Introdução à teoria de regularidade elíptica: uma abordagem geométrica

Aula 3: Teoria de Krylov-Safonov

Eduardo V. Teixeira

Universidade Federal do Ceará

III ENAMA
Novembro de 2009, Maringá

Apresentação da Teoria

- ✓ Estuadamos na aula passada a teoria de regularidade de De Giorgi: Hölder regularidade para equações elípticas com estrutura divergente
- ✓ A Teoria de Krylov-Safonov contempla resultado correspondente para operadores com estrutura não-divergente.

$$Lu = a_{ij}(X)D_{ij}u,$$

- ✓ De fato, Krylov e Safonov, mais de 20 anos após o desenvolvimento da Teoria de De Giorgi, Nash e Moser, estabeleceriam Desigualdade de Harnack para soluções de equações em forma não-divergente.

Apresentação da Teoria

- ✓ Estuadamos na aula passada a teoria de regularidade de De Giorgi: Hölder regularidade para equações elípticas com estrutura divergente
- ✓ A Teoria de Krylov-Safonov contempla resultado correspondente para operadores com estrutura não-divergente.

$$Lu = a_{ij}(X)D_{ij}u,$$

- ✓ De fato, Krylov e Safonov, mais de 20 anos após o desenvolvimento da Teoria de De Giorgi, Nash e Moser, estabeleceriam Desigualdade de Harnack para soluções de equações em forma não-divergente.

Apresentação da Teoria

- ✓ Estuadamos na aula passada a teoria de regularidade de De Giorgi: Hölder regularidade para equações elípticas com estrutura divergente
- ✓ A Teoria de Krylov-Safonov contempla resultado correspondente para operadores com estrutura não-divergente.

$$Lu = a_{ij}(X)D_{ij}u,$$

- ✓ De fato, Krylov e Safonov, mais de 20 anos após o desenvolvimento da Teoria de De Giorgi, Nash e Moser, estabeleceriam Desigualdade de Harnack para soluções de equações em forma não-divergente.

Apresentação da Teoria

- ✓ Estuadamos na aula passada a teoria de regularidade de De Giorgi: Hölder regularidade para equações elípticas com estrutura divergente
- ✓ A Teoria de Krylov-Safonov contempla resultado correspondente para operadores com estrutura não-divergente.

$$Lu = a_{ij}(X)D_{ij}u,$$

- ✓ De fato, Krylov e Safonov, mais de 20 anos após o desenvolvimento da Teoria de De Giorgi, Nash e Moser, estabeleceriam Desigualdade de Harnack para soluções de equações em forma não-divergente.

Uma Nobre Motivação

⋆ A Teoria de Krylov-Safonov pode ser vista como a principal chave de acesso ao desenvolvimento da teoria de operadores elípticos totalmente não lineares:

Uma Nobre Motivação

⋆ A Teoria de Krylov-Safonov pode ser vista como a principal chave de acesso ao desenvolvimento da teoria de operadores elípticos totalmente não lineares:

Definition

Seja $F\colon \mathcal{S}(n) \to \mathbb{R}$ um operador definido no espaço das matrizes simétricas. A equação

$$F(D^2u) = 0 \tag{1}$$

é dita ser uniformemente elíptica se existirem constantes positivas $0 < \lambda \leq \Lambda$, tais que

$$\lambda\|P\| \leq F(M+P) - F(M) \leq \Lambda\|P\|,$$

para qualquer matriz positiva P.

Noção de Solução Fraca

Pergunta

Qual seria a noção apropriada para *solução fraca* de uma equação da forma não-divergente

$$a_{ij}(X)D_{ij}u = f \quad \text{ou} \quad F(D^2u) = f?$$

Soluções no sentido da Viscosidade

Definição de Soluções no sentido da Viscosidade

Uma função contínua u é dita ser uma subsolução no sentido da viscosidade de $F(D^2u) = 0$ se:

$\varphi \in C^2, u - \varphi$ atinge máximo local em $X_0 \Longrightarrow F(D^2\varphi(X_0)) \geq 0.$

Soluções no sentido da Viscosidade

Definição de Soluções no sentido da Viscosidade

Uma função contínua u é dita ser uma subsolução no sentido da viscosidade de $F(D^2u) = 0$ se:

$$\varphi \in C^2, u - \varphi \text{ atinge máximo local em } X_0 \Longrightarrow F(D^2\varphi(X_0)) \geq 0.$$

Soluções no sentido da Viscosidade

Definição de Soluções no sentido da Viscosidade

Uma função contínua u é dita ser uma subsolução no sentido da viscosidade de $F(D^2u) = 0$ se:

$$\varphi \in C^2, u - \varphi \text{ atinge máximo local em } X_0 \Longrightarrow F(D^2\varphi(X_0)) \geq 0.$$

Uma função contínua u é dita ser uma supersolução no sentido da viscosidade de $F(D^2u) = 0$ se:

$$\varphi \in C^2, u - \varphi \text{ atinge mínimo local em } X_0 \Longrightarrow F(D^2\varphi(X_0)) \leq 0.$$

Soluções no sentido da Viscosidade

Definição de Soluções no sentido da Viscosidade

Uma função contínua u é dita ser uma subsolução no sentido da viscosidade de $F(D^2u) = 0$ se:

$$\varphi \in C^2, u - \varphi \text{ atinge máximo local em } X_0 \Longrightarrow F(D^2\varphi(X_0)) \geq 0.$$

Uma função contínua u é dita ser uma supersolução no sentido da viscosidade de $F(D^2u) = 0$ se:

$$\varphi \in C^2, u - \varphi \text{ atinge mínimo local em } X_0 \Longrightarrow F(D^2\varphi(X_0)) \leq 0.$$

Soluções no sentido da Viscosidade

Definição de Soluções no sentido da Viscosidade

Uma função contínua u é dita ser uma subsolução no sentido da viscosidade de $F(D^2u) = 0$ se:

$$\varphi \in C^2, u - \varphi \text{ atinge máximo local em } X_0 \Longrightarrow F(D^2\varphi(X_0)) \geq 0.$$

Uma função contínua u é dita ser uma supersolução no sentido da viscosidade de $F(D^2u) = 0$ se:

$$\varphi \in C^2, u - \varphi \text{ atinge mínimo local em } X_0 \Longrightarrow F(D^2\varphi(X_0)) \leq 0.$$

Uma função u é uma solução no sentido da viscosidade de $F(D^2u) = 0$ se for uma subsolução e uma supersolução no sentido da viscosidade.

Soluções no sentido da Viscosidade

Definição de Soluções no sentido da Viscosidade

Uma função contínua u é dita ser uma subsolução no sentido da viscosidade de $F(D^2u) = 0$ se:

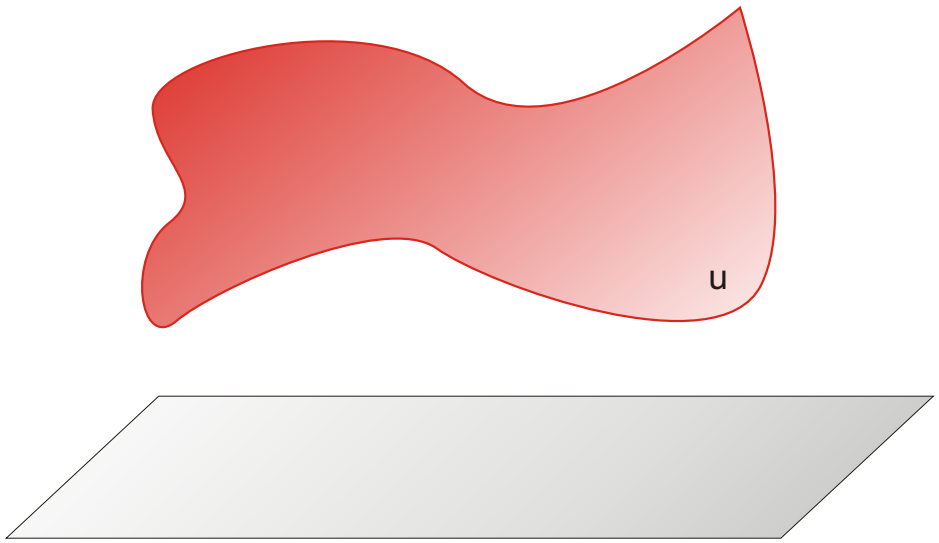
$$\varphi \in C^2, u - \varphi \text{ atinge máximo local em } X_0 \Longrightarrow F(D^2\varphi(X_0)) \geq 0.$$

