Autovalores de operadores integrais positivos gerados por núcleos sobre a esfera.

Valdir A. Menegatto

Departamento de Matemática, ICMC-USP - São Carlos,
Av. Trabalhador São-carlense 400,
13560-970 São Carlos SP

Email: menegatt@icmc.usp.br

Resumo. O objetivo deste texto é apresentar alguns resultados e técnicas que são utilizadas na obtenção de taxas de decaimento para autovalores de operadores integrais positivos gerados por núcleos suaves. O contexto que escolhemos tem duas características distintas: por um lado não é o mais simples possível, e por outro, não é geral ao ponto de comprometer o entendimento. Apresentaremos os resultados no contexto esférico, devidamente alinhados com aqueles presentes em outras fontes, os quais podem ser obtidos e justificados independentemente ou localizados na literatura.

1. Introdução e contexto.

Denotaremos por S^m a esfera unitária em $\mathbb{R}^{m+1}$ $(m \geq 2)$ e por $d\sigma_m$ o elemento de superfície usual de S^m. Abusaremos um pouco da notação, utilizando o símbolo σ_m para denotar também a área da superfície de S^m. Utilizaremos o espaço de Hilbert $L^2(S^m) := L^2(S^m, \sigma_m)$ com o produto interno dado pela fórmula

$$\langle f, g\rangle_2 := \frac{1}{\sigma_m}\int_{S^m} f(x)\overline{g(x)}\, d\sigma_m(x), \quad f, g \in L^2(S^m), \tag{1.1}$$

Logo, a menos de menção em contrário, algumas igualdades do texto são no sentido de $L^2(S^m)$. Lembramos que, na verdade, os elementos deste espaço são classes de equivalência (de funções) apesar de sempre chamarmos tais classes de funções. O leitor interessado nos resultados básicos sobre a análise na esfera (incluindo aqueles utilizados neste texto) poderá encontrá-los nas referências [10,18,19,22,25] bem como em outras nelas citadas.

O título do minicurso refere-se a operadores lineares $\mathcal{K}$ que atuam da seguinte forma

$$\mathcal{K}(f) = \int_{S^m} K(\cdot, y) f(y)\, d\sigma_m(y), \tag{1.2}$$

onde K é um *núcleo* sobre S^m, ou seja, uma função com domínio $S^m \times S^m$ a valores complexos. Se $K \in L^2(S^m \times S^m) := L^2(S^m \times S^m, \sigma_m \times \sigma_m)$, então $\mathcal{K}$ é um operador limitado sobre $L^2(S^m)$. Uma aplicação da desigualdade de Cauchy-Schwarz revela que

$$\|\mathcal{K}\|^2 \leq \frac{1}{\sigma_m^2}\int_{S^m}\int_{S^m}|K(x,y)|^2 d\sigma_m(x)\sigma_m(y). \tag{1.3}$$

Como ilustração informamos que outra maneira de garantir a limitação de $\mathcal{K}$ é impor sobre o núcleo K a condição de Holmgren ([12, p.176]):

$$\left(\sup_{x\in S^m}\int_{S^m}|K(x,y)|\sigma_m(y)\right)^{1/2}\left(\sup_{y\in S^m}\int_{S^m}|K(x,y)|\sigma_m(x)\right)^{1/2} < \infty. \tag{1.4}$$

O primeiro resultado que gostaríamos de registrar é sobre a compacidade do operador integral $\mathcal{K}$. Lembramos que um operador T sobre um espaço normado é *compacto* quando a imagem da bola unitária do domínio é um conjunto de fecho compacto no contradomínio. Como exemplo importante temos que todo operador de posto finito sobre um espaço de Hilbert é compacto ([4, p.85]). Por outro lado, o conjunto de todos os operadores compactos sobre um espaço de Banach é fechado no espaço de todos os operadores lineares sobre o espaço ([4, p.86]). Isto dito, podemos provar o resultado abaixo.

Teorema 1.1 *Se $K \in L^2(S^m \times S^m)$ então $\mathcal{K}$ é compacto.*

Demonstração. Suponha que $K \in L^2(S^m \times S^m)$. Sendo $L^2(S^m)$ separável, podemos tomar uma base ortonormal enumerável deste espaço, digamos, $\{f_n : n = 1, 2, \ldots\}$. Logo, para cada $f \in L^2(S^m)$, podemos escrever

$$\mathcal{K}(f) = \sum_{n=1}^{\infty}\langle\mathcal{K}(f), f_n\rangle_2 f_n = \sum_{n=1}^{\infty}\langle f, \mathcal{K}^*(f_n)\rangle_2 f_n, \tag{1.5}$$

onde $\mathcal{K}^*$ é o adjunto de $\mathcal{K}$ dado por

$$\mathcal{K}^*(f)(x) = \int_{S^m}\overline{K(y,x)}f(y)\,d\sigma_m(y), \quad f \in L^2(S^m), \quad x \in S^m. \tag{1.6}$$

Lembrando o comentário que precede este teorema, vamos aproximar $\mathcal{K}$ por uma sequência $\{T_N\}$, onde cada T_N é um operador linear sobre $L^2(S^m)$ da forma

$$T_N(f) = \sum_{n=1}^{N}\langle f, \mathcal{K}^*(f_n)\rangle_2 f_n, \quad f \in L^2(S^m). \tag{1.7}$$

Note que T_N é um operador de posto no máximo N, logo, compacto. Usando a identidade de Parseval, temos que

$$\|\mathcal{K}(f) - T_N(f)\|_2^2 = \left\|\sum_{n=N+1}^{\infty}\langle f, \mathcal{K}^*(f_n)\rangle_2 f_n\right\|_2^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty}|\langle f, \mathcal{K}^*(f_n)\rangle_2|^2, \quad f \in L^2(S^m).$$

Uma aplicação da desigualdade de Cauchy-Schwarz no último somando acima nos leva a

$$\|\mathcal{K}(f) - T_N(f)\|_2 \leq \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \|\mathcal{K}^*(f_n)\|_2^2 \|f\|_2^2 \right)^{1/2}, \quad f \in L^2(S^m). \tag{1.8}$$

Portanto,

$$\|\mathcal{K} - T_N\| \leq \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \|\mathcal{K}^*(f_n)\|_2^2 \right)^{1/2}. \tag{1.9}$$

Para completar a prova é suficiente mostrarmos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{K}^*(f_n)\|_2^2 < \infty. \tag{1.10}$$

No entanto, como o teorema de Fubini garante que

$$\langle f_n, \mathcal{K}^*(f_l) \rangle_2 = \sigma_m \langle K, \phi_{n,l} \rangle_2, \quad n, l = 1, 2 \ldots, \tag{1.11}$$

e o conjunto formado pelas funções

$$(x, y) \in S^m \times S^m \xrightarrow{\phi_{l,n}} f_l(x)\overline{f_n(y)}, \quad l, n = 1, 2, \ldots, \tag{1.12}$$

é uma base ortonormal de $L^2(S^m \times S^m)$ ([20, p.157]), a desigualdade de Bessel implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{K}^*(f_n)\|_2^2 = \sum_{l,n=1}^{\infty} |\langle \mathcal{K}^*(f_n), f_l \rangle_2|^2 \leq \sigma_m^2 \|K\|_2^2 < \infty. \tag{1.13}$$

A prova está completa. ■

O conceito que vamos introduzir abaixo garante algumas propriedades adicionais desejáveis para um operador integral. Um núcleo K sobre S^m é dito ser L^2-*positivo definido* quando o operador integral $\mathcal{K}$ é positivo, isto é,

$$\langle \mathcal{K}(f), f \rangle_2 = \frac{1}{\sigma_m} \int_{S^m} \int_{S^m} K(x, y) f(x) \overline{f(y)} \, d\sigma_m(x) d\sigma_m(y) \geq 0, \quad f \in L^2(S^m). \tag{1.14}$$

Para uma comparação deste conceito com aquele de positividade definida usual via formas quadráticas, sugerimos a referência [6].

