LINEABILIDADE: UMA NOVA FRONTEIRA NA ANÁLISE FUNCIONAL

DANIEL PELLEGRINO

1. Resumo

A história recente da Análise Funcional não pode ser descrita sem que sejam mencionados os grandes avanços advindos dos resultados de W.T. Gowers, vencedor da Medalha Fields em 1998. Problemas famosos, como o Problema do Espaço Homogêneo e o Problema da Base Incondicional foram solucionados recentemente como consequência de resultados profundos de Gowers e Maurey sobre a geometria dos espaços de Banach. Talvez o resultado mais marcante seja aquele que garante a existência de espaços de Banach hereditariamente indecomponíveis (um espaço de Banach de dimensão infinita é *indecomponível* se não puder ser escrito como soma direta topológica de dois subespaços fechados de dimensão infinita; diz-se que X é *hereditariamente indecomponível* (HI) se todo subespaço fechado de dimensão infinita for indecomponível).

Paralelamente, muitos trabalhos recentes têm se dedicado ao estudo de situações nas quais se procura um comportamento linear em ambientes desfavoráveis (não-lineares). Essa linha de pesquisa se enquadra no que chamamos de lineabilidade/ conjuntos lineáveis. Um subconjunto A de um espaço vetorial de dimensão infinita X é dito lineável se $A \cup \{0\}$ contiver um subspaço de dimensão inifinita de X. Se A contiver um subespaço fechado de dimensão infinita, dizemos que A é espaçável.

Problemas relacionados a lineabilidade no ambiente da Análise Funcional têm sido abordados, por exemplo, no contexto de zeros de polinômios, operadores hipercíclicos e funções contínuas não diferenciáveis.

Em nossa palestra, além de apresentarmos o estado-da-arte da teoria de lineabilidade, abordaremos problemas, no contexto da Análise Funcional, que relacionam fortemente o conceito de lineabilidade e a teoria de espaços hereditariamente indecomponíveis.

Por exemplo, mostraremos que os seguintes problemas têm intrínseca relação com a teoria de espaços hereditariamente indecomponíveis:

- Se $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ são ideais de operadores e E e F espaços de Banach, será que $\mathcal{I}_1(E;F)\diagdown\mathcal{I}_2(E;F)$ é sempre vazio ou lineável?
- Em quais circunstâncias o conjunto dos operadores lineares contínuos que não são absolutamente p-somantes é lineável?
- Sejam E e F espaços de Banach e $\mathcal{L}(E;F)$ o espaço dos operadores lineares contínuos de E em F. Para um vetor fixo x_0 na esfera unitária de E, seja $\mathcal{NA}^{x_0}(E;F)$ o conjunto de todos os operadores em $\mathcal{L}(E;F)$ que atingem suas normas em x_0. Em quais circunstâncias $\mathcal{NA}^{x_0}(E;F)$ é lineável/espaçável em $\mathcal{L}(E;F)$?

A partir da discussão dos problemas acima, tentaremos mostrar que espaços hereditariamente indecomponíveis, além de toda contribuição que já deram à Análise Funcional, são o ambiente natural para o estudo de problemas difíceis e desafiadores no contexto da teoria de lineabilidade.

Depto de Matemática - Universidade Federal da Paraíba