Uma função contínua u é dita ser uma supersolução no sentido da viscosidade de $F(D^2u) = 0$ se:

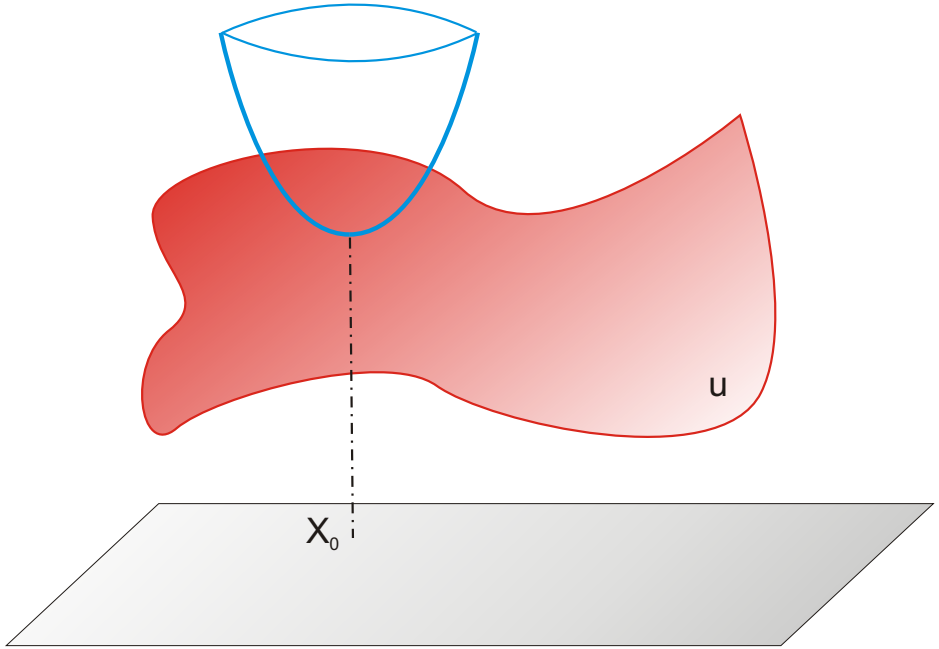
$$\varphi \in C^2, u - \varphi \text{ atinge mínimo local em } X_0 \Longrightarrow F(D^2\varphi(X_0)) \leq 0.$$

Uma função u é uma solução no sentido da viscosidade de $F(D^2u) = 0$ se for uma subsolução e uma supersolução no sentido da viscosidade.

Justificativa da Definição

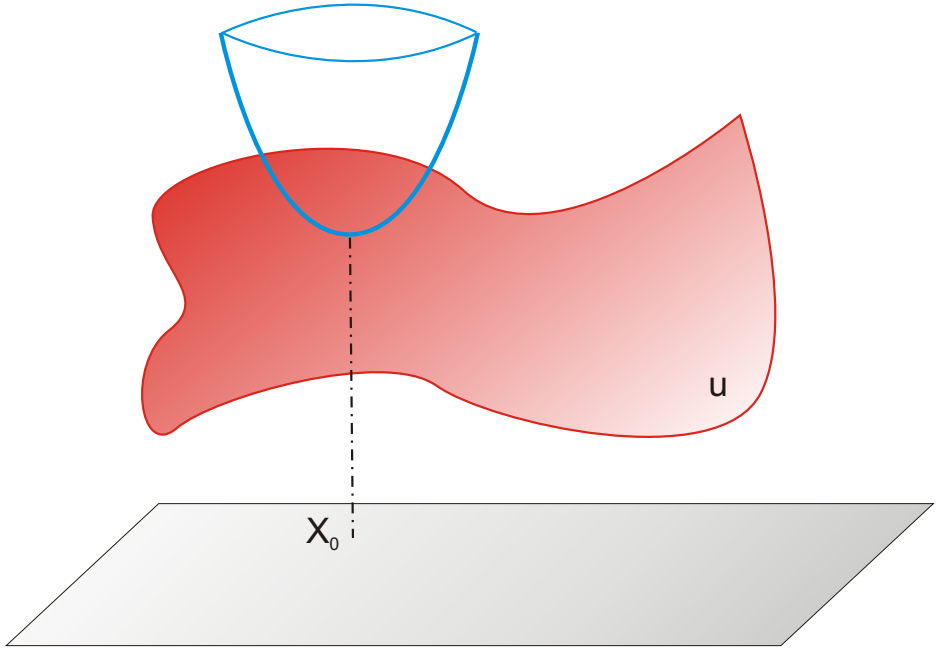


Justificativa da Definição



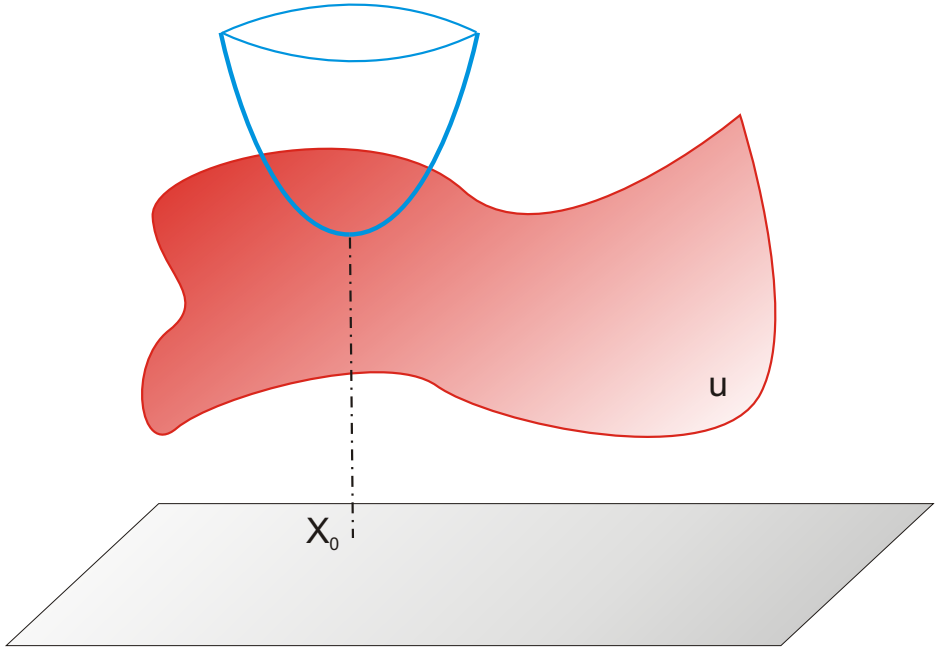
$$D^2\varphi(X_0) \geq D^2u(X_0)$$

Justificativa da Definição



$$F(D^2\varphi(X_0)) \geq F(D^2u(X_0))$$

Justificativa da Definição



$$F(D^2\varphi(X_0)) \geq F(D^2u(X_0))'' \geq 0''.$$

Equações totalmente não lineares e a Teoria de Krylov-Safonov - Observação I

- Satisfazer

$$a_{ij}(X)D_{ij}u = 0, \quad \lambda \mathrm{Id} \leq a_{ij} \leq \Lambda \mathrm{Id}$$

significa precisamente que a parte positiva e a parte negativa da Hessiana de u são comparáveis.

$$\lambda \| \left(D_{ij}u\right)^{+} \| \leq \Lambda \| \left(D_{ij}u\right)^{-} \| \quad \text{e} \quad \lambda \| \left(D_{ij}u\right)^{-} \| \leq \Lambda \| \left(D_{ij}u\right)^{+} \|.$$

- Se $(D^2u)^+ \sim (D^2u)^-$, então é possível encontrar matriz elíptica tal que

$$a_{ij}(X)D_{ij}u = 0.$$

Equações totalmente não lineares e a Teoria de Krylov-Safonov - Observação I

- Satisfazer

$$a_{ij}(X)D_{ij}u = 0, \quad \lambda \mathrm{Id} \leq a_{ij} \leq \Lambda \mathrm{Id}$$

significa precisamente que a parte positiva e a parte negativa da Hessiana de u são comparáveis.