Teorema 1.2 *Se $K \in L^2(S^m \times S^m)$ é L^2-positivo definido então $\mathcal{K}$ é autoadjunto.*

Demonstração. Seja $\mathcal{K}^*$ o operador adjunto de $\mathcal{K}$. Se K é L^2-positivo definido, é fácil ver que

$$\langle (\mathcal{K} - \mathcal{K}^*) f, f \rangle_2 = 0, \quad f \in L^2(S^m). \tag{1.15}$$

Como estamos trabalhando sobre o corpo complexo, a condição acima leva-nos a concluir que ([20, p.113])

$$\langle(\mathcal{K}-\mathcal{K}^*)f,g\rangle_2=0,\quad f,g\in L^2(S^m). \tag{1.16}$$

Isto por sua vez implica que $\mathcal{K}-\mathcal{K}^*=0$. ■

Agora podemos aplicar o teorema espectral para operadores compactos e autoadjuntos sobre espaços de Hilbert separáveis ([24, p.99]).

Teorema 1.3 *Seja $K\in L^2(S^m\times S^m)$ um núcleo L^2-positivo definido. Então*

$$\mathcal{K}(f)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(\mathcal{K})\langle f,f_n\rangle_2 f_n,\quad f\in L^2(S^m), \tag{1.17}$$

onde $\{\lambda_n(\mathcal{K})\}$ é uma sequência de números reais não negativos decrescente para 0 e $\{f_n\}$ é uma base ortonormal de $L^2(S^m)$.

O leitor interessado pode ainda verificar que as seguintes informações adicionais valem: cada $\lambda_n(\mathcal{K})$ é autovalor de $\mathcal{K}$ associado ao autovetor f_n e $\mathcal{K}$ possui raíz quadrada, ou seja, existe um operador A sobre $L^2(S^m)$ tal que $A^2=\mathcal{K}$. Apesar de importantes, elas não serão utilizadas no texto.

2. Decaimento básico dos autovalores

Nesta seção, apresentamos a taxa de decaimento mais simples que se pode obter para os autovalores de um operador integral limitado e positivo. O primeiro passo nesta direção é o teorema de Mercer no contexto que estamos considerando.

Teorema 2.1 *Seja $K\in L^2(S^m\times S^m)$ um núcleo L^2-positivo definido. Então, com a mesma notação do Teorema 1.3,*

$$K(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(\mathcal{K})f_n(x)\overline{f_n(y)},\quad x,y\in S^m. \tag{2.1}$$

Demonstração. Considere o operador integral $\mathcal{K}$ junto com a representação fornecida pelo Teorema 1.3 e a base ortonormal de $L^2(S^m\times S^m)$ mencionada em (1.12). Como podemos escrever

$$K=\sum_{l,n=1}^{\infty}\langle K,\phi_{l,n}\rangle_2\phi_{l,n}, \tag{2.2}$$

e

$$\langle\mathcal{K},\phi_{l,n}\rangle_2=\langle\mathcal{K}(f_l),f_n\rangle_2=\delta_{l,n}\lambda_l(\mathcal{K}), \tag{2.3}$$

a descriçao do enunciado do teorema segue. ■

A seguir, fixado um núcleo $K\in L^2(S^m\times S^m)$ e L^2-positivo definido e levando-se em conta as descrições para $\mathcal{K}$ and K apresentadas nos teoremas 1.3 e 2.1, buscaremos refinar a convergência em (2.1), mediante a inclusão de hipóteses adicionais sobre K e sobre a base $\{f_n\}$ do Teorema 1.3. Continuidade do núcleo K na diagonal de $S^m\times S^m$ significará continuidade de K em cada ponto do conjunto $\{(x,x):x\in S^m\}$.

Lema 2.2 *Seja $K \in L^2(S^m \times S^m)$ um núcleo L^2-positivo definido. Se K é contínuo na diagonal de $S^m \times S^m$ então $K(x,x) \geq 0$, $x \in S^m$.*

Demonstração. Assuma a continuidade de K na diagonal. Como K é L^2-positivo definido então ele é necessariamente hermitiano, ou seja, $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$ q.s. em $S^m \times S^m$. Em particular, $K(x,x) \in \mathbb{R}$, $x \in S^m$, q.s.. A hipótese de continuidade implica que $K(x,x) \in \mathbb{R}$, $x \in S^m$. Suponha que exista $x_0 \in S^m$ tal que $K(x_0,x_0) < 0$. Como $\operatorname{Re} K(x,y)$ é também contínuo na diagonal de S^m, podemos tomar uma calota esférica $C_0 \subset S^m$ centrada em x_0 tal que $\operatorname{Re} K(x,y) < 0$, $x, y \in C_0$. Lembrando o Teorema 1.2, obtemos

$$\sigma_m \langle \mathcal{K}(\chi_{C_0}), \chi_{C_0} \rangle_2 = \int_{C_0} \int_{C_0} K(x,y)\, d\sigma_m(x)\, d\sigma_m(y) = \int_{C_0} \int_{C_0} \operatorname{Re} K(x,y)\, d\sigma_m(x)\, d\sigma_m(y).$$

Isto é uma contradição já que $0 \leq \sigma_m \langle \mathcal{K}(\chi_{C_0}), \chi_{C_0} \rangle_2 < 0$. ■

O resultado contido no Teorema 2.3 abaixo já está bem próximo de uma taxa de decaimento para os autovalores de $\mathcal{K}$. Entretanto, a continuidade dos elementos da base fornecida pelo Teorema 1.3 faz-se necessária.

Teorema 2.3 *Seja $K \in L^2(S^m \times S^m)$ um núcleo L^2-positivo definido. Se K é contínuo na diagonal de $S^m \times S^m$ e cada elemento da base $\{f_n\}$ é uma função contínua então vale a desigualdade*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) |f_n(x)|^2 \leq K(x,x), \quad x \in S^m. \tag{2.4}$$

Demonstração. Suponha que K é contínuo na diagonal de $S^m \times S^m$ e que cada f_n é contínua. Fixemos um inteiro positivo N e definamos um núcleo auxiliar K_N pela expressão

$$K_N(x,y) := K(x,y) - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n(\mathcal{K}) f_n(x) \overline{f_n(y)}, \quad x, y \in S^m. \tag{2.5}$$

Claramente, $K_N \in L^2(S^m \times S^m)$. Nossas hipóteses garantem que K_N é contínuo na diagonal de $S^m \times S^m$. A última etapa da prova consiste em ratificar que K_N é L^2-positivo definido. No entanto, usando (2.5) temos que

$$\langle \mathcal{K}_N(f), f \rangle_2 = \frac{1}{\sigma_m} \int_{S^m} \left[\mathcal{K}(f)(x) - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n(\mathcal{K}) \langle f, f_n \rangle_2 f_n(x) \right] \overline{f(x)}\, d\sigma_m(x), \quad f \in L^2(X).$$

Lembrando o Teorema 1.3, deduzimos que

$$\langle \mathcal{K}_N(f), f \rangle_2 = \frac{1}{\sigma_m} \int_{S^m} \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \langle f, f_n \rangle_2 f_n(x) \overline{f(x)}\, d\sigma_m(x), \quad f \in L^2(X). \tag{2.6}$$

Como $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ preserva convergência em $L^2(S^m)$, obtemos finalmente que

$$\langle \mathcal{K}_N(f), f \rangle_2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) |\langle f, f_n \rangle_2|^2, \quad f \in L^2(X). \tag{2.7}$$

Consequentemente, $\langle \mathcal{K}_N(f), f\rangle_2 \geq 0$, $f \in L^2(S^m)$. Uma aplicação do Lema 2.2 leva-nos à desigualdade

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n(\mathcal{K})|f_n(x)|^2 \leq K(x,x), \quad x \in S^m. \tag{2.8}$$

Sendo N arbitrário, a desigualdade do enunciado do lema segue. ■

O lema anterior descreve uma segunda convergência para a série do Teorema 2.1.

