^k_o(k) = \{0\}$ then, we say that V is strictly dichotomic with respect to (1.3) (in Ω).*

Theorem 1.1. *: Let $u, v : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}+$ be continuous, nondecreasing functions, which are positive for $s > 0$ and $u(0) = v(0) = 0$. If there exists a positive definite dichotomic map with respect to (1.2), $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ such that $u(|x|) \leq V(t, x) \leq v(|x|), t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$, then the null equilibrium of (1.2) is stable.*

Theorem 1.2. *Let V be a strictly dichotomic map with respect to (1.2) in Theorem (1.1). Then, the null equilibrium of (1.2) is asymptotically stable.*

*IGCE, UNESP, Rio Claro, SP, Brasil, sasmarc@rc.unesp.br
†FFCLRP, USP, Ribeirão Preto, SP, Brasil, mabena@ffclrp.usp.br

2 Result

Theorem 2.1. *Let f be lipschitzian with respect to (x,y) in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$. If the null solution of the discrete equation (1.2) is stable (asymptotically stable), then the null solution of (1.1) is stable (asymptotically stable).*

Proof: The idea of the proof is to consider, by hypothesis that, given $\epsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that, if $\mid c_o \mid < \delta$, then $\mid c_n(c_o) \mid < \epsilon$, for all $n \in \mathbb{N}$, and $\mid x(t) \mid \leq (1+k) \mid c_n \mid +k \int_{n_o+n}^{t} \mid x(s) \mid \, ds$, where k is Lipschitz's constant. By Gronwall's Inequality, $\mid x(t) \mid \leq (1+k) \mid c_n \mid exp(k) = M \mid c_n \mid$. Thus, whenever $\mid c_n(c_o) \mid < \epsilon/M$, we have that $\mid x(t) \mid < \epsilon$, for $t \in [n_o+n, n_o+n+1)$, for all $n \in \mathbb{N}$. With this result, the hypothesis and continuity of $x(., t_o, \psi)$ with respect to ψ, we have that, given $\epsilon > 0$, we can choose μ and δ, $0 < \mu < \delta < \epsilon$ so small such that $\parallel \psi \parallel < \mu$ implies $\mid x(t, t_o, \psi) \mid < \delta$, for $t \in [t_o, n_o]$, and $\mid x(n_o, t_o, \psi) \mid = \mid c_o \mid < \delta$ implies $\mid c_n(c_o) \mid < \epsilon/M < \epsilon$, for all $n \in \mathbb{N}$, which implies $\mid x(t, t_o, \psi) \mid < \epsilon$, for all $t \geq t_o$. The result of stability is proved. We omit the result of asymptotic stability.

Application: Now, we present an example evidencing that to work with the associated discrete equation, becomes the problem more simple. Consider the equation (2.1) $x'(t) = ax(t) + bx([t]), t \geq 0$ with $x_o = \psi$, $a \leq -\delta < 0$ and $\mid b \mid < k\delta, \delta > 0$, for some $k \in (0,1)$. With these conditions, the null solution of (2.1) is asymptotically stable (see [3]). Let, now, discuss the behavior of the map $V(x) = x^2/2$ by the solution of the associated discrete equation to (2.1), taking $\psi(0) = c_o$. The solution $x(t)$ restricted to the interval $[n, n+1), n \in \mathbb{N}$, is given by $x_n(t) = (-b/a)c_n + c_n(1+b/a)\exp(a(t-n))$ with $c_n = x_n(n, c_o)$. Since $x(t)$ is continuous at the integers values, $c_n = x_{n-1}(n, c_o)$ and so, the associated discrete equation to (2.1) is given by (2.2) $c_n = [(1+b/a)\exp(a) - b/a]c_{n-1} = Ac_{n-1}$. We have that V is a strictly dichotomic map with respect to (2.2) by considering the region of the plane given by $|A| < 1$, which corresponds to $a(1+\exp(a))/(1-\exp(a)) < b < -a$ for all $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, and for $a = 0$ it corresponds to $-2 < b < 0$. In fact: Let Ω a neighborhood of the zero in $\mathbb{R}$. So, $\Omega^1_+(2) = \{y \in \Omega : \triangle_1 V(c_2(y)) > 0\} = \emptyset$, because, for all $y \in \Omega$, $\triangle_1 V(c_2(y)) = V(c_2(y)) - V(c_1(y)) = (1/2)[c_2^2(y) - c_1^2(y)] = (c_1^2(y)/2)(A^2 - 1) \leq 0$, since $|A| < 1$. We observe that $\Omega^1_o(2) = \{y \in \Omega : \triangle_1 V(c_2(y)) = 0\} = \{0\}$. So, $[\overline{\Omega^1_+(2) \bigcup \Omega^1_o(2)}]^* \subset \Omega^2_-(2)$. We have, too, that $\Omega^1_o(2) \bigcap \Omega^2_o(2) = \{0\}$, because if $y \in \Omega^1_o(2) \bigcap \Omega^2_o(2)$, then $V(c_2(y) = V(c_1(y) = V(y)$. So, $c_2^2(y) = c_1^2(y) = y^2$, that is, $(A^2 y)^2 = (Ay)^2 = y^2$. Since $|A| < 1$, necessarily $y = 0$ and it follows the result. Therefore, the definition of strictly dichotomic map is satisfied. By Theorems (1.1) and (1.2), the null solution of (2.2) is asymptotically stable, whenever $|(1+b/a)\exp(a) - (b/a)| < 1$. And, by Theorem (1.3), we have that the null solution of (2.1) is asymptotically stable, by considering the above region. We observe that this region is wider than the region $a \leq -\delta < 0$ and $|b| < k\delta$ for $\delta > 0$ and some $k \in (0,1)$, initially considered, mainly to permit positive values for the constant "a". Therefore, best results have been possible by the study of the associated discrete equation.

References

[1] BENÁ, M. A. AND DOS REIS, J. G. - Some results on stability of retarded functional differential equations using dichotomic map techniques. *Positivity*, **2**, 229-238, 1998.

[2] CARVALHO, L. A. V. AND COOKE, K. L. - On dichotomic maps for a class of differential-difference equations . *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, **117A**, 317-328, 1991.

[3] CARVALHO, L. A. V. AND MARCONATO, S. A. S. - On dichotomic maps for differential equations with piecewise continuous argument (EPCA). *Communications in Applied Analysis*, **1**, No. 1, 103-112, 1998.

[4] MARCONATO, S. A. S. - On stability of differential equations with piecewise constant argument and the associated discrete equations using dichotomic map. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, **15**, No. 3, 303-316, 2008.

[5] MARCONATO, S. A. S. AND BENÁ, M. A. - Stability of the null solution of the equation $x'(t) = -a(t)x(t) + b(t)x([t])$. To appear, 2010.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

HIERARCHIC CONTROL FOR COOPERATIVE SYSTEMS WITH AN INFINITE NUMBER OF VARIABLES

A.O. Marinho * & M.R.Clark † & S.B. Menezes‡

In this work, we shall consider spaces of functions of infinitely variables see [1], [2] and [7]. For this purpose we shall introduce the infinite product $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times ..... \times \mathbb{R}^1 \times ....$, with elements $(x \in \mathbb{R}^\infty, x = (x_n)_{n=1}^\infty, x_n \in \mathbb{R}^1)$, and by $d\rho(x)$ the product of measures $d\rho = p_1(x_1)dx_1 \otimes p_2(x_2)dx_2....$, defined on the $\sigma-$hall cylindrical sets in $\mathbb{R}^\infty$ generated by the finite-dimensional Borel sets, where $(p_k(t))_{k=1}^\infty$ is a sequence of weights such that

$$0 < p_k(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^1), \quad \int_{\mathbb{R}^1} p_k(t)dt = 1,$$

see [3].

With respect to this measure and on $\mathbb{R}^\infty$, with sufficiently smooth boundary Γ, we construct the functional space for work. We assume that $t \in (0,T),\ T < \infty$, with Lebesgue measure dt on $(0,T)$. Set $Q = \mathbb{R}^\infty \times (0,T)$ and $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$.

Let $S_{ij} \subset \mathbb{R}^\infty$ non-empties open and disjoints subsets of $\mathbb{R}^\infty$. Let $\mathcal{O}_i = \mathbb{R}^\infty / S_{ij}$. By $\chi_{\mathcal{O}_i}$ and $\chi_{\mathcal{S}_{ij}}$ we represent the characteristic function of $\chi_{\mathcal{O}_i}$ and $\chi_{\mathcal{S}_{ij}}$ respectively. For the controls $v = (v_1, ..., v_n) \in (L^2(\mathcal{O}_i))^n$ and $w_j = (w_{1j}, ..., w_{nj}), \in^(L^2(\mathcal{O}_{ij})\ j = 1, ..., m,\ i = 1, ..., n$, the state of the system is given by the solution of

$$\left\| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + \Delta u_i = \displaystyle\sum_{k=1}^n h_{ik} u_k + f_i + v_i \chi_{\mathcal{O}_i} + \sum_{j=1}^m w_{ij} \chi_{\mathcal{S}_{ij}} \text{ in } \mathbb{R}^\infty \\ u_i = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma \\ u_i(x,0) = u_{0,i}, \quad 1 \le i \le n. \end{array} \right. \tag{0.1}$$

On the main focus of this work is to discuss on the hierarchic for the cooperative system (0.1). For a given $Z_d = \{z_{1d}, ..., z_{nd}\} \in (L^2(\mathbb{R}^\infty))^n$, we will discuss:

- For a given $v_i \in (L^2(O_i \times (0,T)))^n$ we show that que controls $w_{i1}, ..., w_{1n}$ can be choice by optimality system following the ideas [4] when to consider the functional

$$J_{ij}(v_i, w_i) = \sum_{i=1}^n \|w_{ij}(v) - \rho_{ij} z_{id}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^\infty)} + M \sum_{i=1}^n (w_{ij}, w_{ij})_{L^2(S_{ij} \times (0,T))},$$

  where $M$is a positive constant.

- The control $v_i \in (L^2(O_i \times (0,T)))^n$ can be choice by mean of optimality system when to consider the functional

$$J_i(v_i) = \sum_{i=1}^n \|v_i - z_{id}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^\infty)} + M \sum_{i=1}^n (v_i, v_i)_{L^2(\mathcal{O}_i \times (0,T))}.$$

The study on the hierarchic control can be see in [5] and [6]

*UFPI-CMRV, PI, Brasil, marinho@ufpi.edu.br
†DM-UFPI, PI, Brasil, mrclark@ufpi.br
‡DM-UFC, CE, Brasil, silvanobezerra@hotmail.com

References

[1] BEREZANSKII, JU. M. - *Eigenfunction expansion of self operators.*(Naukova Dumka Kiev 1965.)English Translation of Mathematical Monographs, vol. 17. Providence, RI: American Mathematical Society, 1968.

[2] BEREZANSKII, JU. M. & GALI, I. M. - *Positive definite function of infinitely many variables in the layer*. Ukr. Z., 27, 729-742, 1972.

[3] GALI, I. M. & EL-SAFIY, H. A. - *optimal control of a system governed by hyperbolic operator with an infinite number of variables*. J. Math. Anal. Appl., 85, 24-30, 1982.

[4] KOTARSKI, W.& EL-SAFIY, H.A. & BAHAA, G. - *optimal control of parabolic equation with an infinite number of variables for non-standard functional and time delay*. IMA J. Math. Control Inf., 19, 461-476, 2002.

[5] LIONS, J. L. & DIAZ, J.I. - *on the approximate controllability of stackelberg-nash strategies.* Ocean Circulation an Pollution Control-A Matthematical and Numerical Investigation, A Diderot Mathematical Forum, August 2005, pp. 17-27.

[6] LIONS, J. L. - *some stackelberg's optimization* Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol 4, 4, 477-487, 1994.

[7] SERAG, H.M. - *distributed control for cooperative systems involving parabolic operators with an infinite number of variables*. IMA J. Math. Control Inf., 24, 149-161, 2007.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

Self-similarity and uniqueness of solutions for semilinear reaction-diffusion systems

Éder Mateus * & Lucas C.F. Ferreira †

We study the well-posedness of the initial value problem for the following coupled semilinear reaction-diffusion system in Marcinkiewicz spaces $L^{(p_1,\infty)}(\Omega) \times L^{(p_2,\infty)}(\Omega)$:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = g_1(u,v), & x \in \Omega, t > 0 \\ v_t - \Delta v = g_2(u,v), & x \in \Omega, t > 0 \\ u(0,x) = u_0, \quad v(0,x) = v_0 & x \in \Omega \end{cases} \tag{0.1}$$

where

$$g_1(u,v) = |u|^{(\rho_1-1)}u|v|^{(\rho_2-1)}v \text{ and } g_2(u,v) = |u|^{(r_1-1)}u|v|^{(r_2-1)}v, \quad 1 < \rho_i, r_i < \infty, \quad i = 1,2. \tag{0.2}$$

Here, we consider Ω being either $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_+$, a bounded domain or an exterior domain in $\mathbb{R}^n$, with smooth boundary $\partial\Omega$. Also, we assume homogeneous Dirichlet boundary conditions. The exponents p_1, p_2 of the initial value space are chosen to allow the existence of self-similar solutions (when $\Omega = \mathbb{R}^n$). As a nontrivial consequence of our coupling-term estimates, we prove the uniqueness of solutions in the scaling invariant class $C([0,\infty); L^{p_1}(\Omega) \times L^{p_2}(\Omega))$ regardless of their size and sign. We also analyze the asymptotic stability of the solutions and show the existence of a basin of attraction for each self-similar solution .

The system (0.1) has the following scalling: $(u,v) \to (u_\lambda, v_\lambda)$ where

$$u_\lambda(t,x) = \lambda^{k_1} u(\lambda^2 t, \lambda x) \text{ and } v_\lambda(t,x) = \lambda^{k_2} v(\lambda^2 t, \lambda x)$$

and

$$k_1 = \frac{2(\rho_2 - r_2 + 1)}{r_1\rho_2 - (\rho_1 - 1)(r_2 - 1)} \text{ and } k_2 = \frac{2(r_1 - \rho_1 + 1)}{r_1\rho_2 - (\rho_1 - 1)(r_2 - 1)}, \tag{0.3}$$

provided that

$$r_1\rho_2 - (\rho_1 - 1)(r_2 - 1) \neq 0. \tag{0.4}$$

A solution (u,v) is said self-similar when $(u,v) = (u_\lambda, v_\lambda)$ for all $\lambda > 0$. Since we are interested in self-similar solutions, we shall study the existence of solutions in time-dependent spaces, whose norm is invariant by scaling of (0.1). In the next definition we denote by BC the class of bounded and continuous functions from the corresponding interval onto a Banach space. One defines the heat semigroup $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ as the family of convolution operators with corresponding kernels $g(t,x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$, that is $G(t)f = g(t,\cdot) * f$.

Definição 0.1. *Let k_i be given by (0.3), $p_i = \frac{n}{k_i} > 1$, $1 < q_i \leq \infty$ and $\alpha_i = \frac{n}{2}(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i})$ with $i = 1,2$. We define the following Banach spaces*

$$E \equiv BC((0,\infty), L^{(p_1,\infty)} \times L^{(p_2,\infty)}\}$$

$$E_{q_1q_2} \equiv \{(u,v) \in E : (t^{\alpha_1}u, t^{\alpha_2}v) \in BC((0,\infty); L^{(q_1,\infty)} \times L^{(q_2,\infty)})\},$$

with respective norms given by

$$\|(u,v)\|_E = \max\{\sup_{t>0} \|u\|_{(p_1,\infty)}, \sup_{t>0} \|v\|_{(p_2,\infty)}\} \tag{0.5}$$

*Universidade Federal de Sergipe, DMAI, Itabaiana - SE, Brasil, e-mail: edermateus@ufs.br
†IMECC, UNICAMP, SP, Brasil, e-mail: lcff@ime.unicamp.br

$$\|(u,v)\|_{E_{q_1 q_2}} = \|(u,v)\|_E + \max\{\sup_{t>0} t^{\alpha_1} \|u(t)\|_{(q_1,\infty)}, \sup_{t>0} t^{\alpha_2} \|v(t)\|_{(q_2,\infty)}\} \tag{0.6}$$

According to Duhamel's principle, we introduce the notion of solution for the initial value problem (0.1).

Definição 0.2. *A global mild solution of the initial value problem (0.1) in E is a pair $\omega = (u(t), v(t))$ satisfying*

$$(u(t), v(t)) = (G(t)u_0, G(t)v_0) + B(u,v)(t), \tag{0.7}$$

where

$$B(u,v)(t) = \left(\int_0^t G(t-s)|u|^{\rho_1 - 1}u|v|^{\rho_2 - 1}v ds \ , \ \int_0^t G(t-s)|u|^{r_1 - 1}u|v|^{r_2 - 1}v ds\right).$$

1 Main Results

Theorem 1.1. *Let $n \geq 3$, $1 < r_i, \rho_i < p_i < \infty$ and $p_i \geq \frac{n}{n-2}$, $i = 1, 2$. Assume that $(u_0, v_0) \in L^{(p_1,\infty)} \times L^{(p_2,\infty)}$.*

(i) (Well-posedness)There exist $\varepsilon > 0$ and $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ such that if $\|u_0\|_{(p_1,\infty)} < \delta, \|v_0\|_{(p_2,\infty)} < \delta$, then the initial value problem (0.1) has a global mild solution $(u(t,x), v(t,x)) \in E$, with initial data (u_0, v_0), which is the unique one satisfying $\|(u,v)\|_E \leq 2\varepsilon$

(ii) (Uniqueness) Let (u,v) and $(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ be two mild solutions of (0.1) in the class $C([0,\infty); L^{p_1} \times L^{p_2})$ with initial data $(u_0, v_0) \in L^{p_1} \times L^{p_2}$. Then $u = \widetilde{u}$ and $v = \widetilde{v}$.

(iii) Let $\Omega = \mathbb{R}^n$, k_1 and k_2 be given by (0.3) and $(u_0, v_0) \in L^{(p_1,\infty)} \times L^{(p_2,\infty)}$. Assume that u_0 and v_0 are homogeneous functions of degrees $-k_1$ and $-k_2$, respectively. If $\|u_0\|_{(p_1,\infty)} < \delta, \|v_0\|_{(p_2,\infty)} < \delta$, then the solution $(u(t,x), v(t,x))$ provided by (i) is self-similar, i.e.,

$$(u(t,x), v(t,x)) = (\lambda^{k_1} u(\lambda^2 t, \lambda x), \lambda^{k_2} v(\lambda^2 t, \lambda x)) \tag{1.8}$$

almost everywhere $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ and all $\lambda > 0$.

(iv) Assume that (u,v) and $(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ are mild solutions of (0.1) obtained through in (i), corresponding to respective initial data (u_0, v_0) and $(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0) \in L^{(p_1,\infty)} \times L^{(p_2,\infty)}$. If $\lim_{t\to\infty} \|G(t)(u_0 - \widetilde{u}_0)\|_{(p_1,\infty)} = 0$ e $\lim_{t\to\infty} \|G(t)(v_0 - \widetilde{v}_0)\|_{(p_2,\infty)} = 0$, then

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t) - \widetilde{u}(t)\|_{(p_1,\infty)} \quad \text{and} \quad \lim_{t\to\infty} \|v(t) - \widetilde{v}(t)\|_{(p_2,\infty)} = 0. \tag{1.9}$$

Futhermore, if, instead of (1.1), we assume $\lim_{t\to\infty} t^{\alpha_1} \|G(t)(u_0 - \widetilde{u}_0)\|_{(q_1,\infty)} = 0$ and $\lim_{t\to\infty} t^{\alpha_2} \|G(t)(v_0 - \widetilde{v}_0)\|_{(q_2,\infty)} = 0$, then

$$\lim_{t\to\infty} t^{\alpha_1} \|u(t) - \widetilde{u}(t)\|_{(q_1,\infty)} = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{t\to\infty} t^{\alpha_2} \|v(t) - \widetilde{v}(t)\|_{(q_2,\infty)} = 0. \tag{1.10}$$

As a consequence, if $(u_0, v_0) \in \overline{C_C^\infty}^{\|\cdot\|_{(p_1,\infty)}} \times \overline{C_C^\infty}^{\|\cdot\|_{(p_2,\infty)}} \supset L^{p_1} \times L^{p_2}$, then the solution satisfies

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{(p_1,\infty)} = \lim_{t\to\infty} \|v(t)\|_{(p_2,\infty)} = 0. \tag{1.11}$$

References

[1] Bokes, P. - A uniqueness result for a semilinear parabolic system *J. Math. Anal. Appl.*,331 (2007), 567–584.

[2]Ferreira, L.C.F. and Mateus, E. - *Self-similarity and uniqueness of solutions for semilinear reaction-diffusion systems*, *Advances Differential Equations*, Volume 15, Numbers 1-2 (2010), 73–98.

[3] Ferreira, L.C.F. and Villamizar-Roa, E.J. - *Self-similar solutions, uniqueness and long time asymptotic behavior for the semilinear heat equation, Differential and Integral Equations*, 19 (2006), 1349–1370.

[4] O'Neil, R. - *Convolution operators and $L(p,q)$ spaces, Duke Math. J. 30 (1963), 126–142.*

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

USANDO O ALGORITMO FDA-NCP PARA RESOLVER PROBLEMAS DE INEQUAÇÃO VARIACIONAL.

SANDRO R. MAZORCHE & GRIGORI CHAPIRO *

Os problemas de complementaridade estão presentes em várias aplicações da Engenharia, Economia, Física e outras ciências em geral [1]. Apresentaremos um algoritmo de pontos interiores (FDA-NCP) para a resolução numérica de problemas de inequações variacional que podem ser transformados em problemas de complementaridade [4,5]. O algoritmo FDA-NCP segue a filosofia do algoritmo FDIPA [2] com respeito a geração da seqüência de pontos viáveis que converge a solução do problema de complementaridade.

Resultados de convergência global e taxa de convergência para o FDA-NCP podem ser vistos em [3]. Utilizaremos o FDA-NCP para resolver numericamente os seguintes problemas de inequações variacionais: O Problema do Obstáculo e o Problema do Dique. E ainda veremos uma adaptação do FDA-NCP para resolver o problema de difusão de oxigênio.

A definição de um problema de complementaridade é:

Definição 0.1. *Seja $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função vetorial. O problema de complementaridade é: Encontrar $x \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$x \geq 0, F(x) \geq 0 \quad e \quad x \bullet F(x) = \mathbf{0}$$

onde $x \geq 0 \Leftrightarrow x_i \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$, $F(x) \geq 0 \Leftrightarrow F_i(x) \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$ e

$$x \bullet F(x) = \begin{pmatrix} x_1F_1(x) \\ \vdots \\ x_nF_n(x) \end{pmatrix} \text{ é o produto de Hadamard.}$$

A idéia básica do algoritmo FDA-NCP é resolver o sistema de equações $x \bullet F(x) = 0$ dentro da região $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / x \geq 0 \text{ e } F(x) \geq 0\}$. Para isto utilizaremos uma direção de busca para construir uma seqüência de "pontos viáveis", a qual convergirá para a solução do problema de complementaridade. Esta direção de busca é uma combinação da direção de Newton com uma direção de restauração da viabilidade para o conjunto Ω.

Os problemas do Obstáculo e do Dique são equivalentes a seguinte formulação variacional [4]:
Encontrar $u \in K$ tal que:

$$\begin{aligned} u - \psi &\geq 0 \quad \text{em } \Omega, \\ -\Delta u - f &\geq 0 \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \\ (u-\psi)(-\Delta u - f) &= 0 \quad \text{em } \Omega. \end{aligned}$$

Já o problema da difusão de oxigênio em sua formulação variacional [5]:
Encontrar $c \in K$ tal que:

$$\begin{aligned} c &\geq 0 \quad \text{em } I, \\ \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + 1 &\geq 0 \quad \text{em } I \quad \text{e} \\ \left(\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + 1\right) c &= 0 \quad \text{em } I. \end{aligned}$$

*Departamento de Matemática , UFJF, MG, Brasil, sandro.mazorhce@ufjf.edu.br & grigorichapiro@gmail.com

Para resolver estes problemas usando o FDA-NCP, descretizaremos os problemas acima usando diferenças finitas e para o problema da difusão de oxigênio usaremos um método numérico baseado no esquema implícito de diferenças finitas [6].

Referências

[1] Ferris MC and Pang JS (1997), Engineering And Economic Applications Of Complementarity Problems, *SIAM* , **39**, pp. 669-713.

[2] Herskovits J.(1986), "A Two-Stage Feasible Directions Algorithm For Nonlinear Constrained Optimization". *Mathematical Programming*, **36**, pp. 19-38.

[3] Herskovits J, Mazorche S R (2008), A feasible directions algorithm for nonlinear complementarity problems and applications in mechanics, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **36**, pp. 1615-1488.

[4] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia, An Introduction to Variational, Oxford University Press, 1984.

[5] Baiocchi, C. & Pozzi, G., 1975. An evolution variational inequality related to a diffusion-absorption problem. *Applied Mathematics and Optimization*, vol. 2, n. 4, pp. 304–314.

[6] Mazorche, S. R. and Grigori Chapiro. Solution Of The Oxygen Diffusion Problem Using Nonlinear Complementarity Algorithm (FDA-NCP). In: XXX CILAMCE - Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2009, Buzios. Proceedings of the XXX CILAMCE.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

SUPERLINEAR AMBROSETTI-PRODI PROBLEM FOR THE P-LAPLACIAN OPERATOR

T. JUNGES MIOTTO *

The main purpose of this work is to investigate the existence of multiple solutions of the problem

$$(P_t) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) + t\phi + h, & \text{in } \Omega \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded smooth domain, $\Delta_p = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ is the $p-$Laplacian operator and $1 < p < N$. We assume that $\phi, h \in L^\infty(\Omega)$, with $\phi \succ 0$ in Ω and $t \in \mathbb{R}$ is a parameter, where $\succ$ will be defined later. Denoting λ_1 the first eigenvalue of $(-\Delta_p, W_0^{1,p}(\Omega))$ we consider $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a continuous function satisfying the following conditions:

(H1) $\displaystyle\limsup_{u\to-\infty} \frac{f(x,u)}{|u|^{p-2}u} = \mu < \lambda_1$, uniformly $x \in \Omega$,

(H2) There exists $\sigma > 0$ such that $f(x,s) + \sigma|s|^{p-2}s$ is increasing in s, $f(x,0) = 0$.

(H3) $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} \frac{f(x,u)}{u^\alpha} = a(x), \quad a \in C(\overline{\Omega}), \quad a \geq 1, \quad p - 1 < \alpha < p^* - \frac{N}{N-p}$, where $p^* = \frac{Np}{N-p}$,

($(H3)$ is known as $p-$superlinear condition at infinity and simply superlinear when $p = 2$).

This problem belongs to a class of problems known as the Ambrosetti-Prodi type. For the case $p = 2$ with different variants and formulations, it has been extensively studied by several authors. We shall quote here the original work [1], as well as the subsequent developments $[3-5, 13]$ and the references therein. For the superlinear case see for example $[6, 9-11]$.

More recently, Ambrosetti-Prodi type results for $p-$Laplacian operator, with $p > 1$ have been studied, but few results are really known. We can cite Perera [17] which used the linking and homotopy theory to study a similar problem with zero Dirichlet condition on the boundary and asymmetric nonlinearities. Mawhin in [16] studied the existence of periodic solutions for the ODE case with $\phi = 1$. Arcoya and Ruiz in [2] treated problem (P_t) with f growing as $|u|^{p-2}u$, that is, the $p-$linear case, which was also studied by Koizumi and Schmitt in [14]. Our main contribution is to study this problem where f has a $p-$superlinear behavior.

Motivated by results in [2] we prove the following theorem:

Teorema 0.1. *Suppose $(H1) - (H3)$ hold. There exist $-\infty < t_* \leq t^* < +\infty$ such that problem (P_t) has:*

i) at least, two solutions provided that $t < t_*$,

ii) at least, one solution provided that $t \leq t^*$,

iii) no solution provided that $t > t^*$.

We conjecture that $t^* = t_*$, but this question is still open. In order to prove Theorem 0.1, we use the sub and supersolution method and topological arguments. Then we need a priori bounds on the eventual solutions of (P_t) to apply the Leray Schauder degree.

In order to use the sub and supersolution method we only need the hypothesis $(H1)$, and therefore the first solution is obtained arguing as in [2]. We can also cite the work of de Figueiredo, Gossez and Ubilla in [7] that use

*Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brasil, jungesmiotto@gmail.com

a variational approach to the method of upper-lower solutions. However to get the second solution we need the a priori estimates of eventual solutions of (P_t). We remark that Arcoya and Ruiz's proof of this fact does not apply for our case. To overcome this fact, we follow [8], obtaining not only a priori bound on negative part of u, but also on t, such that (P_t) has a solution and in this way we obtain an a priori bound for u. The main difficulty is that the operator studied in [8] is linear, then the a priori bound on t follows easily from the linearity of the operator and from ABP estimate. For our case, since our operator is not linear, we have to adapt a Dong's result [12] that use a comparison principle. For the boundedness of u we use the blow up technique, which only was possible to use thanks to a paper of Lorca [15], where he proves a Liouville type result for a half space. To obtain the second solution we will use the Leray Shauder degree theory, following the results of [2] and [5].

Referências

[1] AMBROSETTI, A, AND PRODI, G. - On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces, *Ann. Mat. Pure Appl.* **93**, 231-246, 1972.

[2] ARCOYA, D. AND RUIZ, D. - The Ambrosetti-Prodi problem for the $p-$Laplace operator, *Comm. Partial Differential Equations*, **31**, 849-865, 2006.

[3] BERGER, M. S. AND PODOLAK, E. - On the solutions of a nonlinear Dirichlet problem, *Indiana Univ. Math. J.* **24**, 837-846, 1974.

[4] DANCER, E. N. - On the ranges of certain weakly nonlinear elliptic partial differential equations, *J. Math. Pures Appl.* **57**, 351-366, 1978.

[5] DE FIGUEIREDO, D. G. - *Lectures on boundary value problems of Ambrosetti-Prodi type,* 12th Brazilian Seminar of Analysis, Brasil, 1980.

[6] DE FIGUEIREDO, D. G. - On the superlinear Ambrosetti-Prodi problem, *Nonlinear Anal.* **8**, 655-665, 1984.

[7] DE FIGUEIREDO, D. G., GOSSEZ, J. P. AND UBILLA, P. - Local "superlinearity"and "sublinearity"for the $p-$Laplacian, *J. Funct. Anal*, **257**, 721-752, 2009.

[8] DE FIGUEIREDO, D. G. AND SIRAKOV, B. - On the Ambrosetti-Prodi problem for non-variational elliptic systems, *J. Differential Equations*, **240**, 357-374, 2007.

[9] DE FIGUEIREDO, D. G. AND SOLIMINI, S. - A variational approach to superlinear elliptic problems, *Comm. Partial Differential Equations*, **9**, 699-717, 1984.

[10] DE FIGUEIREDO, D. G., SRIKANTH, P. N. AND SANTRA, S. - Non-radially symmetric solutions for a superlinear Ambrosetti-Prodi type problem, *Comm. Contem. Math.* **7**, 849-866, 2005.

[11] DE FIGUEIREDO, D. G. AND YANG, J. - Critical superlinear Ambrosetti-Prodi problems, *Top. Meth. Nonlin. Anal. TMA*, **14**, 59-80, 1999.

[12] DONG, W. - A priori estimates and existence of positive solutions for a quasilinear elliptic equation, *J. London Math. Soc.* **72**, 645-662, 2005.

[13] HESS, P. - On a nonlinear elliptic boundary value problem of the Ambrosetti-Prodi type, *Boll. Un. Mat. Ital. A*, **17**, 187-192, 1980.

[14] KOIZUMI, E. AND SCHMITT, K. - Ambrosetti-Prodi-type problems for quasilinear elliptic equations, *Diff. and Int. Equations*, **18**, 241-262, 2005.

[15] LORCA, S. - Nonexistence of positive solution for quasilinear elliptic problems in the half-space, *J. Inequalities and Appl.*, **2007**, 1-4, 2007.

[16] MAWHIN, J. - The periodic Ambrosetti-Prodi problem for nonlinear perturbations of the p-Laplacian, *J. Eur. Math. Soc.* **8**, 375-388, 2006.

[17] PERERA, K. - An existence result for a class of quasilinear elliptic boundary value problems with jumping nonlinearities, *Top. Meth. Nonl. Anal.* **20**, 135-144, 2002.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA UM SISTEMA ELÍPTICO QUASE LINEAR EM $\mathbb{R}^N$ ENVOLVENDO EXPOENTE CRÍTICO E FUNÇÃO PESO

M. L. Miotto *

Utilizando argumentos variacionais, mais especificamente, técnicas de minimização e uma variante do Teorema do Passo da Montanha, estabeleceremos condições para a existência de solução, para a seguinte classe de sistema elíptico quase linear com crescimento crítico

$$(S) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = p_1 f(x)|u|^{p_1-1}|v|^{q_1} + \beta|u|^{\beta-1}|v|^{\gamma}, & \text{em} \quad \mathrm{R}^N \\ -\Delta_q v = q_1 f(x)|u|^{p_1}|v|^{q_1-1} + \gamma|u|^{\beta}|v|^{\gamma-1}, & \text{em} \quad \mathrm{R}^N, \\ 0 \lneq u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathrm{R}^N),\ 0 \lneq v \in \mathcal{D}^{1,q}(\mathrm{R}^N), \end{cases}$$

onde a dimensão, bem como os expoentes, satisfazem

$$(\mathbb{H}_{exp}) \qquad \begin{array}{l} 1 \le p_1, q_1, \beta, \gamma, \quad \frac{p_1}{p} + \frac{q_1}{q} < 1, \ \ 2 \le p \le q < min\{p^*, N\}, \\ p_2 \in (p_1, p), \ q_2 \in (q_1, q) \ \text{ onde } \frac{p_2}{p} + \frac{q_2}{q} = \frac{\beta}{p^*} + \frac{\gamma}{q^*} = 1. \end{array}$$

Se considerarmos $p = q$ e $u = v$, o sistema (S) se reduz a um caso escalar, semelhante ao problema

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda f(x) u^{q-1} + u^{2^*-1}, & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \\ 0 \le u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Para alguns artigos relacionados aos problemas mencionamos, dentre outros, os trabalhos de $[2, 4-8, 10, 11, 13-15]$.