$$\lambda \| \left(D_{ij}u\right)^{+} \| \leq \Lambda \| \left(D_{ij}u\right)^{-} \| \quad \text{e} \quad \lambda \| \left(D_{ij}u\right)^{-} \| \leq \Lambda \| \left(D_{ij}u\right)^{+} \|.$$

- Se $(D^2u)^+ \sim (D^2u)^-$, então é possível encontrar matriz elíptica tal que

$$a_{ij}(X)D_{ij}u = 0.$$

Equações totalmente não lineares e a Teoria de Krylov-Safonov - Observação I

- Satisfazer

$$a_{ij}(X)D_{ij}u = 0, \quad \lambda \mathrm{Id} \leq a_{ij} \leq \Lambda \mathrm{Id}$$

significa precisamente que a parte positiva e a parte negativa da Hessiana de u são comparáveis.

$$\lambda \| \left(D_{ij}u\right)^{+} \| \leq \Lambda \| \left(D_{ij}u\right)^{-} \| \quad \text{e} \quad \lambda \| \left(D_{ij}u\right)^{-} \| \leq \Lambda \| \left(D_{ij}u\right)^{+} \|.$$

- Se $(D^2u)^+ \sim (D^2u)^-$, então é possível encontrar matriz elíptica tal que

$$a_{ij}(X)D_{ij}u = 0.$$

Equações totalmente não lineares e a Teoria de Krylov-Safonov - Observação II

- Se u satisfaz $F(D^2u) = 0$ (e $F(0) = 0$). Então $(D^2u)^+ \sim (D^2u)^-$.
- Derivando a equação em uma dada direção μ,

$$F_{ij}(D^2u)D_{ij}u_\mu = 0.$$

- Ou seja, se $F(D^2u) = 0$, então u e $D_\mu u$ satisfazem EDPs elípiticas da forma $a_{ij}(X)D_{ij}\xi = 0$.

Equações totalmente não lineares e a Teoria de Krylov-Safonov - Observação II

- Se u satisfaz $F(D^2u) = 0$ (e $F(0) = 0$). Então $(D^2u)^+ \sim (D^2u)^-$.
- Derivando a equação em uma dada direção μ,

$$F_{ij}(D^2u)D_{ij}u_\mu = 0.$$

- Ou seja, se $F(D^2u) = 0$, então u e $D_\mu u$ satisfazem EDPs elípiticas da forma $a_{ij}(X)D_{ij}\xi = 0$.

Equações totalmente não lineares e a Teoria de Krylov-Safonov - Observação II

- Se u satisfaz $F(D^2u) = 0$ (e $F(0) = 0$). Então $(D^2u)^+ \sim (D^2u)^-$.
- Derivando a equação em uma dada direção μ,

$$F_{ij}(D^2u)D_{ij}u_\mu = 0.$$

- Ou seja, se $F(D^2u) = 0$, então u e $D_\mu u$ satisfazem EDPs elípiticas da forma $a_{ij}(X)D_{ij}\xi = 0$.

Teoria de Regularidade para EDPs elípticas totalmente não-leneares

- Uma vez provado desigualdade de Harnack para $a_{ij}(X)D_{ij}\xi = 0$, sem hipótese de suavidade nos coeficientes (Teoria de Krylov-Safonov) temos

$$F(D^2u) = 0 \quad \Longrightarrow \quad u \in C^{1,\alpha}.$$

- Sob hipótese de convexidade em F, é possivel mostrar que $u \in C^{2,\alpha}$ (Teorema de Evans-Krylov)
- Recentemente foi mostrado que, sem hipótese extra em F, regularidade $C^{1,\alpha}$ é ótima para a teoria de EDPs totalmente não-lineares.

Teoria de Regularidade para EDPs elípticas totalmente não-leneares

- Uma vez provado desigualdade de Harnack para $a_{ij}(X)D_{ij}\xi = 0$, sem hipótese de suavidade nos coeficientes (Teoria de Krylov-Safonov) temos

$$F(D^2u) = 0 \quad \Longrightarrow \quad u \in C^{1,\alpha}.$$

- Sob hipótese de convexidade em F, é possivel mostrar que $u \in C^{2,\alpha}$ (Teorema de Evans-Krylov)
- Recentemente foi mostrado que, sem hipótese extra em F, regularidade $C^{1,\alpha}$ é ótima para a teoria de EDPs totalmente não-lineares.

Teoria de Regularidade para EDPs elípticas totalmente não-leneares

- Uma vez provado desigualdade de Harnack para $a_{ij}(X)D_{ij}\xi = 0$, sem hipótese de suavidade nos coeficientes (Teoria de Krylov-Safonov) temos

$$F(D^2u) = 0 \quad \Longrightarrow \quad u \in C^{1,\alpha}.$$

- Sob hipótese de convexidade em F, é possivel mostrar que $u \in C^{2,\alpha}$ (Teorema de Evans-Krylov)
- Recentemente foi mostrado que, sem hipótese extra em F, regularidade $C^{1,\alpha}$ é ótima para a teoria de EDPs totalmente não-lineares.

Teoria de Regularidade para EDPs elípticas totalmente não-leneares

- Uma vez provado desigualdade de Harnack para $a_{ij}(X)D_{ij}\xi = 0$, sem hipótese de suavidade nos coeficientes (Teoria de Krylov-Safonov) temos

$$F(D^2u) = 0 \quad \Longrightarrow \quad u \in C^{1,\alpha}.$$

- Sob hipótese de convexidade em F, é possivel mostrar que $u \in C^{2,\alpha}$ (Teorema de Evans-Krylov)
- Recentemente foi mostrado que, sem hipótese extra em F, regularidade $C^{1,\alpha}$ é ótima para a teoria de EDPs totalmente não-lineares.

O Santo Graau

Theorem (Krylov & Safonov)

Seja a_{ij} uma matriz elíptica e mensurável e $u \geq 0$ uma solução (no sentido da viscosidade) de

$$a_{ij}(X)D_{ij}u = 0 \text{ em } B_1.$$

Então, para uma constante universal $C > 0$, temos

$$\sup_{B_{1/2}} u \leq C \inf_{B_{1/2}} u.$$

Em particular u é α-Hölder contínua em $B_{1/2}$ para algum expoente α universal e

$$[u]_{C^\alpha(B_{1/2})} \leq C\|u\|_{L^\infty(B_1)}.$$

O Santo Graau

Theorem (Krylov & Safonov)

Seja a_{ij} uma matriz elíptica e mensurável e $u \geq 0$ uma solução (no sentido da viscosidade) de

$$a_{ij}(X)D_{ij}u = 0 \text{ em } B_1.$$

Então, para uma constante universal $C > 0$, temos

$$\sup_{B_{1/2}} u \leq C \inf_{B_{1/2}} u.$$

Em particular u é α-Hölder contínua em $B_{1/2}$ para algum expoente α universal e

$$[u]_{C^\alpha(B_{1/2})} \leq C\|u\|_{L^\infty(B_1)}.$$

O Santo Graau

Theorem (Krylov & Safonov)

Seja a_{ij} uma matriz elíptica e mensurável e $u \geq 0$ uma solução (no sentido da viscosidade) de

$$a_{ij}(X)D_{ij}u = 0 \text{ em } B_1.$$

Então, para uma constante universal $C > 0$, temos

$$\sup_{B_{1/2}} u \leq C \inf_{B_{1/2}} u.$$

Em particular u é α-Hölder contínua em $B_{1/2}$ para algum expoente α universal e

$$[u]_{C^\alpha(B_{1/2})} \leq C\|u\|_{L^\infty(B_1)}.$$

Ferramentas

1. Estimativa de Alexandroff, Bakelman, e Pucci.
2. Decomposição em cubos diádicos de Calderón-Zygmung.
3. Existência de supersoluções universalmente controladas fora de um dado cubo.