Lema 2.4 *Seja $K \in L^2(S^m \times S^m)$ um núcleo L^2-positivo definido. Assuma que K é contínuo na diagonal de $S^m \times S^m$ e que cada f_n é contínua. Então $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) f_n(x)\overline{f_n(y)}$ converge uniformemente com relação a uma das variáveis, quando a outra é mantida fixada.*

Demonstração. O lema anterior garante que cada série $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})|f_n(x)|^2$ converge. Fixemos $x \in S^m$. Se $q \geq p \geq 0$, uma aplicação da desigualdade de Cauchy-Schwarz permite-nos escrever

$$\left|\sum_{n=p}^{q} \lambda_n(\mathcal{K}) f_n(x)\overline{f_n(y)}\right|^2 \leq \sum_{n=p}^{q} \lambda_n(\mathcal{K})|f_n(x)|^2 \sum_{n=p}^{q} \lambda_n(\mathcal{K})|f_n(y)|^2, \quad y \in S^m. \tag{2.9}$$

Lembrando a prova do lema anterior, podemos modificar a desigualdade e colocá-la na forma

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=p}^{q} \lambda_n(\mathcal{K}) f_n(x)\overline{f_n(y)}\right|^2 &\leq K(y,y) \sum_{n=p}^{q} \lambda_n(\mathcal{K})|f_n(x)|^2 \\ &\leq \sup_{\zeta \in S^m} K(\zeta,\zeta) \sum_{n=p}^{q} \lambda_n(\mathcal{K})|f_n(x)|^2, \quad y \in S^m.\end{aligned}$$

Aplicando o critério de Cauchy para convergência uniforme extraímos a convergência absoluta e uniforme da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) f_n(x)\overline{f_n(y)} \tag{2.10}$$

em S^m. A outra metade da prova é similar. ■

O teorema abaixo complementa os resultados anteriores e garante a convergência uniforme da série (2.1) em $S^m \times S^m$.

Teorema 2.5 *Seja $K \in L^2(S^m \times S^m)$ um núcleo L^2-positivo definido. Suponha que K é contínuo na diagonal de $S^m \times S^m$ e que cada f_n é contínua. Então:*
(i) vale a igualdade

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})|f_n(x)|^2 = K(x,x), \quad x \in S^m; \tag{2.11}$$

(ii) a convergência da série do item (i) é uniforme;
(iii) a série na representação (2.1) *é uniformemente convergente (em ambas as variáveis simultaneamente).*

Demonstração. Como

$$\lambda_n(\mathcal{K}) = \lambda_n(\mathcal{K})\|f_n\|_2 = \|\mathcal{K}(f_n)\|_2 \leq \|\mathcal{K}\|, \quad n = 1, 2 \ldots, \tag{2.12}$$

uma aplicação do Teorema 1.6 justifica as estimativas

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(\mathcal{K})\, f_n(x)|^2 \leq \|\mathcal{K}\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) |f_n(x)|^2 \leq \|\mathcal{K}\|\, K(x,x), \quad x \in S^m. \tag{2.13}$$

A convergência acima permite o uso do Teorema de Riesz-Fisher ([21, p.330]) para concluir que cada uma das séries $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) f_n(x) \overline{f_n}$ é $L^2(S^m)$-convergente, digamos, para uma função $\phi_x/\sigma_m \in L^2(S^m)$. Logo, temos que

$$\frac{1}{\sigma_m} \int_{S^m} \phi_x(y) f(y)\, d\sigma(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \langle f, f_n \rangle_2 f_n(x), \quad f \in L^2(S^m), \quad x \in S^m, \tag{2.14}$$

e, portanto,

$$\int_{S^m} (K(x,y) - \sigma_m^{-1} \phi_x(y)) f(y)\, d\sigma(y) = 0, \quad f \in L^2(S^m), \quad x \in S^m. \tag{2.15}$$

Isto garante que para cada $x \in S^m$, $\sigma_m^{-1}\phi_x = K(x, \cdot)$ em $L^2(S^m)$. Agora, devido ao Lema 2.4, vemos que ϕ_x é contínua. Em outras palavras, fixado $x \in S^m$,

$$\sigma_m^{-1} \phi_x(y) = K(x,y), \quad y \in S^m. \tag{2.16}$$

Em particular,

$$K(x,x) = \sigma_m^{-1} \phi_x(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) |f_n(x)|^2, \quad x \in S^m. \tag{2.17}$$

O Teorema de Dini ([13, p.211]) mostra que a série acima converge uniformemente em S^m. Para finalizar a prova aplicamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz para deduzir que

$$\left| \sum_{n=p}^{q} \lambda_n(\mathcal{K}) f_n(x) \overline{f_n(y)} \right|^2 \leq \sum_{n=p}^{q} \lambda_n(\mathcal{K}) |f_n(x)|^2 \sum_{n=p}^{q} \lambda_n(\mathcal{K}) |f_n(y)|^2, \quad x, y \in S^m, \quad q \geq p,$$

e usamos a convergência uniforme de (2.17) junto com critério de Cauchy para convergência uniforme. ■

Estamos prontos para descrever uma primeira informação adicional sobre o decaimento dos autovalores do operador integral $\mathcal{K}$.

Teorema 2.6 *Seja $K \in L^2(S^m \times S^m)$ um núcleo L^2-positivo definido. Se K é contínuo na diagonal de $S^m \times S^m$ e cada f_n é contínua então $\lambda_n(\mathcal{K}) = o(n^{-1})$.*

Demonstração. Se K é contínuo na diagonal de $S^m \times S^m$ e cada f_n é contínua, o teorema anterior garante que

$$K(x,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(\mathcal{K})|f_n(x)|^2,\quad x\in S^m, \tag{2.18}$$

com convergência uniforme da série. Integrando e usando a ortonormalidade da sequência $\{f_n\}$, deduzimos que

$$\frac{1}{\sigma_m}\int_{S^m}K(x,x)d\sigma_m(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_n(\mathcal{K}). \tag{2.19}$$

Como a sequência é decrescente, segue que

$$\lim_{k\to\infty}n\lambda_n(\mathcal{K})=0, \tag{2.20}$$

como queríamos. ■

Se T é um operador compacto sobre $L^2(S^m)$ então o operador $|T| := (T^*T)^{1/2}$ é compacto, positivo e autoadjunto sobre o mesmo espaço. Seus autovalores, denotados por $s_n(T)$, são os *valores singulares* de T. Vamos supor que os valores singulares de um operador compacto estão ordenados de maneira decrescente e levando-se em conta as multiplicidades. A nuclearidade de T pode ser characterizada pela seguinte desigualdade envolvendo seus valores singulares: $\sum_{n=1}^{\infty}s_n(T)<\infty$. Como os autovalores de um operador autoadjunto e positivo coincidem com os valores singulares do operador então a igualdade (2.19) nos informa que $\mathcal{K}$ é nuclear (trace-class). Logo, $\mathcal{K}$ possui várias outras propriedades inerentes desta categoria de operadores mas que não são relevantes no contexto deste minicurso (veja por exemplo [5]).

Se desejarmos melhorar a taxa de decaimento descrita no teorema anterior, alguma condição adicional sobre K ou $\mathcal{K}$ tem que ser incorporada. Pretendemos apresentar na Seçao 3, taxas de decaimento para os autovalores de $\mathcal{K}$ quando K satisfaz condições de suavidade definidas através da derivada forte de Laplace-Beltrami.