Quando estamos trabalhando com um sistema da forma do (S), o qual envolve os operadores $(p, q)-$Laplaciano, é difícil obter um "nível crítico" apropriado, ou seja, um número $\tilde{c}$ onde todo valor $c < \tilde{c}$ é um nível (PS) para o funcional I associado ao sistema (S). Na realidade Adriouch e El Hamidi [1], afirmaram que no caso $p \neq q$ esta é uma questão em aberto.

Considerando que a função peso $f : \mathrm{R}^N \to \mathrm{R}$ é mensurável e satisfaz

$$(\mathbb{H}_f) \qquad f \in L^{\frac{p^*}{p^*-p_1-q_1}}(\mathrm{R}^N) = L^{\theta}, \quad f_+ \not\equiv 0,$$

temos então o seguinte resultado a respeito da existência de soluções para o sistema (S):

Teorema 0.1. *Suponhamos que as condições* $(\mathbb{H}_{exp})$ *e* $(\mathbb{H}_f)$ *sejam satisfeitas. Então existe uma constante positiva* $\Lambda_0 = \Lambda_0(q, q_1, p, p_1, \beta, \gamma, N)$, *tal que o sistema* (S) *possui ao menos uma solução fraca, desde que* $0 < \|f\|_{L^\theta} < \Lambda_0$.

Para o caso em que $p = q$, somos encorajados a obter condições sobre a função peso f, a fim de que o sistema (S) admita múltiplas soluções, pois neste caso de Morais Filho e Souto [9], obtiveram um nível crítico. Dados c_0 e R_0 constantes positivas, motivados pelo trabalho de Alves, Gonçalves e Miyagaki [3], bem como Rodrigues [12], consideramos E como um subconjunto de L^θ, formado pelas funções $h \in L^\theta$ onde $h(x) \ge 0$ em $B(0, 2R_0)$ e existe $R \in (0, R_0)$ tal que

$$\inf_{B(0,2R)} h(x) \frac{R^N}{(1 + R^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{(N-p)}{p}(p_1+q_1)}} \ge c_0.$$

*Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brasil, miottomatica@gmail.com

Para cada $\lambda > 0$, definimos E_λ como um subconjunto de E, da seguinte forma

$$\mathrm{E}_\lambda = \{h \in \mathrm{E} : \|h\|_{L^\theta} < \lambda\}.$$

Temos então o seguinte resultado a respeito da existência e múltiplicidade de soluções para o sistema (S):

Teorema 0.2. *Suponhamos que as condições* $(\mathbb{H}_{exp})$ *com* $p = q$ *são válidas. Então existe uma constante positiva* $\Lambda = \Lambda(p, p_1, q_1, \beta, \gamma, N)$*, tal que o sistema* (S) *possui ao menos duas soluções fracas para cada* $f \in \mathrm{E}_\lambda$*, desde que* $0 < \lambda < \Lambda$.

Referências

[1] ADRIOUCH, K. AND EL HAMIDI, A. - On local compactness in quasilinear elliptic problems, *Differential Integral Equations*, **20**, 77-92, 2007.

[2] ALVES, C.O. - Multiple positive solutions for equations involving critical Sobolev exponent, *Electron. J. Differential Equations*, **13**, 1-10, 1997.

[3] ALVES, C.O., GONÇALVES, J.V.A. AND MIYAGAKI, O.H. - Multiple positive solutions for semilinear elliptic equations in R^N involving critical exponents, *Nonlinear Anal.*, **34**, 593-615, 1998.

[4] AMBROSETTI, A., BRÉZIS, H. AND CERAMI, G. - Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems, *J. Funct. Anal.*, **122**, 519-543, 1994.

[5] AMBROSETTI, A., GARCIA, J. AND PERAL, I. - Elliptic variational problems in $\mathbb{R}^N$ with critical growth, *J. Differential Equations*, **168**, 10-32, 2000.

[6] ASSUNÇÃO, R.B., CARRIÃO, P.C. AND MIYAGAKI, O.H. - Multiplicity of solutions for critical singular problems, *Appl. Math. Lett.*, **19**, 741-746, 2006.

[7] DE FIGUEIREDO, D.G - Nonlinear elliptic systems, *An. Acad. Brasil. Ciênc.*, **72**, 453-469, 2000.

[8] DE FIGUEIREDO, D.G., GOSSEZ, J.P. AND UBILLA, P. - Multiplicity results for a family of semilinear elliptic problems under local superlinearity and sublinearity, *J. Eur. Math. Soc.*, **8**, 269-286, 2006.

[9] DE MORAIS FILHO, D.C. AND SOUTO, M.A.S. - Systems of p-Laplacean equations involving homogeneous nonlinearities with critical Sobolev exponent degrees, *Comm. Partial Differential Equations*, **24**, 1537-1553, 1999.

[10] HUANG, Y.X. - Positive solutions of certain elliptic equations involving critical Sobolev exponents, *Nonlinear Anal.*, **33**, 617-636, 1998.

[11] MIOTTO, M.L. - Multiple solutions for elliptic problem in R^N with critical Sobolev exponent and weight function, *Commun. Pure Appl. Anal.*, **9**, 233-248, 2010.

[12] RODRIGUES, R.S. - *Sistemas elípticos com pesos envolvendo o expoente crítico de Hardy-Sobolev*, UFSCar, São Carlos 2007.

[13] SILVA, E.A.B. AND SOARES, S.H.M. - Quasilinear Dirichlet problems in R^N with critical growth, *Nonlinear Anal.*, **43**, 1-20, 2001.

[14] SILVA, E.A.B AND XAVIER, M.S. - Quasilinear elliptic system with coupling on nonhomogeneous critical term, *Nonlinear Anal.*, **69**, 1164-1178, 2008.

[15] WU, T. F. - On semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents and sign-changing weight function, *Comm. Pure Appl. Anal.*, **7**, 383-405, 2008.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

CONFIGURAÇÃO MINIMAL EM TEORIA DE ISOLAMENTO

JOSÉ FÁBIO B. MONTENEGRO * & EDUARDO V. TEIXEIRA †

Dado um corpo n-dimensional, $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n$, um pergunta fundamental da teoria de condução de calor é encontrar configuração $\Omega \supset \mathfrak{D}$, com volume prescrito, que minimiza o fluxo de calor em uma situação estacionária. Mais precisamente, fixado um domínio $\mathfrak{D}$, definimos o conjunto de configurações admissiveis por

$$\Xi := \{\Omega \supset \mathfrak{D} \ : \ \mathrm{Vol}(\Omega \setminus \mathfrak{D}) \leq \iota\}.$$

Para cada configuração admissivel, Ω, associamos um potencial, $u = u(\Omega)$, dado por

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em} \quad \Omega \setminus \mathfrak{D} \\ u = \varphi & \text{na} \quad \partial \mathfrak{D} \\ u = 0 & \text{na} \quad \partial \Omega. \end{cases}$$

Na equação acima, a função $\varphi \geq 0$ prepresenta a distribuição inicial de calor no corpo $\mathfrak{D}$. Para problemas com domínios igualmente aquecidos, $\varphi \equiv 1$. O problema de isolamento ótimo escreve-se então como:

$$\min_{\Xi} \mathfrak{J}(\Omega) := \int_{\partial \Omega} \partial_\nu u_\Omega dS, \tag{0.1}$$

onde ν é o vetor normal interior definido na fronteira de Ω. Observamos inicialmente que conjuntos admissíveis são meramente mensuráveis; portanto não podemos garantir regularidade de suas fronteiras. Assim formulações fracas, utilizando a liguagem da teoria geométrica da medida, deve ser inicialmente abordadas. Posteriormente, com o auxílio da teoria de regularidade de Alt-Caffarelli, é possível provar que configurações ótimas possuem fronteiras (livres) suaves a menos de um conjunto de medida $\mathcal{H}^{n-1}$ zero. A História recente deste problema inicia com o trabalho monumental de Alt-Caffarelli [2], Aguilera-Alt-Caffarelli [1] e Aguilera-Caffarelli-Spruck [3]. Em 2005, o segundo autor, [4], desenvolveu a teoria não-linear deste problema, considerando fluxos gerais da forma $\Omega \mapsto \int_{\partial\Omega} \Gamma(x, \partial_\nu u_\Omega) dS$. Problemas não-lineares em meios rugosos nos leva a considerar modelos regidos por operadores elípticos degenerados $\mathfrak{L}u = \nabla \cdot (A(X, \nabla u))$, [5].

Uma vez disponível a teoria de existência e regularidade de configurções minimais para o funcionais de fluxo de calor, torna-se importante responder o seguite questionamento relacionado com *optimal storing problems*: dentre todos os domínios $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n$ com volume prescrito, digamos, $\mathrm{Vol}(\mathfrak{D}) = \alpha_0 > 0$, e igualmente aquecido, qual deles é a melhor configuração para ser isolada? Matematicamente, para cada domínio $\mathfrak{D}$ resolvemos o problema de minimização (0.1), com $\varphi = 1$ e definimos

$$\mathcal{I}(\mathfrak{D}) := \min_{\Xi} \mathfrak{J}(\Omega) := \int_{\partial \Omega} \partial_\nu u_\Omega dS.$$

O *optimal storing problem* que estamos interessados é

$$\min \left\{ \mathcal{I}(\mathfrak{D}) \ : \ \mathrm{Vol}(\mathfrak{D}) = \alpha_0 \right\}. \tag{0.2}$$

A importância do problema acima, que admite um número vasto de intepretações, ecoa por exemplo no design ótimo e peças para isolamento térmico ou eletrostático.

Neste trabalho, mostramos que dentre todos os objetos igualmente aquecidos, a bola é o melhor para ser isolado termicamente. Nossa estratégia combina argumentos de teoria geométrica da medida, equações elípticas de 2a

*Departamento de Matemáticas , UFC, CE, Brasil, e-mail: zefabio@uol.com.br
†Departamento de Matemáticas , UFC, CE, Brasil, e-mail: eteixeira@ufc.br

ordem e novas desigualdades isoperimétricas de interesse próprio. Em particular mostramos a seguinte estimativa isoperimétrica sharp: dado dois domínios $\Omega_1 \subset \Omega_2$, com $\mathrm{Vol}(\Omega_1) = \alpha_1$, $\mathrm{Vol}(\Omega_2) = \alpha_2$, então

$$\mathrm{dist}(\partial\Omega_1, \partial\Omega_2) \leq \frac{1}{\omega_n^{1/n}} \left(\alpha_2^{1/n} - \alpha_1^{1/n} \right),$$

onde ω_n é a medida da bola unitária no $\mathbb{R}^n$.

Referências

[1] N. Aguilera, H. Alt and L. Caffarelli - *An optimization problem with volume constraint*, SIAM J. Control Optim. **24** (1986), no. 2, 191–198.

[2] H. Alt and L. Caffarelli - *Existence and regularity for a minimum problem with regularity*, J. Reine Angew. Math. **325** (1981), 105–144.

[3] N. E. Aguilera, L. A. Caffarelli and J. Spruck - *An optimization problem in heat conduction*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **14** (1987), no. 3, 355–387 (1988).

[4] Eduardo V. Teixeira - *The nonlinear optimization problem in heat conduction.* Calc. Var. Partial Differential Equations **24** (2005), no. 1, 21–46.

[5] Eduardo V. Teixeira - *Optimal design problems in rough inhomogeneous media. Existence theory.* Accepted for Publication, American Journal of Mathematics.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

OPEN SETS WITH THE RUNGE PROPERTY IN BANACH SPACES

JORGE MUJICA * & AARON ZERHUSEN †

Let E and F be complex Banach spaces. If U is an open subset of E, then $\mathcal{H}(U;F)$ denotes the vector space of all F-valued holomorphic mappings on U. When $F=\mathbb{C}$ we write $\mathcal{H}(U)$ instead of $\mathcal{H}(U;\mathbb{C})$. A seminorm p on $\mathcal{H}(U;F)$ is said to be *ported* by a compact set $K\subset U$ if for each open set V, with $K\subset V\subset U$, there exists a constant $c>0$ such that $p(f)\leq c\sup_{x\in V}\|f(x)\|$ for every $f\in\mathcal{H}(U;F)$. The τ_ω topology on $\mathcal{H}(U;F)$, introduced by Nachbin [6], is the locally convex topology defined by those seminorms which are ported by some compact subset of U.

If K is a compact subset of U, then $\mathcal{H}(K;F)$ denotes the vector space of all F-valued holomorphic germs on K. When $F=\mathbb{C}$, we write $\mathcal{H}(K)$ instead of $\mathcal{H}(K;\mathbb{C})$. The τ_ω topology on $\mathcal{H}(K;F)$ is defined by the locally convex inductive limit

$$(\mathcal{H}(K;F),\tau_\omega)=ind_{U\supset K}(\mathcal{H}(U;F),\tau_\omega).$$

One can readily see that

$$(\mathcal{H}(K;F),\tau_\omega)=ind_{U\supset K}\mathcal{H}^\infty(U;F),$$

where $\mathcal{H}^\infty(U;F)$ denotes the Banach space of all bounded F-valued holomorphic mappings on U, with the sup norm.

In 1969 Nachbin [7] conjectured that the space $(\mathcal{H}(U;F),\tau_\omega)$ coincides with the projective limit of the spaces $(\mathcal{H}(K;F),\tau_\omega)$, with $K\subset U$ compact, that is

$$(\mathcal{H}(U;F),\tau_\omega)=proj_{K\subset U}(\mathcal{H}(K;F),\tau_\omega).$$

In 1971 Chae [1] proved Nachbin's conjecture under the hypothesis that the open set U has the F-valued Runge property. This means that each compact subset K of U is contained in some compact subset $\widetilde{K}$ of U with the property that $\mathcal{H}(U;F)$ is sequentially dense in $(\mathcal{H}(\widetilde{K};F),\tau_\omega)$.

One can readily see that every balanced open subset of E has the F-valued Runge property for every Banach space F, but it is quite difficult to exhibit less trivial examples.

Schottenloher [8] has shown that every pseudoconvex open subset of a finite dimensional Banach space has the $\mathbb{C}$-valued Runge property. Mujica has extended Schottenloher's result to the case of pseudoconvex open subsets of Fréchet-Schwartz spaces with a Schauder basis in [4], and to the case of pseudoconvex Riemann domains over Fréchet-Schwartz spaces with a Schauder basis in [5].

In this paper we improve Schottenloher's result by proving that every pseudoconvex open subset of a Banach space with an unconditional Schauder basis has the F-valued Runge property for every Banach space F. Our proof rests on an extension theorem of Lempert and Patyi [3], in tandem with an approximation theorem of Lempert [2].

References

[1] CHAE, S. B. - Holomorphic germs on Banach spaces. *Annales de l'Institut Fourier de l'Université de Grenoble*, **21**, 107-141, 1971.

[2] LEMPERT, L. - Approximation of holomorphic functions on infinitely many variables II. *Annales de l'Institut Fourier de l'Université de Grenoble*, **50**, 423-442, 2000.

*IMECC, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil, mujica@ime.unicamp.br, partially supported by FAPESP, Brazil, Project 2006/02378-7.
†Department of Mathematics and Computer Science, Illinois Wesleyan University, Bloomington, IL, USA, azerhuse@iwu.edu, partially supported by NSF Grant DMS-0203072 and DFG-Projekt DE 738/5-1.

[3] LEMPERT, L. AND PATYI, I. - Analytic sheaves in Banach spaces. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, (4), **40**, 453-486, 2007.

[4] MUJICA, J. - Holomorphic approximation in Fréchet spaces with basis. *Journal of the London Mathematical Society*, (2), **29**, 113-126, 1984.

[5] MUJICA, J. - Holomorphic approximation in infinite dimensional Riemann domains. *Studia Mathematica*, **82**, 107-134, 1985.

[6] NACHBIN, L. - On the topology of the space of all holomorphic functions on a given open subset. *Indagationes Mathematicae*, **29**, 366-368, 1967.

[7] NACHBIN, L. - *Topology on Spaces of Holomorphic Mappings*, Springer, New York, 1969.

[8] SCHOTTENLOHER, M. Polynomial approximation on compact sets. In: *Infinite Dimensional Holomorphy and Applications*, MATOS, M. C. (editor), North-Holland, Amsterdam, 1977, pp. 379-391.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

HOMOMORFISMOS UNITÁRIOS ENTRE ÁLGEBRAS DE BANACH UNIFORMES

CICERO NACHTIGALL *

Este trabalho tem por objetivo principal estudar as relações entre operadores de composição da forma $T_g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ e as respectivas aplicações $g : M_{\mathcal{A}} \to M_{\mathcal{A}}$, onde $M_{\mathcal{A}}$ é o espectro da uB-álgebra $\mathcal{A}$. Os resultados apresentados fazem parte da tese de doutorado que está sendo desenvolvida junto ao IMECC - UNICAMP, sob a orientação da professora Daniela Mariz Silva Vieira e co-orientação do professor Jorge Túlio Mujica Ascui.

Definição 0.1. Seja A uma álgebra de Banach com unidade e. Denotaremos por $M_{\mathcal{A}}$ o conjunto de todos os homomorfismos complexos não nulos da álgebra $\mathcal{A}$. Dizemos que $M_{\mathcal{A}}$ é o *espectro* de $\mathcal{A}$. Para cada $f \in \mathcal{A}$, definimos a função $\hat{f} : M_{\mathcal{A}} \to \mathbb{C}$ tal que $\hat{f}(\phi) = \phi(f)$, para toda $\phi \in M_{\mathcal{A}}$, onde $\hat{f}$ é chamada de transformação de Gelfand de f, e denotamos $\hat{A} = \{\hat{f}; f \in \mathcal{A}\}$. Chamamos de *topologia de Gelfand* em $M_{\mathcal{A}}$, a menor topologia que torna cada transformação de Gelfand contínua em $M_{\mathcal{A}}$. Assim, a topologia de Gelfand é a restrição da topologia fraca estrela de A' ao conjunto M_A e por isso, denotaremos esta topologia por $\sigma(A', A)$ Desta forma, $(M_{\mathcal{A}}, \sigma(A', A))$ é um conjunto compacto.

Definição 0.2. Uma *álgebra de Banach uniforme (uB-álgebra)* é uma álgebra de Banach comutativa unitária $\mathcal{A}$ tal que $\|f^2\| = \|f\|^2$, para toda $f \in \mathcal{A}$.

Se $\mathcal{A}$ é uma uB-álgebra, a aplicação $f \to \hat{f}$ é uma isometria entre $\mathcal{A}$ e $\hat{\mathcal{A}}$, e podemos considerar $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(M_{\mathcal{A}})$.

Definição 0.3. Sejam $\mathcal{A}$ uma uB-álgebra e $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ um operador linear. Dizemos que T é um *homomorfismo unitário* se T é multiplicativo e $T(e) = e$.

Existe uma correspondência bijetiva entre o conjunto dos homomorfismos unitários $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ e o conjunto das aplicações contínuas $g : M_{\mathcal{A}} \to M_{\mathcal{A}}$, tais que $f \circ g \in \mathcal{A}$ sempre que $f \in \mathcal{A}$ (Basta tomar $g = T'|_{M_{\mathcal{A}}}$).

Seja Y um conjunto qualquer. Denotamos por $\mathcal{B}(Y)$ o conjunto de todas as funções complexas definidas e limitadas em Y, ou seja,

$$\mathcal{B}(Y) = \left\{ f : Y \to \mathbb{C}; ||f|| = \sup_{y \in Y} |f(y)| < \infty \right\}$$

Assim, $(\mathcal{B}(Y), ||\cdot||)$ é uma uB-álgebra. Vamos dizer que um subconjunto $\mathcal{A}(Y)$ de $\mathcal{B}(Y)$ é uma *álgebra uniforme em* Y se $\mathcal{A}(Y)$ é uma subálgebra fechada de $(\mathcal{B}(Y), ||\cdot||)$ que contém as constantes e separa os pontos de Y (Veja [5], secção 3.4). Definimos em Y a topologia mais fraca tal que cada $f \in \mathcal{A}(Y)$ é contínua. A aplicação $\delta : Y \to M_{\mathcal{A}(Y)}$ dada por $\delta_x(f) = f(x)$, para toda $f \in \mathcal{A}$ é contínua e injetiva e podemos considerar $Y \subset M_{\mathcal{A}(Y)}$.

Dado um homomorfismo unitário $T : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{A}(Y)$, nem sempre temos que $g|_Y \subset Y$. Quando $g|_Y \subset Y$, diremos que T_g é um *operador de composição em* Y.

1 Resultados

Iremos agora apresentar os principais resultados obtidos sobre o tema, que generalizam alguns resultados apresentados em [1] e [3], com técnicas diferentes.

Teorema 1.1. Seja $\mathcal{A}(Y)$ uma álgebra uniforme. Um operador de composição em Y $T_g : \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{A}(Y)$ é compacto se e somente se $g(Y)$ é relativamente compacto em $(Y, ||\cdot||)$.

*Instituto de Física e Matemática , UFPel, RS, Brasil, ccnachtigall@yahoo.com.br

Corolário 1.1. Um operador de composição $T_g : \mathcal{H}^\infty(B_E) \to \mathcal{H}^\infty(B_E)$ é compacto se e somente se $g(B_E)$ é relativamente compacto em $(B_E, ||\cdot||)$.

O corolário 1.2 já havia sido demonstrado em [3], utilizando outras técnicas.

Teorema 1.2. Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach uniforme e $T = T_g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ um homomorfismo unitário. São equivalentes:

(a) T_g é um operador compacto;

(b) A aplicação $g : M_\mathcal{A} \to (M_\mathcal{A}, ||\cdot||)$ é contínua;

(c) $g(M_\mathcal{A})$ é compacto em $(M_\mathcal{A}, ||\cdot||)$.

Teorema 1.3. Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach uniforme e $T_g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ um homomorfismo unitário. São equivalentes:

(a) T_g é um operador fracamente compacto;

(b) A aplicação $g : M_\mathcal{A} \to (M_\mathcal{A}, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$ é contínua;

(c) $g(M_\mathcal{A})$ é compacto em $(M_\mathcal{A}, \sigma(\mathcal{A}', \mathcal{A}''))$.

Os Teoremas 1.2 e 1.3 são em parte inspirados pelo Teorema VI.7.1, p. 490, de [2].

Proposição 1.1. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach uniforme. São equivalentes:

(a) A topologia de Gelfand coincide com a topologia da norma em $M_\mathcal{A}$;

(b) A transformação de Gelfand $\Gamma : \mathcal{A} \to \hat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{C}(M_\mathcal{A})$ é uma inclusão compacta.

(c) Para cada uB-álgebra $\mathcal{B}$, todo homomorfismo unitário $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é compacto;

(d) A álgebra $\mathcal{A}$ é um espaço de dimensão finita.

A Proposição 1.1 generaliza o Teorema 1 de [1].

Proposição 1.2. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach uniforme. São equivalentes:

(a) A topologia de Gelfand coincide com a topologia fraca em $M_\mathcal{A}$;

(b) Para cada uB-álgebra $\mathcal{B}$, todo homomorfismo unitário $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é fracamente compacto;

(c) A aplicação de Gelfand $\Gamma : \mathcal{A} \to \hat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{C}(M_\mathcal{A})$ é uma inclusão fracamente compacta;

(d) A álgebra $\mathcal{A}$ é um espaço reflexivo.

Referências

[1] F. Behrouzi, *"Homomorphisms of certain Banach function algebras"*, Proc. Indian Acad. Sci. **112**(2) (2002), 331-336.

[2] N. Dunford, & Schwartz, J. *Linear Operators, Part I*, John Wiley & Sons, 1988.

[3] P. Galindo, M. Lindström and R. Ryan, *"Weakly compact composition operators between algebras of bounded analytic functions"*, American Mathematical Society, **128**(1) (1999), 149-155.

[4] P. Galindo and M. Lindstrom, *"Gleason parts and weakly compact homomorphisms between uniform Banach algebras"*, Monatsh. Math. **128** (1999), 89-97.

[5] P. Galindo, T. W. Gamelin and M. Lindstrom, *"Composition operators on uniform algebras and the pseudohyperbolic metric"*, J. Korean Math. Soc. **41** (2004), 1-20.

[6] T. Gamelin, *Uniform Algebras*, second edition, Amer. Math. Soc. Chelsea Publishing, 1984.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

Ordem de convergência para operadores de aproximação sobre a esfera

Ana C. Piantella * & Valdir A. Menegatto †

O objetivo deste trabalho é apresentar resultados sobre a ordem de convergência de certos operadores de aproximação sobre a esfera. Uma descrição mais detalhada é dada a seguir.

Seja S^m a esfera unitária em $\mathbb{R}^{m+1}$, com $m \geq 2$. Denotaremos por $d\sigma_m$ o elemento de superfície usual de S^m e por σ_m a sua área de superfície. Correspondente a $d\sigma_m$, consideraremos os espaços $L^p(S^m) := L^p(S^m, d\sigma_m)$, $1 \leq p < \infty$, com normas dadas por

$$\|f\|_p := \left(\frac{1}{\sigma_m} \int_{S^m} |f(x)|^p \, d\sigma_m(x) \right)^{1/p}, \quad f \in L^p(S^m).$$

O espaço das funções contínuas definidas em S^m será denotado por $C(S^m)$ com a norma uniforme dada por

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in S^m} |f(x)|, \quad f \in C(S^m).$$

Usaremos a letra X para denotar qualquer um dos espaços acima e $\| \cdot \|_X$ a norma correspondente.

Em Menegatto e Piantella [1] estudamos a aproximação na esfera por expansões de Fourier com pesos, analisando a convergência tanto no caso contínuo quanto no caso L^p. Mais especificamente, investigamos a aproximação de $f \in X$ por sequências $\{T_n(f)\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ na norma de X, sendo os operadores $T_n : X \to X$ definidos pelas somas

$$T_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=1}^{d_k^m} a_{kl}(n) \hat{f}(k,l) Y_{kl},$$

onde $\hat{f}(k,l)$ é o coeficiente de Fourier e os pesos $a_{kl}(n) \in \mathbb{R}$, $n, k \in \mathbb{N}$, $l = 1, 2, \ldots, d_k^m$. Aqui $\{Y_{kl} : l = 1, 2, \ldots, d_k^m\}$ denota um base ortonormal para o espaço dos harmônicos esféricos de grau k em $m+1$ variáveis. A ortogonalidade se refere ao produto interno usual de $L^2(S^m)$ dado por

$$\langle f, g \rangle_2 = \frac{1}{\sigma_m} \int_{S^m} f(y) \, \overline{g(y)} \, d\sigma_m(y), \quad f, g \in L^2(S^m).$$

O operador T_n pode ser escrito na forma

$$T_n f(x) = \frac{1}{\sigma_m} \int_{S^m} K_n(x,y) f(y) \, d\sigma_m(y), \quad x \in S^m,$$

onde

$$K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=1}^{d_k^m} a_{kl}(n) Y_{kl}(x) \, \overline{Y_{kl}(y)}, \quad x, y \in S^m.$$

O objetivo principal deste trabalho é analisar a razão de convergência para a aproximação $\|T_n(f) - f\|_X$ usando um módulo de suavidade esférico introduzido por Wehrens [3,4] e fortemente relacionado à derivada de Laplace-Beltrami. Tal módulo de suavidade é definido através da diferença esférica $\Delta_t := I - S_t^m$, $t \in (-1, 1)$, onde $I : X \to X$ é o operador identidade e S_t^m é o operador translação esférica dado por

$$S_t^m(f)(x) := \frac{1}{\sigma_{m-1}(1-t^2)^{(m-1)/2}} \int_{x \cdot y = t} f(y) dy, \quad f \in X, \quad x \in S^m,$$

*Faculdade de Matemática , UFU, MG, Brasil, anacarla@famat.ufu.br,
†ICMC, USP, SP, Brasil, e-mail: menegatt@icmc.usp.br. Este trabalho teve apoio financeiro da FAPEMIG.

sendo dy o elemento de medida da seção esférica $\{y \in S^m : x \cdot y = t\}$ e " $\cdot$ " o produto interno usual de $\mathbb{R}^{m+1}$. Devido ao fato de $\lim_{t\to 1^-} \|\Delta_t(f)\|_X = 0$ o operador diferença esférica é usado na definição de vários módulos de suavidade para funções definidas na esfera. Dessa forma, o r-ésimo módulo de suavidade esférico é definido por

$$\omega_r(\delta, f, X) := \sup\{\|\Delta_{t_1} \circ \Delta_{t_2} \circ \cdots \circ \Delta_{t_r}(f)\|_X : t_j \in [\delta, 1)\}, \quad f \in X, \quad -1 < \delta < 1,$$

onde $\Delta_t^r := \Delta_t \circ \Delta_t^{r-1}$, $r = 2, 3, \ldots$. Mais detalhes sobre este operador podem ser encontradas em Pawelke [2]. Neste trabalho usaremos o módulo de suavidade $\omega_1(\delta, f, X)$.

1 Resultados

Assumindo que o núcleo K_n é não negativo e bi-zonal, isto é, $a_{kl}(n) = a_{k1}(n)$, $k = 0, 1, \ldots$, $l = 1, 2, \ldots, d_k^m$, provamos alguns resultados sobre ordem de convergência do operador T_n. Dentre eles destacamos os seguintes:

Teorema 1.1. *Seja K_n um núcleo não negativo e bi-zonal, e $\varphi : \mathbb{Z}_+ \to (0, \infty)$ uma função tal que $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = 0$. Se $a_{01}(n) = 1$, $n = 0, 1, \ldots$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) $|1 - a_{11}(n)| = O(\varphi(n))$, quando $n \to \infty$;
(ii) Existe um inteiro positivo N_1 e uma constante positiva C tal que

$$\|T_n(f) - f\|_X \le C\, \omega_1(1 - \varphi(n), f, X), \quad f \in X, \quad n \ge N_1. \tag{1.1}$$

Impondo uma condição mais fraca nos coeficientes $a_{01}(n)$, a estimativa resultante passa a depender da norma da função a ser aproximada.

Teorema 1.2. *Seja K_n e φ como acima. Se $\lim_{n\to\infty} a_{01}(n) = 1$ e*

$$|1 - a_{01}(n)| = O(\varphi(n)) = |1 - a_{11}(n)|, \qquad (n \to \infty), \tag{1.2}$$

então existe um inteiro positivo N_0 e constantes C_1 and C_2 tais que

$$\|T_n(f) - f\|_X \le C_1\omega_1(1 - \varphi(n), f, X) + C_2\varphi(n)\|f\|_X, \quad n \ge N_0, \quad f \in X. \tag{1.3}$$

Utilizando a mesma técnica para demonstrar o teorema anterior provamos o seguinte resultado que fornece uma estimativa em função dos coeficientes $a_{01}(n)$ e $a_{11}(n)$.

Teorema 1.3. *Seja K_n como acima. Se $\lim_{n\to\infty} a_{01}(n) = 1$ e $a_{11}(n) < 1$, $n \ge N$, para algum inteiro positivo N então existe um inteiro positivo N_0 e uma constante positiva C' tal que*

$$\|T_n(f) - f\|_X \le C'\omega_1(a_{11}(n), f, X) + |1 - a_{01}(n)|\ \|f\|_X, \quad n \ge N_0, \quad f \in X. \tag{1.4}$$

Referências

[1] Menegatto, V. A. and Piantella, A. C. - Approximation on the sphere by weighted Fourier expansions. *Journal of Applied Mathematics.*, **4**, 321-340, 2005.
[2] Pawelke, S. - Über die Approximationsordnung bei Kugelfunktionen und algebraischen Polynomen. (German) *Tôhoku Math. J.* (2) **24**, 473-486, 1972.
[3] Wehrens, M. - Best approximation on the unit sphere in $\mathbb{R}^k$. *Functional analysis and approximation* (Oberwolfach, 1980), 233-245, *Internat. Ser. Numer. Math.*, **60**, Birkhäuser, Basel-Boston, Mass., 1981.
[4] Wehrens, M. - *Legendre-Transformationsmethoden und Approximation von Funktionen auf der Einheitskugel in* $\mathbb{R}^3$, Doctoral Dissertation, RWTH Aachen, 1980.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

EXISTÊNCIA E CONCENTRAÇÃO DE SOLUÇÕES PARA UM PROBLEMA BIHARMÔNICO SINGULARMENTE PERTURBADO

Marcos T. O. Pimenta * & Sérgio H. M. Soares †

Nesse trabalho vamos estudar questões sobre a existência de sequências de soluções que apresentam fenômeno de concentração, para o seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \epsilon^4\Delta^2 u + V(x)u & = & f(u) \ \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u \in H^2(\mathbb{R}^N), & & \end{array} \right. \tag{0.1}$$

onde $\epsilon > 0$, $N \geq 5$, a não-linearidade f é sublinear na origem e tem crescimento superlinear e subcrítico no infinito. O potencial V é positivo e satisfaz uma certa hipótese local. Mais especificamente, vamos supor que f satisfaça as hipóteses $(f_1) - (f_5)$, enquanto que V satisfaz $(V_1) - (V_2)$, onde:

(V_1) $V \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$,

(V_2) existe $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado e $x_0 \in \Omega$, tal que

$$V(x_0) = V_0 = \inf_{\mathbb{R}^N} V < \inf_{\partial\Omega} V,$$

(f_1) $f \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$,

(f_2) $f(0) = f'(0) = 0$,

(f_3) $\exists\ c_1, c_2 > 0$ e $p \in (1, 2^* - 1)$, tais que $|f(s)| \leq c_1|s| + c_2|s|^p$, $\forall s \in \mathbb{R}$, onde $2^* := \frac{2N}{N-4}$,

(f_4) $\exists\ \mu > 2$ tal que $0 < \mu F(s) \leq sf(s)$, $\forall s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

(f_5) $\frac{f(s)}{s}$ é crescente, $\forall s > 0$.