Ferramentas

1. Estimativa de Alexandroff, Bakelman, e Pucci.
2. Decomposição em cubos diádicos de Calderón-Zygmung.
3. Existência de supersoluções universalmente controladas fora de um dado cubo.

Ferramentas

1. Estimativa de Alexandroff, Bakelman, e Pucci.
2. Decomposição em cubos diádicos de Calderón-Zygmung.
3. Existência de supersoluções universalmente controladas fora de um dado cubo.

Cronograma da prova

A prova é dividida em duas etapas:

1. Supersoluções não-negativas estão em $L^{\epsilon}_{\text{fraco}}$.
2. Subsoluções não-negativas em $L^{\epsilon}_{\text{fraco}}$ são limitadas.

Cronograma da prova

A prova é dividida em duas etapas:

1. Supersoluções não-negativas estão em $L^{\epsilon}_{\text{fraco}}$.
2. Subsoluções não-negativas em $L^{\epsilon}_{\text{fraco}}$ são limitadas.

Estimativa de Alexandroff, Bakelman, e Pucci

Theorem (Estimativa ABP)

Se v satisfaz

$$a_{ij}(X)D_{ij}v = f \text{ em } B_d.$$

e $v \geq 0$ na ∂B_d. Então, para uma constante universal $C > 0$,

$$\sup_{B_d} v^- \leq Cd \left(\int_{B_d \cap \{u = \Gamma_u\}} (f^+)^n dX \right)^{1/n},$$

aonde Γ_u é o envelope convexo de $-u^-$ em B_{2d}.

Prova da Estimativa ABP

1. Lembramos da Fórmula da Área:
   $\mathcal{L}^n(H(B_d)) \leq \int_{B_d} |\det DH(X)| dX.$
2. Aplicamos Fórmula da Área em $H := D\Gamma_u$ e obtemos

$$\mathcal{L}^n(D\Gamma_u(B_d)) \leq \int_{\{u=\Gamma_u\}} \left|\det\left(D^2\Gamma_u\right)\right| dX,$$

3. Em $A := \{u = \Gamma_u\}$, temos $\left|\det\left(D^2\Gamma_u\right)\right| \lesssim (f^+)^n$.
4. Finalmente, $D\Gamma_u(B_d)$ contêm uma bola de raio $\dfrac{\sup u^-}{4d}$.

Prova da Estimativa ABP

1. Lembramos da Fórmula da Área:
   $\mathcal{L}^n(H(B_d)) \leq \int_{B_d} |\det DH(X)| dX.$
2. Aplicamos Fórmula da Área em $H := D\Gamma_u$ e obtemos

$$\mathcal{L}^n(D\Gamma_u(B_d)) \leq \int_{\{u=\Gamma_u\}} \left|\det\left(D^2\Gamma_u\right)\right| dX,$$

3. Em $A := \{u = \Gamma_u\}$, temos $\left|\det\left(D^2\Gamma_u\right)\right| \lesssim (f^+)^n$.
4. Finalmente, $D\Gamma_u(B_d)$ contêm uma bola de raio $\dfrac{\sup u^-}{4d}$.

Prova da Estimativa ABP

1. Lembramos da Fórmula da Área:
   $\mathcal{L}^n(H(B_d)) \leq \int_{B_d} |\det DH(X)| dX$.
2. Aplicamos Fórmula da Área em $H := D\Gamma_u$ e obtemos

$$\mathcal{L}^n(D\Gamma_u(B_d)) \leq \int_{\{u=\Gamma_u\}} \left|\det\left(D^2\Gamma_u\right)\right| dX,$$

3. Em $A := \{u = \Gamma_u\}$, temos $\left|\det\left(D^2\Gamma_u\right)\right| \lesssim (f^+)^n$.
4. Finalmente, $D\Gamma_u(B_d)$ contêm uma bola de raio $\dfrac{\sup u^-}{4d}$.

Prova da Estimativa ABP

1. Lembramos da Fórmula da Área:
   $\mathcal{L}^n(H(B_d)) \leq \int_{B_d} |\det DH(X)| dX$.
2. Aplicamos Fórmula da Área em $H := D\Gamma_u$ e obtemos

$$\mathcal{L}^n(D\Gamma_u(B_d)) \leq \int_{\{u=\Gamma_u\}} \left|\det\left(D^2\Gamma_u\right)\right| dX,$$

3. Em $A := \{u = \Gamma_u\}$, temos $\left|\det\left(D^2\Gamma_u\right)\right| \lesssim (f^+)^n$.
4. Finalmente, $D\Gamma_u(B_d)$ contêm uma bola de raio $\dfrac{\sup u^-}{4d}$.

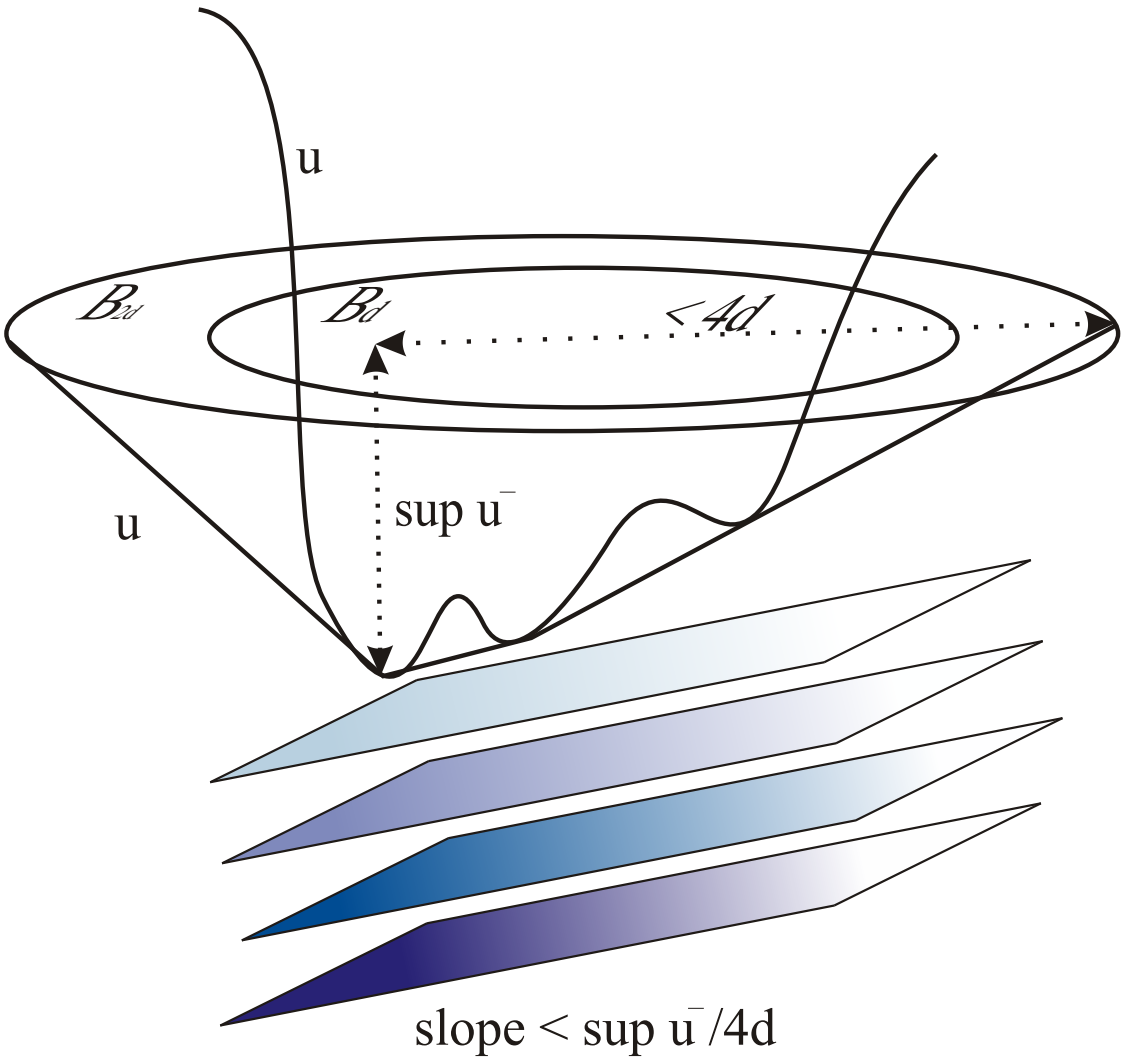
Prova da Estimativa ABP

1. Lembramos da Fórmula da Área:
   $\mathcal{L}^n(H(B_d)) \leq \int_{B_d} |\det DH(X)| dX$.
2. Aplicamos Fórmula da Área em $H := D\Gamma_u$ e obtemos

$$\mathcal{L}^n(D\Gamma_u(B_d)) \leq \int_{\{u=\Gamma_u\}} \left|\det\left(D^2\Gamma_u\right)\right| dX,$$

3. Em $A := \{u = \Gamma_u\}$, temos $\left|\det\left(D^2\Gamma_u\right)\right| \lesssim (f^+)^n$.
4. Finalmente, $D\Gamma_u(B_d)$ contêm uma bola de raio $\dfrac{\sup u^-}{4d}$.