Na Seção 3 introduzimos então a derivada forte de Laplace-Beltrami, suas propriedades básicas aqui necessárias e o operador integral de Laplace-Beltrami. Este último tem papel significativo nas demonstrações dos resultados principais da Seção 4, uma vez que em suas provas tal operador aparece naturalmente em decomposições especiais do operador integral $\mathcal{K}$.

3. A derivada de Laplace-Beltrami.

A derivada de Laplace-Beltrami é um conceito quase que desconhecido, sendo de pouco domínio até mesmo por aqueles que trabalham com problemas da análise esférica. Aparentemente, tal conceito foi introduzido por Rudin em seu artigo [23] para tratar de convergência de certas expansões na esfera. O tratamento mais completo do conceito é provavelmente a tese de doutorado de Wherens ([27]), onde as deduções de muitas propriedades podem ser encontradas. Entretanto, estas duas referências consideram o conceito tão somente no caso da esfera S^2. Várias propriedades estendem-se naturalmente para esferas de dimensão maior enquanto que outras não. O survey paper [17] traz todas a propriedades relevantes já descritas no caso geral e com provas. Inclui ainda indicações de como e onde tal conceito é usado em outros assuntos que não este do presente minicurso, além de outras referências da literatura.

Grosseiramente falando, a derivada forte de Laplace-Beltrami origina-se da definição usual de derivada em $\mathbb{R}^{m+1}$ quando trocamos a noção de translação por seu correspondente esférico. Este, usualmente chamado de *operador translação esférica*, é dado pela fórmula

$$T_\epsilon^m(f)(x) := \frac{1}{\sigma_{m-1}(1-\epsilon^2)^{(m-1)/2}} \int_{x\cdot y=\epsilon} f(y)\, dy, \quad x \in S^m, \tag{3.1}$$

onde $\epsilon \in (-1,1)$, " $\cdot$ " é o produto interno usual de $\mathbb{R}^{m+1}$ e dy refere-se à integração sobre a sub-esfera $x \cdot y = \epsilon$. A constante normalizadora que antecede a integral é escolhida de modo a garantir que $T_\epsilon^m(1) = 1$.

Seja $\mathcal{H}_k^m$ o espaço dos harmônicos esféricos de grau k em $m+1$ variáveis. Não é difícil verificar que ([19, p.30])

$$\int_{x\cdot y=\epsilon} p(y)\, d\sigma_m(y) = \sigma_{m-1}(1-\epsilon^2)^{(m-1)/2} P_k^m(\epsilon)p(x), \quad p \in H_k(S^m), \tag{3.2}$$

onde P_k^m é o polinômio de Legendre de grau k associado à dimensão $m+1$. Em outras palavras,

$$T_\epsilon^m(p) = P_k^m(\epsilon)p, \quad p \in \mathcal{H}_k^m. \tag{3.3}$$

Uma função f de $L^2(S^m)$ é *diferenciável no sentido de Laplace-Beltrami* quando existe $\mathcal{D}f$ em $L^2(S^m)$ satisfazendo

$$\lim_{\epsilon\to 1^-} \left\|(1-\epsilon)^{-1}\Delta_\epsilon(f) - \mathcal{D}f\right\|_2 = 0, \tag{3.4}$$

onde $\Delta_\epsilon := I - T_\epsilon^m$ e I é o operador identidade. A função $\mathcal{D}f$ é chamada de *derivada (forte) de Laplace-Beltrami* de f. Por iteração, definimos as derivadas de ordem superior, ou seja, $\mathcal{D}^1 := \mathcal{D}$ e

$$\mathcal{D}^r := \mathcal{D}^1 \circ \mathcal{D}^{r-1}, \quad r = 2, 3, \ldots. \tag{3.5}$$

Os espaços de funções diferenciáveis neste sentido são dados por

$$W_2^r := \{f \in L^2(S^m) : \mathcal{D}^r f \in L^2(S^m)\}, \quad r = 1, 2, \ldots. \tag{3.6}$$

Obviamente, $\mathcal{D}^r 0 = 0$, $r = 1, 2, \ldots$. Logo, os exemplos não triviais mais importantes de funções nestes espaços são aqueles fornecidos pela proposição abaixo. Em particular, ela revela que $\mathcal{H}_k^m \subset \cap_{r\geq 1} W_2^r$.

Proposição 3.1 Se $r \geq 1$ então

$$\mathcal{D}^r p = k^r(k+m-1)^r m^{-r} p, \quad p \in \mathcal{H}_k^m, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{3.7}$$

Demonstração. Consideremos inicialmente o caso $r = 1$. Se $Y_k \in \mathcal{H}_k^m$, usando (3.3) vemos que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\Delta_\epsilon(p)}{1-\epsilon}-\frac{k(k+m-1)}{m}\,p\right\|_2 &= \left\|\frac{(1-P_k^m(\epsilon))}{1-\epsilon}p-\frac{k(k+m-1)}{m}\,p\right\|_2\\ &= \left|\frac{1-P_k^m(\epsilon)}{1-\epsilon}-\frac{k(k+m-1)}{m}\right|\|p\|_2, \quad \epsilon\in(-1,1).\end{aligned}$$

Aplicando a regra de L'Hospital e usando a fórmula básica

$$\frac{d}{dt}P_k^m(t)=\frac{k(k+m-1)}{m}P_{k-1}^m(t), \tag{3.8}$$

deduzimos que

$$\lim_{\epsilon\to 1}\frac{1-P_k^m(\epsilon)}{1-\epsilon}=\lim_{\epsilon\to 1}\frac{k(k+m-1)}{m}\;P_{k-1}^m(\epsilon)=\frac{k(k+m-1)}{m}. \tag{3.9}$$

Logo,

$$\lim_{\epsilon\to 1^-}\left\|\frac{\Delta_\epsilon(p)}{1-\epsilon}-\frac{k(k+m-1)}{m}\,p\right\|_2=0. \tag{3.10}$$

Portanto, $p\in W_2^1$ e

$$\mathcal{D}^1p=\frac{k(k+m-1)}{m}p. \tag{3.11}$$

Supondo que o resultado vale para $r=1,2,\ldots,s-1$, podemos escrever

$$\begin{aligned}&\lim_{\epsilon\to 1^-}\left\|\frac{\Delta_\epsilon(\mathcal{D}^{s-1}p)}{1-\epsilon}-\left(\frac{k(k+m-1)}{m}\right)^s p\right\|_2\\ &\qquad=\left(\frac{k(k+m-1)}{m}\right)^{s-1}\lim_{\epsilon\to 1^-}\left\|\frac{\Delta_\epsilon(p)}{1-\epsilon}-\mathcal{D}^1p\right\|_2.\end{aligned}$$

Pela primeira parte da prova,

$$\lim_{\epsilon\to 1^-}\left\|\frac{\Delta_\epsilon(\mathcal{D}^{s-1}p)}{1-\epsilon}-\left(\frac{k(k+m-1)}{m}\right)^s p\right\|_2=0. \tag{3.12}$$

Logo, $\mathcal{D}^{s-1}p\in W_2^1$. Isto implica que $\mathcal{D}^sp=\mathcal{D}^1(\mathcal{D}^{s-1}p)\in L^2(S^m)$, ou seja, que $p\in W_2^s$. Além disso,

$$\mathcal{D}^sp=\left(\frac{k(k+m-1)}{m}\right)^s p. \tag{3.13}$$

Isto conclui a prova. ■

A derivada de Laplace-Beltrami está intimamente ligada ao *operador de Laplace-Beltrami*, aqui denotado por Δ_m. Este é a restrição a S^m do operador de Laplace usual Δ em $\mathbb{R}^{m+1}$. Como no caso da derivada de Laplace-Beltrami, definimos iteradamente $\Delta_m:=\Delta_m^1$ and

$$\Delta_m^r=\Delta_m\circ\Delta_m^{r-1}, \quad r=2,3,\ldots. \tag{3.14}$$

Quanto atuando em $L^2(S^m)$, este operador é autoadjunto e os harmônicos esféricos são suas auto-funções, isto é,

$$(-\Delta_m)^r p = k^r(k+m-1)^r p, \quad p \in \mathcal{H}_k^m. \tag{3.15}$$

Na verdade, é possível mostrar que

$$\mathcal{D}^r f = \frac{(-\Delta_m)^r}{m^r} f, \quad f \in W_2^r, \tag{3.16}$$

Para finalizar nossa discussão sobre a derivada de Laplace-Beltrami, registramos uma consequência de afirmações anteriores:

$$\langle \mathcal{D}^r f, \overline{g} \rangle_2 = \langle f, \overline{\mathcal{D}^r g} \rangle_2, \quad f, g \in W_2^r. \tag{3.17}$$

Nas referências [16,17,21,26,27] o leitor poderá encontrar mais informações sobre a derivada de Laplace-Beltrami e sua conexão com outros conceitos da análise esférica.