Desejamos provar o seguinte resultado.

Teorema 0.1. *Sejam V e f satisfazendo (V_1) e (V_2) e $(f_1) - (f_5)$, respectivamente. Então para toda sequência $\epsilon_n \to 0$, existe uma subsequência $\{\epsilon_k\}$ tal que (0.1) (com ϵ_k no lugar de ϵ) possui uma solução positiva $u_{\epsilon_k} \in H^2(\mathbb{R}^N)$. Ainda mais, sendo x_{ϵ_k} ponto de máximo de u_{ϵ_k}, então $x_{\epsilon_k} \in \Omega$ e ainda*

$$\lim_{k\to\infty} V(x_{\epsilon_k}) = \inf_{\mathbb{R}^N} V.$$

O problema (0.1) apresenta várias dificuldades na sua análise. A primeira delas é a perda de compacidade das imersões de Sobolev, devido ao domínio ser todo o $\mathbb{R}^N$. Para transpor essa dificuldade, é feita uma modificação na não-linearidade f, da mesma forma como feito em Del Pino e Felmer [3], de forma a torná-la linear a partir de certo valor e recuperar então a condição (PS) para o funcional energia associado. Outro problema é o fato de lidarmos com o Δ^2, operador este para o qual não são conhecidos resultados gerais sobre princípio do máximo, princípio de comparação, desigualdades do tipo Harnack, entre outros.

*Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação , USP, SP, Brasil, pimenta@icmc.br
†Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação , USP, SP, Brasil, e-mail: monari@icmc.usp.br

Existe uma vasta literatura para problemas como (0.1) envolvendo os operadores $-\Delta$ e $-\Delta_p$, entre eles citamos aqueles cujas idéias mais nos inspiraram, tais como Rabinowitz [4], Del Pino e Felmer [3], Wang [6] e Alves e Figueiredo [2].

A abordagem é variacional e consiste na modificação do problema (0.1) de forma a recuperar (PS). Após isso, faz-se uma comparação do nível minimax do problema modificado com o nível minimax do seguinte problema limite

$$\begin{cases} \Delta^2 u + V_0 u = f(u) & \text{em } \mathbb{R}^N \\ u \in H^2(\mathbb{R}^N), \end{cases} . \tag{0.2}$$

Disto decorre que a sequência de soluções é limitada, o que possibilita analisar o comportamento de uma sequência de translações adequadas das mesmas. Nesse momento, uma análise fina dessas translações é necessária para provar-se um decaimento uniforme das mesmas, de maneira a se recuperar as soluções do problema original. Nesse passo final, é essencial utilizar-se de estimativas na norma $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ para soluções de problemas biharmônicos subcríticos, contidas em Ramos [5], bem como estimativas contidas em Agmon [1].

Referências

[1] AGMON, S. L. - *The L^p approach to the Dirichlet problem.*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 13, 405 - 448 (1959).

[2] ALVES, C. O. E FIGUEIREDO, G. - *Existence and multiplicity of positive solutions to a p-Laplacian equation in* $\mathbb{R}^N$, Differential and Integral Equations, Vol. 19, No 2, 143 - 162 (2006).

[3] DEL PINO, M. E FELMER, P. - *Local Moutain Pass for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Calculus of Variations, Vol. 4, 121 - 137 (1996).

[4] RABINOWITZ, P. - *On a class of nonlinear Schrödinger equations*, ZAMP, Vol.43, 270 - 291 (1992).

[5] RAMOS, M. - *Uniform estimates for the biharmonic operator in $\mathbb{R}^N$ and applications*, Commun. Appl. Analysis, Vol.8, No. 4, 435 - 457 (2009).

[6] WANG, X. - *On concentration of positive bound states of nonlinear Schödinger equations*, Communications in mathematical Physics, Vol. 153, 229 - 244 (1993).

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

ON SUMMABILITY OF NONLINEAR MAPPINGS: A NEW APPROACH

Daniel Pellegrino * and Joedson Santos †

Pietsch Domination-Factorization Theorems play a central role in the theory of absolutely summing linear operators and provide an unexpected and beautiful measure theoretic taste in the theory (for details we mention the monographs [5, 6]). In the last decade several different nonlinear versions of Pietsch Domination-Factorization Theorem have appeared in the literature (see, for example, [1, 2, 3, 7, 8, 9]); for this reason, in [4], an abstract unified approach to Pietsch-type results was presented as an attempt to show that all the known Pietsch-type theorems were particular cases of a unified general version. In this paper we deal with a case not covered by [4] and characterize the arbitrary nonlinear mappings $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ between Banach spaces that satisfy a quite natural Pietsch Domination-type theorem around a given point $(a_1, ..., a_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$; to this end we prove a general Pietsch-type theorem which contains, as particular cases, all the previous versions (to the best of our knowledge) of Pietsch-Domination Theorems.

1 Results

If $X_1, ..., X_n, Y$ are arbitrary sets, $Map(X_1, ..., X_n; Y)$ will denote the set of all arbitrary mappings from $X_1\times\cdots\times X_n$ to Y. Let $0 < q_1, ..., q_n < \infty$ be such that $1/q = \sum_{j=1}^{n} 1/q_j$ and $X_1, ..., X_n, Y$ be Banach spaces:

Problem 1.1. *If $(a_1, ..., a_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$, what kind of mappings $f \in Map(X_1, ..., X_n; Y)$ satisfy, for some $C > 0$ and Borel probabilities μ_k on $B_{X_K^*}$, $k = 1, ..., n$, the inequality*

$$\left\|f(a_1 + x^{(1)}, ..., a_n + x^{(n)}) - f(a_1, ..., a_n)\right\| \leq C \prod_{k=1}^{n} \left(\int_{B_{X_k^*}} \left|\varphi(x^{(k)})\right|^{q_k} d\mu_k\right)^{\frac{1}{q_k}} \tag{1.1}$$

for all $x^{(j)} \in X_j$, $j = 1, ..., n$?

A map satisfying the inequality (1.1) is said $(q_1, ..., q_n)$-dominated at $(a_1, ..., a_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$. The following result (which is a particular case of Theorem 1.2) answers the aforementioned problem and arises the idea of weighted summability:

Theorem 1.1. *A map $f \in Map(X_1, ..., X_n; Y)$ is $(q_1, ..., q_n)$-dominated at $(a_1, ..., a_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$ if and only if there is a $C > 0$ such that*

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\left(\left|b_j^{(1)}...b_j^{(n)}\right| \left\|f(a_1 + x_j^{(1)}, ..., a_n + x_j^{(n)}) - f(a_1, ..., a_n)\right\|\right)^{q}\right)^{1/q} \tag{1.2}$$

$$\leq C \prod_{k=1}^{n} \sup_{\varphi\in B_{X_k^*}} \left(\sum_{j=1}^{m}\left(\left|b_j^{(k)}\right|\left|\varphi(x_j^{(k)})\right|\right)^{q_k}\right)^{1/q_k}$$

for every positive integer m, $(x_j^{(k)}, b_j^{(k)}) \in X_k \times \mathbb{K}$, with $(j, k) \in \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\}$.

Let $X_1, ..., X_n, Y$ and $E_1, ..., E_r$ be (arbitrary) non-void sets, $\mathcal{H}$ be a family of mappings from $X_1 \times \cdots \times X_n$ to Y . Let also $K_1, .., K_t$ be compact Hausdorff topological spaces, $G_1, ..., G_t$ be Banach spaces and suppose that the maps

$$\begin{cases} R_j \colon K_j \times E_1 \times \cdots \times E_r \times G_j \longrightarrow [0, \infty),\ j = 1, ..., t \\ S \colon \mathcal{H} \times E_1 \times \cdots \times E_r \times G_1 \times \cdots \times G_t \longrightarrow [0, \infty) \end{cases}$$

*Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, dmpellegrino@gmail.com.
†Universidade Federal de Sergipe, Itabaiana, joedsonsr@yahoo.com.br.

satisfy:
(1) For each $x^{(l)} \in E_l$ and $b \in G_j$, with $(j,l) \in \{1,...,t\} \times \{1,...,r\}$ the mapping

$$(R_j)_{x^{(1)},...,x^{(r)},b} : K_j \longrightarrow [0,\infty) \text{ defined by } \ (R_j)_{x^{(1)},...,x^{(r)},b}(\varphi) = R_j(\varphi, x^{(1)},...,x^{(r)},b)$$

is continuous.
(2) The following inequalities hold:

$$\begin{cases} R_j(\varphi, x^{(1)},...,x^{(r)}, \eta_j b^{(j)}) \leq \eta_j R_j\left(\varphi, x^{(1)},...,x^{(r)}, b^{(j)}\right) \\ S(f, x^{(1)},...,x^{(r)}, \alpha_1 b^{(1)},...,\alpha_t b^{(t)}) \geq \alpha_1...\alpha_t S(f, x^{(1)},...,x^{(r)}, b^{(1)},...,b^{(t)}) \end{cases}$$

for every $\varphi \in K_j, x^{(l)} \in E_l$ (with $l = 1,...,r$), $0 \leq \eta_j, \alpha_j \leq 1$, $b_j \in G_j$, with $j = 1,...,t$ and $f \in \mathcal{H}$.

Definition 1.1. *If $0 < p_1,...,p_t, p < \infty$, with $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_t}$, a mapping $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ in $\mathcal{H}$ is said to be $R_1,...,R_t$-S-abstract $(p_1,...,p_t)$-summing if there is a constant $C > 0$ so that*

$$\left(\sum_{j=1}^{m} S(f, x_j^{(1)},...,x_j^{(r)}, b_j^{(1)},...,b_j^{(t)})^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{k=1}^{t} \sup_{\varphi \in K_k} \left(\sum_{j=1}^{m} R_k\left(\varphi, x_j^{(1)},...,x_j^{(r)}, b_j^{(k)}\right)^{p_k}\right)^{\frac{1}{p_k}} \tag{1.3}$$

for all $x_1^{(s)},\ldots,x_m^{(s)} \in E_s$, $b_1^{(l)},\ldots,b_m^{(l)} \in G_l$, $m \in \mathbb{N}$ and $(s,l) \in \{1,...,r\} \times \{1,...,t\}$.

Theorem 1.2. *A map $f \in \mathcal{H}$ is $R_1,...,R_t$-S-abstract $(p_1,...,p_t)$-summing if and only if there is a constant $C > 0$ and Borel probability measures μ_j on K_j such that*

$$S(f, x^{(1)},...,x^{(r)}, b^{(1)},...,b^{(t)}) \leq C \prod_{j=1}^{t} \left(\int_{K_j} R_j\left(\varphi, x^{(1)},...,x^{(r)}, b^{(j)}\right)^{p_j} d\mu_j\right)^{1/p_j} \tag{1.4}$$

for all $x^{(l)} \in E_l$, $l = 1,...,r$ and $b^{(j)} \in G_j$, with $j = 1,...,t$.

Choosing the appropriate parameter, Theorem 1.1 follows as an straightforward application of Theorem 1.2.

References

[1] D. Achour and L. Mezrag - *On the Cohen strongly p-summing multilinear operators*, J. Math. Anal. Appl. **327** (2007), 550-563.
[2] G. Botelho, D. Pellegrino and P. Rueda - *Pietsch's factorization theorem for dominated polynomials*, J. Funct. Anal **243** (2007), 257-269.
[3] G. Botelho, D. Pellegrino and P. Rueda - *A nonlinear Pietsch Domination Theorem*, Monatsh. Math. **158** (2009), 247-257.
[4] G. Botelho, D. Pellegrino and P. Rueda - *A unified Pietsch Domination Theorem*, J. Math. Anal. Appl. **365** (2010), 269-276.
[5] A. Defant and K. Floret - *Tensor Norms And Operator Ideals*, North-Holland, Amsterdam, 1992.
[6] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge - *Absolutely summing operators*, Cambridge University Press 1995.
[7] J. Farmer and W. B. Johnson - *Lipschitz p-summing operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), 2989-2995.
[8] S. Geiss - *Ideale multilinearer Abbildungen*, Diplomarbeit, 1985.
[9] A. Pietsch - *Operator Ideals*, North-Holland, 1980.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

EXISTENCE OF INTEGRODIFFERENTIAL SOLUTION FOR A CLASS OF IMPULSIVE ABSTRACT PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS.

Marcos Rabelo and Giovana Siracusa *

Resumo

In this paper we study the existence of integrodifferential solutions for a class of impulsive abstract partial differential equations.

1 Introduction

In this work we establish existence result of solutions for a class of impulsive functional differential equations which can be described in the following form

$$\frac{d}{dt}D(t,u_t) = A(t)D(t,u_t) + f(t,u_t,\int_0^t e(t,s,u_s)ds),\ t \in [0,b],\ t \neq t_i,\ i \in \mathbb{Z}, \tag{1.1}$$

$$u_0 = \phi,\ \phi \in \mathcal{B}, \tag{1.2}$$

$$\Delta u(t_i) = I_i(u_{t_i}), \tag{1.3}$$

where $A(t) : D(A(t)) \subset \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ is a family of unbounded linear closed operators such that for each $t \in [0,b]$, $A(t)$ is the infinitesimal generator of å compact semigroup of linear bounded operators $(S_t(s))_{s\geq 0}$ on a Banach space $\mathbb{X}$, endowed with the norm $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$; the history $u_t : (-\infty, 0] \to \mathbb{X}$ is defined as $u_t(\theta) = u(t+\theta), \theta \leq 0$; the phase space $\mathcal{B}$ is defined axiomatically; the operator $D(t,\phi) = \phi(0) + g(t,\phi)$, the functions $g : [0,b] \times \mathcal{B} \to \mathbb{X}$, $f : [0,b] \times \mathcal{B} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ and $I_i : \mathbb{X} \to \mathbb{X}, i \in \mathbb{Z}$ are appropriate functions for all $i \in \mathbb{N}$; $t_i \in \mathbb{Z}$ is a sequence of fixed real numbers and the symbol $\triangle\xi(t)$ represents the jump of the function ξ at t; this means that $\triangle\xi(t) = \xi(t^+) - \xi(t^-)$, where the notation $\xi(t^+)$ and $\xi(t^-)$ represent respectively the right hand side and the left hand side limits of function ξ at t.

2 Existence Result

Next we state some important conditions used in the proof of our result.

(H_1) The function $f : [0,b] \times \mathcal{B} \to \mathbb{X}$ satisfies the following condition

- $(H_{1.1})$ For each bounded set B of $\mathcal{PC}$ the family of functions $\{f(t, y_t + u_t),\ u \in B\}$ is equi-continuous.
- $(H_{1.2})$ There are constants c_1 and c_2 such that $\|f(t,\phi)\| \leq c_1\|\phi\|_{\mathcal{B}} + c_2$, for all $t \geq 0$ and $\phi \in \mathcal{B}$.

(H_2) The function $g : [0,b] \times \mathcal{B} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ satisfies the following conditions.

- $(H_{2.1})$ The function $(x,\phi) \to g(t,\phi,x)$ is continuous for almost everywhere $t \in [0,b]$.
- $(H_{2.2})$ The $t \to g(t,\phi,x)$ is a measurable function for each $(\phi,x) \in \mathcal{B} \times \mathbb{X}$.
- $(H_{2.3})$ There is a positive continuous function $m : [0,b] \to [0,\infty)$ and a nondecreasing positive continuous function $\psi : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ such that

$$\|g(t,\phi,x)\|_{\mathbb{X}} \leq m(t)\psi(\|\phi\|_{\mathcal{B}} + \|x\|_{\mathbb{X}}),$$

for every $(t,\phi,x) \in [0,b] \times \mathcal{B} \times \mathbb{X}$.

*Departamento de Matemática, UFPE, PE, Brasil, rabelo@dmat.ufpe.br, gisiracusa@gmail.com

(H_3) The function $e : [0,b] \times [0,b] \times \mathcal{B} \to \mathbb{X}$ satisfies the following conditions.

$(H_{3.1})$ The function $\phi \to e(t,s,\phi)$ is continuous almost everywhere for all $t,s \in [0,b]$.

$(H_{3.2})$ The function $(t,s) \to e(t,s,\phi)$ is strong measurable for each $\phi \in \mathcal{B}$.

$(H_{3.3})$ There is a positive continuous function $p : [0,b] \to [0,\infty)$ and a nondecreasing integrable positive function $\Omega : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ such that

$$\|e(t,s,\phi)\|_{\mathbb{X}} \leq p(s)\Omega(\|\phi\|_{\mathcal{B}}),$$

for all $(t,s,\phi) \in [0,b] \times [0,b] \times \mathcal{B}$.

Teorema 2.1. *Assume that the conditions $(H_1) - (H_3)$ are satisfied. In addition, suppose that the following assumptions hold.*

(i) *The function $f : [0,b] \times \mathcal{B} \to \mathbb{X}$ is completely continuous.*

(ii) *The operators I_i are completely continuous and there are positive constants d_i, such that*

$$\|I_i(x)\|_{\mathbb{X}} \leq d_i,$$

for all $i = 1,\ldots,m$, and $x \in \mathbb{X}$.

(iii) Let B and $\widetilde{B}$ be bounded sets of Λ and $\mathbb{X}$ respectively. Then for each $t \in [0,b]$, the set

$$\left\{U(t,s)g(s,x_s+y_s,z),\ t,s \in [0,b],\ x \in B,\ z \in \widetilde{B}\right\},$$

is relatively compact in $\mathbb{X}$, and $y(t)$ is a local mild solution of problem (1.1)-(1.3).

If $1 - \overline{K}(L_f + \widetilde{M}\sum_{i=1}^m L_i) > 0$ and

$$\int_0^t \xi(s)ds < \int_{\widetilde{C}}^{\infty} \frac{ds}{\psi(s)+\Omega(s)}ds,$$

where

$$\widetilde{C} = \frac{(\overline{K}\widetilde{M} + \overline{K}\widetilde{M}L_f + \overline{M})\|\phi\| + c_2}{1 - \overline{K}(L_f + \widetilde{M}\sum_{i=1}^m L_i)},$$

then problem (1.1)-(1.3) has a mild solution.

Referências

[1] J. Y. Park, K. Balachandran, N. Annapoorani, *Existence results for impulsive neutral functional integrodifferential equations with infinite delay,* Nonlinear Anal., 71 (2009), 3152-3162.

[2] K. Balachandran, N. Annapoorani, *Existence results for impulsive neutral evolution integrodifferential equations with infinite delay,* Nonlinear Anal. Hybrid Syst. 3 (2009), 674-684.

[3] A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Applied Mathematical Sciences, **44**, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

PROBLEMA DE AMBROSETTI-PRODI PARA SISTEMAS ELÍPTICOS COM CRESCIMENTO TIPO TRUDINGER-MOSER UNILATERAL

BRUNO RIBEIRO *

Estudamos a seguinte classe de sistemas elípticos

$$\begin{aligned} -\Delta u &= a(x)u + b(x)v + H_u(x, u_+, v_+) + f_1(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ -\Delta v &= b(x)u + c(x)v + H_v(x, u_+, v_+) + f_2(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0, v = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{aligned} \tag{0.1}$$

onde Ω é limitado e suave em $\mathbb{R}^2$, H é uma função de classe C^1 em $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ satisfazendo uma condição de crescimento tipo Trudinger-Moser uniformemente em $x \in \Omega$. Supomos $f_1, f_2 \in L^r(\Omega)$, $r > 2$. Analisando a interação do espectro da matriz $A \in C(\overline{\Omega}, M_{2\times 2}(\mathbb{R}))$ dada por

$$A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ b(x) & c(x) \end{pmatrix}$$

com o espectro de $(-\Delta, H_0^1)$, provamos a existência de duas soluções para uma classe apropriada de termos não homogêneos f_1 e f_2.

Este trabalho estende os resultados para o caso escalar em [1]. No entanto, adotamos técnicas diferentes daquelas lá utilizadas, a fim de melhor explicar algumas estimativas cruciais necessárias.

Para a parte linear do problema, fazemos algumas generalizações que estendem resultados prévios obtidos em [2,3,4]. Supondo A constante, denotemos μ_1, μ_2 os seus autovalores. Caso contrário, consideremos o seguinte problema de autovalor com peso $-\Delta U = \lambda A(x)U$ em Ω, $U = 0$ sobre $\partial\Omega$ e denotemos por $0 < \lambda_1^A < \lambda_2^A \le \lambda_3^A \le \dots$ a sequência de autovalores para este problema. Supomos então qualquer uma das hipóteses abaixo

(1) A é constante e: $(\mathbf{A_1})$ $\mu_1 \le \mu_2 < \lambda_1$ ou $(\mathbf{A_2})$ existe $k \ge 1$ tal que $\lambda_k < \mu_1 \le \mu_2 < \lambda_{k+1}$;

(2) $b(x) \ge 0$ para todo $x \in \Omega$ e: $\max_{x\in\Omega} \max\{a(x), c(x)\} > 0$ e $(\mathbf{A_3})$ $1 < \lambda_1^A$ ou $(\mathbf{A_4})$ existe $k \ge 1$ tal que $\lambda_k^A < 1 < \lambda_{k+1}^A$,

e as seguintes condições sobre H

(H_1) ∇H é crítica: Existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|U|\to\infty} \frac{|\nabla H(x, U)|}{e^{\alpha |U|^2}} = \begin{cases} 0 & \text{para todo } \alpha > \alpha_0 \\ +\infty & \text{para todo } \alpha < \alpha_0 \end{cases}$$

uniformemente em $x \in \Omega$.

(H_2) $H_u(x, 0, v) = H_v(x, u, 0) = 0 \quad \forall u, v \ge 0$;

(H_3) $\displaystyle\lim_{|U|\to\infty} \frac{H(x, U) + |\nabla H(x, U)|}{(\nabla H(x, U), U)_{\mathbb{R}^2}} = 0$, uniformemente em $x \in \Omega$;

(H_4) $|\nabla H(x, U)| = o(|U|)$ quando $|U| \to 0$ uniformemente em $x \in \Omega$.

(H_5) Para todo $\gamma \ge 0$ existe $c_\gamma \ge 0$ tal que $(\nabla H(x, s, s), (s, s))_{\mathbb{R}^2} \ge \gamma h(x, s) e^{\alpha_0 s^2}$ para todo $s \ge c_\gamma$, $x \in \Omega$, onde $h : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ satisfaz $\liminf\limits_{s\to+\infty} \log(h(x, s)) s^{-1} > 0$, uniformemente em $x \in \Omega$.

*Dept. de Matemática, UFPB, PB, Brasil, bruno@mat.ufpb.br

1 Teoremas

Teorema 1.1. *Supondo uma dentre as condições (A_1)-(A_4) então existe uma região $\mathcal{L}$ ilimitada de $L^r(\Omega) \times L^r(\Omega)$ tal que se $(f_1, f_2) \in \mathcal{L}$ o problema (0.1) possui uma solução negativa $\Phi = (\varphi, \psi)$.*

Ideia da prova: Tal região é precisamente aquela em que a solução do problema linear

$$\begin{aligned} -\Delta u &= a(x)u + b(x)v + f_1(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ -\Delta v &= b(x)u + c(x)v + f_2(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0, v = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{aligned}$$

é negativa. A prova da existência desta região é dada por uma parametrização adequada na função (f_1, f_2). ■

A partir desta solução negativa, temos então o seguinte resultado de multiplicidade

Teorema 1.2. *Seja $(f_1, f_2) \in \mathcal{L}$, onde $\mathcal{L}$ é dado no teorema anterior. Suponha $(H_1) - (H_5)$ e qualquer uma dentre as hipóteses $(A_1) - (A_4)$. Então (0.1) possui uma segunda solução.*

Ideia da prova: Provamos a existência de solução não-trivial para o problema homogêneo

$$\begin{aligned} -\Delta u &= a(x)u + b(x)v + H_u(x, (u+\varphi)_+, (v+\psi)_+) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ -\Delta v &= b(x)u + c(x)v + H_v(x, (u+\varphi)_+, (v+\psi)_+) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0, v = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{aligned}$$

pois uma translação de tal solução será a segunda solução de (0.1). Observamos que $\Phi = (\varphi, \psi)$ torna-se uma "perturbação" na não-linearidade H. Provamos assim a existência de um nível minimax quase crítico para o funcional associado a este problema e, a fim de provar a existência de um ponto crítico não-trivial neste nível, fazemos com que a função de Moser que o determina esteja suportada em regiões suficientemente próximas de $\partial\Omega$, pois Φ é aproximadamente nula nestas regiões, tornando possível o controle adequado desta perturbação. ■

Referências

[1] M. CALANCHI, B. RUF E Z. ZHANG - *Elliptic equations in $\mathbb{R}^2$ with one-sided exponential growth*, Commun. Contemp. Math., **6** (2004), 947-971.

[2] D. C. DE MORAIS FILHO - *A variational approach to an Ambrosetti-Prodi type problem for a system of elliptic equations*, Nonlinear Anal., **26** (1996), 1655-1668.

[3] D. C. DE MORAIS FILHO E F. PEREIRA - *Critical Ambrosetti-Prodi type problems for systems of elliptic equations*, Nonlinear Anal., **68** (2008), 194-207.

[4] B. RIBEIRO - *The Ambrosetti-Prodi problem for gradient elliptic systems with critical homogeneous nonlinearity*, J. Math. Anal. Appl., **363** (2010), 606-617.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

ANÁLISE E SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE UM MODELO DE KIRCHHOFF COM DENSIDADE VARIÁVEL

MAURO A. RINCON * & MARIA CRISTINA C. VIEIRA† & TANIA NUNES RABELLO‡

1 Resumo

Em 1883 G. Kirchhoff [8] deduziu um modelo para o problema físico de vibração vertical de pequenas cordas elásticas, considerando a tensão variável com o tempo t, e representado por $\tau_(0)$ a tensão da corda na posição de repouso $[\alpha_(0),(\beta)_(0)]$. O modelo proposto por Kirchhoff é

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[\frac{\tau_0}{m} + \frac{k}{2m\gamma_0}\int_{\alpha_0}^{\beta_0}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{1.1}$$

Observe que $\gamma_0 = \beta_0 - \alpha_0$, o comprimento da corda na posição inicial, i.e. $[\alpha_0, \beta_0]$, $k = \sigma E$ onde E é o modulo de Young do material da corda, σ a área da seção transversal da corda, considerada constante.

Existe uma modificação do modelo de Kirchhoff quando os extremos da corda são funções dependentes do tempo, isto é, para cada $t > 0$, $[\alpha(t), \beta(t)]$, com $0 < \alpha(t) \leq \alpha_0 < \beta_0 \leq \beta(t)$, para todo $t > 0$. Essa é uma pertubação do modelo(1.1), com representação dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[\frac{\tau_0}{m} + \frac{k}{m}\frac{\gamma(t)-\gamma_0}{\gamma_0} + \frac{k}{2m\gamma(t)}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{1.2}$$

onde $\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t)$, $\alpha_0 = \alpha(0)$, $\beta_0 = \beta(0)$, $k = \sigma E$ constante. A dedução e os resultados de existência e unicidade do modelo com fronteira móvel foram feitas em [9]. Simulações numéricas para o caso unidimensional e bidimensional foram feitas em [11] e [12].

Recentemente Medeiros [10], vem deduzindo um modelo, considerando que a densidade da corda seja não homogênea, ou seja $\rho = \rho(x)$, $\forall x \in [\alpha_0, \beta_0]$, onde ρ é a massa por unidade de comprimento. Além disso, o modelo supõe que a seção transversal da corda seja variável com x, e com o tempo $t \geq 0$, ou seja $\sigma = \sigma(x,t)$.

Com essa hipóteses e procedendo de forma análoga à dedução do modelo [9], foi obtido um modelo para pequenas vibrações verticais da corda elástica, chamada de Operador de Pertubação de Kirchhoff, dado por:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[a(x,t) + b(x,t)\int_{\alpha_0}^{\beta_0}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \\ &- \left[c(x,t)\int_{\alpha_0}^{\beta_0}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]\frac{\partial u}{\partial x} + d(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} = 0,\end{aligned} \tag{1.3}$$

onde foi adicionado os termos viscosos $d(x,t)$ e $\partial u/\partial t$.

2 Método Numérico

Usando a Método de Galerkin associado a formulação variacional, definido as funções bases de $V_m = [\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_m]$ como polinômios por partes e definindo as matrizes associadas, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais

*Instituto de Matemática ,UFRJ, RJ, Brasil, rincon@dcc.ufrj.br
†Instituto Tecnológico de Aeronáutica, IEFM, SP, Brasil, cristinavieira@directnet.com.br
‡Instituto Tecnológico de Aeronáutica, IEFM, SP, Brasil, tania@ita.br

ordinárias:

$$A(t)d''(t) + B(t)d'(t) + C(t)d(t) = 0,$$

onde A, B e C são matrizes quadradas e dependentes de t. Usando o método β-Newmark, podemos discretizar o sistema de EDO e obter a solução numérica para cada tempo discreto $t_n = n\Delta t$.

Neste trabalho, estamos interessados na resolução do sistema linear associado e assim obter a solução numérica aproximada para um modelo de pequenas vibrações transversais em cordas elásticas não homogêneas (1.3). O método numérico descrito utiliza o método de elementos finitos acoplado ao método das diferenças finitas para obtenção da solução numérica aproximada do modelo de Kirchhoff para uma corda não homogênea e alguns exemplos numéricos são apresentados para validação do método numérico e do modelo.

Referências

[1] AUBIN, J.P. *Un théorem de compacité* , C.R. Aca. Sci. t. 256 (1963) pp. 1042-1044.

[2] BERNSTEIN, S. - *Sur une classe d'équations fonctionelles aux derivées partielles*, Iso SSSR Math. 4 (1940) pp. 7-20.

[3] BREZIS, H. - *Analyse Fonctionelle (Théorie et Applications)*, Masson, Paris 1983.

[4]CARRIER; C.E.,*On the vibrations problem of elastic strings*, Q.J. Appl. Math. (1953), pp. 151-165.

[7] D'ALEMBERT,J., *Opuscules Mathématiques*, Tome Premier, Paris, 1761.

[8] KIRCHHOFF,G.,*Vorlesungen der Mechanik*, Tauber, Leipzig (1883) §7, p. 444.

[9] MEDEIROS, L.A.; LIMACO, J.; MENEZES,S.B - *Vibrations of elastic strings (Mathematical Aspects)*, Journal of Computational Analysis and Applications, Part one, Vol. 4, n^2, April 2002, pp. 91-127, Part two, Vol. 4, n^3, July 2002, pp. 211-263.

[10]MEDEIROS, L.A.; VIEIRA, M.C.C, RABELLO, T.N.- *On a Perturbation of the Kirchhoff Operator.* Em desenvolvimento.

[11]RINCON, M.A.; LIU, I.S - *Effect of a Moving Boundaries on the Vibrating Elastic String.* Applied Numerical Mathematics [ISSN 0168-9274] - Vol. 47, N^o.2, 159-172 (2003).

[12]RINCON, M.A.; RODRIGUES, R.D. - *Numerical Solution for the Model of Vibrating Elastic Membrane with Moving Boundary* . Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation [ISSN 1007-5704], Vol. 12, N^o 6, 1089-1100, (2007).

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA-Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

TRANSIENT HEAT SOURCE RECONSTRUCTION FROM CONSISTENT CAUCHY DATA

NILSON C. ROBERTY * & MARCELO L. S. RAINHA †

By introducing the definition of a Extended Dirichlet to Neumann map in the time space bounded regular cylinder $Q := I \times \Omega$ with boundary $\partial Q = \overline{\Sigma} \cup \Omega_0 \cup \Omega_T$, where $\Sigma := I \times \Gamma$, Ω_0 and Ω_T are, respectively, the cylinders'lateral, bottom and the top sections and the adoption of the anisotropic Sobolev-Hilbert spaces [1] we can treat the inverse problem for reconstruction of a transient source inside the time space cylinder with methods similar to that used in the analysis of the stationary source reconstruction problem. The direct transient heat source initial boundary value problem consists in finding $u(t,x)$ with $(t,x) \in Q$ given a boundary input $g(t,x)$ with $(t,x) \in \overline{\Sigma}$, an initial input $u_0(x)$ with $(t,x) \in \Omega_0$ and a source distribution $f(t,x)$ with $(t,x) \in Q$ that verifies the problem :

$$(P_{u_0,g,f}) \begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \text{in } Q, \\ u = u_0 & \text{in } \Omega_0, \\ u = g & \text{on } \Sigma. \end{cases} \tag{0.1}$$

and Dirichlet data compatibility condition, $u_0 = g$ at the time-space cylinder corner Γ_0. By noting that for the two more important spaces for applications are $H^{2,1}(Q)$ and $H^{1,\frac{1}{2}}(Q)$, for the first only the normal trace γ_1 is onto. For the second, both the traces on lateral boundary are onto and that in both cases the traces on initial and final time are not onto and since we need traces for treat non homogeneous problems such as 0.1, $P_{u_0,g,f}$ with its associated inverse source problem, we will introduces the following definition:

Definition 0.1. *By Consistent Cauchy data associated with problem 0.1 we mean the functions:*

$$(u_0, g, u_T, g_\nu) \in (\gamma_0, \gamma, \gamma_T, \gamma_1)[H^{r,s}] \subset H^{r-\frac{r}{2s}}(\Omega_0) \times H^{r-\frac{1}{2}, s-\frac{s}{2r}}(\Sigma) \times H^{r-\frac{r}{2s}}(\Omega_T) \times H^{r-\frac{3}{2}, s-\frac{3s}{2r}}(\Sigma) \tag{0.2}$$

which by the first trace Theorem, Lions and Magenes [1], is well defined.