$D\Gamma_u(B_d)$ contêm uma bola de raio $\dfrac{\sup u^-}{4d}$



Decomposição em cubos diádicos

Lemma

Sejam $A \subset B \subset Q_1$ conjuntos mensuráveis e $0 < \delta < 1$. Assuma as seguintes hipóteses

1. $\mathcal{L}^n(A) \leq \delta$.
2. *Sempre que* $\dfrac{\mathcal{L}^n(A \cap Q)}{\mathcal{L}^n(Q)} > \delta$, *então necessariamente* $\tilde{Q} \subset B$.

Se as duas hipóteses acima forem satisfeitas, concluímos que

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \delta \mathcal{L}^n(B).$$

Decomposição em cubos diádicos

Lemma

Sejam $A \subset B \subset Q_1$ conjuntos mensuráveis e $0 < \delta < 1$. Assuma as seguintes hipóteses

1. $\mathcal{L}^n(A) \leq \delta$.
2. *Sempre que* $\dfrac{\mathcal{L}^n(A \cap Q)}{\mathcal{L}^n(Q)} > \delta$, *então necessariamente* $\tilde{Q} \subset B$.

Se as duas hipóteses acima forem satisfeitas, concluímos que

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \delta \mathcal{L}^n(B).$$

Decomposição em cubos diádicos

Lemma

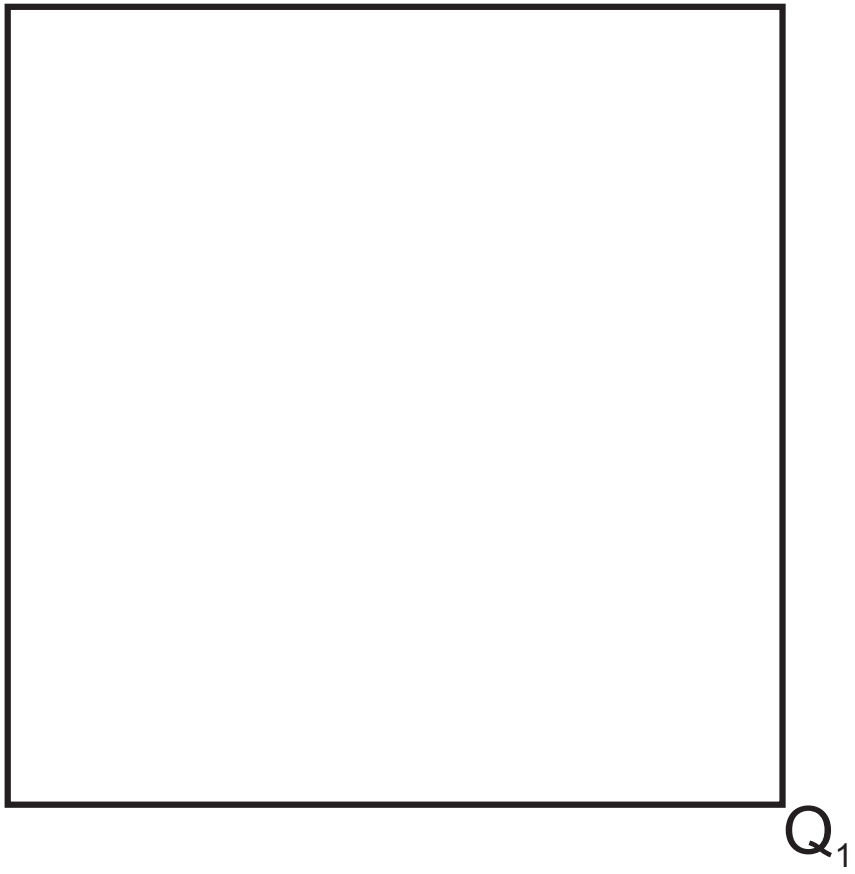
Sejam $A \subset B \subset Q_1$ conjuntos mensuráveis e $0 < \delta < 1$. Assuma as seguintes hipóteses

1. $\mathcal{L}^n(A) \leq \delta$.
2. *Sempre que* $\dfrac{\mathcal{L}^n(A \cap Q)}{\mathcal{L}^n(Q)} > \delta$, *então necessariamente* $\tilde{Q} \subset B$.

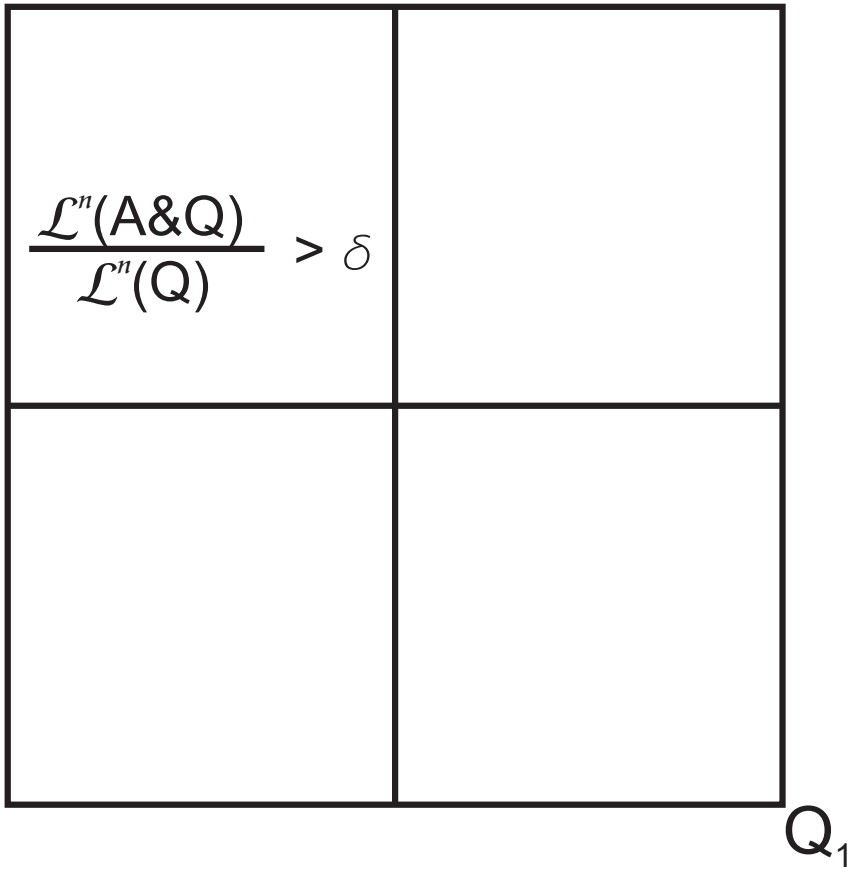
Se as duas hipóteses acima forem satisfeitas, concluímos que