Agora introduziremos um operador que atua como uma transformação inversa para a derivada de Laplace-Beltrami. Tal operador aparece naturalmente nas provas dos resultados sobre decaimento de autovalores que apresentaremos na próxima seção.

O *operador integral de Laplace-Beltrami* é o operador linear $J : L^2(S^m) \to L^2(S^m)$ caracterizado pela seguinte propriedade:

$$Jp = \frac{m}{(-k(k+m-1))} p, \quad p \in \mathcal{H}_k^m, \quad k = 1, 2, \dots. \tag{3.18}$$

Pela Proposição 3.1 temos que

$$\mathcal{D}Jf = J\mathcal{D}f, \quad f \in \oplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_k^m. \tag{3.19}$$

Como $L^2(S^m) = \oplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k^m$, a igualdade acima justifica o fato de J estar a uma dimensão de ser a inversa de $\mathcal{D}$. As potências de J são definidas assim:

$$J^r := J \circ J^{r-1}, \quad r = 1, 2, \dots, \tag{3.20}$$

onde J^0 é o operador identidade.

O operador J é autoadjunto já que ele é um operador do tipo convolução. De fato, pode ser verificado que

$$Jf(x) = \int_{S^m} M(x \cdot y) f(y)\, d\sigma_m(y), \quad x \in S^m, \quad f \in L^2(S^m), \tag{3.21}$$

onde

$$M(t) := 1 - C + m \int_{-1}^{t} (1-s^2)^{-m/2} \int_{-1}^{s} (1-u^2)^{(m-2)/2} du ds, \quad t \in (-1, 1), \tag{3.22}$$

e a constante C é escolhida de tal forma que o primeiro coeficiente de Fourier-Legendre de M seja 1, ou seja, de modo que

$$\frac{\sigma_{m-1}}{\sigma_m}\int_{-1}^{1} M(t)(1-t^2)^{(m-2)/2}dt = 1. \tag{3.23}$$

Para entender este fato visivelmente não trivial, sugerimos a referência [17].

Teorema 3.2 *O operador J^r é compacto.*

Demonstração. A estratégia da prova é verificar que J^r é um limite de uma sequência de operadores compactos sobre $L^2(S^m)$, na norma dos operadores sobre $L^2(S^m)$. Se f é uma função em $L^2(S^m)$, a decomposição $L^2(S^m) = \oplus_{k=0}^{\infty}\mathcal{H}_k^m$ permite-nos escrever

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(f), \tag{3.24}$$

onde P_k é a projeção ortogonal de $L^2(S^m)$ sobre $\mathcal{H}_k^m$. Se $\{Y_{kj} : j = 1, 2, \ldots N(m,k)\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}_k^m$ esta projeção atua da seguinte forma

$$P_k(f) = \sum_{j=1}^{N(m,k)} \hat{f}(k,j)Y_{kj}, \tag{3.25}$$

onde

$$\hat{f}(k,j) = \frac{1}{\sigma_m}\int_{S^m} f\,\overline{Y_{kj}}\,d\sigma_m. \tag{3.26}$$

Cálculo direto revela que

$$P_k(Jf) = \frac{m}{k(k+m-1)}P_k(f), \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{3.27}$$

Generalizando,

$$P_k(J^r f) = \frac{m^r}{k^r(k+m-1)^r}P_k(f), \quad k, r = 0, 1, \ldots. \tag{3.28}$$

Em outras palavras,

$$J^r f = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{m^r}{k^r(k+m-1)^r}P_k(f), \quad r = 1, 2, \ldots. \tag{3.29}$$

Tão somente alguns cálculos simples nos levam a deduzir que

$$\begin{aligned}
\left\| J^r f - \sum_{k=0}^{N}\frac{m^r}{k^r(k+m-1)^r}P_k(f)\right\|_2 &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{m^r}{k^r(k+m-1)^r}\|P_k(f)\|_2 \\
&\leq \sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{m^r}{k^r(k+m-1)^r}\|f\|_2, \quad N = 1, 2, \ldots.
\end{aligned}$$

Segue que

$$\left\| J^r - \sum_{k=0}^{N} \frac{m^r}{k^r(k+m-1)^r} P_k \right\|_2 \leq C \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2r}}, \quad N = 1, 2, \ldots \tag{3.30}$$

para alguma constante C dependendo de m and r. Como cada P_k é um operador compacto (tem posto finito), cada soma

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{m^r}{k^r(k+m-1)^r} P_k \tag{3.31}$$

também é. Como o conjunto de todos os operadores compactos sobre $L^2(S^m)$ é fechado no espaço de todos os operadores lineares sobre $L^2(S^m)$ com relação à norma de operadores, o resultado segue. ■

Como J^r é um operador do tipo convolução, uma alternativa para se provar o teorema anterior seria demonstrar que o núcleo gerador da convolução é um elemento do espaço $L^2(S^m \times S^m)$. Daí, uma imitação da prova do Teorema 1.1 ou mesmo um resultado clássico de Análise Funcional ([12, p.247]) encerraria a questão. Para finalizar, enfatizamos que estaremos supondo daqui para frente que os autovalores de J^r serão ordenados em ordem decrescente. Logo, eles podem ser vistos ordenados em blocos, o n-ésimo bloco contendo $N(m,n)$ vezes o autovalor $m^r(n+m-1)^{-r}$.

4. Estimativas para autovalores

Começamos esta seção introduzindo algumas notações adicionais as quais são necessárias para justificarmos os resultados pretendidos.

A ação da derivada de Laplace-Beltrami em núcleos se faz com relação a uma das variáveis, mantendo-se a outra fixada. Logo, usaremos o símbolo $\mathcal{D}_1^r K$ para indicar a derivada de Laplace-Beltrami de ordem r de K com relação a x, mantendo-se y fixado. De maneira análoga, temos o símbolo $\mathcal{D}_2^r K$. Neste ponto é conveniente introduzir a seguinte notação para denotar núcleos obtidos de K via derivação:

$$K_{r,s}(x,y) := \mathcal{D}_2^s \mathcal{D}_1^r K(x,y), \quad x, y \in S^m, \quad r, s = 1, 2, \ldots. \tag{4.1}$$

O operador integral correspondente ao núcleo $K_{r,s}$ será denotado por $\mathcal{K}_{r,s}$. Ainda precisamos introduzir a classe W_2^r para núcleos:

$$W_2^r := \{K \in L^2(S^m \times S^m) : K(x, \cdot) \in W_2^r,\, x \in S^m, q.s.\}. \tag{4.2}$$

Os resultados que apresentaremos dependem de algumas estimativas básicas da teoria de operadores, as quais serão introduzidas em sequência. Não incluiremos provas pois algumas são conhecidas enquanto que outras podem ser encontrados em referências clássicas da Análise Funcional.