Definition 0.2. *The Extended Dirichlet to Neumann map for the problem 0.1*

$$\Lambda^f_{\Omega,\Sigma} : H^{2r+1}(\Omega_0) \times H^{2r+\frac{3}{2}, r+\frac{3}{4}}(\Sigma)) \to H^{2r+1}(\Omega_T) \times H^{2r+\frac{1}{2}, r+\frac{1}{4}}(\Sigma); \tag{0.3}$$

defined by

$$\Lambda^f_{\Omega,\Sigma}[(u_0, g)] = (\gamma_T, \gamma_1) \circ S[u_0, g, f] = (u|_{\Omega_T}, \partial_\nu u|_{\partial\Omega}) \tag{0.4}$$

when $u = S[u_0, g, f] \in H^{2r+2,r+1}(Q)$ is solution of problem 0.1 with initial data $(u_0, g) = (u|_{\Omega_0}, u|_\Sigma)$.

The inverse source problem $IP^f_{(u_0,g),(u_T,g^\nu)}$ is: To find $f \in H^{2r,r}(Q)$ such that

$$(IP^f_{(u_0,g),(u_T,g^\nu)}) \left\{ \; (u_T, g^\nu) = \Lambda^f_{\Omega,\Sigma}(u_0, g) \right. \tag{0.5}$$

for all given data pair $(u_0, g) \times (u_T, g^\nu)$ corresponding to different solutions to the direct problem.

Definition 0.3. *Consider two problems $P_{u_0,g,f}$ and $P_{u_0,g,0}$, one with source f and the other with zero source, but both with the same consistent initial time and Dirichlet data. By the Relative Extended Dirichlet to Neumann map we means the application:*

$$\Lambda^f_{\Omega,\Sigma} - \Lambda^0_{\Omega,\Sigma} : H^{2r+1}(\Omega_0) \times H^{2r+\frac{3}{2}, r+\frac{3}{4}}(\Sigma)) \to H^{2r+1}(\Omega_T) \times H^{2r+\frac{1}{2}, r+\frac{1}{4}}(\Sigma). \tag{0.6}$$

Definition 0.4. *We call a class of consistent data $\mathcal{R}$ regular if $(\Lambda^f_{\Omega,\Sigma} - \Lambda^0_{\Omega,\Sigma})[u_0, g] \in H^1(\Omega_T) \times H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma)$*

*Programa de Engenharia Nuclear , COPPE-UFRJ, RJ, Brasil, nilson@nuclear.ufrj.br
†Programa de Engenharia Nuclear , COPPE-UFRJ, RJ, Brasil, mrainha@nuclear.ufrj.br

1 Mathematical Results

Lemma 1.1. *Let u_j, $j = 1,2,3,...$ be different solutions of problem 0.1 with the same source $f \in L^2(Q)$ and different initial time and Dirichlet data (u_{0_j}, g_j), $j = 1,2,3,...$, respectively. Let G be the Green function. Then*

- *(i) The Relative Extended Dirichlet to Newman operator $\Lambda^f_{\Omega,\Sigma} - \Lambda^0_{\Omega,\Sigma}$ is an operator whose functional value depends only on the source function $f \in H^{2r,r}(Q)$, but is independent of the initial time and Dirichlet data (u_0, g).*
- *(ii) For all solution of consistent data problems P_{f,u_{0_j},g_j}, $j = 1,2,3,...$, with the same source, the source satisfies the systems of integral equations*
$$\int_Q f(\tau,\zeta)\left(G(T,x,\tau,\zeta), \frac{\partial G(t,x,\tau,\zeta)}{\partial \nu_{(t,x)}}\right) d\zeta d\tau = (\Lambda^f_{\Omega,\Sigma} - \Lambda^0_{\Omega,\Sigma})[u_{0_j}, g_j] = \Lambda^f_{\Omega,\Sigma}[0,0]. \tag{1.7}$$
which depends only on the Relative Extended Dirichlet to Neumann map.
- *(iii) For all $v \in H^{2,1}_{-\partial_t-\Delta}(Q) = \{v \in H^{2,1}(Q) | -\partial_t v - \Delta v = 0\}$ the transient heat reciprocity gap equation is*
$$\int_Q f v dx dt = -\int_{\Omega_T} \Lambda^f_{\Omega,\bullet}[0,0]\gamma_T[v]dx - \int_{\Sigma} \Lambda^f_{\bullet,\Sigma}[0,0]\gamma[v]d\sigma_{(t,x)}. \tag{1.8}$$

Theorem 1.1. *A problem inverse problem $IP^f_{(u_0,g),(u_T,g^\nu)}$ admits a solution $f \in L^2(Q) \Leftrightarrow (u_0,g),(u_T,g^\nu) \in \mathcal{R}$. Proof: (Necessity) Suppose the $IP^f_{(u_0,g),(u_T,g^\nu)}$ has a solution $f \in L^2(Q)$. Let us consider the following auxiliary problems: $P_{0,0,f}$ with solution $w_0 = S[0,0,f]$ and $P_{u_0,g,0}$ with solution $w_1 = S[u_0,g,f]$. Then by the additivity principle for linear operators $\Lambda^f_{\Omega,\Sigma}[u_0,g] = \Lambda^f_{\Omega,\Sigma}[0,0] + \Lambda^0_{\Omega,\Sigma}[u_0,g] \Rightarrow (\Lambda^f_{\Omega,\Sigma} - \Lambda^0_{\Omega,\Sigma})[u_0,g] = \Lambda^f_{\Omega,\Sigma}[0,0]$. Since $f \in L^2(Q)$ implies by regularity that $w_0 \in H^{2,1}(Q)$ the data are in $\mathcal{R}$. (Sufficiency) Suppose the the data are in the regular class. Consider the problem 1.9 The fourth order operator $(-\partial_t^2 + \Delta^2)$ can be separated with an unbounded sequence of parameters λ in two elliptic operators, one is biharmonic type in space $(-\lambda + \Delta^2)$ and the other second order in time $(-\partial_t^2 + \lambda)$. Since the initial condition is zero, by finite energy method, the regularity of these operators are $H^1(I, L^2(\Omega)$ and $L^2(I; H^2(\Omega))$, respectively, and it is well posed and has an unique solution $v = S(u_0, g, u_T, g^\nu) \in H^{2,1}(Q)$. The inverse source solution will be $f = (-\partial_t - \Delta)v$. The fourth order operator $(-\partial_t^2 + \Delta^2)$ can be separated with an unbounded sequence of parameters λ in two elliptic operators. Since the initial condition is zero, by finite energy method, the regularity of these operators are $H^1(I, L^2(\Omega)$ and $L^2(I; H^2(\Omega))$, respectively, and it is well posed and has an unique solution $v = S(0, \Lambda^0_{\Omega,\bullet}(0,0), 0, \Lambda^0_{\bullet,\Sigma}(0,0)) \in H^{2,1}(Q)$. The inverse source solution will be $f = (-\partial_t - \Delta)v$.*

$$\begin{cases} (-\partial_t - \Delta)(\partial_t - \Delta)v = (-\partial_t^2 + \Delta^2)v = 0 & \text{in } Q, \\ v = 0 & \text{in } \Omega_0, \\ v = \Lambda^0_{\Omega,\bullet}(0,0) & \text{in } \Omega_T, \\ v = 0 & \text{on } \Sigma, \\ \partial_\nu v = \Lambda^0_{\bullet,\Sigma}(0,0) & \text{on } \Sigma. \end{cases} \tag{1.9}$$

We also presents results on the uniqueness and some numerical simulations.

References

[1] LIONS, J. L. AND MAGENES, E. - *Non-homogeneous boundary values problems and applications*, 1972.

[2] ROBERTY, N. C. AND RAINHA, M. L. S. -Star shape source reconstruction in the modified Helmholtz equation Dirichlet problem. *Inverse Problems, Design and Optimization Symposium,* João Pessoa, Paraiba, 2010.

[3] ROBERTY, N. C. AND RAINHA, M. L. S. -Moving heat source reconstruction from consistent boundary data. *Mathematical Problems in Engineering*, to appear in 2011.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

CARACTERIZACIÓN DE SOLUCIONES ÓPTIMAS PARA PROGRAMACIÓN NO LINEAL CON RESTRICCIONES CÓNICAS *

Marko A. Rojas-Medar † & María Beatriz Hernández-Jiménez ‡y
Rafaela Osuna-Gómez §

Los conceptos de convexidad y convexidad generalizada juegan un rol central en economía matemática y teoría de optimizacion. Así, la búsqueda de criterios para convexidad o convexidad generalizada es uno de los más importante aspectos en programación matemática, con el fin de caracterizar el conjunto de soluciones. Muchos esfuerzos se han hecho en los últimos años para debilitar la noción de convexidad. En este trabajo, teniendo en mente la noción de K-invexidad introducida por Craven [4] (para el caso en el cual K es un cono en $\mathbb{R}^n$) y la noción de Karush-Kuhn-Tucker invexidad (a seguir, KKT-invexidad) introducida por Martin [3], definimos una nueva noción de convexidad generalizada que es a la vez necesaria y suficiente para afirmar que todo punto Karush-Kuhn-Tucker es un mínimo global para problemas con restricciones cónicas. Esta nueva definición es una generalización del concepto de KKT-invexidad dado por Martin y de función K-invex dada por Craven. Además, es la más débil para caracterizar el conjunto de soluciones óptimas. Las nociones y los resultados que existen en la literatura hasta el momento son casos particulares de las que se presentan aquí.

Considere el siguiente problema no linear cónico:

$$(CP) \quad \begin{cases} \text{Min} & \varphi(x) \\ \text{s.t.} & x \in D, \end{cases}$$

Donde X e Y son espacios normados, $D = \{x \in S : -F(x) \in K\}$, K un cono convexo cerrado en Y con interior no vacío, S un subconjunto abierto de X, y $\varphi : S \to \mathbb{R}$, $F : S \to Y$, funciones dadas. Denotamos por $\tilde{K} = \mathbb{R}_+ \times K$ y $f : S \to \mathbb{R} \times Y$, donde $f \equiv (\varphi, F)$. Observemos que si K es un cono convexo en Y, entonces $\tilde{K}$ es un cono convexo en $\mathbb{R} \times Y$.

Varias clases importantes de problemas de optimización se pueden modelar en el contexto anterior, por ejemplo, programación nolinear, programación semi-definida, programación semi-infinita, control óptimo, desigualdades variacionales, etc. (vea [1]).

En el transcurso de este trabajo, asumiremos que φ y F son funciones Fréchet diferenciables.

Recordamos la siguiente condición necesaria de optimalidad para (CP) que puede ser encontrada en varios libros de programación matemática, para el caso regular, esto es, cuando las restricciones de (CP) verifican la restricción de cualificación de Robinson que es la más débil ([6]).

Teorema 0.1. *Suponga que $u \in D$ es una solución óptima de (CP) y que alguna restricción de cualificación se satisface en u. Entonces, existe $\lambda^* = (1, \theta^*) \in \tilde{K}^*$ tal que*

$$\begin{cases} \varphi'(u) + [F'(u)]^*\theta^* = 0, \\ \langle \theta^*, F(u) \rangle = 0. \end{cases}$$

*Los autores fueron parcialmente financiados por proyectos MTM2010-15383, España y 1080628, Fondecyt-Chile.
†Grupo de Matemática Aplicada, Departamento de Ciencias Básicas, Universidad del Bío-Bío, Chillán, Chile, marko@ueubiobio.cl
‡Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos Historia Económica, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla, España, e-mail: mbherjim@upo.es
§Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Universidad de Sevilla, España, e-mail: rafaela@us.es

Dado que el Teorema anterior sólo nos dá una condición necesaria de optimalidad, para establecer la recíproca precisamos asumir que el problema verifica una hipótesis conveniente de convexidad. Ahora, damos un nuevo concepto de convexidad generalizada que es una extensión de la noción de función K-invex dada por Craven en [4] para (CP).

Definição 0.1. *Decimos que f es $\tilde{K}$-invex en $u \in D$ si $\exists\ \ \eta : S \times S \to X$ tal que $\forall\ \omega \in D$, lo siguiente se verifica*

$$f(\omega) - f(u) - f'(u)\eta(\omega, u) \in \tilde{K}.$$

Si f es $\tilde{K}$-invex en cualquier punto de D, decimos que f es $\tilde{K}$-invex en D.

Definição 0.2. *Se dice que $u \in D$ es un punto Karush-Kuhn-Tucker de (CP) (a seguir KKTP), si $\exists\ \lambda^* = (1, \theta^*) \in \tilde{K}^*$ tal que*

$$\begin{cases} \varphi'(u) + [F'(u)]^* \theta^* = 0, \\ \langle \theta^*, F(u) \rangle = 0. \end{cases}$$

Usamos el concepto de $\tilde{K}$-invexidad para obtener una condición suficiente de optimalidad para (CP).

Teorema 0.2. *Sea $u \in D$ un KKTP de (CP) y $f \equiv (\varphi, F)$ $\tilde{K}$-invex en u. Entonces u es un mínimo global de (CP).*

Definição 0.3. *Decimos que $f \equiv (\varphi, F)$ es $\tilde{K}KKT$-invex en $u \in D$, si $\ \exists\ \ \eta : S \times S \to X$ tal que $\forall\ \omega \in D$, lo siguiente se satisface*

$$\begin{cases} \varphi(\omega) - \varphi(u) - \varphi'(u)\eta(\omega, u) \in \mathbb{R}_+, \\ -F'(u)\eta(\omega, u) \in K. \end{cases}$$

Si f es $\tilde{K}KKT$-invex en cualquier $u \in D$, se dice que f es $\tilde{K}KKT$-invex en D.

Probamos que la noción de $\tilde{K}KKT$-invexidad es a la vez necesaria y suficiente para afirmar que todo KKTP es un mínimo global para (CP):

Teorema 0.3. *Suponga que para cada KKTP, $u \in D$, el cono the $[F'(u), F(u)]^*(K^*)$ es cerrado débil*. Entonces todo KKTP de (CP) es un mínimo global si y sólo si $f \equiv (\varphi, F)$ es $\tilde{K}KKT$-invex en D.*

Las pruebas completas de los resultados dados anteriormente pueden encontrarse en [5].

Referências

[1] BONNANS, J. F., SHAPIRO, A. - *Perturbation analysis of optimization problems.*, Springer-Verlag, New York, 2000.

[2] HANSON, M. A. - On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **80**, 545-550, 1985.

[3] MARTIN, D. M. - The essence of invexity. *Journal of optimization Theory and Applications*, **17**, 65-76, 1985.

[4] CRAVEN, B. D. - Invex functions and constrained local minima. *Bulletin of Australian Mathematical Society*, **24**, 357-366, 1981.

[5] HERNÁNDEZ-JIMÉNEZ, M. B., OSUNA-GÓMEZ, R., ROJAS-MEDAR, M. A. - Characterization of optimal solutions for nonlinear programming problems with conic constraints. In Press *Optimization*

[6]ROBINSON, S.M.- Stability theorems for systems of inequalities, Part II: Differentiable nonlinear systems, *SIAM J. Numer. Anal.*, **13**, 597-607, 1976.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

La Ecuación g-Navier-Stokes: Solución Reproductiva

María Drina Rojas-Medar * & Luis Friz, Marko A. Rojas-Medar †

Las ecuaciones de g-Navier-Stokes en dimensión 2 son una variación de las ecuaciones clásicas de Navier-Stokes, y ellas asumen la forma,

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p & = & \mathbf{f}, & \text{en } \Omega\times]0,T[, \\ \dfrac{1}{g}(\nabla g\mathbf{u}) = \dfrac{\nabla g}{g}\mathbf{u} + \nabla\cdot\mathbf{u} & = & 0, & \text{en } \Omega\times]0,T[. \end{array}\right. \tag{0.1}$$

donde $\mathbf{f}$ y ν están dados. Aquí $\mathbf{u}$ y p son la velocidad y presión respectivamente, $g = g(x_1, x_2)$ es una función conveniente con valores reales, suave, definida sobre $(x_1, x_2) \in \Omega$, siendo Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$. Observe que si $g(x_1; x_2) = 1$, entonces el sistema (0.1) se reduce al sistema de Navier-Stokes clásico,

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p & = & \mathbf{f} & \text{en } \Omega\times]0,T[, \\ \nabla\cdot\mathbf{u} & = & 0, & \text{en } \Omega\times]0,T[. \end{array}\right. \tag{0.2}$$

Las ecuaciones de g-Navier-Stokes en dimensión 2 pueden ser derivadas de las clásicas ecuaciones de Navier-Stokes en dimensión 3, pero en el dominio

$$\Omega_g = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in \Omega,\ \text{y } 0 < x_3 < g(x_1, x_2)\}.$$

Para más detalles ver [5].

Entre los trabajos más destacados sobre las ecuaciones de g-Navier-Stokes se tienen [3] por Bae y Roh y [7] por Roh. En estos artículos se prueba la existencia de soluciones para el sistema (0.1) más una condición de valor inicial, tanto en dominios acotados, como en $\mathbb{R}^2$. Para estos resultados, son necesarias hipótesis de suavidad de g y pequeñez de $\|\nabla g\|_\infty$. El marco funcional considerado por Bae y Roh son los espacios:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{V} & = & \{\mathbf{u} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)^2 : \nabla\cdot(g\mathbf{u}) = 0\}, \\ H_g & = & \text{la clausura de } \mathcal{V} \text{ en } \mathbf{L}^2(\Omega), \\ V_g & = & \text{la clausura de } \mathcal{V} \text{ en } \mathbf{H}_0^1(\Omega). \end{array}$$

Siguiendo las ideas presentadas en [1], diremos que $\mathbf{u}$ es una "solución reproductiva"(o solución periódica débil) para el sistema g-Navier-Stokes si ella satisface

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p & = & \mathbf{f}, & \text{en } \Omega\times]0,T[, \\ \dfrac{1}{g}(\nabla g\mathbf{u}) = \dfrac{\nabla g}{g}\mathbf{u} + \nabla\cdot\mathbf{u} & = & 0, & \text{en } \Omega\times]0,T[\\ \mathbf{u} & = & 0, & \text{sobre } \partial\Omega\times]0,T[, \\ \mathbf{u}(0) & = & \mathbf{u}(T), & \text{en } \Omega. \end{array}\right. \tag{0.3}$$

En este trabajo presentamos el siguiente resultado.

Teorema. Dado $\mathbf{f} \in L(0,T;\mathbf{V}^*)$ y g suficientemente pequeño, existe una solución débil de (0.3). □

Observar que si $\mathbf{f}$ es independiente del tiempo, la existencia de la solución reproductiva es trivial pues basta con considerar la solución del problema estacionario.

*Departamento de Matemáticas, Universidad de Antofagasta, Antofagasta, Chile, mrojas@uantof.cl
†Grupo de Matemática Aplicada, Departamento de Ciencias Básicas, Universidad del Bío-Bío, Chillán, Chile, lfriz@ubiobio.cl marko@ueubiobio.cl

Agradecimientos

Luis Friz fue parcialmente financiado por el proyecto Nro. 1090510, Fondecyt-Chile. M.A. Rojas-Medar y M.D. Rojas-Medar fueron parcialmente financiados por el proyecto Nro. 1080628, Fondecyt-Chile. M.A. Rojas-Medar, también fue financiado por el proyecto Nro. MTM2009-12927 del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

Referencias

[1] CLIMENT-EZQUERRA, B., GUILLÉN-GONZÁLEZ, F., ROJAS-MEDAR, M.A. - A review on reproductivity and time periodicity for incompressible fluids. *Bul. Soc. Esp. Mat. Apl.*, **41**, 101-116, 2007.
[2] ROH, J. - Geometry of $L^2(\Omega, g)$ *Journal of the Chungcheong Mathematical Society*, **19**, , 2006.
[3] BAE, H-O., ROH, J. - Existence of solutions of the g-Navier-Stokes equations. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **8**, 85-102, 2004.
[4] KAYA, M., OKAY CELEBI, A. - Existence of weak solutions of the g-Kelvin-Voight equation. *Math. Comp. Modell.*, **49**, 497-504, 2009.
[5] ROH, J. - Derivation of the g-Navier-Stokes Equations. *Journal of the Chungcheong Society*, **19**, 213-218, 2006.
[6] ROH, J. - Dynamics of the g-Navier-Stokes equations. *J. Differential Equations.*, **211**, 452-484, 2005.
[7] ROH, J. - g-Navier-Stokes Equations, Thesis, University of Minnesota, 2001.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

S-ASYMPTOTICALLY ω-PERIODIC SOLUTIONS OF ABSTRACT PARTIAL NEUTRAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

ALEJANDRO. CAICEDO * & CLAUDIO. CUEVAS †

Resumo

In this work, we study the existence and uniqueness of S-asymptotically ω-periodic mild solution to an abstract partial neutral integro-differential equation with unbounded delay. Applications are given to illustrate our results.

1 Introduction

The study of almost periodic, asymptotically almost periodic, almost automorphic, pseudo almost periodic and pseudo almost automorphic solutions to differential equations is among the most attractive topics in mathematical analysis. However, the literature concerning S-asymptotically ω-periodic functions with values in Banach spaces is very new (cf. [3, 4]). We investigate existence of S-asymptotically ω-periodic and asymptotically ω-periodic solutions for equation (2.1).

2 Existence Results

This work is mainly concerned with the existence and uniqueness of an S-asymptoptically ω-periodic mild solution to the abstract partial neutral integro-differential equation with infinite delay

$$\frac{d}{dt}D(t,u_t) = AD(t,u_t) + \int_0^t B(t-s)D(s,u_s)ds + g(t,u_t),\ t \geq 0, \tag{2.1}$$

$$u_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \tag{2.2}$$

where $D(t,\varphi) = \varphi(0) + f(t,\varphi)$, the linear operators A, $B(t) : D(A) \subseteq X \to X$ are densely defined and closed with a common domain $D(A)$, which is independent of t, on a Banach space X and $\mathcal{B}$ an abstract phase space defined axiomatically, and f, g are functions subject to some additional conditions. In this work, we employ the axiomatic definition of the phase space $\mathcal{B}$ introduced in Hino et al. [5].

Observação 2.1. *In this work we suppose the existence of a constant $\mathcal{K}>0$ such that $max\{K(t), M(t)\} \leq \mathcal{K}$ for each $t \geq 0$. Observe that this conditions is verified, for example, if $\mathcal{B}$ is a fading memory space , see, e.g. ([5] Proposition 7.1.5) for details.*

We will assume the following condition:

($\mathbf{A}^{\#}$) The resolvent operator $(R(t))_{t\geq 0}$ is uniformly exponentially stable, i.e., $\|R(t)\| \leq Me^{-\delta t}$ for all $t \geq 0$ and some constants $M, \delta > 0$.

To state the next result, we need to introduce the following condition:

Condition (H_1): The functions $f, g : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B} \to X$ are uniformly S-asymptotically ω-periodic on bounded set such that

$$\| f(t,\psi_1) - f(t,\psi_2) \|_X \leq L_f \| \psi_1 - \psi_2 \|_{\mathcal{B}}, \tag{2.3}$$

*Departamento de Matemática ,UFPE, PE, Brasil, e-mail: alejocro@dmat.ufpe.br, cch@dmat.ufpe.br
†The second author is partially supported by CNPq/Brazil.

$$\| g(t,\psi_1) - g(t,\psi_2) \|_X \leq L_g \| \psi_1 - \psi_2 \|_{\mathcal{B}}, \tag{2.4}$$

for all $(t,\psi_i) \in [0,\infty) \times \ \mathcal{B}, i = 1,2$.

Teorema 2.1. *Assume that* $(\mathbf{A}^{\#})$ *and* (H_1) *are fulfilled and that* $\mathcal{B}$ *is a fading memory space. If* $(L_f + \frac{M}{\delta} L_g)\mathcal{K} < 1$, *where* M, δ *are the constants in* (A) *and* $\mathcal{K}$ *is the constant Remark 2.4, then there is a unique S-asymptotically* ω*-periodic mild solution of the problem (2.1)-(2.2).*

Teorema 2.2. *Assume that* $(A^{\#})$ *is holds and that* $\mathcal{B}$ *is a fading memory space. In addition, suppose that the following properties hold.*

(a) The functions $f, g : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B} \to X$ *are uniformly S-asymptotically* ω*-periodic on bounded sets and asymptotically uniformly continuous on bounded sets.*

(b) There is a continuous nondecreasing function $W_g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *such that* $\| g(t,\psi) \|_X \leq W_g(\| \psi \|_{\mathcal{B}})$ *for all* $t \geq 0$ *and* $\psi \in \mathcal{B}$.

(c) There is a constant $L_f > 0$ *such that* $\| f(t, h_{\#}(t)\psi_1) - f(t, h_{\#}(t)\psi_2) \|_X \leq L_f \| \psi_1 - \psi_2 \|_{\mathcal{B}}$, *for all* $t \geq 0$ *and* $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{B}$, *where* $h_{\#}(t) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} h(t)$.

(d) For each $\nu > 0$,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{h(t)} \int_0^t e^{-\delta(t-s)} W_g(\nu h_{\#}(s)) ds = 0.$$

(e) For each $\epsilon > 0$ *there is* $\delta > 0$ *such that for every* $u, v \in C_h(X)$, $\| u - v \|_h \leq \delta$ *implies*

$$\int_0^t e^{-\delta(t-s)} \| g(s,u_s) - g(s,v_s) \| ds \leq \epsilon, \ for \ all \ t \geq 0.$$

(f) For all $a, b \in [0,\infty)$, $a \leq b$, *and* $r > 0$ *the set* $\{g(s, h_{\#}(s)\psi) : a \leq s \leq b, \psi \in \mathcal{B}; \| \psi \|_{\mathcal{B}} \leq r\}$ *is relatively compact in* X.

We set $\nu(\xi) := \mathcal{K}(\xi + (MH+1) \| \varphi \|_{\mathcal{B}})$, $\beta(\xi) := \left\| M \int_0^{\cdot} e^{-\delta(\cdot - s)} W_g(\nu(\xi) h_{\#}(s)) ds \right\|_h$, *where* $M, H, \mathcal{K}$ *are the constants given in condition* $(A^{\#})$, *Axiom* (A) *and Remark 2.4, respectively.*

(g) $L_f \mathcal{K} + \liminf_{\xi\to\infty} \frac{\beta(\xi)}{\xi} < 1$.

Then the problem (2.1)-(2.2) has an S-asymptotically ω*-periodic mild solution.*

Referências

[1] C. Cuevas, H. Henríquez, *Solutions of second order abstract retarded functional differential equations on the line*, Journal Nonlinear and Convex Analysis., to appear

[2] E. Hernández, H. R. Henríquez, Existence results for partial neutral functional equations with unbounded delay, J. Math. Anal. Appl. **221 (2)** (1998), 452-475.

[3] H.R. Henríquez, M. Pierri, P. Táboas, On S-asymptotically ω-periodic functions on Banach spaces and applications, J. Math. Anal. Appl. **343 (2)** (2008), 1119-1130.

[4] H. Henríquez, M. Pierri, P. Táboas, *Existence of S-asymptotically* ω*-periodic for abstract neutral equations*, Bull. Austral. Math. Soc. (2008), doi: 10.1017/S0004972708000713.

[5] Y. Hino, S. Murakami, T. Naito, *Functional-Differential Equations with Infinite Delay* , Lecture Notes in Mathematics. **1473** (2002), Springer-Berlin.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

Polynomial Decay to a Class of Abstract Coupled System with Past History

Mauro L. Santos * & Luis Paulo V. Matos †

Let us denote by $\mathcal{H}$ a Hilbert space. Let $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$, $\mathbb{B}$ be self-adjoint positive definite operators with the domain $\mathcal{D}(\mathbb{A}_1) \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{A}_2) \subset \mathcal{H}$ and $\mathcal{D}(\mathbb{B}) \subset \mathcal{H}$ with compact embeddings in $\mathcal{H}$. Let $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ be a smooth and summable functions. We introduce a class of abstract models of linear coupled system with past history acting only in one equation

$$\begin{cases} u_{tt} + \mathbb{A}_1 u - \int_0^\infty g(s)\mathbb{A}_2 u(t-s)\, ds + \beta v = 0 \\ v_{tt} + \mathbb{B}v + \beta u = 0 \qquad\qquad \text{in} \quad L^2(\mathbf{R}^+; \mathcal{H}) \end{cases} \tag{0.1}$$

satisfying the initial conditions

$$\begin{cases} u(-t) = u_0(t), \qquad \forall t \geq 0 \\ v(0) = v_0, \\ u_t(0) = u_1, v_t(0) = v_1 \end{cases} \tag{0.2}$$

where the initial data u_0, u_1, v_0 and v_1 belongs suitable space we will define later and β is a small positive constant. Here the subscript $\cdot_t$ denotes the time derivative. Following the approach of Dafermos [1], we consider $\eta = \eta^t(s)$, the relative history of u, defined as

$$\eta^t(s) = u(t) - u(t-s).$$

Hence, putting

$$\kappa = \int_0^\infty g(s)\, ds \tag{0.3}$$

the system (0.1) turns into the system

$$\begin{cases} u_{tt} + \mathbb{A}_1 u - \kappa\mathbb{A}_2 u + \int_0^\infty g(s)\mathbb{A}_2 \eta^t(s)\, ds + \beta v = 0, \\ v_{tt} + \mathbb{B}v + \beta u = 0, \qquad\qquad \text{in } L^2(\mathbb{R}^+; \mathcal{H}) \\ \eta_t^t + \eta_s^t - u_t(t) = 0. \end{cases} \tag{0.4}$$

Accordingly, the initial conditions become

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0, \quad u_t(0) = u_1, \quad v_t(0) = v_1, \quad \eta^0 = \eta_0, \tag{0.5}$$

having set $u_0 = u_0(0)$ and $\eta_0(s) = u_0(0) - u_0(s)$, and

$$\eta^t(0) = \lim_{s\to 0} \eta^t(s) = 0, \quad t \geq 0. \tag{0.6}$$

The aim of this work is to analysis of the decay properties of the system (0.4)-(0.6). Our main result characterizes the asymptotic properties of the semigroup in terms of the spectral properties of the operator. For this, let us suppose that

$$\mathbb{A}_2 = f(\mathbb{A}_1), \quad \mathbb{B} = h(\mathbb{A}_1) \quad \text{with} \quad f(s) = o(s^\alpha), \quad h(s) = o(s^\gamma) \quad \text{as} \quad s \to \infty.$$

We show that the semigroup associated with the system (0.4) is not exponentially stable when $\gamma > 0$ and $\alpha < 1$. But, in this case the solution decays polynomially to zero, in an appropriate norm, with rates that can be improved by taking more regular initial data.

*Universidade Federal do Pará , UFPA, PA, Brasil, ls@ufpa.br
†Universidade Federal do Pará , UFPA, PA, Brasil.

Referências

[1] C. Dafermos, *Asymptotic stability in viscoelasticity, Arch. Ration. Mech. Anal. 37, 297-308, (1970).*

[2] F. Alabau, P. Cannarsa and V. Komornik, *Indirect internal stabilization of weakly coupled evolution equations.* J. Evol. Equ., 2, 127-150, (2002)

[3] F. Alabau, *Stabilisation frontière indirecte de systèmes faiblement couplés.* C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 328, 1015-1020, (1999).

[4] M. Grasselli and V. Pata, *Uniform attractors of nonautonomous dynamical systems with memory, in: Evolution Equations, Semigroups and Functional Analysis, Milano, 2000, in: Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 50, 155-178, Birkhäuser, Basel, 2002.*

[5] Z. Liu and S. Zheng, *Semigroups associated with dissipative systems.* In CRC Reseach Notes in Mathematics 398, Chapman & Hall, (1999).

[6] L. Gearhart, *Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert spaces.* Trans. AMS 236, 385-394, (1978).

[7] G. Z. Guo, *On the exponential stability of C_0-semigroups on Banach spaces with compact perturbations, Semigroup Forum 59 (2), 190-196, (1999).*

[8] A. Wiler, *Stability of wave equations with dissipative bounded conditions in boundend domain.* Diff. and Integral Eqs., 7 (2), 345-366, (1994)

[9] F. Huang, *Characteristic condition for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert space.* Ann. of Diff. Eqs. 1 (1), 43-56, (1985).

[10] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, (1983).*

[11] J. Prüss, *On the spectrum of C_0-semigroups.* Trans. AMS 28, 847-857, (1984).