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \delta \mathcal{L}^n(B).$$

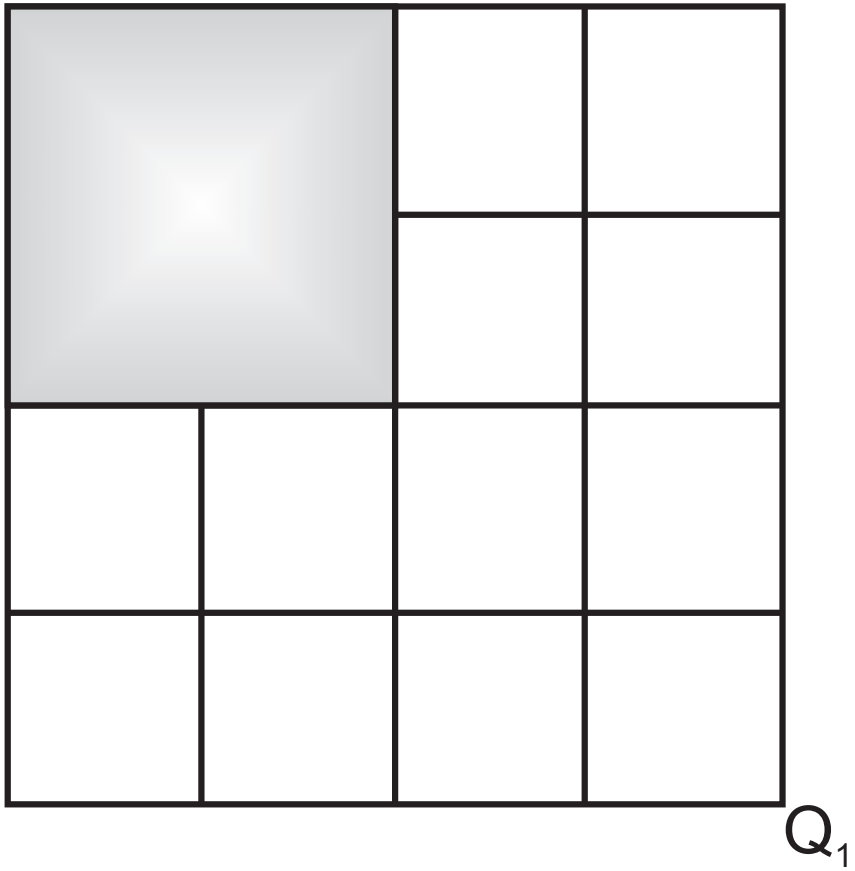
Prova do Lema de Decomposição em cubos diádicos