Neste momento é importante informar ao leitor que, se os autovalores do operador em análise não têm sinal definido, então é comum buscar-se estimativas para os valores singulares do operador e não mais para os autovalores.

O lema abaixo inclui um contexto no qual valores singulares e autovalores coincidem ([8, p. 27]).

Lema 4.1 *Se T é um operador normal e compacto sobre $L^2(S^m)$ então*

$$s_n(T) = |\lambda_n(T)|, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{4.3}$$

Menos óbvios são os dois próximos resultados extraídos de [8, p. 29-30].

Lema 4.2 *Seja T um operador compacto sobre $L^2(S^m)$. Se A é um operador limitado sobre $L^2(S^m)$ então AT e TA são compactos. Além disso,*

$$\max\{s_n(AT), s_n(TA)\} \leq \|A\| s_n(T), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{4.4}$$

Lema 4.3 *Seja T um operador compacto sobre $L^2(S^m)$. Se A é um operador de posto l sobre $L^2(S^m)$ então*

$$s_{n+l}(T) \leq s_n(T + A) \leq s_{n-l}(T), \quad n = l + 1, l + 2, \ldots. \tag{4.5}$$

O próximo lema é um resultado mais refinado sobre valores singulares de uma composição de operadores ([8, p. 30]).

Lema 4.4 *Se T e A são operadores compactos sobre $L^2(S^m)$ então*

$$s_{n+k-1}(AT) \leq s_n(A) s_k(T), \quad n, k = 1, 2, \ldots. \tag{4.6}$$

A fórmula do lema abaixo é menos comum do que os demais resultados citados acima. Uma prova para a versão que registramos pode ser adaptada de [28, p. 139].

Lema 4.5 *Se $K \in L^2(S^m \times S^m)$ então*

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n(\mathcal{K})^2 = \frac{1}{\sigma_m^2} \int_{S^m} \int_{S^m} |K(x, y)|^2 d\sigma_m(x) d\sigma_m(y) := \|K\|_2^2. \tag{4.7}$$

O teorema abaixo indica o primeiro passo no processo para estimar os autovalores do operador integral $\mathcal{K}$, quando K é um elemento de W_2^r.

Teorema 4.6 *Seja K um elemento de W_2^r. Se $\mathcal{K}_{0,r}$ é um operador limitado então*

$$s_{n+1}(\mathcal{K}) \leq s_n(\mathcal{K}_{0,r} J^r), \quad n = 2, 3, \ldots. \tag{4.8}$$

Demonstração. Consideremos a projeção Q de $L^2(S^m)$ sobre $\oplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_k^m$. Como $I - Q$ é uma projeção sobre o espaço unidimensional $(\oplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_k^m)^{\perp}$ então a composição $\mathcal{K}(I - Q)$

tem posto no máximo 1. Logo, o Lemma 4.3 implica que

$$s_{n+1}(\mathcal{K}) \leq s_n(\mathcal{K} - \mathcal{K}(I - Q)) = s_n(\mathcal{K}Q), \quad n = 2, 3, \ldots. \tag{4.9}$$

Para prosseguir, olharemos mais de perto a composição $\mathcal{K}Q$. É fácil ver que

$$\mathcal{K}Q(f) = \mathcal{K}(Q(f)) = \int_{S^m} K(\cdot, y)\mathcal{D}^r J^r Qf(y)\, d\sigma_m(y), \quad f \in L^2(S^m). \tag{4.10}$$

Como $K \in W_2^r$, a igualdade (3.17) nos autoriza a escrever

$$\mathcal{K}Q(f) = \int_{S^m} K_{0,r}(\cdot, y) J^r(Qf)(y)\, d\sigma_m(y) = \mathcal{K}_{0,r} J^r Q(f), \quad f \in L^2(S^m), \tag{4.11}$$

ou seja, chegamos à decomposição

$$\mathcal{K}Q = \mathcal{K}_{0,r} J^r Q. \tag{4.12}$$

Se $\mathcal{K}_{0,r}$ é limitado, o Lema 4.2 implica que

$$s_n(\mathcal{K}Q) \leq \|Q\| s_n(\mathcal{K}_{0,r} J^r) \leq s_n(\mathcal{K}_{0,r} J^r), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{4.13}$$

Lembrando (4.9) concluimos que

$$s_{n+1}(\mathcal{K}) \leq s_n(\mathcal{K}_{0,r} J^r), \quad n = 2, 3, \ldots. \tag{4.14}$$

Isto finaliza a prova. ■

Cabe notar que o fato do índice n evoluir a partir de 2 na fórmula (4.8) não acarreta prejuízos significativos no que tange ao decaimento da sequência $\{s_n(\mathcal{K})\}$.

O primeiro resultado que apresentamos não inclui a positividade definida de K como hipótese. Logo, o decaimento obtido refere-se aos valores singulares de $\mathcal{K}$ e não aos autovalores de $\mathcal{K}$. Na prova, ainda indicaremos por $N(m, n)$ a dimensão do espaço $\mathcal{H}_n^m$. Ainda, utilizaremos o número

$$d(m, n) := \sum_{j=1}^{n} N(m, j), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{4.15}$$

Lembrando a ordenação em blocos estabelecida para os autovalores de J^r, e ignorando o primeiro autovalor, o número $d(m, n)$ é precisamente a última posição dentro do n-ésimo bloco da sequência de autovalores de J^r. A primeira posição dentro do mesmo bloco é $d(m, n-1) + 1$. Como

$$N(m, n) = \binom{m+n}{m} - \binom{m+n-2}{m}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4.16}$$

não é difícil verificar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(m, n)}{n^{m-1}} = \frac{1}{(m-1)!}. \tag{4.17}$$

Em particular, existe um inteiro $\beta = \beta(m) \geq 2$ tal que

$$n + d(m,n) \leq n^m, \quad n \geq \beta(m). \tag{4.18}$$

Teorema 4.7 *Sejam K um elemento de W_2^r e $\varepsilon > m$. Se $\mathcal{K}_{0,r}$ é um operador limitado então*

$$s_n(\mathcal{K}) = o(n^{-1-(2r-1-\varepsilon)/m}). \tag{4.19}$$

Demonstração. Supondo que $\mathcal{K}_{0,r}$ é um operador limitado vamos mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{(2r-1-\varepsilon)/m} s_n(\mathcal{K}) < \infty. \tag{4.20}$$

Já sabemos que J^r é autoadjunto pelo Teorema 3.2. Logo, o teorema anterior e o Lemma 4.2 justificam a desigualdade

$$s_{n+1}(\mathcal{K}) \leq \|\mathcal{K}_{0,r}\| s_n(J^r), \quad n = 2, 3, \ldots. \tag{4.21}$$

Consequentemente,

$$s_{n+1}(\mathcal{K}) \leq |\lambda_n(J^r)| \, \|\mathcal{K}_{0,r}\|, \quad n = 2, 3, \ldots. \tag{4.22}$$

Lembrando a ordenação em blocos para a sequência $\{\lambda_n(J^r)\}$ e somando-se tão somente dentro do n-ésimo bloco, obtemos

$$n^r(n+m-1)^r \sum_{k=d(m,n-1)+1}^{d(m,n)} s_{k+1}(\mathcal{K}) \leq m^r \|\mathcal{K}_{0,r}\| N(m,n), \quad n = 2, 3, \ldots. \tag{4.23}$$

Como a sequência $\{s_n(\mathcal{K})\}$ é decrescente, podemos concluir que

$$n^r(n+m-1)^r s_{d(m,n)+1}(\mathcal{K}) \leq m^r \|\mathcal{K}_{0,r}\|, \quad n = 2, 3, \ldots. \tag{4.24}$$