[12] M. L. Santos, M. P. C. Rocha, S. C. Gomes. *Polynomial Stability of a coupled system of waves equations weakly dissipative. Applicable Analysis. v.86, 1293 - 1302, (2007).*

[13] R. Triggiani, *Lack of uniform stabilization for noncontractive semigroups under compact perturbation, Proc. Amer. Math. Soc. 105 (2), 375-383, (1989).*

[14] R. Triggiani, *Counterexamples to some stability questions for dissipative generators, J. Math. Anal. Appl. 170 (1), 49-64, (1992).*

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

SOLUÇÕES PARA UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍPTICOS COM NÃO-LINEARIDADES INDEFINIDAS

ELVES A. B. SILVA, * EVERALDO S. MEDEIROS † & UBERLANDIO B. SEVERO ‡

1 Resumo e Apresentação dos Resultados

Neste trabalho, estudamos existência e multiplicidade de soluções para o problema elíptico semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_1 u + \mu g(x,u) + W(x)f(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_μ}$$

em que Ω é um domínio limitado e suave em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $W \in C^1(\overline{\Omega})$ muda de sinal, μ é um parâmetro positivo, λ_1 é o primeiro autovalor do operador $-\Delta$ sob as condições de fronteira de Dirichlet e g, f são funções localmente Hölder contínuas. Tais problemas aparecem naturalmente em vários ramos da Física-Matemática e apresentam dificuldades matemáticas consideráveis. Quando $g(x,u) = u$, o problema (P_μ) se reduz ao seguinte

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + W(x)f(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

com $\lambda = \lambda_1 + \mu$. Recentemente, muitos autores, veja por exemplo [1, 2, 3, 4, 5], estudaram o problema (1.1) com a não-linearidade f satisfazendo a seguinte condição de crescimento no infinito:

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{f(s)}{s^{p-1}} = 1, \quad 2 < p < 2^* = \frac{2N}{N-2}, \quad N \geq 3. \tag{1.2}$$

Aqui, além de considerarmos uma classe de problemas mais ampla, pedimos que $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ satisfaça hipóteses mais gerais que (1.2), a saber:

(f_1) Existem $1 \leq \sigma < 2^*$ e $C_1 > 0$ tais que $|f(s)| \leq C_1(1 + |s|^{\sigma-1})$ para todo $s \geq 0$.

Na origem, pedimos a seguinte condição

(f_2) Existem números reais $q > 2$ e $a > 0$ tais que

$$\lim_{s \to 0^+} \frac{F(s)}{s^q} = a \quad \text{onde} \quad F(s) = \int_0^s f(s)ds.$$

Com relação a função W, vamos considerar a seguinte hipótese:

(W_1) $W \in C^1(\overline{\Omega})$ e o número

$$l := -\int_\Omega W(x)\varphi_1^q > 0,$$

em que $\varphi_1 > 0$ é a primeira autofunção do operador $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$.

*Departamento de Matemática, UnB, DF, Brasil, e-mail: elves@unb.br
†Departamento de Matemática, UFPB, PB, Brasil, e-mail: everaldo@mat.ufpb.br (Suporte do CNPq - Grant 620108/2008-8)
‡Departamento de Matemática, UFPB, PB, Brasil, e-mail: uberlandio@mat.ufpb.br (Suporte do CNPq - Grant 620108/2008-8)

Com respeito a função $g(x,s)$, assumimos que $g:\Omega\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ seja uma função Carathéodory satisfazendo:

(g_1) g é localmente limitada e
$$\lim_{s\to 0^+}\frac{G(x,s)}{s^q}=+\infty,\ \text{ uniformemente em }\ x\in\Omega.$$

Em nosso primeiro resultado, estabelecemos a existência de uma solução para (P_μ), independente do crescimento de $g(x,s)$ no infinito. Mais precisamente, temos o seguinte teorema:

Teorema 1.1. *Suponhamos que as condições $(f_1),(f_2)$, (g_1) e (W_1) sejam satisfeitas. Então, exite $\mu_1>0$ tal que (P_μ) tem pelo menos uma solução positiva para $\mu\in(0,\mu_1)$.*

Para provarmos este resultado, exploramos uma solução de um problema limite com o intuito de construirmos uma super solução para o problema (P_μ) e, em seguida, usamos esta super solução para obtermos uma solução de (P_μ), usando argumentos de minimização.
Um exemplo de um problema dentro desse contexto é $-\Delta u=\lambda_1 u+\mu e^u+W(x)f(u)$. A fim de obtermos uma segunda solução para (P_μ), consideramos também as seguintes condições sobre f e W:

(f_3) Existem $\theta>2$ e $R>0$ tais que
$$0<\theta F(s)\le sf(s)\ \text{ para }\ s\ge R,$$

conhecida como a condição de Ambrosetti-Rabinowitz.

Considerando o conjunto $\Omega^\pm=\{x\in\Omega:\pm W(x)>0\}$ e definindo $\Omega^0=\Omega\setminus(\overline{\Omega^+}\cup\overline{\Omega^-})$, vamos supor que

(W_2) $\overline{\Omega^+}\cap\overline{\Omega^-}=\emptyset$ e $\Omega^\pm\neq\emptyset$.

(g_2) $\displaystyle\lim_{s\to+\infty}\frac{g(x,s)}{s}=L>0$ uniformemente em $x\in\Omega$.

Agora, podemos enunciar nosso segundo resultado.

Teorema 1.2. *Suponhamos que as condições $(f_1)-(f_3),(g_1),(g_2),(W_1)$ e (W_2) sejam válidas. Então, existe $\mu_2>0$ $(\mu_2\le\mu_1)$ tal que (P_μ) tem pelo menos duas soluções positivas para qualquer $\mu\in(0,\mu_2)$.*

Na prova deste resultado, a segunda solução é obtida via Teorema do Passo da Montanha, onde exploramos a geometria do funcional.

Referências

[1] S. Alama; M. Del Pino, *Solutions of Elliptic Equations with Indefinite Nonlinearities via Morse Theory and Linking*, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire 13 (1996), 95-115.

[2] S. Alama; G. Tarantello, *On semilinear elliptic equations with indefinite nonlinearities.* Calc. Var. Partial Differential Equations 1 (1993), no. 4, 439–475.

[3] S. Alama, G. Tarantello, *Elliptic Problems with Nonlinearities Indefinite in Sign*, J. Funct. Anal. 141 (1996), 159-215.

[4] D. G. Costa, H. Tehrani, *Existence of positive solutions for a class of indefinite elliptic problems in $\mathbb{R}^N$*. Calc. Var. Partial Differential Equations 13 (2001), no. 2, 159–189.

[5] K. C. Chang; M. Y. Jiang, *Dirichlet problem with indefinite nonlinearities.* Calc. Var. Partial Differential Equations 20 (2004), no. 3, 257–282.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

A DAMPED BEAM EQUATION IN BANACH SPACES

V. F. SILVA *

This paper is concerned with the existence of bounded solutions of the mixed problem for the equation

$$u''(t) + M\left(\|u(t)\|_W^\beta\right) Au(t) + A^2u(t) = 0 \text{ for all } t > 0, \tag{0.1}$$

where $M(\xi)$ is the function $M(\xi) = m_0 + m_1\xi$ defined on $[0, \infty[$, $m_0 > 0$, $m_1 \geq 0$ (m_0, m_1 constants); A is an unbounded self-adjoint operator of a separable Hilbert space H such that $(Au, u)_H \geq \gamma\, |u|_H^2$, $\forall u \in D(A)$ being γ a positive real constant. The operator A^{-1} is not necessarily a compact in H; W is a Banach space with dual W', which is strictly convex, and such that the domain $D(A)$ of the operator A is continuously embedding in W, being β a real number.

In a recent work, by applying the method of successive approximations and Arzelá-Ascoli theorem, we have obtained local solutions for equation (0.1). The difficulty in this approach is that we obtain only one estimate for the approximate solutions of (0.1), which does not allow us to obtain global solution. To overcome the difficulty we introduce the internal damping term

$$\left[1 + K(t)\left|A^{3/2}u(t)\right|^{2\beta}\right] Au'(t)$$

in the equation (0.1).

The main result of this work is established by the following theorem, namely

Teorema 0.1. *Consider $\beta \in \mathbb{R}$ with $\beta > 1$, $K \in L^\infty_{loc}(0, \infty)$, $K(t) > 0$ a.e. $t \in]0, \infty[$, $1/K \in L^1(0, \infty)$ and*

$$u^0 \in D(A^{5/2}), \quad u^1 \in D(A^{3/2}),$$

then there exists only one function u in the class

$$\begin{aligned}
&u \in L^\infty\left(0, \infty; D(A^{5/2})\right),\\
&u' \in L^\infty\left(0, \infty; D\left(A^{3/2}\right),\right) \cap L^2\left(0, \infty; D\left(A^2\right)\right),\\
&u'' \in L^\infty\left(0, \infty; D(A^{1/2})\right)
\end{aligned}$$

such that

$$\begin{aligned}
&u'' + M(\|u\|_W^\beta)Au + A^2u + \left[1 + K\left|A^{3/2}u\right|^{2\beta}\right] Au' = 0 \text{ in } L^\infty_{loc}\left(0, \infty; D(A^{1/2})\right),\\
&u(0) = u^0\ ,\ u'(0) = u^1.
\end{aligned}$$

To show the existence of solutions we use the method of successive approximations via a characterization of the derivative of the term $M(||u||_W^\beta)$ and Arzelá- Ascoli theorem. The uniqueness follows by the energy method. The exponential decay of the energy associated with (0.1) is obtained by applying of the Lyapunov method. This result will be published later.

References

[1] IZAGUIRRE, R., FUENTES, R. AND MILLA MIRANDA, M.-- *Existence of local solutions of the Kirchhoff-Carrier equation in Banach spaces*, Non linear Analysis TMA 68 (2008), 3565-3580.

*UFPB , DM, PB, Brasil, nilza@ufpb.br

[2] LIONS, J.L. - *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Lineaires*, Dunod, Paris,1969 (Nouvelle Presentation, Dunod 2002).

[3] MATOS, M.P. - *Mathematical analysis of the nonlinear model for the vibrations of the string*, Nonlinear Analysis TMA 17(1991),1125-1137.

[4] MEDEIROS, L.A.- *On a new class of non-linear wave equation*, J. Appl. Analysis 10(1980),179-185

[5] MEDEIROS. L.A.-*Tópicos em Equações Diferenciais Parciais-Parte 1*, IM-UFRJ,Rio de Janeiro, RJ, 2006

[6] MEDEIROS, L.A., LIMACO, J. AND MENEZES, S.B.-*Vibrations of elastic strings: mathematical aspects, part one*, J. Comp. Analysis Appl. 4(2002),91-127.

[7] PEREIRA. D.C. - *Existence, uniqueness and symptotic behavior for solutions of the nonlinear beam equation*, Nonlinear Analysis TMA 14(1990),613-623.

[8] SOUZA, S. AND MILLA MIRANDA, M, - *Existence and decay of solutions of a damped Kirchhoff equation*, Int. J. Pure Appl. Math. 32(2006),483-508.

[9] ZEIDLER. E. - *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications*, Vol. III, Springer-Verlag, New York, 1985.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

Teoria de regularidade para EDPs elípticas singulares

EDUARDO V. TEIXEIRA *

A análise matemática envolvida em problemas elípticos com potenciais singulares é notoriamente mais sofisticada do que suas versões suaves. Exemplos clássicos seriam problemas da forma

$$\Delta u = u^{-\beta},$$

com $0 < \beta < 1$. Destacamos que a teoria de regularidade para operadores elípticos totalmente não-lineares, $F(D^2u) = f$ foi estabelecida início dos anos 80 e com um apelo probabilístico intrínseco. Esta tem proporcionado avanços revolucionários em toda a teoria de EDPs e suas aplicações. Entretanto, muito pouco ainda é conhecido quando tais equações envolvem termos descontínuos e/ou singulares, digamos da ordem de u^{-1}. Observe que quando uma solução de tal equação muda de sinal, isto é, ao longo da transição $\{u = 0\}$, a equação desenvolve singularidade; assim não podemos esperar soluções clássicas (duas vezes diferenciáveis).

O exemplo acima representa uma classe de problemas de fronteira livre que emergem de preocupações fundamentais da teoria moderna de EDPs não-lineares. Regularidade Lipschitz para problemas não-isotrópicos, i.e. que dependem de direção, quando regidos pelo Laplaciano,

$$\Delta u = H(\nabla u)u^{-1},$$

onde $H(\tau) = \mathrm{o}(\tau^2)$ no infinito, foi provado por Caffarelli, Jerison e Kenig, [Ann. of Math. (2) **155** (2002), no. 2, 369–404], com o uso de sua revolucionária fórmula de monotonicidade. Não obstante tal fórmula está limitada à teoria variacional, portanto nova estratégia é necessária para estudar problemas não variacionais.

Na primeira parte desta palestra iremos apresentar resultados obtidos em colaboração com M. Montenegro [Journal of Functional Analysis **259** (2010) 428–452], sobre estimativas gradiente ótimas para problemas singuares elípticos totalmente não-lineares da forma $F(D^2u) = G(x, u, \nabla u)$, com G possivelmente da ordem de u^{-1} ou ainda mais singular. Via argumentos de aproximação, mostraremos existência se soluções Lipschitz para uma família de problemas de fronteira livre não-isotrópicos envolvendo duas fases (quando u obrigatoriamente muda de sinal). Iremos discorrer ainda sobre existência e regularidade ótima para teoria de Alt-Caffarelli e Alt-Phillips em um contexto não-variacional. De fato estudamos uma família de EDPs singulares, indexadas por um parâmetro α (expoente de singularidade). Quando $\alpha = -1$, obtemos generalizações não-variacionais do problema de cavidade estudado por Alt e Caffarelli [J. Reine Angew. Math. **325** (1981), 105-144]. Selecionando $\alpha = 0$ em nosso Teorema, obtemos uma versão possivelmente não-isotrópica regida por operadores totalmente não-lineares do célebre trabalho de Caffarelli sobre problema do obstáculo [Acta Math. **139** (1977), no. 3-4, 155–184]. Parte destes resultados referem-se a um trabalho recente, obtido em colaboração com O. Queiroz e M. Montenegro sobre classes de problemas de fronteira livre não isotrópicos.

Por fim, iremos reportar nossos recentes resultados, em colaboração com G. Ricarte, sobre equações totalmente não lineares com potenciais de alta energia e suas conexões com problemas de fronteira livre assimtóticos. Esta teoria preocupa-se com propriedades analíticas e geométricas uniformes em ε de soluções u_ε do problema

$$F(x, Du_\varepsilon, D^2u_\varepsilon) = \zeta_\varepsilon(u_\varepsilon),$$

onde o potencial $\zeta_\varepsilon(\tau) = \varepsilon^{-1}\zeta(\varepsilon^{-1}\tau)$, com $\zeta \in C_0^1[0,1]$ converge para uma função delta de Dirac. Esta classe de problemas é motivado em particular por formulações matemática de problemas de progamações de chamas. O

*Departamento de Matemáticas ,UFC, CE, Brasil, eteixeira@ufc.br

problema de fronteira livre obtivo quando $\varepsilon \to 0$ é de fundamental importância. Mostraremos estimativa gradiente sharp de u_ε e não-degenerecencia de soluções minimais. Para problemas governados por operadores concavos, vamos obter propriedades uniformes da geometria fraca de superfícies de níveis, $\{u_\varepsilon \sim \varepsilon\}$, em particular mostraremos tais conjuntos são uniformemente Retificáveis. For fim estudamos o problema de fronteira livre limite, quando $\varepsilon \searrow 0$. Módulo subsequência, u_ε converge uniformemente para uma função Lipschitz contínua, u_0. Tal função satisfaz

$$F(x, Du_0, D^2u_0) = 0 \quad \text{em } \Omega_0 := \{u_0 > 0\},$$

no sentido da viscosidade. Mostramos ainda a existência de um operador elíptico $F^\star$ tal que a condição de fronteira livre

$$F^\star(z, \nabla u_0 \otimes \nabla u_0) = 2\int \zeta, \quad z \in \partial\{u_0 > 0\}$$

é satisfeita em um sentido da teoria geométrica da medida. Uma teoria de regularidade para a fronteira livre é desenvolvida para garantir que em problemas regidos por operadores côncavos, a fronteira livre limite, $\mathfrak{F}(u_0) := \partial\{u_0 > 0\}$, é uma superfície de classe $C^{1,\gamma}$ a menos de um conjunto de medida de Hausdorff $\mathcal{H}^{N-1}$ nulo.

Referências

[1] O. Queiroz, M. Montenegro, E. Teixeira - *Existence and regularity properties of non-isotropic singular elliptic equations.* Artigo submetido para publicação.
[2] M. Montenegro, E. Teixeira - *Gradient estimates for viscosity solutions of singular fully nonlinear elliptic equations.* Journal of Functional Analysis, **259** (2010) 428–452.
[3] G. Ricarte, E. Teixeira - *Fully nonlinear singularly perturbed equations and asymptotic free boundaries.* Artigo submetido para publicação.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

O TEOREMA DA FATORAÇÃO DE PIETSCH NÃO É VÁLIDO PARA POLINÔMIOS DOMINADOS

THIAGO RODRIGO ALVES *

O objetivo deste trabalho é mostrar que não existe uma extensão natural do teorema da fatoração de Pietsch para polinômios dominados. Para isso, primeiramente será mostrado que a existência de um teorema desse tipo, implicaria que todos polinômios dominados seriam fracamente compactos. Em seguida, será fornecido um exemplo de polinômio dominado que não é fracamente compacto, o que finalizará a demonstração. Este trabalho foi baseado nos artigos [1,3] e, para resultados preliminares, fizeram-se úteis as referências [2,4,5,6,7].

1 Resultados

Neste trabalho, as letras E e F representam espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Por outro lado, os símbolos $\mathcal{L}(E;F)$ e $\mathcal{P}(^mE;F)$ denotam respectivamente os espaços de Banach dos operadores lineares contínuos e polinômios m-homogêneos contínuos que aplicam E em F, munidos com a norma do supremo. O conjunto das medidas regulares de probabilidade sobre os borelianos da bola unitária fechada $B_{E'}$, com a topologia fraca estrela, é denotado por $W(B_{E'})$. Vejamos assim alguns resultados.

Proposição 1.1. *Seja E' munido com a topologia fraca estrela. Então a aplicação*

$$i_E : E \longrightarrow C(B_{E'}); \quad i_E(x)(\varphi) := \varphi(x)$$

é uma imersão isométrica.

Proposição 1.2. *Sejam $\mu \in W(B_{E'})$ e $0 < p < \infty$. Então a inclusão*

$$j_p : C(B_{E'}) \longrightarrow L_p(\mu); \quad j_p(f) := f$$

é absolutamente p-somante.

No teorema da fatoração de Pietsch (Teorema 1.1), veremos que j_p é o operador p-somante através do qual todo operador linear p-somante se fatora. A restrição de j_p ao conjunto $i_E(E) \subseteq C(B_{E'})$ é representada por j_p^E.

Com as proposições supracitadas, o teorema da fatoração de Pietsch para operadores lineares absolutamente somantes fica como se segue.

Teorema 1.1 (Teorema da Fatoração de Pietsch)**.** *Seja $1 \leq p < \infty$. Um operador linear $u \in \mathcal{L}(E;F)$ é absolutamente p-somante se e somente se existem $\mu \in W(B_{E'})$, um subespaço fechado X_p de $L_p(\mu)$ contendo $(j_p^E \circ i_E)(E)$ e um operador $\hat{u} \in \mathcal{L}(X_p;F)$ tais que $u = \hat{u} \circ j_p^E \circ i_E$.*

Definição 1.1. Seja $1 \leq p < \infty$. Um polinômio $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$ diz-se *p-dominado* se existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{k} \|P(x_j)\|^{\frac{p}{m}}\right)^{\frac{m}{p}} \leq C \left[\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{k} |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]^m,$$

para todos $k \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_k \in E$.

*Universidade Federal de Uberlândia, UFU, MG, Brasil, tralves.math@gmail.com

À luz do teorema 1.1, é natural questionar se existe uma extensão do teorema da fatoração de Pietsch para polinômios dominados. Nesse caso, o polinômio canônico m-homogêneo e p-dominado no qual todos os polinômios m-homogêneos e p-dominados se fatoram, deveria ser naturalmente o polinômio

$$\left(j_{\frac{p}{m}}\right)^m : C(B_{E'}) \longrightarrow L_{\frac{p}{m}}(\mu); \quad \left(j_{\frac{p}{m}}\right)^m (f) := j_{\frac{p}{m}}(f^m).$$

Denote por $\left(j^E_{\frac{p}{m}}\right)^m$ a restrição de $\left(j_{\frac{p}{m}}\right)^m$ ao conjunto $i_E(E) \subseteq C(B_{E'})$. Logo, um teorema da fatoração de Pietsch para polinômios dominados, afirmaria que um polinômio $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ é p-dominado, $1 \leq p < \infty$, se e somente se existem $\mu \in W(B_{E'})$, um subespaço fechado $X_{\frac{p}{m}}$ de $L_{\frac{p}{m}}(\mu)$ contendo $\left(\left(j^E_{\frac{p}{m}}\right)^m \circ i_E\right)(E)$ e um operador $u \in \mathcal{L}(X_{\frac{p}{m}}; F)$ tais que $P = u \circ \left(j^E_{\frac{p}{m}}\right)^m \circ i_E$. No entanto, os dois resultados subsequentes mostram que essa afirmação não é verdadeira.

Teorema 1.2. *Sejam $1 \leq p < \infty$, $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$, $\mu \in W(B_{E'})$, $X_{\frac{p}{m}}$ um subconjunto fechado de $L_{\frac{p}{m}}(\mu)$ contendo $\left(\left(j^E_{\frac{p}{m}}\right)^m \circ i_E\right)(E)$ e $u \in \mathcal{L}(X_{\frac{p}{m}}; F)$ tais que $P = u \circ \left(j^E_{\frac{p}{m}}\right)^m \circ i_E$. Então P é um polinômio fracamente compacto.*

Exemplo 1.1. *Seja $m \geq 2$. A aplicação*

$$P_m : \ell_1 \longrightarrow \ell_1; \quad P_m((\alpha_j)_{j=1}^\infty) = ((\alpha_j)^m)_{j=1}^\infty$$

é um polinômio m-homogêneo e m-dominado, mas não é um polinômio fracamente compacto.

Referências

[1] BOTELHO, G. - *Weakly compact and absolutely summing polynomials*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 265 (2002) 458-462.

[2] BOTELHO, G. - *Ideals of polynomials generated by weakly compact operators*, Note di Matematica 25 (2005) 69-102.

[3] BOTELHO, G., PELLEGRINO, D. AND RUEDA, P. - *Pietsch's factorization theorem for dominated polynomials*, Jornal of Functional Analysis 243 (2007) 257-269.

[4] DIESTEL, J., JARCHOW, A. AND TONGE, A. - *Absolutely summing operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[5] FLORET, K. - *Natural norms on symmetric tensor products of normed spaces*, Note di Matematica 17 (1997) 153-188.

[6] MUJICA, J. - *Complex analysis in Banach spaces*, Dover Books on Mathematics, 2010.

[7] RYAN, R. - *Applications of topological tensor products to infinite dimensional holomorphy*, Doctoral Thesis, Trinity College Dublin, 1980.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

DEPENDÊNCIA LINEAR DE APLICAÇÕES MULTILINEARES

L. C. BATISTA * & M. L. LOURENÇO †

Neste trabalho, procuramos dar continuidade a alguns resultados obtidos em [1] por R. Aron, L. Downey, M. Maestre. Investiga-se o problema de, dado $n > 0$ arbitrário, se encontrar o menor número de aplicações lineares $\{T_1, T_2, ..., T_r\}$ em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, tais que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ não nulo, o conjunto $\{T_1(x), T_2(x), ..., T_r(x)\}$ seja gerador de $\mathbb{R}^n$. Também estudamos o problema similar no caso multilinear e procuramos uma relação com o caso linear através de existência de aplicações bilineares não singulares.

1 Definições e Resultados

A seguir, de modo sucinto, apresentaremos algumas definições e resultados.

Definição 1.1. *Sejam $T_1, \ldots, T_r \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Dizemos que a coleção $\{T_1, \ldots, T_r\}$ satisfaz a propriedade $(*)$ se para todo $x \in \mathbb{R}^n$ não nulo, o conjunto $\{T_1(x), T_2(x), ..., T_r(x)\}$ for gerador de $\mathbb{R}^n$.*

Definição 1.2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $r(n)$ o menor natural k, para o qual existe uma coleção $\{T_1, \ldots, T_k\} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ satisfazendo a propriedade $(*)$.*

Proposição 1.1. *$r(n) \leq 2n - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 1.3. *Uma aplicação bilinear da forma $F : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n$, será chamada aplicação bilinear de tamanho $[r, s, n]$. Diremos ainda, que F é uma aplicação bilinear não singular de tamanho $[r, s, n]$ se $F(x, y) = 0$ somente se $x = 0$ ou $y = 0$.*

A proposição a seguir nos fornece uma outra caracterização do problema de se encontrar uma coleção $\{T_1, \ldots, T_r\}$ satisfazendo a propriedade $(*)$.

Proposição 1.2.

(i) Se $\{T_1, \ldots, T_r\} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ satisfaz a propriedade $(*)$ então existe uma aplicação bilinear não singular de tamanho $[n, n, r]$.

(ii) Se F é uma aplicação bilinear não singular de tamanho $[n, n, k]$ então $r(n) \leq k$.

No final da década de 30, Hopf e Stiefel atacaram o clássico problema das álgebras com divisão e obtiveram o seguinte resultado, publicado em 1940. Para mais detalhes ver [4] e [5].

Teorema 1.1. ***(Hopf,Stiefel)*** *Se existir uma aplicação bilinear não singular de tamanho $[s, n, r]$ então $\binom{r}{k}$ é par sempre que $r - n < k < s$.*

Como exemplo de aplicação do teorema acima, observamos que uma alicação bilinear não singular de tamanho $[3, 5, 6]$ não pode existir pois $\binom{6}{3}$ é ímpar.
Da caracterização obtida na proposição (1.2) e do teorema (1.1) decorre a seguinte proposição.

Proposição 1.3. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos*

$$r(n) \geq 2^{\lceil \log_2 n \rceil}.$$

Onde $\lceil x \rceil$ denota o menor inteiro maior ou igual a x.

*IME-USP, SP, Brasil, e-mail: lc.leandro@gmail.com
†IME-USP, SP, Brasil, e-mail: mllouren@ime.usp.br

Demonstra-se que se $n \leq 9$ vale a igualdade no teorema acima, entretanto, em 1972, K. Y. Lam, demonstrou um resultado que em nossa notação equivale a $r\,(16) = 23$. Para detalhes ver [5], pág 6.

Um resultado conhecido afirma que a existência de uma aplicação bilinear não singular de tamanho $[n, n, r]$ corresponde a uma imersão do plano projetivo $(n-1)$-dimensional no espaço euclideano $(r-1)$-dimensional, ver [3].

Estudaremos agora o problema similar para aplicações multilineares, tendo em vista buscar relações com o caso linear. A partir de agora denotaremos por $\mathcal{L}\,({}^m\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ o espaço das aplicações m-lineares de $\mathbb{R}^n \times \overset{m}{\cdots} \times \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.4. $Z\,(m,n) := \bigcap_{A \in \mathcal{L}({}^m\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)} A^{-1}\,(0)$.

Definição 1.5. *Sejam $F_1, \ldots, F_r \in \mathcal{L}\,({}^m\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Dizemos que a coleção $\{F_1, \ldots, F_r\}$ satisfaz a propriedade $(*)$ se para todo $x \in \mathbb{R}^n \times \overset{m}{\cdots} \times \mathbb{R}^n \setminus Z\,(m,n)$ o conjunto $\{F_1(x), F_2(x), ..., F_r(x)\}$ for gerador de $\mathbb{R}^n$.*

Definição 1.6. *Para cada $m, n \in \mathbb{N}$, definimos $r\,(m,n)$ o menor natural k para o qual existe uma coleção $\{F_1, \ldots, F_k\} \subset \mathcal{L}\,({}^m\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ satisfazendo a propriedade $(*)$. Em particular denotaremos $r\,(1,n) = r\,(n)$.*

Definição 1.7. *Seja $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função determinada da seguinte forma:*

(i) *se $r = 1$, 2, 4 ou 8 então $\rho(r) = r$;*

(ii) *se k é ímpar então $\rho(2^m k) = \rho(2^m)$;*

(iii) $\rho(16r) = 8 + \rho(r)$.

A função ρ é conhecida como função de Hurwitz-Radon.

Teorema 1.2. ***(Hurwitz-Radon)*** *Se $n \leq \rho(r)$ então existe uma aplicação bilinear não singular de tamanho $[n, r, r]$.*

Como consequência obtemos o seguinte resultado.

Proposição 1.4. *Se $n \leq \rho\,(r\,(n))$ então $r\,(n) = r\,(m,n)$ para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Corolário 1.1. *Se $n \leq 9$ então $r\,(m,n) = r\,(n)$, para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Referências

[1] ARON, R. M., DOWNEY, L., MAESTRE, M. - *Zero sets and linear dependence of multilinear forms*, Note di Mat., (25), 49-54, 2006.

[2] BOTT, R., MILNOR, J. - *On the parallelizability of the spheres*, Bull. Amer. Math. Soc., (64), 87-89. 1958.

[3] GINSBURG, M. - *Some immersions of projective space in euclidean space*, Topology, (2), 69-71. 1963.

[4] SHAPIRO, D. B. - *Composition of Quadratic Forms*, W. deGruyter, Berlin, 2000.

[5] SHAPIRO, D. B. - *Products of sums of squares*, Lecture Notes for a mini-course at the Universidad de Talca, Lecture 1, 1999.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

SOBRE SINGULARIDADES ANALÍTICAS DE SOLUÇÕES DE UMA CLASSE DE CAMPOS VETORIAIS NO TORO

ANDREZA CRISTINA BEEZÃO * & SÉRGIO LUÍS ZANI †

Dizemos que L é *globalmente analítico hipoelítico (GAH) no toro* $\mathbb{T}^2$ se as condições $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ e $Lu \in \mathcal{C}^\omega(\mathbb{T}^2)$ implicarem que $u \in \mathcal{C}^\omega(\mathbb{T}^2)$, e entendemos por uma *solução singular* de um operador L uma distribuição não-analítica u tal que Lu é analítica.

Sejam $c = a+ib$, onde $a, b : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ são funções analíticas reais e consideremos o operador $L = \partial_t + c(t)\partial_x$ agindo em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$. O artigo [2] nos dá uma caracterização da hipoeliticidade analítica global do operador L; em particular, foi provado que se $b \not\equiv 0$, então L é GAH se, e somente se, a função b não muda de sinal, ou equivalentemente, nenhuma primitiva de b definida em $\mathbb{R}$ tem extremante local. Neste trabalho, conforme feito em [1], descrevemos a localização e a natureza das singularidades das soluções singulares no caso em que b muda de sinal.

Primeiramente, notemos que segue de [3] e [9] que se $t \in \mathbb{T}^1$ não é um extremo local de uma primitiva B de b ($B' = b$ em $\mathbb{R}$), então toda $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ satisfazendo $Lu \in C^\omega(\mathbb{T}^2)$ é, necessariamente, analítica real em (t, x), para todo $x \in \mathbb{T}^1$. Dessa forma, se u tem uma singularidade analítica em (t, x), então, necessariamente, t é um ponto de extremo local de B. Em [1] foi mostrado que se t é um ponto de extremo local de B, então existe uma solução singular de L cujo suporte singular analítico (SS_A) é (t, x), para todo $x \in \mathbb{T}^1$.

A seguir, explicitamos os principais resultados deste trabalho.

Seja $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $B' = b$. Como B é analítica real, existem $r \in \mathbb{Z}_+$ e pontos $\{t_0, \ldots, t_r\}$ tais que $t_r - t_0 < 2\pi$, $t_0 < \ldots < t_r$ e qualquer ponto de máximo local de B é da forma $t_k + 2j\pi$, para algum $k \in \{0, \ldots, r\}$ e $j \in \mathbb{Z}$. Similarmente, temos pontos de mínimo local de B, digamos $\{s_0, \ldots, s_r\}$, satisfazendo

$$s_0 < t_0 < \ldots < s_r < t_r < s_{r+1} \doteq s_0 + 2\pi < t_{r+1} \doteq t_0 + 2\pi.$$

Teorema 0.1. *Suponhamos que L não é GAH e que $b \not\equiv 0$. Seja $t_* \in \{t_0, \ldots, t_r\}$. Então existe $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ tal que $Lu \in C^\omega(\mathbb{T}^2)$ e $SS_A(u) = \{(t_*, 0)\}$. Mais precisamente, u pode ser escolhida de forma que*

$$u(t_*, x) = \delta_+(x) \doteq \sum_{n \geq 1} e^{inx}.$$

Teorema 0.2. *Suponhamos que L não é GAH e que $b \not\equiv 0$. Seja $t_* \in \{t_0, \ldots, t_r\}$. Dada uma sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que v_n é temperada em $n \in \mathbb{Z}$, mas não exponencialmente decrescente com $n \to +\infty$, embora exponencialmente decrescente na direção oposta, então existe $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2) \setminus \mathcal{C}^\omega(\mathbb{T}^2)$ tal que $\hat{v}(t_*, n) = v_n$, $Lv \in \mathcal{C}^\omega(\mathbb{T}^2)$ e $SS_A(v) = \{t_*\} \times SS_A(\tilde{v})$, onde $\tilde{v}(x) \doteq \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n e^{inx}$.*

Teorema 0.3. *Suponhamos que L não é GAH e que $b \not\equiv 0$. Sejam $t_* \in \{t_0, \ldots, t_r\}$ e F um subconjunto fechado não-vazio de $\mathbb{T}^1$. Então existe $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2) \setminus \mathcal{C}^\omega(\mathbb{T}^2)$ tal que $Lv \in \mathcal{C}^\omega(\mathbb{T}^2)$ e $SS_A(v) = \{t_*\} \times F$. Além disso, $\hat{v}(t_*, n)$ é temperada em $n \in \mathbb{Z}$ e decai exponencialmente com $n \to -\infty$.*

Quando tratamos dos mínimos $\{s_0, \ldots, s_r\}$ da primitiva B, as conclusões são análogas às enunciadas acima.