Prova do Lema de Decomposição em cubos diádicos

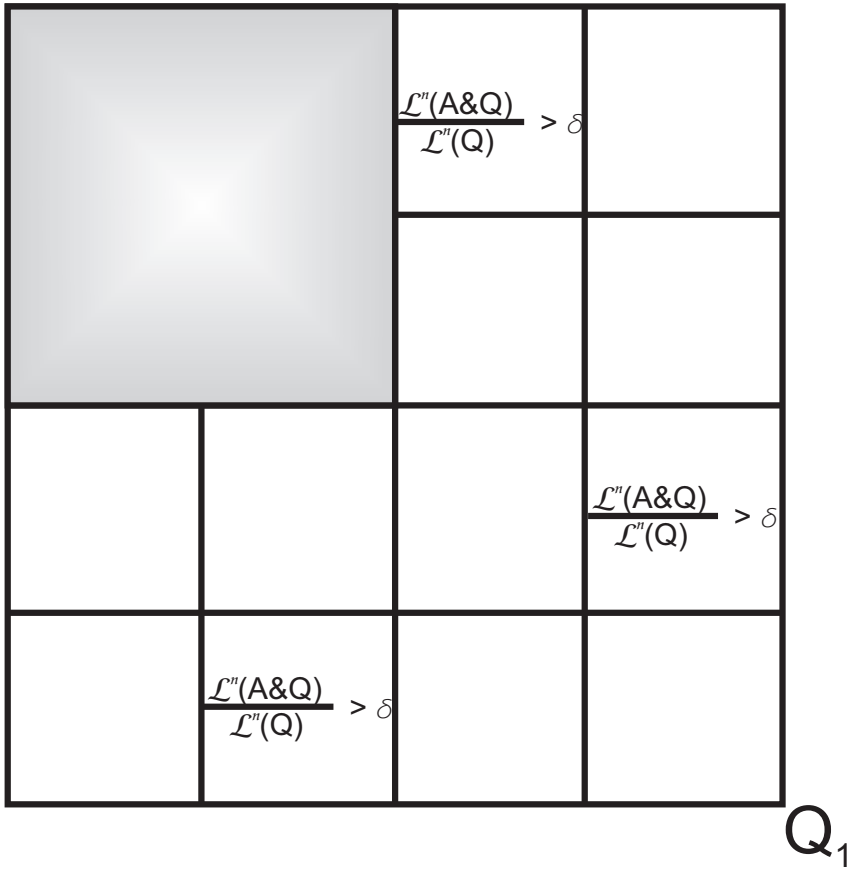


Prova do Lema de Decomposição em cubos diádicos



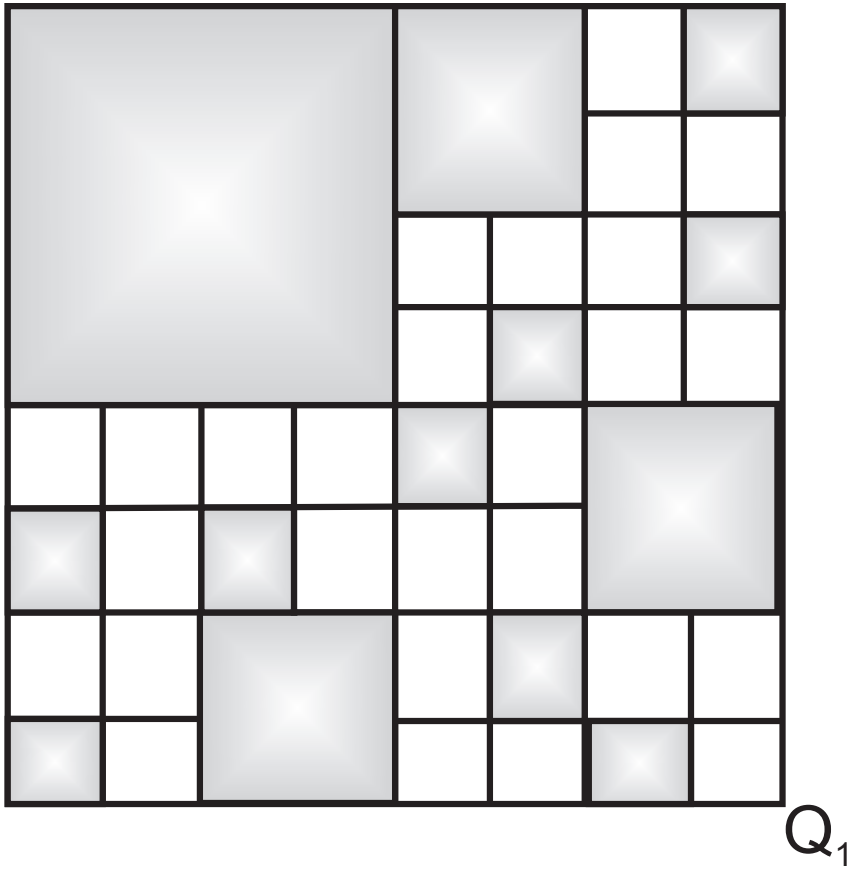
Q^1

Prova do Lema de Decomposição em cubos diádicos



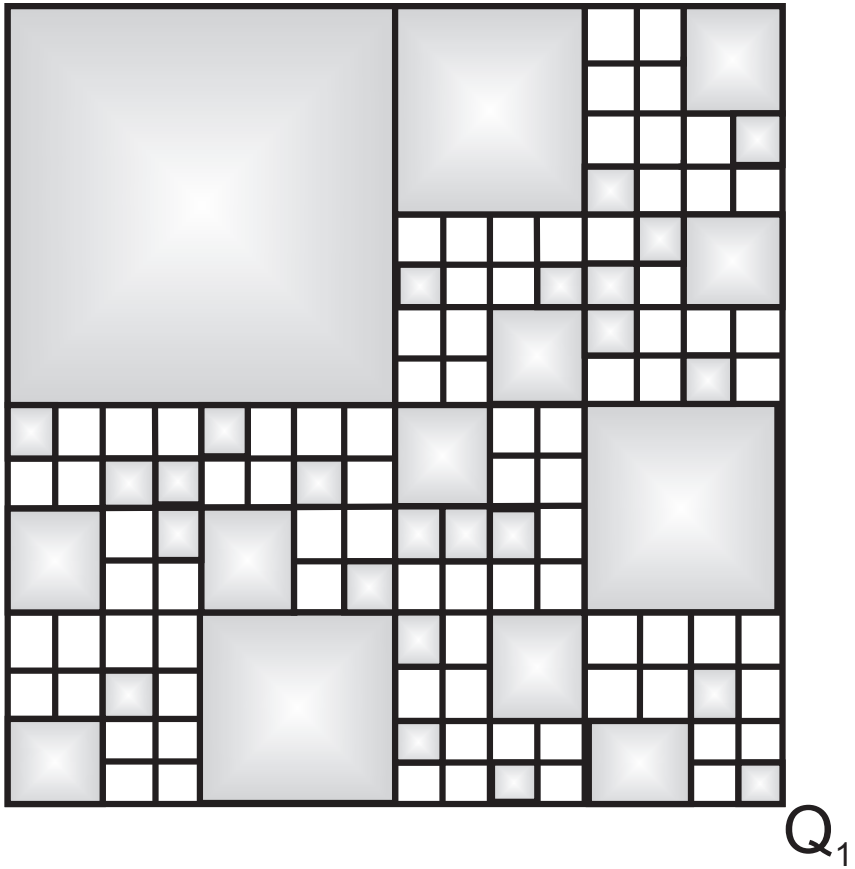
Q^1

Prova do Lema de Decomposição em cubos diádicos



$$Q^1, Q^2, Q^3, Q^4, \cdots$$

Prova do Lema de Decomposição em cubos diádicos



$$Q^1, Q^2, Q^3, Q^4, \cdots$$

Prova do Lema de Decomposição em cubos diádicos

- Teorema de Diferenciação de Lesbegue quarante que $\{Q^j\}_{j=1}^{\infty}$ cobre A q.t.p.
- Para cada Q_j, necessariamente

$$\frac{\mathcal{L}^n\left(A \cap \widetilde{Q}^j\right)}{\mathcal{L}^n(\widetilde{Q}^j)} \leq \delta,$$

- Podemos assumir $\widetilde{Q}^j$ são dois a dois disjuntos.
- Finalmente

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \sum_j |A \cap \tilde{Q}^j| \leq \delta \sum_j \mathcal{L}^n\left(\tilde{Q}^j\right) \leq \delta \mathcal{L}^n(B).$$

Prova do Lema de Decomposição em cubos diádicos

- Teorema de Diferenciação de Lesbegue quarante que $\{Q^j\}_{j=1}^{\infty}$ cobre A q.t.p.
- Para cada Q_j, necessariamente

$$\frac{\mathcal{L}^n\left(A \cap \widetilde{Q}^j\right)}{\mathcal{L}^n(\widetilde{Q}^j)} \leq \delta,$$

- Podemos assumir $\widetilde{Q}^j$ são dois a dois disjuntos.
- Finalmente

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \sum_j |A \cap \tilde{Q}^j| \leq \delta \sum_j \mathcal{L}^n\left(\tilde{Q}^j\right) \leq \delta \mathcal{L}^n(B).$$

Prova do Lema de Decomposição em cubos diádicos

- Teorema de Diferenciação de Lesbegue quarante que $\{Q^j\}_{j=1}^{\infty}$ cobre A q.t.p.
- Para cada Q_j, necessariamente

$$\frac{\mathcal{L}^n\left(A \cap \widetilde{Q}^j\right)}{\mathcal{L}^n(\widetilde{Q}^j)} \leq \delta,$$

- Podemos assumir $\widetilde{Q}^j$ são dois a dois disjuntos.
- Finalmente

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \sum_j |A \cap \tilde{Q}^j| \leq \delta \sum_j \mathcal{L}^n\left(\tilde{Q}^j\right) \leq \delta \mathcal{L}^n(B).$$

Prova do Lema de Decomposição em cubos diádicos

- Teorema de Diferenciação de Lesbegue quarante que $\{Q^j\}_{j=1}^{\infty}$ cobre A q.t.p.
- Para cada Q_j, necessariamente

$$\frac{\mathcal{L}^n\left(A \cap \widetilde{Q}^j\right)}{\mathcal{L}^n(\widetilde{Q}^j)} \leq \delta,$$

- Podemos assumir $\widetilde{Q}^j$ são dois a dois disjuntos.
- Finalmente

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \sum_j |A \cap \tilde{Q}^j| \leq \delta \sum_j \mathcal{L}^n\left(\tilde{Q}^j\right) \leq \delta \mathcal{L}^n(B).$$

Supersoluções são *eventualmente* limitadas

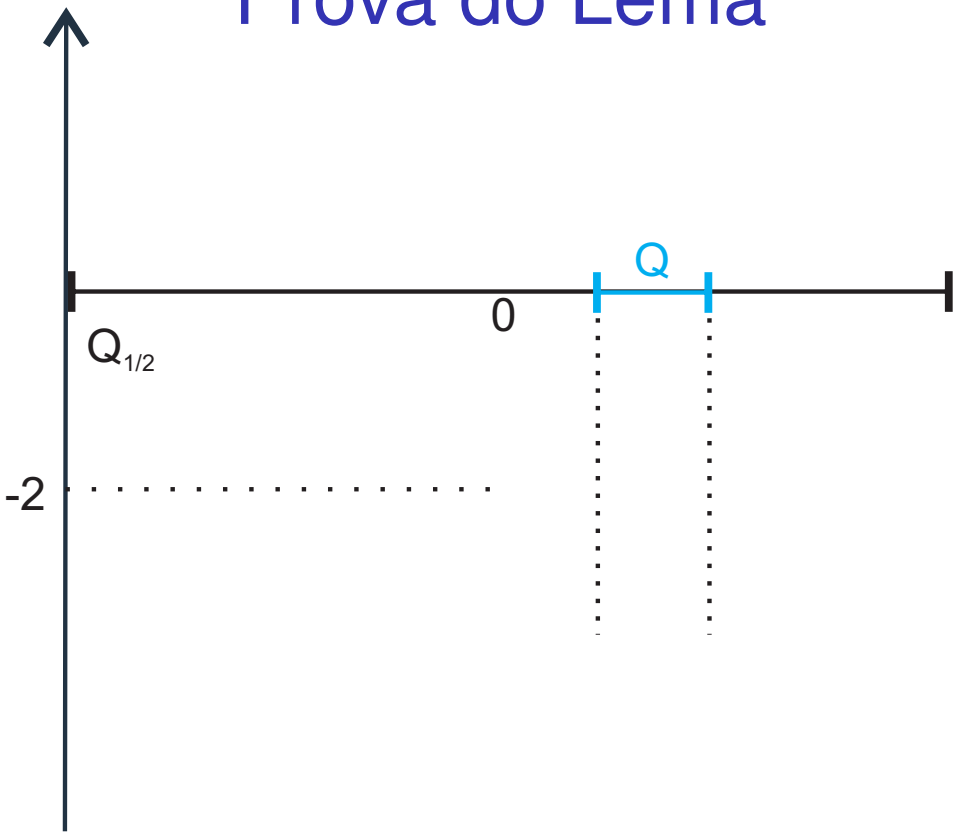
Lemma

Suponha $a_{ij}(X)D_{ij}v \leq 0$ *em* Q_1 *e* $v(0) = 1$. *Então existem constantes universais,* $\theta > 0$ *e* $M > 1$, *tais que*