Usando (4.18) podemos ir um passo além e escrever

$$n^{2r} s_{n^m}(\mathcal{K}) \leq m^r \|\mathcal{K}_{0,r}\|, \quad n \geq \beta(m). \tag{4.25}$$

Multiplicando ambos os lados da última desigualdade por $n^{-1-\varepsilon+m}$ e somando em n vem que

$$\sum_{n=\beta(m)}^{\infty} n^{2r-1-\varepsilon+m} s_{n^m}(\mathcal{K}) \leq m^r \|\mathcal{K}_{0,r}\| \sum_{n=\beta(m)}^{\infty} n^{-1-\varepsilon+m} < \infty, \tag{4.26}$$

uma vez que $\varepsilon > m$. Nós usaremos esta informação para mostrar que

$$\sum_{n=l^m}^{\infty} n^{(2r-1-\varepsilon)/m} s_n(\mathcal{K}) < \infty, \tag{4.27}$$

quando l é suficientemente grande. Para tanto, vamos decompor a soma acima levando-se em consideração a notação em blocos já mencionada anteriormente, ou seja, vamos escrever

$$\sum_{n=l^m}^{\infty} n^{(2r-1-\varepsilon)/m} s_n(\mathcal{K}) = \sum_{q=l}^{\infty} \sum_{k=0}^{(q+1)^m-(q^m+1)} (q^m+k)^{(2r-1-\varepsilon)/m} s_{q^m+k}(\mathcal{K}). \tag{4.28}$$

Tomemos um inteiro $\gamma(m) > 0$ de modo que

$$(q+1)^m - (q^m+1) \leq q^m, \quad q \geq \gamma(m). \tag{4.29}$$

Então

$$(q^m+k)^{(2r-1-\varepsilon)/m} \leq (q^m+n^m)^{(2r-1-\varepsilon)/m}, \quad k = 0, 1, \ldots, (q+1)^m - (q^m+1), \tag{4.30}$$

contanto que $q \geq \gamma(m)$. Da mesma forma,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{(q+1)^m-(q^m+1)} (q^m+k)^{(2r-1-\varepsilon)/m} s_{q^m+k}(\mathcal{K}) &\leq (2q^m)^{(2r-1-\varepsilon)/m} \sum_{k=0}^{(q+1)^m-(q^m+1)} s_{q^m+k}(\mathcal{K}) \\ &\leq 2^{(2r-1-\varepsilon)/m} q^{2r-1-\varepsilon} (q^m+1) s_{q^m}(\mathcal{K}) \\ &\leq 2^{1+(2r-1-\varepsilon)/m} q^{2r-1+m-\varepsilon} s_{q^m}(\mathcal{K}), \end{aligned}$$

ainda sob a condição $q \geq \gamma(m)$. Deste modo, se $l \geq \max\{\beta(m), \gamma(m)\}$, o lado direito de (4.28) pode ser majorado por

$$2^{1+(2r-1-\varepsilon)/m} \sum_{q=l}^{\infty} q^{2r-1+m-\varepsilon} s_{q^m}(\mathcal{K}) \leq 2^{1+(2r-1-\varepsilon)/m} \sum_{q=\beta(m)}^{\infty} q^{2r-1+m-\varepsilon} s_{q^m}(\mathcal{K}). \tag{4.31}$$

Assim, se $l \geq \max\{\beta(m), \gamma(m)\}$, podemos usar (4.26) para deduzir que

$$\sum_{n=l^m}^{\infty} n^{(2r-1-\varepsilon)/m} s_n(\mathcal{K}) \leq 2^{1+(2r-1-\varepsilon)/m} \sum_{q=\beta(m)}^{\infty} q^{2r-1+m-\varepsilon} s_{q^m}(\mathcal{K}) < \infty. \tag{4.32}$$

O resultado segue. ■

Corolário 4.8 *Sejam K um elemento de W_2^r e $\varepsilon > 0$. Se $\mathcal{K}_{0,r}$ é um operador limitado então*

$$s_n(\mathcal{K}) = o(n^{-2-(2r-1-\varepsilon)/m}) = o(n^{-(2m+2r-1-\epsilon)/m}). \tag{4.33}$$

Observação. Se $r = 0$ o decaimento resultante do teorema anterior é pior do que o decaimento básico informado na Seção 1. O resultado é tão melhor quanto maior for a diferença $r - m$.

Teorema 4.9 *Seja K um núcleo positivo definido em W_2^r. Se $K_{0,r} \in L^2(S^m \times S^m)$ então*

$$\lambda_n(\mathcal{K}) = o(n^{-(m+4r-1)/2m}). \tag{4.34}$$

Demonstração. Vamos supor que $K_{0,r} \in L^2(S^m \times S^m)$ e mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{(4r-1)/m} \lambda_n^2(\mathcal{K}) < \infty. \tag{4.35}$$

A condição sobre $K_{0,r}$ implica imediatamente que $\mathcal{K}_{0,r}$ é limitado e compacto. Logo, aplicando o Teorema 4.6 e o Lema 4.4 concluimos que

$$s_{n+k}(\mathcal{K}) \leq s_{n+k-1}(\mathcal{K}_{0,r} J^r) \leq s_k(\mathcal{K}_{0,r}) s_n(J^r), \quad n+k \geq 3. \tag{4.36}$$

Lembrando o Teorema 1.2, temos que $\mathcal{K}$ é autoadjunto, compacto e positivo. Logo, pelo Lema 4.1,

$$s_{n+k}(\mathcal{K}) = |\lambda_{n+k}(\mathcal{K})| = \lambda_{n+k}(\mathcal{K}), \quad n+k \geq 3. \tag{4.37}$$

Da mesma forma, como J^r é autoadjunto e compacto, temos que

$$s_n(J^r) = |\lambda_n(J^r)| = \lambda_n(J^r), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{4.38}$$

Em suma, (4.36) implica a desigualdade

$$\lambda_{n+k}(\mathcal{K}) \leq s_k(\mathcal{K}_{0,r}) \frac{m^r}{n^r(n+m-1)^r}, \quad n+k \geq 3. \tag{4.39}$$

Quadrando e somando em k dentro do n-ésimo bloco da ordenação previamente introduzida obtemos

$$n^{2r}(n+m-1)^{2r} \sum_{k=d(m,n-1)+1}^{d(m,n)} \lambda_{n+k}^2(\mathcal{K}) \leq m^{2r} \sum_{k=d(m,n-1)+1}^{d(m,n)} s_k^2(\mathcal{K}_{0,r}), \quad n = 2, 3, \ldots. \tag{4.40}$$

Tome agora $C > 0$ (dependendo de m) de modo que $n^{m-1} \leq CN(m,n)$, $n = 2, 3, \ldots$. Lembrando a fórmula (4.18) e usando o fato de $\{\lambda_{n+k}^2(\mathcal{K})\}$ decrescer em k, concluimos que

$$\begin{aligned} n^{4r+m-1} \lambda_{n^m}^2(\mathcal{K}) &\leq Cn^{4r} N(m,n) \lambda_{n+d(m,n)}^2(\mathcal{K}) \\ &\leq Cm^{2r} \sum_{k=d(m,n-1)+1}^{d(m,n)} s_k^2(\mathcal{K}_{0,r}), \quad n = \beta(m), \beta(m)+1, \ldots. \end{aligned}$$

Somando em n e usando o Lema 4.5 concluimos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=\beta(m)}^{\infty} n^{4r+m-1} \lambda_{n^m}^2(\mathcal{K}) &\leq Cm^{2r} \sum_{n=\beta(m)}^{\infty} \sum_{k=d(m,n-1)+1}^{d(m,n)} s_k^2(\mathcal{K}_{0,r}) \\ &\leq Cm^{2r} \|K_{0,r}\| < \infty. \end{aligned}$$