Os dois próximos teoremas nos dão uma abordagem mais completa dos resultados citados anteriormente. Por exemplo, se $b \not\equiv 0$ e tomamos $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma primitiva analítica real de b e Σ um subconjunto não-vazio de extremos locais de B em $[0, 2\pi)$, então existe uma solução singular u satisfazendo $SS_A(u) = \Sigma \times \{0\}$.

*ICMC, USP, SP, Brasil, e-mail: andreza@icmc.usp.br
†ICMC, USP, SP, Brasil, e-mail: szani@icmc.usp.br

Teorema 0.4. *Suponhamos que L não é GAH e que $b \not\equiv 0$. Seja $u_j(n)$, $j \in \{0, \ldots, 2r+1\}$, temperada em $n \in \mathbb{Z}$ e tal que $u_j(n)$ decai exponencialmente quando $n \to -\infty$, para $j \in \{0, \ldots, r\}$, e $u_j(n)$ decai exponencialmente quando $n \to +\infty$, para $j \in \{r+1, \ldots, 2r+1\}$.*

Então existe $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ tal que $Lu \in \mathcal{C}^\omega(\mathbb{T}^2)$, $\hat{u}(t_j, n) = u_j(n)$ para $j \in \{0, \ldots, r\}$ e $\hat{u}(s_{j-r}, n) = u_j(n)$ para $j \in \{r+1, \ldots, 2r+1\}$, para todo n.

Mais ainda,

$$SS_A(u) \subset \{(\bigcup_{j=0}^{r} \{t_j\} \times SS_A(\tilde{u}_j)) \cup (\bigcup_{j=1}^{r+1} \{s_j\} \times SS_A(\tilde{u}_j))\},$$

onde $\tilde{u}_j(x) \doteq \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_j(n) e^{inx}$, $j \in \{0, \ldots, 2r+1\}$.

Em particular, se I é o conjunto de índices $j \in \{0, \ldots, r\}$ tal que $u_j(n)$ não decai exponencialmente quando $n \to +\infty$ e J é o conjunto de índices $j \in \{r+1, \ldots, 2r+1\}$ tal que $u_j(n)$ não decai exponencialmente quando $n \to -\infty$, então

$$SS_A(u) = \{(\bigcup_{j \in I} \{t_j\} \times SS_A(\tilde{u}_j)) \cup (\bigcup_{j \in J} \{s_j\} \times SS_A(\tilde{u}_j))\}.$$

Teorema 0.5. *Suponhamos que L não é GAH e que $b \not\equiv 0$. Então, dados $\{p_1, \ldots, p_k\} \subset \{t_0, \ldots, t_r, s_1, \ldots, s_r\}$ e subconjuntos fechados não-vazios $F_j \subset \mathbb{T}_j$, onde $j \in \{1, \ldots, k\}$, existe $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2)$ tal que $Lu \in \mathcal{C}^\omega(\mathbb{T}^2)$ e $SS_A(u) = \bigcup_{j=1}^{k} \{p_j\} \times F_j$.*

Para uma melhor compreensão do presente trabalho, são necessárias propriedades básicas das distribuições e também resultados que relacionam o comportamento assintótico dos coeficientes das séries (parciais) de Fourier de um dado objeto com a regularidade do mesmo.

Referências

[1] BERGAMASCO, A. AND ZANI, S. - *Prescribing analytic singularities for solutions of a class of vector fields on the torus*, Trans. Amer. Math. Soc. 357, 4159-4174, 2005.

[2] BERGAMASCO, A. - *Remarks about global analytic hypoellipticity*, Trans. Amer. Math. Soc. 351, 4113-4126, 1999.

[3] BAOUENDI, M. S. AND TRÈVES, F. - *A microlocal version of Bochner's tube theorem*, Indiana Univ. Math. J. 31 (6), 885-895, 1982.

[4] BERGAMASCO, A., NUNES, V. AND ZANI, S. *Global analytic hypoellipticity and pseudoperiodic functions*, Mat. Contemporanea 18, 43-57, 2000.

[5] ZANI, S. - *Hipoeliticidade global para operadores de segunda ordem*, Dissertação de Mestrado, ICMC-USP, 1988.

[6] HÖRMANDER, L. - *The analysis of linear partial differential operators*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 256, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[7] SJÖSTRAND, J. - *Singularités analytiques microlocales*, Astérisque, 95, 1-166, Soc. Math. France, Paris, 1982.

[8] HOUNIE, J. - *Teoria elementar das distribuições*, 12º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1979.

[9] TRÈVES, F. - *Analytic hipoelliptic partial differential equations of principaç type*, Comm. Pure Appl. Math. 24, 537-570, 1971.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

EXISTÊNCIA, UNICIDADE E ESTABILIDADE DA EQUAÇÃO DE KAWAHARA†

ROBERTO DE ALMEIDA CAPISTRANO FILHO *

Equações que modelam o movimento de ondas em meios dispersivos, lineares e não lineares, tem suas raízes na descoberta de ondas solitárias por John Scott Russel. Por volta de 1834 ele observou ondas criadas na superfície da água em um canal, que pareciam se propagar de forma constante e sem mudar de forma. A partir dos estudos de Russel, outros famosos matemáticos contribuiram de forma relevante para o avanço do estudo de equações que modelam o movimento de ondas em meio dispersivos, podemos citar: George Airy, George Stokes e Joseph Boussinesq entre outros. Um avanço importante em equações que modelam ondas em meios dispersivos foi dado por dois cientistas holandeses Diederik Korteweg e Gustav de Vries que modelaram a propagação unidimensional de ondas longas com pequenas amplitudes. Tal equação é denominada Korteweg-de Vries (KdV) e é dada por

$$u_t + u_x + \tfrac{3}{2}\alpha u u_x + \tfrac{\beta}{6} u_{xxx} = 0.$$

Em 1972, Takuji Kawahara, em [2], descreveu a propagação de ondas de pequenas amplitudes em uma dimensão por meio de uma equação dispersiva de quinta ordem conhecida como equação de Kawahara ou KdV de quinta ordem, e é dada por

$$u_t + \frac{3}{2} u u_x + \alpha u_x + \beta u_{xxx} - \gamma u_{xxxxx} = 0.$$

O presente trabalho, concentra-se em mostrar a existência e unicidade de solução global para o seguinte problema

$$\left| \begin{array}{l} u_t + u_x + u^p u_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} = 0 \quad \text{em} \quad Q_T, \\ u(0,T) = u(L,t) = u_x(0,T) = u_x(L,T) = u_{xx}(L,T) = 0, \quad t \in (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,L), \end{array} \right. \tag{1}$$

onde $p = 1, 2$ e $Q_T = \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,L) \subset \mathbb{R}, \quad t \in (0,T) \right\}$.

O mesmo problema, sem o termo u_x e $p = 1$, foi estudado por Doronin e Larkin em [1], por meio do método de semi-discretização.

Também é analisado, após ser adicionada uma dissipação localizada, uma taxa de decaimento para a energia associada à solução do sistema

$$\left| \begin{array}{l} u_t + u_x + u^p u_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} + a(x) u = 0 \quad \text{em} \quad Q_T, \\ u(0,T) = u(L,t) = u_x(0,T) = u_x(L,T) = u_{xx}(L,T) = 0, \quad t \in (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,L), \end{array} \right. \tag{2}$$

onde a função $a = a(x)$ satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{l} a \in L^\infty(0,L) \quad \text{e} \quad a(x) \geq a_0 \geq 0 \text{ q.s. em } \omega, \\ \text{com } \omega \text{ sendo um subconjunto não vazio de } (0,L). \end{array} \right. \tag{3}$$

Os principais resultados são os seguintes.

Teorema 0.1. *Dado $u_0(x) \in H^5(0,L)$, o problema (1) possui única solução $u = u(x,t)$ na classe $u \in L^\infty\left(0,\infty; H^5(0,L)\right) \cap L^2\left(0,\infty; H^7(0,L)\right)$ e $u_t \in L^\infty\left(0,\infty; L^2(0,L)\right) \cap L^2\left(0,\infty; H^2(0,L)\right)$.*

*UFRJ, Instituto de Matemática, RJ, Brasil, capistranofilho@ufrj.br
†Este trabalho foi parte da dissertação de mestrado na Universidade Federal da Paraíba em 2010

Para $p = 1$, a prova deste teorema baseia-se no método da semi-discretização com respeito a variável t. A linha de raciocínio utilizada foi a mesma que em [1]. Para o caso em que $p = 2$, foram utilizadas técnicas de semigrupos para garantir o seguinte resultado relacionado a existência e unicidade de solução local para o problema (1):

Teorema 0.2. *Sejam $T_0 > 0$, $u_0 \in L^2(0,L)$ dados. Então existe $T \in (0, T_0]$ tal que o problema (1) possui uma única solução u de classe $u \in C^0\left([0,T]; L^2(0,L)\right) \cap L^2\left(0,T; H^2(0,L)\right)$.*

Afim de estendermos a solução local para solução global, foi provado o seguinte resultado:

Teorema 0.3. *Seja u solução do problema (1) obtida no Teorema 0.2. Se $\|u_0\| \ll 1$, então*

$$\|u\|^2_{L^2(0,T;H^2(0,L))} \le c_1 \left(\frac{\|u_0\|^2}{1 - c_2 \|u_0\|^2} \right),$$

onde $c_1 = c_1(T,L)$ e c_2 são constantes positivas. Além disso, $u_t \in L^{\frac{4}{3}}\left(0,T; H^{-3}(0,L)\right)$.

De posse dos Teoremas 0.1, 0.2 e 0.3, pudemos garantir para (2), nos casos $p = 1, 2$, o seguinte resultado de estabilidade:

Teorema 0.4. *Seja $a = a(x)$ uma função não negativa nas condições de (3). Então, para qualquer $L > 0$, existem constantes positivas R, $c = c(R)$ e $\mu = \mu(R)$ tais que*

$$E(t) \le c \|u_0\|^2 e^{-\mu t},$$

para todo $t \ge 0$ e qualquer solução de (1) com $u_0 \in L^2(0,L)$ tal que $\|u_0\| \le R$.

A prova do Teorema 0.4 foi inspirada nos trabalhos de Menzala-Vasconcelos-Zuazua [3] e Linares-Pazoto [4], em que utilizando estimativas de energia e argumento de compacidade, reduzimos a demonstração do teorema a um resultado de continuação única devido a Saut e Scheurer [5].

Referências

[1] DORONIN, G. G. AND LARKIN, N. A. - *Kawahara equation in a bounded domain*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 10 (2008), no. 4, 783-799.

[2] KAWAHARA, T. - *Oscillatory solitary waves in dispersive media*, J. Phys. Soc. Japan, 33 (1972), 260–264.

[3] MENZALA, G.P., VASCONCELLOS, C. F. AND ZUAZUA, E. - *Stabilization of the Korteweg-de Vries equation with localized damping*, Quarterly of Appl. Math., LX (1) (2002), 111-129.

[4] LINARES, F. AND PAZOTO, A. F. - *On the exponential decay of the critical generalized Kortewegde Vries equation with localized damping*, Proc. Amer. Math. Soc. 135 (5) (2007) 15151522.

[5] SAUT, J. C. AND SCHEURER, B. - *Unique continuation for some evolutions equations*, J. Diff. Equations 66 (1987) 118-139.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

O GRUPO DE SCHRÖDINGER EM ESPAÇOS DE ZHIDKOV

FÁBIO H. CARVALHO *

O objetivo deste trabalho é o estudo do problema de Cauchy, associado à equação não linear de Schrödinger,

$$\begin{cases} iu_t + \Delta_x u + f(|u|^2)u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}; \\ u(x,0) = \varphi, \end{cases} . \tag{0.1}$$

nos casos em que o dado inicial, φ, não está no espaço das funções quadrado integráveis, $L^2(\mathbb{R}^n)$, mas mantém algumas propriedades de regularidade, a saber: φ é limitada, uniformemente contínua, k vezes diferenciável e $\nabla\varphi \in H^{k-1}(\mathbb{R}^n)$. Aqui e no que se segue $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ é uma função diferenciável, Δ é o operador Laplaciano e, para $k \in \mathbb{N}$, $H^k(\mathbb{R}^n)$ é o espaço de Sobolev (das funções definidas em $\mathbb{R}^n$ cujas k primeiras derivadas estão em $L^2(\mathbb{R}^n)$). Representaremos por

$$X^k(\mathbb{R}^n) := \left\{u \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C^k(\mathbb{R}^n); u \text{ é uniformemente contínua e } \nabla u \in H^{k-1}(\mathbb{R}^n)\right\}.$$

Para $\varphi \in X^k(\mathbb{R}^n)$ definimos $\|\varphi\|_{X^k} := \|\varphi\|_{L^\infty} + \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha\varphi\|_{L^2}$.

Os espaços X^k, que representam o completamento do espaço das funções uniformemente contínuas na norma acima definida, são chamados espaços de Zhidkov.

No trabalho apresentado em Carvalho [1], provamos inicialmente que os espaços de Zhidkov formam uma álgebra e que X^k é um espaço denso em X^{k+1}. Posteriormente, definimos a família de operadores $\{S(t)\}$, pondo, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$S(t)\varphi(x) = \begin{cases} e^{-in\frac{\pi}{4}}\pi^{-\frac{n}{2}} \lim\limits_{\epsilon\to 0} \int e^{(i-\epsilon)|z|^2}\varphi(x + 2\sqrt{t}z)dz, & t \geq 0, \\ \\ e^{in\frac{\pi}{4}}\pi^{-\frac{n}{2}} \lim\limits_{\epsilon\to 0} \int e^{(-i-\epsilon)|z|^2}\varphi(x + 2\sqrt{-t}z)dz, & t < 0. \end{cases} \tag{0.2}$$

Este resumo é referente a Carvalho [1], trabalho este em que nos valemos, no que diz respeito à existência e regularidade da solução de (0.1), do trabalho de Cazenave [2]. Para atingir nossos objetivos, nos baseamos nos resultados obtidos por Gallo [3] que, por sua vez, generalizou o trabalho apresentado por Zhidkov [4].

1 Resultados...

Teorema 1.1. *Seja $k > \frac{n}{2}$. A família de operadores $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é um grupo fortemente contínuo em $X^k(\mathbb{R}^n)$, finitamente gerado pelo operador $i\Delta$. Além disso,*

$$\|S(t)\varphi\|_{X^k} < C\left(1 + |t|^\rho\right)\|\varphi\|_{X^k}, \tag{1.3}$$

onde $\rho = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } n \text{ é par,} \\ \\ \frac{1}{4}, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$

*CENAMB ,UNIVASF, BA, Brasil, fabio.carvalho@univasf.edu.br

Prova: Efetuando uma mudança de variáveis se verifica a validade de $S(t_1+t_2)=S(t_1)\circ S(t_2)$. Evidentemente, $S(0)=I$ e $S(-t)=(S(t))^{-1}$. Além disso, como consequência do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, se $\varphi\in X^k(\mathbb{R}^n)$ então $S(t)\varphi\in X^k(\mathbb{R}^n)$. Mais precisamente, mostra-se que

$$\|S(t)\varphi\|_{X^k} < C\left(1+t^{\frac{1-\frac{n}{2}}{2}}+t^{\frac{k-\frac{n}{2}}{2}}\right)\|\varphi\|_{X^k}. \tag{1.4}$$

Reescrevendo os termos da integral na primeira linha de (0.2) e utilizando integração por partes é possível verificar que $S(t)\varphi\to\varphi$ quando $t\to 0$. Como $S(\cdot)\varphi$ é limitada em $[-1,1]$, temos a norma $\|S(\cdot)\|_{\mathcal{L}(X^k)}$ limitada em $[-1,1]$ e, logo, por (1.4), vale (1.3). ■

Para facilitar a notação, escrevemos $F(u)=f\left(|u|^2\right)u$ daqui por diante.

Teorema 1.2. *Seja $\varphi\in X^k(\mathbb{R}^n)$. É possível encontrar $T_*(\varphi)\in[-\infty,0)$ e $T^*(\varphi)\in(0,+\infty]$ tais que:*

i) existe uma única solução maximal $u\in C([T_*(\varphi),T^*(\varphi)],X^k(\mathbb{R}^n))$ de (0.1) e, para todos $T_-,T_+\in\mathbb{R}$ satisfazendo $T_*(\varphi)<T_-<0<T_+<T^*(\varphi)$, u é a única solução da equação integral

$$u(t)=S(t)\varphi(x)+i\int_0^1 S(t-\tau)F(u(\tau))d\tau, t\in[T_-,T_+].$$

ii) $T_*(\varphi)=-\infty$ ou $\lim\limits_{t\searrow T_*(\varphi)}\|u(\cdot,t)\|_{X^k}=+\infty$.

iii) $T^*(\varphi)=+\infty$ ou $\lim\limits_{t\nearrow T^*(\varphi)}\|u(\cdot,t)\|_{X^k}=+\infty$.

Prova: A demonstração deste resultado decorre essencialmente de três lemas cujas demonstrações estão detalhadas em Carvalho [1].

Lema 1.1. *Sejam $T>0,\varphi\in X^k(\mathbb{R}^n)$ e $F\in C([0,T],X^k(\mathbb{R}^n))$.*

Se $u\in C^1([0,T],X^k(\mathbb{R}^n))$ é solução de (0.1) então

$$u(t)=S(t)\varphi(\cdot)+i\int_0^t S(t-\tau)F(u(\cdot,\tau))d\tau, \tag{1.5}$$

para todo $t\in[0,T]$.

Lema 1.2. *Sejam $T>0,\varphi\in X^k(\mathbb{R}^n)$. Se $u,v\in C([0,T],X^k(\mathbb{R}^n))$ são duas soluções do problema (0.1), então $u=v$.*

Lema 1.3. *Sejam $M>0$ e $\varphi\in X^k(\mathbb{R}^n)$ tais que $\|\varphi\|_{X^k}\le M$. Então, existe um tempo positivo $T=T(M)$ e uma única solução $u\in C([0,T(M)],X^k(\mathbb{R}^n))$ do problema (0.1).*

O caso $T<0$ é análogo. ■

Referências

[1] CARVALHO, F. H. - *O grupo de Schrödinger em espaços de Zhidkov*, Dissertação de Mestrado, UFAL, Maceió, 2010.

[2] CAZENAVE, T. AND HARAUX A. - *An introduction to semilinear evolution equations*, Oxford Science Publications, Oxford, First edition, 1998.

[3] GALLO, C. - Schrödinger group on Zhidkov spaces. *Advanced Differential Equations*, **9**, 509-538, 2004.

[4] ZHIDKOV, P. E. - *Korteweg-de-Vries and nonlinear Schrödinger equations: qualitative theory*, Lecture Notes in Mathematics, **1756**, Springer-Verlag, New York, 2001.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

Um estudo de dinâmica populacional com um algoritmo em java baseado no modelo Verhulst

Antenor Oliveira Cruz Júnior * & Fábio Silva de Souza †

Esse trabalho tem como objetivo estudar a dinâmica populacional, pela sua importância no desenvolvimento da economia de uma dada população, com a utilização do modelo de Verhulst e a construção de um algoritmo que determine a solução de equações não-lineares com métodos de regressão linear.

1 Modelo de Verhulst

$$\frac{dp}{dt} = (r - sp) \Longrightarrow p(t) = \frac{kp_0}{p_0 + (k - p_0)e^{-rt}}$$

Para esse modelo trabalharemos com os dados dos censos do IBGE com intervalos de dois anos até o recenseamento atual para podermos determinar o valor dos parâmetros da equação.

Ano do recenseamento	População
1998	125.433
2000	123.541
2002	128.885
2004	128.109
2006	127.530
2008	130.521

Como as informações são limitadas a apenas seis censos, temos que utilizar técnicas para a obtenção de estimativas que possam fazer uma aproximação da função geradora dos dados da tabela. Essa aproximação da derivada da função f de ordem n, na vizinhança do ponto $x_i, podemos determinar pela diferenca finitas progressivas e regressivas.$

$$Df(x_i) \cong \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = g_i \quad e \quad Df(x_i) \cong \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = h_i$$

Neste caso, os resultados seriam obtidos a partir da interpolação dos pontos do modelo de Verhuslt. Para isto utilzaremos a média das diferenças finitas(progressiva e regressiva), ou seja:

$$\frac{dp}{dt} = (r - sp) \cong \frac{g_i + h_i}{2}$$

Usando a regressão linear pelo método de mínimos quadrados, para o ajuste da melhor reta $y = ax + b$ ao conjunto de pontos (x_i,($g_i + h_i)_{\frac{}{2}}$), para determinar o parâmetro k da equação com os valores em que a = -r e b = kr, onde:
$t_0 = 2008$
e
$p_0 = 130.521$

*Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri-FACSAE e-mail: juniorufvjm@gmail.com
†Depto. de Ciências Exatas, FACSAE, UFVJM e-mail: fabio.souza@ufvjm.edu.br

2 Algoritmo

Nesse contexto foi elaborado um algoritmo em java que possibilitou a construção de software que funciona a partir da inserção dos dados de censos relativos ao número de habitantes com seus respectivos anos, sendo que o último censo tem quer ser o mais recente. Após a inserção dos dados o software utiliza o método de diferenças finitas e mínimos quadrados para determinar os parâmetros necessários dessa equação. Outro dado importante é o tempo futuro para o qual deseja-se fazer a previsão.

O resultado determina o valor do fator limitante e a população estimada para o ano em estudo. Com base nestas informações o usuário poderá construir uma análise sobre o desenvolvimento econômico e a dinâmica populacional de um município. O próprio software testa o resultado com um método de inferência estatística, que calcula o intervalo de previsão, possibilitando a previsão de estimativas referentes ao crescimento de qualquer população em estudo com um maior grau de confiabilidade das informações.

3 Resultados

Analisamos os resultados obtidos com a utilização do software comparados com os recenseamentos para a população brasileira, utilizando o sistema de projeções e estimativas da população do Brasil, feito pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), para os anos de 2015, 2025, 2035, 2040,2050.

T	ANO	IBGE	ALGORITMO	ERRO
1998	2015	200.881	201.155	0.001%
2000	2025	212.430	211.992	0.002%
2002	2035	218.644	218.164	0.002%
2004	2040	219.075	220.116	0.005%
2006	2050	215.287	222.604	0.03%

Pelo comportamento dos resultados podemos observar que a diferença entre as estimativas feitas pelo IBGE e o software tem uma diferença muito pequena até 2040, quando a partir daí a população começaria a decrescer, já que os valores obtidos pelo algoritmo estão tendendo para o fator limitante do crescimento populacional brasileira (257.371 milhões de habitantes) o que também implicaria em um desaceleramento do crescimento da população, mostrando assim que o algoritmo pode ser usado para qualquer estudo populacional.

Referências

[1] SANTOS, R.S. - *Crescimento Logístico da População do Brasil.*, Departamento de Matemática-ICEx Universidade Federal de Minas Gerais. 2009, 2 a 6p

[2] BOYCE W. E. AND DIPRIMA R. C. - . *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, Ed. 8,tradução de Valério de Magalhães Irio. Editora LTC, Rio de Janeiro RJ, ano 2006, 434p.

[3] MADEIRA J.L - *Subsídios da demografia pura para orientação da política demográfica.*,. Revista Brasileira de Estatística, n 9, pag. 7, janeiro-março 1942.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

Controlabilidade na Fronteira de um Sistema Híbrido Linear com Origem no Controle de Ruídos

Flávio G. de Moraes, * & Juan A. S. Palomino †

O que vamos expor neste trabalho é o resultado da dissertação de mestrado [6], a qual foi realizada na Universidade Estadual de Maringá e teve como objetivo uma apresentação didática do trabalho de MICU, S. D. e ZUAZUA, E., [5].

Considere Ω o quadrado bidimensional

$$\Omega = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2.$$

Vamos supor que Ω é ocupado por um fluído elástico, não viscoso e compressível, cujo campo de velocidade $\overrightarrow{v}$ é dado pelo potencial $\Phi = \Phi(x,y,t)$: $\overrightarrow{v} = \nabla\Phi$. Vamos supor também que o potencial Φ satisfaz a equação linear da onda em $\Omega \times (0,\infty)$. A fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ de Ω está dividida em duas partes. $\Gamma_0 = \{(x,0) : x \in (0,1)\}$ e $\Gamma_1 = \Gamma \backslash \Gamma_0$. O subconjunto Γ_1 é suposto rígido e impomos que a velocidade normal do líquido seja zero nele. O subconjunto Γ_0 é suposto flexível e ocupado por uma corda flexível que vibra com a pressão do líquido no plano onde Ω se encontra. O deslocamento de Γ_0 é descrito por uma função escalar $W = W(x,t)$, que obedece a equação da onda unidimensional. Ainda, em Γ_0 vamos impor a continuidade da velocidade normal do líquido na corda. A corda é suposta para satisfazer as condições de fronteira de Neumann em seus extremos. Sob condições iniciais naturais para Φ e W o movimento linear deste sistema é descrito por meio das equações de onda acopladas:

$$\begin{cases} \Phi_{tt} - \Delta\Phi = 0 & em \quad \Omega \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 & sobre \;\; \Gamma_1 \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = -W_t & sobre \;\; \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ W_{tt} - W_{xx} + \Phi_t = 0 & sobre \;\; \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ W_x(0,t) = W_x(1,t) = 0 & para \;\; t \;\in\; (0,\infty) \\ \Phi(0) = \Phi^0, \quad \Phi_t(0) = \Phi^1 & em \;\; \Omega \\ W(0) = W^0, \quad W_t(0) = W^1 & sobre \;\; \Gamma_0. \end{cases} \tag{0.1}$$

Estudaremos a controlabilidade do sistema (0.1) sobre a ação de uma força exterior agindo na parte flexível da fronteira Γ_0. O controle será dado por uma função escalar $\beta = \beta(x,t)$. O problema de controlabilidade pode ser formulado da seguinte maneira: Dado $T > 2$, encontrar um espaço de dados iniciais $(\Phi_0, \Phi_1, W_0, W_1)$ que pode ser conduzido ao equilíbrio da forma $(\Phi, \Phi_t, W, W_t) = (c_1, 0, c_2, 0)$ em um tempo T por meio de um controle apropriado $\beta \in H^{-2}(0,T; L^2(\Gamma_0))$.

*Departamento de Matemática ,UFG, Jataí, Go, Brasil, e-mail: flaviomoraesbr@yahoo.com.br
†Departamento de Matemática, UEM, Maringá, Pr, Brasil, e-mail:jaspalomino@uem.br

1 Controle Unidimensional

Para obtermos os resultados almejados no trabalho, decompomos o controle β, as soluções Φ, W e os dados iniciais em série de Fourier, da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \beta = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(t)\cos(n\pi x), \\ \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(y,t)\cos(n\pi x), \ \Phi^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^0(y)\cos(n\pi x); \ \Phi^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^1(y)\cos(n\pi x), \\ W = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t)\cos(n\pi x), \ W^0 = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^0\cos(n\pi x), \ W^1 = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^1\cos(n\pi x). \end{cases} \tag{1.2}$$

Com esta decomposição, o sistema a ser controlado pode ser escrito como uma sequência de sistemas controláveis unidimensionais para $n = 0, 1, 2, ...$

$$\begin{cases} \psi_{n,tt} - \psi_{n,yy} + n^2\pi^2\psi_n = 0 & para \ (y,t) \in (0,1) \times (0,\infty) \\ \psi_{n,y}(1,t) = 0 & para \ t > 0 \\ \psi_{n,y}(0,t) = -V_t(t) & para \ t > 0 \\ V_{n,tt}(t) + n^2\pi^2 V_n(t) + \psi_{n,t}(0,t) = \beta_n(t) & para \ t > 0 \\ \psi_n(0) = \psi_n^0, \ \psi_{n,t}(0) = \psi_n^1 & em \ (0,1) \\ V_n(0) = V_n^0, \ V_{n,t}(0) = V_n^1. \end{cases} \tag{1.3}$$

Os resultados de controlabilidade para os sistemas unidimensionais foram encontrados aplicando HUM (Hilbert Uniqueness Method), valendo ressaltar que para o caso $n = 0$ o que obtemos foi uma controlabilidade parcial.

2 Controlabilidade do Sistema Bidimensional

O controle bidimensional foi obtido através da controlabilidade dos sistemas unidimensionais. Para isso, construimos o seguinte controle:

$$\beta(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \cos(n\pi x) \tag{2.4}$$

O controle obtido nos garante que a solução (ϕ, W) do sistema satisfaz

$$\begin{cases} \phi(T) = \int_0^1 W^1(x)dx + \int_0^1 \phi^0(x,0)dx, \quad \phi_t(T) \equiv 0 & em \ \ \Omega \\ W(T) = \int_0^1 W^0(x)dx - \int_0^1\int_0^1 \phi^1(x,y)dxdy, W_t(T) = 0 & em \ (0,1) \end{cases} \tag{2.5}$$

Referências

[1] Brézis, H. - *Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones.*, Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1984.

[2] Brézis, H. - *Operateurs maximaux monotones et semigroups de contractions dans les spaces de Hilbert*,North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973.

[3] Grisvard, P. - *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains.* London: Pitman Publishing Limited, 1985.

[4] Micu, S. D. - *Analisis de un Sistema Hibrido Bidimensional Fluido-Estructura.*Ph. D. dissertation at Universidad Complutense de Madrid, 1996.

[5] Micu, S. D., Zuazua, E. - *Boundary Controllability of a Linear Hybrid System Arising in the Control of Noise.* SIAM. J. Cont. Optim. 35 (1997), nº 5, 1614-1638.

[6] MORAES, F. G., PALOMINO, J. A. S. - *Controlabilidade na Fronteira de um Sistema Híbrido Linear com Origem no Controle de Ruídos* Dissertação de Mestrado, Universiadade Estadual de Maringá, Maringá, PR, 2008.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

CONTROLABILIDADE LOCAL EXATA PARA AS TRAJETÓRIAS DE UM SISTEMA ACOPLADO NÃO-LINEAR *

D. A. SOUZA †

Neste trabalho estamos interessados em estudar a controlabilidade de um sistema que modela um fluido que sofre efeitos térmicos e possui uma concentração. Este modelo é descrito por meio do acoplamento de uma equação de Navier-Stokes com duas equações do calor:

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (y \cdot \nabla)y + \nabla p = v_1 1_{\mathcal{O}} + \theta e_N + u\overrightarrow{b} & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ \theta_t - \Delta\theta + y \cdot \nabla\theta = v_2 1_{\mathcal{O}} & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u_t - \Delta u + y \cdot \nabla u = v_3 1_{\mathcal{O}} & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ y = 0, \theta = u = 0 & \text{sobre } \Sigma \times (0,T), \\ y(0) = y_0, \theta(0) = \theta_0, u(0) = u_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N = 2 \text{ ou } 3)$ é um domínio limitado cuja fronteira $\partial\Omega$ é suficientemente regular, $T > 0$, $\mathcal{O} \subset \Omega$ é um subconjunto aberto e não-vazio (pequeno). As variáveis dependentes u, p, θ e u representam, respectivamente, o campo de velocidade, a pressão do fluido, a temperatura do fluido e a concentração, enquanto v_1, v_2 e v_3 estão representando as funções controles. O símbolo $1_{\mathcal{O}}$ representa a função característica de $\mathcal{O}$, e_N é o n-ésimo vetor da base canônica de R^N e $\overrightarrow{b}$ é um vetor não-nulo de R^N.

Apresentaremos resultados, seguindo as idéias de [4] e [5], que mostrarão que o sistema N-dimensional (0.1) poderá ser controlado, pelo menos sobre algumas condições geométricas, com N controles escalares em $L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$.

Deveremos impor algumas condições sobre a regularidade dos dados. Para este propósito, introduziremos os seguintes espaços:

$$V = \{\varphi \in [H_0^1(\Omega)]^N;\ \nabla \cdot \varphi = 0 \text{ em } \Omega\}. \tag{0.2}$$

$$H = \{\varphi \in [L^2(\Omega)]^N;\ \nabla \cdot \varphi = 0 \text{ em } \Omega,\quad \varphi \cdot n = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}, \tag{0.3}$$

($n = n(x)$ é o vetor normal unitário exterior a Ω no ponto $x \in \partial\Omega$),

$$E = \begin{cases} H, \text{ se } N = 2, \\ L^4(\Omega)^3 \cap H, \text{ se } N = 3. \end{cases} \tag{0.4}$$

Agora, iremos estabelecer o conceito de controlabilidade local exata para as trajetórias do sistema (0.1). Primeiramente, definiremos uma trajetória do sistema (0.1).

Definição 0.1. *Uma trajetória para o sistema (0.1) é uma solução $(\overline{y}, \overline{\theta}, \overline{u}, \overline{p})$ do sistema (0.1) com controles nulos, ou seja, é uma solução do sistema*

$$\begin{cases} \overline{y}_t - \Delta\overline{y} + (\overline{y} \cdot \nabla)\overline{y} + \nabla\overline{p} = \overline{\theta} e_N + \overline{u}\overrightarrow{b} & \textit{em } \Omega \times (0,T), \\ \nabla \cdot \overline{y} = 0 & \textit{em } \Omega \times (0,T), \\ \overline{\theta}_t - \Delta\overline{\theta} + \overline{y} \cdot \nabla\overline{\theta} = 0 & \textit{em } \Omega \times (0,T), \\ \overline{u}_t - \Delta\overline{u} + \overline{y} \cdot \nabla\overline{u} = 0 & \textit{em } \Omega \times (0,T), \\ \overline{y} = 0,\ \overline{\theta} = \overline{u} = 0 & \textit{sobre } \Sigma \times (0,T), \\ \overline{y}(0) = \overline{y}_0,\ \overline{\theta}(0) = \overline{\theta}_0,\ \overline{u}(0) = \overline{u}_0 & \textit{em } \Omega. \end{cases} \tag{0.5}$$

*Este trabalho é uma parte da dissertação de mestrado na Universidade Federal da Paraíba

†Pós-graduação em Matemática , UFPB, PB, Brasil, daraujo_s@yahoo.com.br

Definição 0.2. *Dada uma trajetória* $(\overline{y},\overline{\theta},\overline{u},\overline{p})$ *do sistema* (0.1). *Dizemos que o sistema* (0.1) *é exatamente controlável para a trajetória* $(\overline{y},\overline{\theta},\overline{u},\overline{p})$ *quando existem controles* v_1, v_2 *e* v_3 *tais que, ao menos uma solução de* (0.1)*, satisfaça*

$$y(T)=\overline{y}(T),\ \theta(T)=\overline{\theta}(T)\ e\ u(T)=\overline{u}(T). \tag{0.6}$$

Para conseguirmos um resultado sobre controlabilidade local para as trajetórias do sistema (0.1) com N controles escalares devemos impor algumas hipóteses sobre $\mathcal{O}$ e as trajetórias. Mais precisamente, iremos assumir que existe $x^0 \in \partial\Omega$ com $n_k(x^0) \neq 0$ para algum $k < N$ e um $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_\varepsilon(x^0)\cap\partial\Omega \subset \overline{\mathcal{O}}\cap\partial\Omega \tag{0.7}$$

($B_\varepsilon(x^0)$ é a bola centrada em x^0 de raio ε e $n_k(x^0)$ é a k-ésima coordenada de n no ponto x^0),

$$\overline{y}\in[L^\infty(Q)]^N,\ \overline{y}_t\in[L^2\big(0,T;L^\kappa(\Omega)\big)]^N,\text{em que}\begin{cases}\kappa>\frac{6}{5},\ \text{se } N=3\\ \kappa>1,\ \text{se } N=2\end{cases} \tag{0.8}$$

e

$$\overline{\theta},\overline{u}\in L^\infty(Q),\ \overline{\theta}_t,\overline{u}_t\in L^2\left(0,T;L^\kappa(\Omega)\right),\quad \text{em que}\ \begin{cases}\kappa>\frac{6}{5},\text{se } N=3\\ \kappa>1,\ \text{se } N=2.\end{cases} \tag{0.9}$$

Vamos agora estabelecer o principal resultado do nosso trabalho.

Teorema 0.1. *Suponhamos que* $\mathcal{O}$ *satisfaz* (0.7) *e que a trajetória* $(\overline{y},\overline{\theta},\overline{u},\overline{p})$ *satisfaça* (0.8) *e* (0.9). *Então, para cada* $T>0$*, existe* $\delta>0$ *tal que, para qualquer* $(y_0,\theta_0,u_0)\in([L^{2N-2}(\Omega)]^N\cap H)\times L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ *satisfazendo* $||(y_0,\theta_0,u_0)-(\overline{y}_0,\overline{\theta}_0,\overline{u}_0)||_{[L^2(\Omega)]^{N+2}}\leq\delta$*, podemos encontrar controles* $(v_1,v_2,v_3)\in[L^2(\mathcal{O}\times(0,T))]^{N+2}$ *tais que* $v_1^k\equiv v_1^N\equiv 0$ *e uma solução associada* (y,p,θ,u) *para* (0.1) *tal que (0.6) seja satisfeita.*

Prova: Primeiramente obteremos uma nova desigualdade de Carleman para um adequado problema adjunto de uma versão linearizada do primeiro sistema (0.1). Esta é obtida utilizando a desigualdade de Carleman para a equação do Calor (veja [3]), daí usando os principais resultados de [1] e [2] eliminamos um termo da pressão que aparece. Assim, obtemos a controlabilidade nula para a versão linearizada em qualquer tempo $T>0$. Ao final, deduzimos os resultados a respeito da controlabilidade local exata para as trajetórias do sistema (0.1) por meio de uma aplicação de um teorema da função inversa.

Referências

[1] GIGA, Y. AND SOHR, H. - Abstract L^p estimates for the Cauchy problem with aplications to the Navier-Stokes equations in exterior domains, J. Functional Anal., **102**, pp. 72-94, 1991.

[2] IMANUVILOV, O. Y. AND PUEL, J.-P. - Global Calerman estimates for weak solutions of elliptic nonhomogeneous Dirichlet problems C.R. Acad. Sci. Paris, ser. I, 335, pp. 33-38, 2002.

[3] FERNANDEZ-CARA, E. AND GUERRERO, S. - Global Carleman inequalities for parabolic systems and applications to controllability. *SIAM J. Control Optimization*, **45**, No. 4, pp. 1395-1446, 2006.

[4] GUERRERO, S. - Local exact controllability to the trajectories of the Boussinesq system. *Annales de l'Institut Henri Poincaré Analyse Non Linéaire*, **23**, no. 1, pp. 29-61, 2006.

[5] FERNANDEZ-CARA, E., GUERRERO, S., IMANUVILOV, O. Y. AND PUEL, J.-P. - Some controllability results for the N-dimensional Navier-Stokes and Boussinesq systems with $N-1$ scalar controls. *SIAM Journal on Control and Optimization* **45**, no. 1, pp. 146-173, 2006.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

Modeling security under conflict using reliability and game theories

Carlos Renato dos Santos *

Catastrophic events have attracted attention of the academic community and society as a whole. As examples, it can be cited the terrorist attacks of September 11, 2001 at the World Trade Center and Pentagon and anthrax attacks in the United States as well as the recent pirate attacks on cargo ships of Somalia in early 2008 (see BBC [1]). Due to these and other similar contexts, an increased interest in strategies to protect valuables (including human life) from an intelligent and adaptive enemy emerges. In this way, the selection of defensive strategies may require the consideration of goals and motivations of the attacker (Bier et al. [2]).

1 GAME MODELING

This work explains two approaches to model the interaction defense/attack:

- *Sequential game of complete and perfect information* - the defender knows the efforts and technologies that the attacker may take after the deployment of the defensive system. On the other hand, the attacker knows about the implemented defensive system and, based on that, he optimizes his payoff.

- *Sequential game of incomplete information* - the defender is not sure about the attackers' preference types, in other words, he is not aware about attacker profile. The attacker, in turn, knows which defensive configuration was implemented.

1.1 Sequential game of perfect information

The problem is to deploy a defensive system configured in series-parallel consisting of redundant protection alternatives in order to defend the main system from intentional attacks. The strategic interaction involves complete and perfect information in two consecutive stages (sequential game). Firstly, the defender chooses a configuration from the non-dominated set of designs, then, at a second moment, the attacker selects the defense subsystem to attack. It is assumed that both defender and attacker have limited resources.

Thus, there is a set of two players $J = \{D : \ defender;\ A : \ Attacker\}$ that are supposed to be rational and risk-neutral. The defender's set of actions (or non-dominated defense configurations) is $AD = \{d_1, d_2, d_3, d_l\}$, where l is the number of non-dominated configurations. The attacker's set of actions (or subsystems to attack) is $AA = \{ss_1(d_r), ss_2(d_r), ss_3(d_r), ..., ss_i(d_r), ..., ss_q(d_r)\}, r = 1, 2, ..., l$, where q is the number of subsystems in $d_r \in AD$. The game is not defined by the choice of one single agent but by a particular combination of actions of both of them. From the choice of actions by each player, a strategy profile is created, i.e. there is a vector $s = (d_r, ss_i(d_r)), r = 1, 2, ..., l$ and $i = 1, 2, ..., q$. Then, the set of all strategy profiles can be denoted as the Cartesian product of the actions sets, $S = AD \times AA$. Both attacker and defender are rational agents that seek to maximize their respective payoff functions. The expected payoff of each player involves the difference between the total expected gain and the total expected loss related to their choices.

*UFPI-CMRV, PI, Brasil, carlosrenato@ufpi.edu.br

1.2 Sequential game of imperfect information

In many cases it is possible to have actual knowledge of attackers' profiles, but it is not possible to know precisely which profile an attacker may assume at any given time. This model has the same purpose of the previous modeling; however, in this case, the defender is not sure about which attacker is going to act against one of the defensive subsystems, i.e., the defender is not certain about the attacker's profile.

In this way, the strategic interaction occurs sequentially in three stages and with imperfect information. Firstly, the nature chooses which profile the attacker assumes and only the attacker has access to this information. Afterwards, the defender chooses a defense configuration under uncertainty about the attacker's profile. Lastly, the attacker selects a defense subsystem to attack. Once again it is assumed that both defender and attacker have limited resources.

Suppose that a specific defense configuration d_r is adopted by the defender and that there are two possible types of attacker profiles, type 1 and type 2. The attackers have, respectively, the following expected payoffs:

$$U_1(d_r, ss_i(d_r)) = \Phi_1(d_r, ss_i(d_r)) - \Delta_1(d_r, ss_i(d_r)) \tag{1.1}$$

$$U_2(d_r, ss_i(d_r)) = \Phi_2(d_r, ss_i(d_r)) - \Delta_2(d_r, ss_i(d_r)) \tag{1.2}$$

where, $\Phi_h(d_r, ss_i(d_r))$ and $\Delta_h(d_r, ss_i(d_r)), h = 1, 2$, are defined as in the game of perfect information. In this way, each type of attacker has a payoff associated with his respective profile for every possible configuration dr deployed by the defender. Since the attacker knows about the defense system deployed, he has unitary information sets. On the other hand, the defender is not sure about who exactly he fights against, and for that reason there is a probability distribution associated to the attacker's possible profiles. Thus, the defender has non-unitary information sets, differently from the situation described in Subsection in the game of perfect information.

It is assumed that attacker type 1 attacks with probability ϕ_1 and the attacker type 2 attacks with probability ϕ_2. For a deployed dr, the defender have different payoffs depending on the type of attacker. If the attacker type h acts ($h = 1, 2$), the defender's payoff is:

$$u_h(d_r, ss_i(d_r)) = \phi_h(d_r, ss_i(d_r)) - \delta_h(d_r, ss_i(d_r)) \tag{1.3}$$

where $\phi_h(d_r, ss_i(d_r))$ and $\delta_h(d_r, ss_i(d_r))$ are defined in Subsection 3.1.2. Since the defender selects the defense configuration under uncertainty about the attacker's profile, his expected payoff is given by:

$$u_e = \phi_1 * u_1(d_r, ss_i(d_r)) + \phi_2 * u_2(d_r, ss_i(d_r)) \tag{1.4}$$

References

[1] BBC - *Encontro de emergncia discute ao de piratas.* 2009, http:/www.bbc.co.uk/portuguese/reporterbbc story /2008-11/081120 $-$ *somaliaencontro* $-$ *mp.shtml*, acess in 3/3/2009.

[2] Bier, V. M., Nagaraj, A. and Abhichandani.V. - *Protection of simple series and parallel systems with components of different values.* Reliability Engineering and System Safety, 87, pp. 315-323, (2005)

[3] Azaiez, M. N. and Bier, V. M. *Optimal resource allocation for security in reliability systems.* European Journal of Operational Research, 181, pp. 773-786, (2007).

[4] Levitin, G. and Ben-Haim, H. *Importance of protections against intentional attacks.* Reliability Engineering and System Safety, 93, pp. 639-646, (2008).

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

A EQUAÇÃO DE DAUGAVET PARA OPERADORES NO ESPAÇO C(S)

JORGE T. A. MUJICA * & ELISA R. SANTOS † & DANIELA M. S. VIEIRA ‡

Em 1963 I. K. Daugavet [1] provou que cada operador compacto T em $C[0,1]$ satisfaz a equação $\|I+T\| = 1+\|T\|$. A partir de então vários autores provaram que diversas classes de operadores em diferentes espaços de Banach satisfazem essa equação, que é hoje conhecida como **equação de Daugavet**.

Este trabalho tem como objetivo principal estudar tal equação para operadores lineares limitados no espaço das funções contínuas $C(S)$, onde S é um espaço Hausdorff compacto.

Para tanto, estudamos algumas representações de $C^*(S)$, o dual topológico de $C(S)$, segundo as propriedades topológicas de S, e também representações de operadores definidos em $C(S)$ ou com imagem em $C(S)$.

1 Equação de Daugavet

Definição 1.1. *Seja X um espaço de Banach e $T : X \to X$ um operador linear limitado. Dizemos que T satisfaz a **equação de Daugavet** se*

$$\|I + T\| = 1 + \|T\|.$$

Apresentamos a seguir dois resultados básicos importantes sobre a equação de Daugavet.

Teorema 1.1. *([2], Teorema A) Seja S um espaço Hausdorff compacto. Se S possui pontos isolados então existe um operador compacto (fracamente compacto) $T : C(S) \to C(S)$ que não satisfaz a equação de Daugavet.*

Proposição 1.1. *Se S é um espaço Hausdorff compacto e $T : C(S) \to C(S)$ um operador linear limitado então*

$$\max_{|\lambda|=1} \|I + \lambda T\| = 1 + \|T\|.$$

2 Operadores Compactos em $C(S)$

Teorema 2.1. *([2], Teorema A) Seja S um espaço Hausdorff compacto sem pontos isolados. Então todo operador compacto $T : C(S) \to C(S)$ que atinge a norma satisfaz $\|I + T\| = 1 + \|T\|$.*

Teorema 2.2. *Se S é um espaço Hausdorff compacto e X é um espaço de Banach, então os operadores de posto finito que atingem a norma são densos com a topologia da norma no espaço de todos os operadores compactos de $C(S)$ em X.*

Deste dois resultados segue o seguinte teorema, o qual generaliza o resultado de I. K. Daugavet de 1963.

Teorema 2.3. *Seja S um espaço Hausdorff compacto. Então todo operador compacto $T : C(S) \to C(S)$ satisfaz a equação de Daugavet se, e somente se, S não possui pontos isolados.*

*IMECC , UNICAMP, SP, Brasil, mujica@ime.unicamp.br
†IMECC , UNICAMP, SP, Brasil, elisars@ime.unicamp.br
‡IME, USP, SP, Brasil, danim@ime.usp.br

3 Operadores Fracamente Compactos em $C(S)$

Definição 3.1. *O espaço $rca(S)$ é definido para um espaço topológico S e consiste de todas as funções conjunto a valores escalares, σ-aditivas, regulares, definidas na σ-álgebra $\mathcal{B}$ de todos os conjuntos de Borel em S. A norma $\|\mu\|$ é a variação total $v(\mu, S)$.*

Definição 3.2. *Seja S um espaço de Hausdorff compacto e $T : C(S) \to C(S)$ um operador linear limitado. Pelo Teorema da Representação de Riesz, existe uma família $\{\mu_s\}_{s\in S}$ contida em $rca(S)$ tais que*

$$Tf(s) = \int_S f(t)\mu_s(dt), \quad f \in C(S), \quad s \in S.$$

*Esta família $\{\mu_s\}_{s\in S}$ é chamada **núcleo estocástico** de T.*

Lema 3.1. *Sejam S um espaço Hausdorff compacto e $T : C(S) \to C(S)$ um operador linear limitado com núcleo estocástico $\{\mu_s\}_{s\in S}$. Se o núcleo satisfaz*

$$\sup_{s\in U} \mu_s(\{s\}) \geq 0 \text{ para todo aberto não-vazio } U \subset S \tag{3.1}$$

então

$$\|I + T\| = 1 + \|T\|.$$

De fato, uma condição necessária e suficiente para que T satisfaça a equação de Daugavet é

$$\sup_{\{s:\|\mu_s\|>\|T\|-\epsilon\}} \mu_s(\{s\}) \geq 0 \quad \forall \epsilon > 0. \tag{3.2}$$

Lema 3.2. *Se S é um espaço Hausdorff compacto sem pontos isolados e $T : C(S) \to C(S)$ é fracamente compacto, então T satisfaz (3.1) do Lema 3.1.*

Baseado nos dois lemas anteriores, apresentamos a seguinte extensão para o Teorema 2.3.

Teorema 3.1. *([3], Teorema 5) Seja $T : C(S) \to C(S)$ um operador fracamente compacto. Então T satisfaz a equação de Daugavet se, e somente se, S é um espaço Hausdorff compacto sem pontos isolados.*

Referências

[1] DAUGAVET, I. K. - On a property of completely continuous operators in the space C. *Uspekhi Mat. Nauk*, **18**, 157-158, 1963.

[2] KAMOWITZ, H. - A property of compact operators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **91**, 231-236, 1984.

[3] WERNER, D. - An elementary approach to the Daugavet equation. *Interaction between Functional Analysis, Harmonic Analysis and Probability. Lecture Notes in Pure and Applied Math*, **175**, 449-454, 1996.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE UM SISTEMA NÃO LINEAR CONTENDO TERMO HARMÔNICO E REDE ÓPTICA SIMPLES EM 1D.

Nascimento V. A. *

O estudo de equações diferenciais parciais não lineares tem uma vasta aplicabilidade em diversas áreas da ciência. Uma das mais famosas equações diferenciais não lineares na área de física matemática é a equação de Gross-Pitaevskii (EGP) que descreve a dinâmica de gases em Condensados de Bose-Einstein. Ao contrário da EGP que possui um termo não linear cúbico ($|\psi|^2\psi$), uma equação hidrodinâmica de campo médio que descreve a dinâmica de um gás de férmions (superfluido) possui um um termo não linear $|\psi|^{4/3}\psi$. Equações hidrodinâmicas por serem sistemas não lineares e dependente do tempo, tornam-se um problema não trivial para estudarmos a sua dinâmica, entretanto, alguns trabalhos utilizam-se da aproximação variacional para estudar estados estacionários. Neste trabalho considaramos uma equação hidrodinâmica de campo médio que descreve um sistema de gases fermiônicos aprisionados por um potencial harmônico V(x)= αx^2 e uma rede periódica simples em 1D na forma $\epsilon\cos(2x)$ e propomos um método numérico para resolvê-la. Utilizamos primeiramente o método Split-Step para a solução dependente do tempo onde o Hamiltoniano é separado em três partes [1] e posteriormente o método de Crank-Nicolson. A não linearidade assim como os diferentes termos (não derivaveis) lineares (excluindo devivadas espaciais) são tratadas separadamente dos temos derivaveis como a energia cinética. O método é chamado de Split-Step pois o potencial é resolvido em dois passos separados antes e depois de se aplicar o operador correpondente ao método de Crank-Nicolson.

Equação Hidrodinâmica de Campo Médio: em nosso modelo simplificado de um gás fermiônico aprisionado (superfluido) utilizamos uma função de onda ψ (par de Cooper) que representa a atração entre férmions com orientações de spins opostos [2]. A equação hidrodinâmica de campo médio em 1D para um gás de férmions a uma temperatura próxima de zero é escrita como

$$i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x^2} + g_{1D}|\psi(x,t)|^{4/3}\psi(x,t) - \epsilon\cos(2x)\psi(x,t) + \alpha x^2\psi(x,t). \tag{0.1}$$

Onde $\partial\psi(x,t)/\partial t$ representa a evolução temporal da função de onda, $\nabla^2 \equiv \partial^2/\partial x^2$ é o laplaciano em 1D (operador energia cinética), $\psi(x,t)$ a função de onda para o gás de férmions, g_{3D} é a força efetiva de não linearidade para férmions, $V(x) = \alpha(x^2)$ potencial de aprisionamento em 1D, $\alpha = (1/2)m\omega^2$ representa a massa para férmions, ω é a frequência angular, $\epsilon\cos(2x)$ é o potencial da rede óptica em 1D e ϵ corresponde a amplitude da rede óptica.

Método Numérico: Split-Step e Crank-Nicolson: A Eq. (0.1) pode ser escrita como

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi \tag{0.2}$$

onde o Hamiltoniano H contém os termos não lineares e lineares incluindo as derivadas espaciais. Nós resolveremos esta equação por iteração. Uma dada solução trivial (input) propaga-se no tempo em pequenos passos temporais até alcançar uma solução estável. A equação hidrodinânica é discretizada no espaço e no tempo usando o método de diferença finita. Este procedimento resulta em um conjunto de equações algébricas as quais podem ser resolvidas por iteração usando um input consistente com as condições de contorno conhecidas. No presente método Split-Step esta iteração é realizada em vários passos pela separação do Hamiltoniano em diferentes partes deriváveis e não deriváveis. No caso para 1D nós separamos o Hamiltoniano em três partes: $H = H_1 + H_2 + H_3$ onde

$$H_1 = \frac{1}{2}(x^2 + g_{3D}|\psi|^{4/3}\psi - \epsilon\cos(2x)) \tag{0.3}$$

*Departamento de Física, UFMS, MS, Brasil, aragao60@hotmail.com

$$H_2 = -\frac{\partial}{\partial x^2} \tag{0.4}$$

$$H_3 = \frac{1}{2}(x^2 + g_{3D}|\psi|^{4/3}\psi - \epsilon\cos(2x)). \tag{0.5}$$

A varíavel no tempo é discretizada como $t_n = n\triangle$ onde $\triangle$ é o time step. A solução é realizada primeiro no time step $\triangle$ no tempo t_n pela solução da Eq. (0.2) com $H = H_1$ para produzir uma solução intermediária $\psi^{n+1/3}$ de ψ^n, onde ψ^n é uma função de onda discretizada no tempo t_n. Como não há derivadas em H_1 esta propagação é realizada essencialmente para pequenos $\triangle$ através da operação

$$\psi^{n+1/3} = \vartheta_{nd}(H_1)\psi^n \equiv e^{-i\triangle H_1\psi^n} \equiv e^{-i\triangle(\frac{1}{2}[x^2+g_{3D}|\psi|^{4/3}\psi-\epsilon\cos(2x)])\psi^n} \tag{0.6}$$

onde $\vartheta_{nd}(H_1)$ representa o operador evolução temporal e o sufixo nd denota não derivavel. Na sequência, a correspondente propagação no tempo para o operado numérico H_2 pelo método de Crank-Nicolson:

$$\frac{\psi^{n+2/3} - \psi^{n+1/3}}{-i\triangle} = \frac{1}{2}H_2(\psi^{n+2/3} + \psi^{n+1/3}). \tag{0.7}$$

A solução formal para a Eq. (0.7) é

$$\psi^{n+2/3} = \vartheta_{CN}(H_2)\psi^{n+1/3} \equiv \frac{1 - \triangle H_2/2}{1 + \triangle H_2/2}\psi^{n+1/3} \tag{0.8}$$

onde ϑ_{CN} representa o operado evolução temporal com H_2 e o sufixo CN refere-se ao algoritmo de Crank-Nicolson. O operado ϑ_{CN} é usado para propagar a solução intermediária $\psi^{n+1/3}$ pelo time step $\triangle$ para gerar uma segunda solução intermediária $\psi^{n+2/3}$. A solução final é obtida da forma:

$$\psi^{n+1} = \vartheta_{nd}(H_3)\vartheta_{CN}(H_2)\vartheta_{nd}(H_1)\psi^n \tag{0.9}$$

A separação dos termos deriváveis e não deriváveis em duas partes simétricas - H_1 e H_3 em relação ao termo H_2 aumenta a stabilidade do metódo e reduz os erros numéricos.

Descrevendo o algoritmo de Crank-Nicolson:. A Eq. (0.2) é discretizada com $H = H_2$ da Eq. (0.4) pelo esquema de Crank-Nicolson

$$i\frac{\psi_j^{n+1} - \psi_j^n}{\triangle} = -\frac{1}{2h}[(\psi_{j+1}^{n+1} - 2\psi_j^{n+1} + \psi_{j-1}^{n+1}) + (\psi_{j-1}^n - 2\psi_j^n + \psi_{j-1}^n)] \tag{0.10}$$

onde $\psi_j^n = \psi(x_j, t_n)$ refere a $x = x_j = jh$, $j = 1, 2, ..., N_x$(pontos de grade) e h o passo espacial. Este esquema é construido pela aproximação ∂/∂t pela fórmula de dois pontos e $\partial/\partial\ x^2$ pela fórmula de três pontos. Este procedimento resulta em uma série de equações tridiagoanais Eq. (0.10) em ψ_{j+1}^{n+1}, ψ_j^{n+1} e ψ_{j-1}^{n+1} no tempo t_{n+1}, no qual é resolvida utilizando condições de contorno apropriadas.

1 Resultados Obtidos.

A resolução numérica da Eq. (0.1) nos propiciou estudar a dinâmica de gases fermiônicos aprisionados por potenciais harmônicos e da rede óptica, constatamos que existem estados ligados, ou seja, há formação de ondas sólitônicas, isso pode ser averiguado observando e evolução da função de onda $\psi(x, t)$ no tempo.

Agradecimento especial a FUNDECT/CNPq n^0 01/2008-DCR, contrato n^0 23.200.18/2009 pelo apoio financeiro e ao Prof. Sadhan K. Adhikari (IFT/UNESP) pelas valiosas sugestões.

Referências

[1] Sadhan K. Adhikari, Paulsamy Muruganandam. - *Bose Einstein condensates dynamics from numerical solution og the Gross-pitaevskii equation.*, J. Phys. B. At. Mol. Opt. 35, 2831-2843, 2002.

[2] B.A. Malomed, N.A. Nascimento, Sadhan K. Adhikari - *Gap solitons in fermion superfluids*, Mathematics and Computers in Simulation,v. 80, p. 648-659, 2009.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{o}}$ 4 Novembro 2010

SOLUÇÃO ANALÍTICA DE EQUAÇÕES HIDRODINÂMICAS DE CAMPO MÉDIO NÃO LINEARES VIA APROXIMAÇÃO VARIACIONAL

NASCIMENTO V.A. *

Ao estudar as soluções das equações de KdV, M. Kruskal as denominou de Sólitons. Com este termo fundiu-se o conceito de onda solitária com a terminação *on*, radical designando partícula (prótons, elétrons, etc). O sóliton é uma solução para algumas equações de propagação que aparecem em física de partículas, física de plasma, em especial na mecânica dos fluidos, em óptica não linear e biologia. Muitas definições podem ser formuladas, entretanto nós definiremos neste trabalho como a solução de uma equação hidrodinâmica de campo médio, que trata-se de uma equação diferencial parcial não linear que representa um sistema de gás de férmions aprisionados por um potencial transversal e uma super-rede óptica criada por laser. Teoricamente e experimentalmente o estudo de sólitons tem sido realizado em condensados de Bose Einstein (Gás de Bósons) e fermiônicos (Gás de Férmions) graças a utilização de redes ópticas. Uma rede óptica é essencialmente um cristal de luz: um padrão periódico formado pela intersecção de dois lases de mesmo comprimento de onda. A chave de muitos dos comportamentos observados em ondas de matéria em redes ópticas, tais como as oscilações de Bloch e tunelamento Landau-Zener, e controle de dispersão é a formação de um espectro de banda de gap. No espaço livre a relação de dispersão entre a energia e o momento de um sistema linear tal como elétrons, luz, ou átomos frios é usualmente continuo. Entretanto, em potenciais periódicos, surgem gaps. A partir da física do estado sólido surgiu o termo *gap proibido* para regiões espectrais onde não há propagação de ondas. Uma exceção é quando a não linearidade permite a localização de uma onda dentro de uma banda de gap linear, formando um gap sóliton iluminado. Em uma recente publicação [1] nós mostramos que a não linearidade efetiva no estudo de átomos fermiônicos, atua em combinação com o potencial da rede óptica simples (periódica) e permite o surgimento de gap sólitons em diferentes dimensões. Neste trabalho nós utilizamos uma rede óptica duplamente periódica (ou super-rede) na qual possui duas periodicidades que faz com que haja uma reflexão de Bragg extra e permita o surgimento de mini-gaps no espectro de onda de matéria, isso acarreta na formação de mini-gap sóliton em sistemas gasosos. Em um regime estacionário nós obtivemos a solução analítica para uma equação hidrodinâmica de campo médio não-linear em 3D que descreve a propagação de sólitons (ou mini gap sóliton) em um sistema de gases quânticos aprisionados por uma super-rede óptica em 1D utilizando aproximação variacional. Embora exista vários métodos numéricos que resolvem equações hidrodinâmicas, o método variacional tem sido de grande eficácia, princípalmente no estudo de gases quânticos.

Equação Hidrodinâmica de Campo Médio: Nós consideramos a equação hidrodinâmica de campo médio para sólitons fundamentais em três dimensões para um gás de férmions na sua forma usual escrita como:

$$i\psi_t = -\nabla^2\psi + g_{3D}|\psi|^{4/3}\psi - U[\epsilon\sin^2(z) + (1-\epsilon)\sin^2(2z)]\psi + \alpha[x^2+y^2]\psi. \tag{0.1}$$

Onde $\nabla^2 \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ é o laplaciano em 3D (operador energia cinética), $\psi(x,y,z,t)$ a função de onda do condensado, g_{3D} é a força efetiva de não linearidade para férmions em 3D, $V(x,y) = \alpha(x^2+y^2)$ potencial de aprisionamento transversal em 2D (na forma de charuto), $\alpha = (1/2)m\omega_\perp$ representa a massa para férmions, $\omega_\perp$ é a frequência do laser de aprisionamento, $U[\epsilon\sin^2(z) + (1-\epsilon)\sin^2(2z)]$ é o potencial da super-rede óptica em 1D e $-\epsilon$ (ou profundidade da rede) corresponde a amplitude da super-rede óptica.

Aproximação Variacional: Soluções estacionárias para a Eq.(0.1) são obtidas considerando $\psi(x,y,z,t) = e^{-i\mu t}u(x,y,z)$, no qual μ é o potencial químico, e $u(x,y,z)$ é a função real (para sólitons fundamentais) que obedece

*Departamento de Física, UFMS, MS, Brasil, aragao60@hotmail.com

a seguinte equação em 3D para férmions

$$\mu u = -(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + g_{3D}u^{7/3} - [U[\epsilon \sin^2(z) + (1-\epsilon)\sin^2(2z)]]u + \alpha(x^2+y^2)u. \tag{0.2}$$

Considerando a condição de normalização; $\int\int\int u^2(x,y,z)dxdydz = 1$, a Eq.(0.2) para férmions pode ser obtida a partir da Lagrageana,

$$2L = \mu + \int\int\int dxdydz\Big[-\mu u^2 + (\nabla u)^2 + \frac{3}{5}g_{3D}u^{10/3} - U[\epsilon\sin^2(z) + (1-\epsilon)\sin^2(2z)]u^2 + \alpha(x^2+y^2)u^2\Big]. \tag{0.3}$$

Soluções variacionais para a Eq.(0.3) são obtidas ao assumirmos um ansatz simétrico para sólitons em 3D na forma Gaussiana,

$$u(x,y,z) = \frac{\sqrt{N}}{\pi^{3/4}WV^{1/2}}\exp\Big(-\frac{x^2+y^2}{2W^2} - \frac{z^2}{2V^2}\Big). \tag{0.4}$$

onde N corresponde à norma, W é a largura bidimensional e V a largura axial do sóliton (que tem a forma de charuto). Ao substituirmos o ansatz (Eq.0.4) na Lagrangeana (Eq.0.3) e integrarmos em relação a x, y e z obtemos a Lagrangeana efetiva para férmions.

$$2L_{ef} = -\mu N + \frac{N}{W^2} + \frac{N}{2V^2} + g_{3D}\Big(\frac{3^{3/2}}{5^{5/2}}\frac{N^{5/3}}{W^{4/3}V^{1/2}\pi}\Big) - U.(\epsilon)\frac{1}{2}N(1-e^{-V^2}) - U(1-\epsilon)\frac{N}{2}(1-e^{-4V^2}) + \alpha NW^2 \tag{0.5}$$

Desta forma a partir da resolução da Lagrangeana efetiva, nós podemos estudar o coeficiente de não linearidade efetiva (g_{3D}) em função do potencial quimico (μ).

1 Resultados Obtidos a partir da Aproximação Variacional.

Utilizando as equações de Euler-Lagrange, as equações variacionais podem ser obtidas a partir da Lagrangeana efetiva. Primeiro, façamos $\partial L_{ef}/\partial\mu = 0$, como usual, $N = 1$. Na sequência as equações $\partial L_{ef}/\partial W = \partial L_{ef}/\partial V = 0$ predizem a relação entre as larguras do sóliton (W,V) e o coeficiente de não linearidade efetiva (g_{3D}) conforme explicito abaixo,

$$\frac{2}{W^3} + \Big(\frac{3}{5}\Big)^{5/3} g_{3D}\Big(\frac{4}{3}\Big)\frac{N^{5/3}}{W^{7/3}V} = 2\alpha W. \tag{1.6}$$

$$-\frac{1}{V^3} - \Big(\frac{3}{5}\Big)^{5/3} g_{3D}\Big(\frac{N^{5/3}}{W^{4/3}\pi V^{2/3}}\Big) - U(1-\epsilon)4Ve^{-4V^2} = U\epsilon V e^{-V^2}. \tag{1.7}$$

Considenrando $\partial L_{ef}/\partial N = 0$ obtemos μ (potencial quimico) em função das larguras do sóliton (W, V) e do coeficiente de não linearidade para férmions g_{3D}):

$$\frac{1}{W^2} + \frac{1}{2V^2} + \Big(\frac{3}{5}\Big)^{5/3}\frac{5}{3}g_{3D}\Big(\frac{N^{5/3}}{W^{4/3}V^{5/3}}\Big) - U\epsilon(1-e^{-V^2}) - \frac{U}{2}(1-\epsilon)(1-e^{4V^2}) + \alpha W^2 = \mu \tag{1.8}$$

A Eq.(1.8) descreve o comportamento do coeficiente de não linearidade efetiva em função do potencial químico para um gás de férmions aprisionados por uma super-rede óptica em 1D. A partir dos resultados obtidos para g_{3D} versus μ nós podemos estudar a formação dos sólitons (mini-gap sólitons) dentro dos mini-gap do potencial da super-rede. É interessante ressaltarmos que trata-se de um resultado inédito, uma vez que envolve uma super-rede óptica. Alguns grupos de pesquisas estudam apenas o potencial químico em função do número de patículas considenrando redes ópticas simples em 1D ou 2D.