O restante da prova consiste em usar a informação acima para deduzir que

$$\sum_{n=l^m}^{\infty} n^{(4r-1)/m}\lambda_n^2(\mathcal{K}) < \infty, \tag{4.41}$$

para l arbitrariamente grande. Como na prova do teorema anterior, começamos com a decomposição

$$\sum_{n=l^m}^{\infty} n^{(4r-1)/m}\lambda_n^2(\mathcal{K}) = \sum_{q=l}^{\infty} \sum_{k=0}^{(q+1)^m-(q^m+1)} (q^m+k)^{(4r-1)/m}\lambda_{q^m+k}^2(\mathcal{K}). \tag{4.42}$$

Empregando o mesmo $\gamma(m)$ utilizado na prova daquele teorema, temos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{(q+1)^m-(q^m+1)} (q^m+k)^{(4r-1)/m}\lambda_{q^m+k}^2(\mathcal{K}) &\leq (2q^m)^{(4r-1)/m}\sum_{k=0}^{(q+1)^m-(q^m+1)} \lambda_{q^m+k}^2(\mathcal{K}) \\ &\leq 2^{(4r-1)/m}q^{4r-1}(q^m+1)\lambda_{q^m}^2(\mathcal{K}) \\ &\leq 2^{1+(4r-1)/m}q^{4r+m-1}\lambda_{q^m}^2(\mathcal{K}),\end{aligned}$$

contanto que $q \geq \gamma(m)$. Segue que, se l é arbitrariamente grande, então

$$\begin{aligned}\sum_{n=l^m}^{\infty} n^{(4r-1)/m}\lambda_n^2(\mathcal{K}) &\leq 2^{1+(4r-1)/m}\sum_{q=l}^{\infty} q^{4r+m-1}\lambda_{q^m}^2(\mathcal{K}) \\ &\leq 2^{1+(4r-1)/m}\sum_{q=\beta(m)}^{\infty} q^{4r+m-1}\lambda_{q^m}^2(\mathcal{K}) < \infty.\end{aligned}$$

A prova está completa. ■

Teorema 4.10 *Seja K um núcleo positivo definido em W_2^r. If $\mathcal{K}_{0,r}$ é nuclear então*

$$\lambda_n(\mathcal{K}) = o(n^{-1-(2r-1)/m}). \tag{4.43}$$

Demonstração. Suponha que $\mathcal{K}_{0,r}$ é nuclear. É fácil verificar que a prova do teorema anterior pode ser reproduzida aqui até a fórmula (4.39). Somando em k dentro do n-ésimo bloco da ordenação previamente introduzida obtemos

$$n^r(n+m-1)^r \sum_{k=d(m,n-1)+1}^{d(m,n)} \lambda_{n+k}(\mathcal{K}) \leq m^r \sum_{k=d(m,n-1)+1}^{d(m,n)} s_k(\mathcal{K}_{0,r}), \quad n = 2,3,\ldots. \tag{4.44}$$

Daí, chegamos a

$$\sum_{n=\beta(m)}^{\infty} n^{2r+m-1}\lambda_{n^m}(\mathcal{K}) \leq Cm^r \sum_{n=\beta(m)}^{\infty} \sum_{k=d(m,n-1)+1}^{d(m,n)} s_k(\mathcal{K}_{0,r}) < \infty. \tag{4.45}$$

Prosseguindo com os passos das provas anteriores chegamos à desigualdade

$$\sum_{n=l^m}^{\infty} n^{(2r-1)/m}\lambda_n(\mathcal{K}) < \infty, \tag{4.46}$$

válida quando l é arbitrariamente grande. ■

Outros resultados sobre decaimento de autovalores do operador integral $\mathcal{K}$, nos quais as hipóteses de suavidade sobre o núcleo gerador são definidas por outros meios que não a derivada de Laplace-Beltrami, podem ser encontrados em [2,7,15] e referências lá indicadas.

5. Referências

1. Berens, H.; Butzer, P. L.; Pawelke, S., Limitierungsverfahren von Reihen mehrdimensionaler Kugelfunktionen und deren Saturationsverhalten. (German) *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A*, 4, 1968/1969, 201–268.
2. Castro, M. H.; Menegatto, V. A., Eigenvalues of integral operators with smooth kernels on the sphere, submetido para publicação.
3. Castro, M. H.; Menegatto, C. P., Oliveira, C. P., Laplace-Beltrami differentiability of positive definite kernels on spheres, submetido para publicação.
4. Cheney, W., Analysis for applied mathematics. Graduate Texts in Mathematics, 208. Springer-Verlag, New York, 2001.
5. Conway, J. B., A course in operator theory. Graduate Studies in Mathematics, 21. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
6. Ferreira, J. C.; Menegatto, V. A., Eigenvalues of integral operators defined by smooth positive definite kernels. *Integral Equations Operator Theory* 64 (2009), no. 1, 61–81.
7. Ferreira, J. C.; Menegatto, V. A.; Peron, A. P., Integral operators on the sphere generated by positive definite smooth kernels. *J. Complexity* 24 (2008), no. 5-6, 632–647.
8. Gohberg, I. C.; Krein, M. G., Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators. Translated from the Russian by A. Feinstein. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 18 American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969.
9. Gohberg, I.; Goldberg, S.; Krupnik, N., Traces and determinants of linear operators. Operator Theory: Advances and Applications, 116. Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.
10. Groemer, H., Geometric applications of Fourier series and spherical harmonics. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 61. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
11. Ha, C. W., Eigenvalues of differentiable positive definite kernels. SIAM J. Math. Anal. 17 (1986), no. 2, 415–419.
12. Lax, P. D., Functional analysis. Pure and Applied Mathematics (New York). Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2002.

13. Lima, E. L., Espaços Métricos, Projeto Euclides , IMPA, 1977.
14. Lions, J.-L.; Magenes, E., Non-homogeneous boundary value problems and applications. Vol. I. Translated from the French by P. Kenneth. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 181. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972.
15. Menegatto, V. A.; Peron, A. P., Decay rates for eigenvalues of positive integral operators on the sphere, submetido para publicação.
16. Menegatto, V. A., Piantella, A. C., Convergence for summation methods with multipliers on the sphere, *Numer. Funct. Anal. Optim.* 31 (2010), no. 6, 738-753.
17. Menegatto, V. A., Piantella, A. C., Old and new on the Laplace-Beltrami differentiability, submetido para publicação.
18. Morimoto, M., Analytic functionals on the sphere. Translations of Mathematical Monographs, 178. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
19. Müller, C., Analysis of spherical symmetries in euclidean spaces. Applied Mathematical Sciences, Vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1998.
20. Oliveira, C. R., *Introdução à análise funcional*, 2^a edição, IMPA, 2005.
21. Piantella, A. C., Aproximação na esfera por somas com pesos de harmônicos esféricos, Tese de Doutorado, ICMC-USP, 2007.
22. Reimer, M., Multivariate polynomial approximation. International Series of Numerical Mathematics, 144. Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.
23. Rudin, W., Uniqueness theory for Laplace series. *Trans. Amer. Math. Soc.* 68 (1950), 287–303.
24. Young, N., An introduction to Hilbert space. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
25. Wang, K, W.; Li, L. Q, Harmonic analysis and approximation on the unit sphere, Science Press, Beijing, 2000.
26. Wehrens, M., Best approximation on the unit sphere in $\mathbb{R}^k$. Functional analysis and approximation (Oberwolfach, 1980), pp. 233–245, Internat. Ser. Numer. Math., 60, Birkhäuser, Basel-Boston, Mass., 1981.
27. Wehrens, M., Legendre-Transformationsmethoden und approximation von funktionen auf der einheitskugel in R^3. Doctoral Dissertation, RWTH Aachen, 1980.
28. Weidmann, J., Linear operators in Hilbert spaces. Translated from the German by Joseph Szücs. Graduate Texts in Mathematics, 68. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980.