Agradecimento especial a FUNDECT/CNPq n^0 01/2008-DCR, contrato n^0 23.200.18/2009 pelo apoio financeiro.

Referências

[1] B.A. Malomed, N.A. Nascimento, Sadhan K. Adhikari - *Gap solitons in fermion superfluids*, Mathematics and Computers in Simulation,v. 80, p. 648-659, 2009.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$\underline{o}$ 4 Novembro 2010

DESIGUALDADE DE CARLEMAN E CONTROLABILIDADE NULA PARA UMA EDP COM COEFICIENTES COMPLEXOS *

M. C. SANTOS †

Neste trabalho estamos interessados em estudar a controlabilidade nula para a seguinte equação diferencial parcial de segunda ordem, com coeficientes complexos:

$$\begin{cases} (a+ib)y_t - \Delta y = 1_\omega u & \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\ y = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma \times (0,T), \\ y(0) = y_0 & \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado cuja fronteira $\partial\Omega$ é suficientemente regular, $T > 0$, $\omega \subset \Omega$ é um subconjunto aberto e não-vazio. A função y_0 é um dado em $L^2(\Omega)$, enquanto u representa a função controle que atua no sistema. O símbolo 1_ω representa a função característica de ω.

Apresentaremos resultados, seguindo as idéias de [1] e [2]. Em [1], foi mostrado resultados de controlabilidade nula para a equação do calor. Em [2] foi apresentado um resultado de controlabilidade nula para uma EDP de segunda ordem com coeficiente complexo, em que o operador é fortemente elíptico. Ambos os resultados foram obtidos via desigualdade de Carleman.

Para obtermos controlabilidade nula, necessitaremos de uma desigualdade de observabilidade envolvendo o sistema adjunto de (0.1). Em outros termos, para cada $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$, consideraremos o sistema

$$\begin{cases} (-a+ib)\varphi_t - \Delta \varphi = 1_\omega u & \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\ \varphi = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma \times (0,T), \\ \varphi(0) = \varphi_0 & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{0.2}$$

A desigualdade de observabilidade para (0.2) é dada no seguinte resultado:

Teorema 0.1. *Existe uma constante $C > 0$ tal que, para cada $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$, a solução de (0.2) associada ao dado φ_0 satisfaz*

$$\|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \int\int_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2 dxdt. \tag{0.3}$$

Para provarmos o Teorema 0.1 combinamos uma desigualdade clássica de energia com uma desigualdade de Carleman para o sistema adjunto 0.2. Esta última desigualdade resume-se no seguinte

Lema 0.1. *Seja $a, b \in \mathbb{R}$ com $a > 0$, então existe um $\lambda_0 > 0$, $s_0 > 0$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$ e $s \geq s_0$ temos*

$$\begin{aligned} &s^{-1}\lambda^{-1} \int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{-1}(|q_t|^2 + |\Delta q|^2)dxdt + s\lambda^2 \int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla q|^2 dxdt \\ &+ s^3\lambda^4 \int\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|q|^2 dxdt \leq C\left(\int\int_Q e^{-2s\alpha}|(-a+ib)q_t + \Delta q|^2 dxdt \right. \\ &\left. + s^3\lambda^4 \int\int_{\omega\times(0,T)} \xi^3 e^{-2s\alpha}|q|^2 dxdt\right), \end{aligned} \tag{0.4}$$

em que $q \in C^2(\overline{Q}; \mathbb{C})$, com $q = 0$ sobre Σ.

---

*Este trabalho é uma parte da dissertação de mestrado na Universidade Federal da Paraíba em 2010.
†Pós-graduação em Matemática , UFPB, PB, Brasil, mcardoso_s@yahoo.com.br

Prova do Lema 0.1: Seja $f = q_t + \Delta q$. Consideremos uma função ψ tal que

$$q = e^{s\alpha}\psi \quad \text{e} \quad f = e^{s\alpha} g. \tag{0.5}$$

Façamos a seguinte decomposição:

$$I_1\psi + I_2\psi = g, \tag{0.6}$$

em que

$$I_1\psi = ib\psi_t - as\alpha_t\psi + \Delta\psi + s^2|\nabla\alpha|^2\psi, \tag{0.7}$$

$$I_2\psi = -a\psi_t + ibs\alpha_t\psi + 2s\nabla\alpha\cdot\nabla\psi + s\Delta\alpha\psi. \tag{0.8}$$

Dessa forma,

$$\|I_1\psi\|^2_{L^2(\Omega)} + \|I_2\psi\|^2_{L^2(\Omega)} + \int\int_Q I_1\overline{I}_2 + \overline{I}_1 I_2 dxdt = \int\int_Q |g|^2 dxdt, \tag{0.9}$$

em que $\overline{I}_i$ representa o complexo conjugado de I_i. Devemos analisar cada termo em (0.9). O mais delicado é $\int\int_Q I_1\overline{I}_2 + \overline{I}_1 I_2 dxdt$. Após alguns cálculos, encontramos que

$$\begin{aligned}\int\int_Q I_1\psi\overline{I}_2\psi + \overline{I}_1\psi I_2\psi dxdt \quad &\geq \quad \int\int_Q \left(s\lambda^2 e^{-2s\alpha}\xi|\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4 e^{-2s\alpha}\xi^3|\psi|^2\right) dxdt \\ &- \quad \int\int_{\omega\times(0,T)} \left(s\lambda^2 e^{-2s\alpha}\xi|\nabla\psi|^2 + s^3\lambda^4 e^{-2s\alpha}\xi^3|\psi|^2\right) dxdt.\end{aligned}$$

Combinando a desigualdade acima com a análise (um pouco mais simples) dos demais termos de (0.9), obtemos (0.4).

■

Referências

[1] FERNANDEZ-CARA, E. AND GUERRERO, S. - *Global Carleman inequalities for parabolic systems and applications to controllability.* SIAM J. Control Optimization, 45 (4) (2006), 1395-1446.

[2] FU, X. - *A Weighted identity fo a partial differential operator of second order and its applications*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 342 (2006), 579-584.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

ESTIMATIVAS DE n-LARGURAS DE CONJUNTOS DE FUNÇÕES SUAVES SOBRE A ESFERA S^d

RÉGIS L. B. STÁBILE * & SÉRGIO A. TOZONI †

A teoria de n-larguras foi introduzida por Kolmogorov em 1938. Até 1960, quando apareceu o primeiro trabalho na direção de pesquisa abordada neste trabalho, existiam apenas dois artigos devidos à Rudin e Steehkin. Após 1960 e até o presente momento pudemos observar um maior interesse nessa área.

O objetivo deste trabalho é obter estimativas de n-larguras de conjuntos de funções suaves, finitamente e infinitamente diferenciáveis sobre a esfera S^d, fazendo uso das n-larguras de operadores multiplicadores específicos que geram tais conjuntos. É importante ressaltar que várias destas estimativas são exatas em termos de ordem.

1 n-Larguras

Definição 1.1. *Para A um subconjunto compacto e centralmente simétrico de um espaço de Banach X, definimos a n-larguras Kolmogorov de A em X pelo valor*

$$d_n(A,X) \;=\; \inf_{X_n} \sup_{x\in A} \inf_{y\in X_n} \|x-y\|_X \,,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os subespaços n-dimensionais X_n de X.

Definição 1.2. *Se Y é um outro espaço de Banach e $T : X \longrightarrow Y$ um operador então definimos a n-largura de Kolmogorov do operador T por $d_n(T(B_X), Y)$, onde B_X denota a bola unitária do espaço X.*

2 Análise harmônica na esfera S^d

Definição 2.1. *Uma função $f : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{C}$ é chamada homogênea de grau k, $k \in \mathbb{Z}$, se $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$ para qualquer $\lambda > 0$ e $x \in \mathbb{R}^{d+1}$. Denotaremos por $\mathcal{P}$, o conjunto de todos os polinômios definidos sobre $\mathbb{R}^{d+1}$ e por $\mathcal{P}_k$ o subconjunto de $\mathcal{P}$ formado pelos polinômios que são homogêneos de grau k.*

Definição 2.2. *Seja Δ o operador laplaciano em $\mathbb{R}^{d+1}$ e seja $k \in \mathbb{N}$. Definiremos $\mathcal{A}_k$ como sendo o subespaço vetorial de $\mathcal{P}_k$ formado pelos polinômios harmônicos e homogêneos de grau k, isto é*

$$\mathcal{A}_k \;=\; \{p \in \mathcal{P}_k : \Delta p = 0.\}$$

Definição 2.3. *Um harmônico esférico de grau k é a restrição à esfera S^d de um elemento de $\mathcal{A}_k$. Denotaremos por $\mathcal{H}_k$ o conjunto dos harmônicos esféricos de grau k.*

Definição 2.4. *Fixemos $x \in S^d$ e consideremos o funcional linear $L_x^{(k)}$ sobre $\mathcal{H}_k$ que a cada elemento $Y \in \mathcal{H}_k$ associa o valor $L_x^{(k)}(Y) = Y(x)$. Como $\mathcal{H}_k$ é um espaço de Hilbert, munido do produto interno $(\ ,)$ de $L^2(S^d)$, existe pelo Teorema de Representação de Riesz um único harmônico esférico $Z_x^{(k)} \in \mathcal{H}_k$ tal que*

$$Y(x) \;=\; L_x^{(k)}(Y) \;=\; (Y, \overline{Z_x^{(k)}}) \;=\; \int_{S^d} Y(y) Z_x^{(k)}(y)\, d\mu(y),$$

para todo $Y \in \mathcal{H}_k$. O harmônico esférico $Z_x^{(k)}$ é chamado de zonal de grau k e pólo x.

*IMECC UNICAMP, SP, Brasil, ra069475@ime.unicamp.br
†IMECC, UNICAMP, SP, Brasil, tozoni@ime.unicamp.br

Definição 2.5. *Para $t \in [-1,1]$, definimos*

$$\widetilde{Z}^{(k)}(t) \;=\; \frac{d+2k-1}{d-1} P_k^{(d-1)/2}(t),$$

onde $P_k^{(d-1)/2}(t)$ são os conhecidos polinômios ultraesféricos ou de Gegenbauer.

Definição 2.6. *Seja $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números complexos e $1 \leq p, q \leq \infty$. Se para todo $\varphi \in L^p(S^d)$ existe uma função $f = \Lambda\varphi \in L^q(S^d)$ com expansão formal em harmônicos esféricos*

$$f \;\sim\; \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \widetilde{Z}^{(k)} * \varphi,$$

tal que $\|\Lambda\|_{p,q} \;=\; \sup\{\|\Lambda\varphi\|_q : \varphi \in L^p,\ \varphi \in U_p\} \;<\; \infty$, dizemos que Λ é um operador multiplicador limitado de L^p em L^q com norma$\|\Lambda\|_{p,q}$, onde U_p denota a bola unitária de $L^p(S^d)$.

3 Estimativas de n-larguras de conjuntos de funções suaves em S^d

Os conjuntos de funções finitamente diferenciáveis sobre S^d estão associados às sequências de multiplicadores $\Lambda^{(1)} = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}},\ \lambda_k = k^{-\gamma},\ \gamma \in \mathbb{R}, \gamma > 0$. Para tais conjuntos obtemos as seguintes estimativas para a n-largura de Kolmogorov

Teorema 3.1. *Para $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$ e $\gamma/d > 1/p$, temos*

$$d_n(\Lambda^{(1)}U_p; L^q) \ll n^{-\gamma/d+(1/p-1/2)} \begin{cases} q^{\frac{1}{2}}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2\ n)^{\frac{1}{2}}, & q = \infty, \end{cases}$$

$$d_n(\Lambda^{(1)}U_p; L^q) \;\gg\; n^{-\frac{\gamma}{d}} \begin{cases} 1, & 1 < q \leq p \leq 2, \\ (\log_2 n)^{-\frac{1}{2}}, & 1 = q \leq p \leq 2, \\ 1, & 2 \leq p, q < \infty, \\ (\log_2 n)^{-\frac{1}{2}}, & 2 \leq q < p = \infty. \end{cases}$$

Os conjuntos de funções infinitamente diferenciáveis sobre S^d estão associados às sequências de multiplicadores $\Lambda^{(2)} = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}},\ \lambda_k = e^{-\gamma k^r},\ \gamma > 0,\ 0 < r < 1$. Para tais conjuntos obtemos as seguintes estimativas para a n-largura de Kolmogorov

Teorema 3.2. *Para $1 \leq q \leq p \leq 2$, temos que*

$$d_n(\Lambda^{(2)}U_p; L^q) \;\gg\; e^{-Rn^{r/d}} \begin{cases} 1, & q > 1, \\ (\log_2 n)^{-1/2}, & q=1, \end{cases}$$

para $2 \leq q, p \leq \infty$

$$d_n(\Lambda^{(2)}U_p; L^q) \;\gg\; e^{-Rn^{r/d}} \begin{cases} 1, & p < \infty, \\ (\log_2 n)^{-1/2}, & p = \infty, \end{cases}$$

onde $R = R_{\gamma,d,r} \;=\; \left(\frac{d}{2}\right)^{\frac{r}{d}} \gamma$, e para $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$, temos que

$$d_n(\Lambda^{(2)}U_p; L^q) \;\ll\; e^{-Rn^{\frac{r}{d}}} n^{(1-\frac{r}{d})(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \begin{cases} q^{\frac{1}{2}}, & 2 \leq q \leq \infty, \\ (\log_2 n)^{\frac{1}{2}}, & q = \infty. \end{cases}$$

Referências

[1] Kushpel, A., Tozoni, S. - *Entropy and widths of multiplier operators on two-points homogeneous space.*, Relatório de Pesquisa, IMECC/UNICAMP, RP16/04, janeiro/2008.

[2] Pinkus, A. - *n-Widths in Approximation Theory.*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

POLINÔMIOS E APLICAÇÕES MULTILINEARES QUASE SOMANTES

Daniel Pellegrino * & Joilson Ribeiro †

A idéia de considerar aplicações não-lineares quase somantes aparece pela primeira vez na literatura nos artigos [2] e [3], e foi posteriormente explorada em [6]. Neste trabalho exploramos o conceito de aplicação quase somante em um dado ponto, obtendo uma norma no espaço das aplicações quase somantes em todo ponto. Inicialmente tentamos adaptar resultados similares para aplicações absolutamentes somantes obtidos em [1, 5]. Entretanto, o caso de aplicações quase somantes é mais delicado e, mesmo no caso linear exige atenção especial (veja, por exemplo [3]).

1 Definições

Ao longo deste trabalho $E, E_1, ..., E_n, F$ denotarão espaços de Banach reais ou complexos e E' o dual topológico de E. A bola unitária fechada de E será representada por B_E. Dado um inteiro positivo $n \geq 2$, o espaço de Banach de todas as transformações n-lineares limitadas de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F com a norma do sup será denotado por $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$. A notação para o respectivo espaço de polinômios é $\mathcal{P}(^nE; F)$. Se T é uma aplicação n-linear e P é o polinômio gerado por T, escrevemos $P = \hat{T}$. Reciprocamente, a (única) aplicação n-linear simétrica associada ao polinômio n-homogêneo P é denotada por $\check{P}$.

A notação $Rad(F)$ denota o espaço vetorial formado pelas sequências $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ tais que a soma $\sum_{j=1}^{n} r_j(t)x_j$ é convergente em F para quase todo $t \in [0, 1]$ (ou, equivalentemente, $\sum_{j=1}^{n} r_j(.)x_j$ converge em $L_p([0, 1], F)$ para algum, e portanto todos, $0 < p < \infty$). O espaço $Rad(F)$ é Banach se for munido da norma

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{Rad(F)} := \left(\int_0^1 \left\|\sum_{n=1}^{\infty} r_j(t)x_j\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1}$$

Os elementos de $Rad(F)$ são chamados de sequências quase incondicionalmente somáveis. Um polinômio $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$ é quase p-somante em $a \in E$ se $(P(a + x_j) - P(a))_{j=1}^{\infty} \in Rad(F)$ para todo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E)$ (para a definição desse conjunto, veja [5]).

O espaço formado pelos polinômios n-homogêneos que são quase p-somantes em $a \in E$ será denotado por $\mathcal{P}_{al,p}^{(a)}(^nE; F)$. Os polinômios n-homogêneos quase p-somantes em $a = 0$ são simplesmente chamados de quase p-somantes e o respectivo espaço é denotado por $\mathcal{P}_{al,p}(^nE; F)$.

O espaço formado pelos polinômios n-homogêneos que são quase p-somantes em todo ponto é denotado por $\mathcal{P}_{al,p}^{ev}(^nE; F)$. De forma análoga, definimos $\mathcal{L}_{al,p}^{(a)}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\mathcal{L}_{al,p}^{ev}(E_1, \ldots, E_n; F)$

2 Resultados

Já era conhecido (veja [6]) que se $1 < p \leq 2$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(^nE; E) &\neq \mathcal{P}_{al,p}^{ev}(^nE; E) \Leftrightarrow \dim E = \infty \quad e \\ \mathcal{L}(^nE; E) &\neq \mathcal{L}_{al,p}^{ev}(^nE; E) \Leftrightarrow \dim E = \infty \end{aligned}$$

Tentando melhorar o resultado acima, qualificando pontos $(a_1, ..., a_n) \in E^n$ para os quais $\mathcal{L}(^nE; E) \neq \mathcal{L}_{al,p}^{(a)}(^nE; E)$, obtivemos o seguinte resultado:

*Departamento de Matemática, UFPB, PB, Brasil, dmpellegrino@gmail.com
†Departamento de Matemática, ,UFPE, PE, Brasil, joilsonribeiro@yahoo.com.br

Teorema 2.1 (Teorema do tipo Dvoretzky-Rogers)**.** *Sejam E um espaço de Banach, $n \geq 2$ e $1 < p \leq 2$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) E tem dimensão infinita.

(b) $\mathcal{L}_{al,p}^{(a)}({}^nE;E) \neq \mathcal{L}({}^nE;E)$ para todo $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E^n$ com $a_i \neq 0$ para todo i ou $a_i = 0$ para apenas um i.

(c) $\mathcal{L}_{al,p}^{(a)}({}^nE;E) \neq \mathcal{L}({}^nE;E)$ para algum $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E^n$ com $a_i \neq 0$ para todo i ou $a_i = 0$ para apenas um i.

Um resultado semelhante foi obtido para polinômios. Além disso, obtivemos a seguinte caracterização para o espaço $\mathcal{L}_{al,p}^{ev}(E_1, ..., E_n; F)$:

Teorema 2.2. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $T \in \mathcal{L}_{al,p}^{ev}(E_1, ..., E_n; F)$.

(b) Existe $C \geq 0$ tal que

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{\infty} r_j(t)\left(T\left(a_1 + x_j^{(1)}, ..., a_n + x_j^{(n)}\right) - T(a_1, ..., a_n)\right)\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq C \prod_{k=1}^{n}\left(\|a_k\| + \left\|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,p}\right)$$

para todo $\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_p^u(E_k)$, $k = 1, ..., n$ e $(a_1, ..., a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$.

(c) Existe $C \geq 0$ tal que

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{m} r_j(t)\left(T\left(a_1 + x_j^{(1)}, ..., a_n + x_j^{(n)}\right) - T(a_1, ..., a_n)\right)\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq C \prod_{k=1}^{n}\left(\|a_k\| + \left\|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,p}\right)$$

para todo positivo inteiro m, $x_j^{(k)} \in E_k$, $k = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$ e $(a_1, ..., a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$.

Mostramos ainda que, a menor constante C que satisfaz o item (b) do teorema anterior é uma norma e, com essa norma, $\mathcal{L}_{al,p}^{ev}(E_1, ..., E_n; F)$ é um espaço de Banach. Mais precisamente:

Teorema 2.3. $(\mathcal{L}_{al,p}^{ev}, \|.\|_{ev,p})$ *é um ideal normalizado de aplicações multilineares.*

Referências

[1] BARBOSA, J., BOTELHO, G., DINIZ, D. AND PELLEGRINO, D. - *Spaces of absolutely summing polynomials*, Math. Scand, **101**, 219-237, 2007.

[2] BOTELHO, G. - *Almost summing polynomials*, Math. Nachr. **211**, 25-36, 2000.

[3] BOTELHO, G., BRAUNSS, H. A., AND JUNEK, H. - *Almost p-summing polynomials and multilinear mappings*, Arch. Math. **76**, 109-118, 2001.

[4] DIESTEL, J., JARCHOW, H. AND TONGE, A. - *Absolutely summing operators*, Cambridge University Press. 1995.

[5] MATOS, M. C. - *Nonlinear absolutely summing mappings*, Math. Nachr. **258**, 71-89, 2003.

[6] PELLEGRINO, D. - *Almost summing mappings*, Arch. Math. **82**, 68-80, 2004.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

OPERADORES DE CALDERÓN ZYGMUND E O TEOREMA T1

PRADO, R.B. [*] & CARVALHO DOS SANTOS, L.A. [†]

A integral singular é um operador integral

$$Tf(x) = \int K(x,y)f(y)\,dy \tag{0.1}$$

cuja função núcleo $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ é singular ao longo da diagonal $x = y$. Como tais integrais não podem em geral ser absolutamente integráveis, uma definição rigorosa deve definí-las como o limite da integral sobre $|x-y| > \epsilon$ quando $\epsilon \to 0$.

Dizemos que o núcleo $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ é um núcleo padrão se existe $\delta > 0$ talque

$$|K(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^n},$$

$$|K(x,y) - K(x,z)| \leq C\frac{|y-z|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}} \text{ se } |x-y| > 2|y-z|,$$

$$|K(x,y) - K(w,y)| \leq C\frac{|x-w|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}} \text{ se } |x-y| > 2|x-w|.$$

Seja $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ um operador linear e contínuo. Supomos que o núcleo $K \in \mathcal{S}' \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \Delta)$ é um núcleo padrão, além disso, a seguinte relação entre K e T ocorre: Se $f \in \mathcal{S}$ tem suporte compacto, então a distribuição Tf concorda com a função

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)\,f(y)\,dy, \qquad x \notin \operatorname{supp}(f). \tag{0.2}$$

Neste caso, dizemos que o operador T com tais propriedades é um Operador de Calderón-Zygmund.

Neste trabalho, apresentamos condições necessárias e suficientes para que um operador de tipo Calderón-Zygmund possa ser estendido a um operador limitado em L^2. E usando resultados de interpolação e condições de cancelamentos sobre o núcleo obter a limitação em L^p, para todo $1 < p < \infty$.

1 Resultados

Teorema 1.1 (Calderón-Zygmund). *Seja $K \in \mathcal{S}' \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ tal que $Tf = K * f$ para toda $f \in \mathcal{S}$*

$$|\widehat{K}(\xi)| \leq A\,,\ \textit{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

$$\int_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\,dx \leq B\,,\ \textit{para quase todo } y \in \mathbb{R}^n.$$

Então, dado $1 < p < \infty$ existe $C > 0$ tal que:

i) $\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, *para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*

ii) *T é de tipo fraco $(1,1)$, ou seja*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \ \textit{para toda}\, f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

[*]DM ,UFSCAR, SP, Brasil, rbedoya@dm.ufscar.br
[†]DM ,UFSCAR, SP, Brasil, luis@dm.ufscar.br

Prova: Aplicando a transformada de Fourier na expressão $Tf = K * f$ se prova que T é de tipo forte $(2,2)$. Pelo teorema de interpolação de Marcinkiewicz segue o resultado.

Teorema 1.2. *Seja T um operador limitado em $L^2(\mathbb{R}^n)$, e seja K uma função em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \Delta$ tal que se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tem suporte compacto então*

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y)\, dy, \quad x \notin supp(f).$$

Além disso, suponha que K é um núcleo padrão. Então T é fraco $(1,1)$ e forte (p,p), $1 < p < \infty$.

Dado um operador Calderón-Zygmund T com núcleo associado K, quando é T limitado em L^2? Se T é um operador convolução, o problema se reduz a provar que $\hat{K} \in L^\infty$. Para operadores que não são operadores convolução o problema é muito mais difícil.

A função $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é dita função teste normalizada se supp $(\phi) \subseteq B(0,1)$ e existe $N > 0$ tal que $\|\partial^\alpha \phi\|_{L^\infty} \leq 1$, para todo $|\alpha| \leq N$.

Definição 1.1. *Um operador linear T é dito restritamente limitado se para toda função ϕ teste normalizada*

i) $T(\phi^{x_0,R}) \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

ii) *Existe $A > 0$ tal que*

$$\|T(\phi^{x_0,R})\|_{L^2} \leq A\, R^{n/2}$$

para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $R > 0$, com A independente de x_0, R, ϕ.

Teorema 1.3 (Teorema T1)**.** *Seja T um operador linear contínuo de $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}'$ associado a um núcleo padrão $K(x,y)$ satisfazendo a condição (0.2). Então, T se estende a um operador limitado em $L^2(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, T e T^* são restritamente limitados (onde T^* é o operador adjunto de T).*

Prova: Primeiro se prova o resultado para T e T^* que satisfazem

$$\int_{\mathbb{R}^n} Tf(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} T^* f(x)\, dx = 0, \quad \text{para todo } f \in C_{c,0}^\infty,$$

e logo para operadores arbitrários T.

Referências

[1] R. Coifman and Y. Meyer, *Wavelets, Calderón-Zygmund and Multilinear Operators*, Cambridge University Press, 1997.

[2] A.P. Calderón, *Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 74 (1977), 1324-1327.

[3] Javier Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Mathematics. Vol. 29 American Mathematical Society.

[4] García-Cuerva and J. L. Rubio de Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics,* North Holland Math. Studies 116, North Holland, Amsterdam, 1985.

[5] Elias M. Stein and Guido Weiss, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.* Princeton University Press, 1970.

[6] Elias M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals.* Princeton University Press, 1993.

[7] Alberto Torchinsky, *Real-Variable Methods in Harmonic Analysis.* Academic Press, Inc

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPA - Universidade Federal do Pará
Edição N$^{\underline{0}}$ 4 Novembro 2010

Equações diferenciais funcionais retardadas do ponto de vista dos espaços $\odot *$

Patricia H. Tacuri* & Miguel V. S. Frasson†

1 Introdução

Seja $X = C([-h, 0], \mathbb{C})$. Uma equação diferencial funcional com retardamento (EDFR) é uma equação diferencial da forma

$$\dot{x}(t) = Lx_t \tag{1.1}$$

onde $L : X \to \mathbb{C}$ é um funcional linear e $x_t \in X$ é definido por $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-h, 0]$.

Estamos interessados no estudo da teoria de perturbações para as soluções de (1.1), como a fórmula da variação dos parâmetros. Considere o operador solução

$$\begin{aligned} T(t) : X &\to X \\ \varphi &\mapsto T(t)\varphi = x_t, \end{aligned} \tag{1.2}$$

em que x é a solução de (1.1) sujeita à condição inicial $x_0 = \varphi$. Temos que $T(t)$ é um C_0-*semigrupo* no espaço de Banach X, isto é, $T(0) = I_X$, $T(t)T(s) = T(t + s)$ e $\|T(t)\varphi - \varphi\| \to 0$ quando $t \to 0+$.

Seu gerador infinitesimal $A : X \to X$ é dado por

$$\mathrm{Dom}(A) = \{\varphi \in X : \varphi' \in X, \varphi'(0) = L\varphi\}, \quad A\varphi = \varphi'$$

Uma dificuldade ocorre porque perturbar a EDFR implica na alteração do *domínio* do operador infinitesimal. Para evitar esta dificuldade foi desenvolvida uma extensão $T^{\odot *}$ de T para os chamados espaços $\odot *$ (lê-se "sol-estrela"), em que agora o domínio do gerador infinitesimal de $T^{\odot *}$ não varia com perturbações, mas sim a *ação* do operador.

2 Construção dos espaços $\odot *$

Consideramos o caso particular $L\varphi = 0$. Seja T_0 seu correspondente operador solução, chamado de *semigrupo translação.*

Podemos tomar o espaço dual de X, obtendo $X^* = NBV([0, h], \mathbb{C})$, e constrói-se por dualidade o semigrupo $T_0^* : X^* \to X^*$. Porém, T_0^* não é um C_0-semigrupo. Define-se $X^\odot$ como o maior subespaço de X^* cuja restrição de $T_0^\odot := T_0^*|_{X^*}$ é fortemente contínuo. Tem-se que $X^\odot = \overline{\mathrm{Dom}(A_0^*)}$, onde A_0^* é o gerador infinitesimal de T_0^*. Partindo do C_0-semigrupo $T_0^\odot : X^\odot \to X^\odot$, da mesma forma que antes, podemos construir por dualidade $X^{\odot *}$, $T_0^{\odot *}(t) : X^{\odot *} \to X^{\odot *}$ e $X^{\odot\odot}$. Para este caso particular, $X = X^{\odot\odot}$ e $T_0^{\odot\odot} = T$. Dizemos que X é $\odot$-reflexivo.

3 Resultados

Teorema 3.1. *Para o semigrupo shift definido em* (1.2) *temos*

1. $X^\odot = \{f \in NBV / f(t) = c + \int_0^t g(\theta)d\theta$ *para* $t > 0$ *onde* $c \in \mathbb{C}$ *e* $g \in L^1$ *com* $g(\theta) = 0,$ *para quase todo* $\theta \geq h\}$

*ICMC, USP, SP, Brasil, e-mail: ptacuri@icmc.usp.br
†ICMC, USP, SP, Brasil, e-mail: frasson@icmc.usp.br

2. $D(A_0^{\odot}) = \{(c,g)/c \in \mathbb{C} \text{ e } g \in AC(0,h) \text{ com } g(\theta) = 0 \text{ para } \theta \geq h\}$, $A_0^{\odot}(c,g) = (g(0+), \dot{g})$

3. $D(A_0^{\odot}*) = \{(\alpha,\varphi)/\varphi \in Lip(\alpha)$ *e* $A_0^{\odot *}(\alpha,\varphi) = (0,\dot{\varphi})$, *onde* $Lip(\alpha)$ *é o subconjunto de* $L^{\infty}([-h,0],\mathbb{C})$ *de funções Lipschitzianas continuas que tem valor* α *em* $\theta = 0$.

Lema 3.1. *Seja* $f : \mathbb{R}_+ \to X^{\odot *}$ *continua na norma. Denote o subconjunto* $\{(t,s,r)/0 \leq r \leq s \leq t \leq \infty\}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *por* Ω. *Define-se* $w : \Omega \to X^{\odot *}$ *como a seguinte integral fraca-∗*

$$w(t,s,r) = \int_r^s T_0^{\odot *}(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

Então w *é continua na norma e toma valores em* X.

Lema 3.2. *Seja* $f : \mathbb{R}_+ \to X^{\odot *}$ *continua na norma. Define-se* $v : \mathbb{R}_+ \to X^{\odot *}$ *como a integral fraca-∗*

$$v(t) = \int_0^t T_0^{\odot *}(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

Então v *é continua na norma, toma valores em* X *e* $\|v(t)\| \leq M \frac{e^{wt}-1}{\omega} sup_{0 \leq \tau \leq t} \|f(\tau)\|$ *onde* M *e* w *são tal que* $\|T_0(t)\| \leq M e^{wt}$. *Alem disso* $\frac{1}{t} v(t) \to f(0)$, *quando* $t \downarrow 0$.

Considerando X e $X^{\odot *} = \mathbb{C}^n \times L^{\infty}([-h,0],\mathbb{C}^n)$. Introduciremos a perturbação na forma de um operador linear limitado $B : X \to X^{\odot *}$ dado por:

$$B\varphi = (\langle \zeta, \varphi \rangle_n, 0)$$

onde ζ denota uma matriz $n \times n$ cujas entradas pertencem ao espaço das funcões de variação limitada normalizada (NBV). E construiremos um C_0-semigrupo perturbado $T(t)$ resolvendo a fórmula da variação das constantes

$$T(t)\varphi = T_0(t)\varphi + \int T_0(t-\tau) B T(\tau) \varphi d\tau \tag{3.3}$$

o que se resume no seguinte teorema:

Teorema 3.2. *Existe um unico* C_0*-semigrupo* $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ *que satisfaz* (0.1)

Alem disso temos os seguintes resultados para o C_0-semigrupo $T_0(t)$ e seu gerador infinitesimal:

Lema 3.3. $D(A) = D(A_0^*)$ *e* $A^* = A_0^* + B$

Teorema 3.3. *Seja* $\{T(t)\}$ *o semigrupo definido pela equação integral*

$$T(t)\varphi = T_0(t)\varphi + \int_0^t T_0^{\odot *}(t-\tau) B T(\tau) \varphi d\tau$$

Seja $x(\cdot;\varphi)$ *a solução da EDFR*

$$\dot{x}(t) = \int_0^h d\zeta(\theta) x(t-\theta), t \geq 0$$

com condição inicial $x(\theta) = \varphi(\theta)$, $-h \leq \theta \leq 0$. *Então* $T(t)\varphi = x_t(\cdot,\varphi)$

Referências

[1] Verduyn Lunel S.M.,Diekmann O.,van Gils S.A.,Walther H.O - *Delay Equations*, Springer-Verlag, New York, 1994.

[2] Pazy, A. - *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[3] Yosida, K - *Functional Analysis*.Springer-Verlag, 6th edition, 1980

[4] Hale, J. K.,Verduyn Lunel S.M. - *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1971.

[4] Hille, E. - *Functional Analysis and semigroups*, American Mathematical Society, New York, 1948.