$$\mathcal{L}^n(\{v \leq M\} \cap Q) \geq \theta,$$

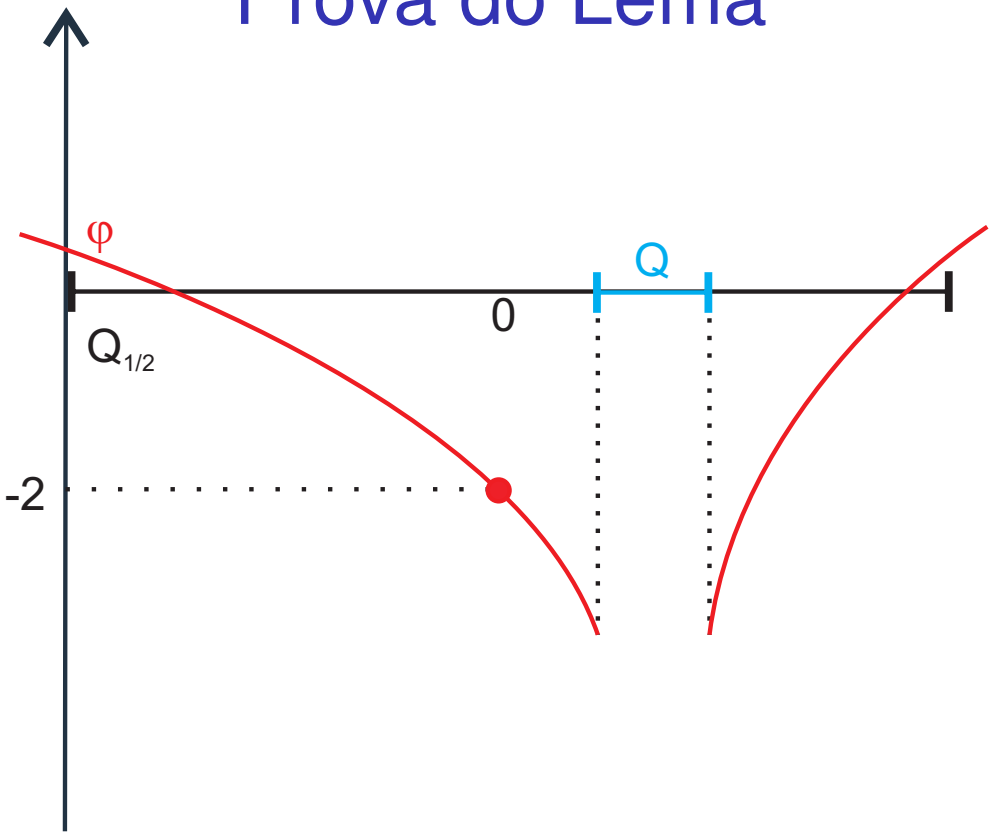
para qualquer cubo $Q = Q_{1/8}(X)$, *com* $|X| \leq 1/8$.

Prova do Lema



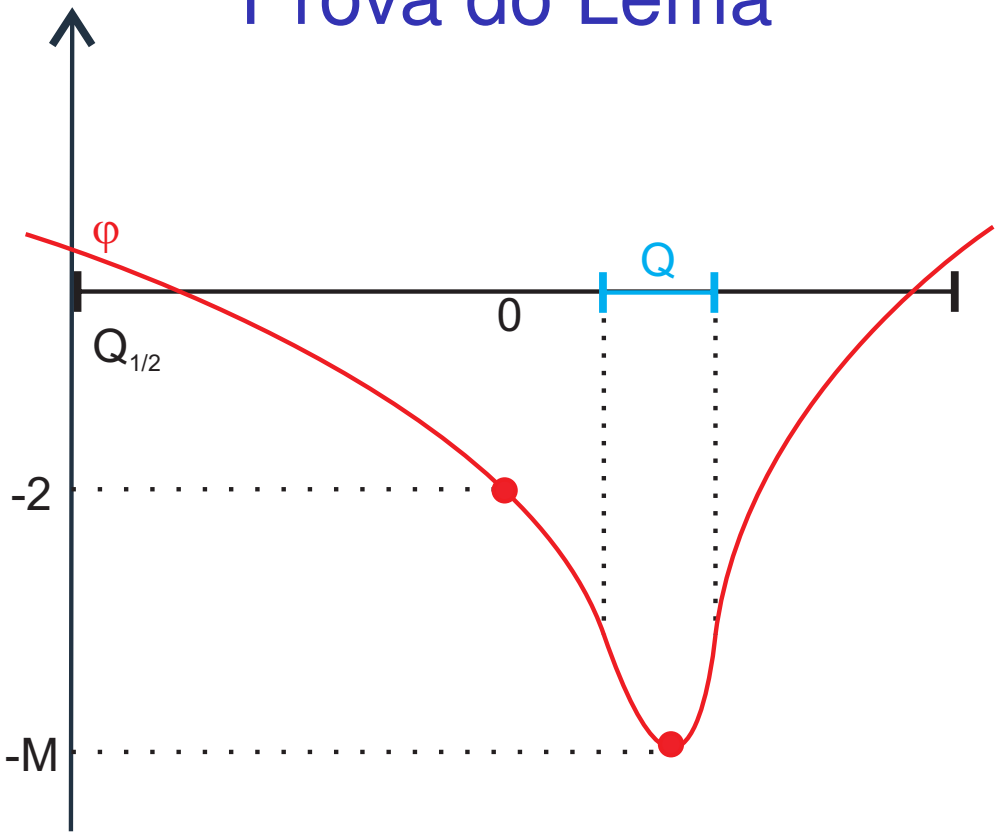
1. $a_{ij}(X)D_{ij}\varphi \leq 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus Q$,
2. $\varphi \geq 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus Q_{1/2}$,
3. $\varphi(0) \leq -2$
4. $a_{ij}(X)D_{ij}\varphi \leq C$ em Q,
5. $\varphi(x) \geq -M$ em $\mathbb{R}^n$.

Prova do Lema



1. $a_{ij}(X)D_{ij}\varphi \leq 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus Q$,
2. $\varphi \geq 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus Q_{1/2}$,
3. $\varphi(0) \leq -2$
4. $a_{ij}(X)D_{ij}\varphi \leq C$ em Q,
5. $\varphi(x) \geq -M$ em $\mathbb{R}^n$.

Prova do Lema



1. $a_{ij}(X)D_{ij}\varphi \leq 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus Q$,
2. $\varphi \geq 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus Q_{1/2}$,
3. $\varphi(0) \leq -2$
4. $a_{ij}(X)D_{ij}\varphi \leq C$ em Q,
5. $\varphi(x) \geq -M$ em $\mathbb{R}^n$.

Prova do Lema

- Definimos $v^* := v + \varphi$.
- $\left(a_{ij}(X)D_{ij}v^*\right)^+ \leq C\chi_Q$.
- Ademais,

$$\{v^* = \Gamma_{v^*}\} \subset \{v^* \leq 0\} \subset \{v \leq -\varphi\} \subset \{v \leq M\}.$$

- Aplicando Estimativa ABP, obtemos

$$1 \leq \sup(v^*)^- \leq \int\limits_{\{v^*=\Gamma_{v^*}\}} \left(a_{ij}(x)D_{ij}v^*\right)^+ \leq C\mathcal{L}^n\left(\{v \leq M\}\right).$$

Prova do Lema

- Definimos $v^* := v + \varphi$.
- $\left(a_{ij}(X)D_{ij}v^*\right)^+ \leq C\chi_Q$.
- Ademais,

$$\{v^* = \Gamma_{v^*}\} \subset \{v^* \leq 0\} \subset \{v \leq -\varphi\} \subset \{v \leq M\}.$$

- Aplicando Estimativa ABP, obtemos

$$1 \leq \sup(v^*)^- \leq \int_{\{v^*=\Gamma_{v^*}\}} \left(a_{ij}(x)D_{ij}v^*\right)^+ \leq C\mathcal{L}^n\left(\{v \leq M\}\right).$$

Prova do Lema

- Definimos $v^* := v + \varphi$.
- $\left(a_{ij}(X)D_{ij}v^*\right)^+ \leq C\chi_Q$.
- Ademais,

$$\{v^* = \Gamma_{v^*}\} \subset \{v^* \leq 0\} \subset \{v \leq -\varphi\} \subset \{v \leq M\}.$$

- Aplicando Estimativa ABP, obtemos

$$1 \leq \sup(v^*)^- \leq \int_{\{v^*=\Gamma_{v^*}\}} \left(a_{ij}(x)D_{ij}v^*\right)^+ \leq C\mathcal{L}^n\left(\{v \leq M\}\right).$$

Prova do Lema

- Definimos $v^* := v + \varphi$.
- $\left(a_{ij}(X)D_{ij}v^*\right)^+ \leq C\chi_Q$.
- Ademais,

$$\{v^* = \Gamma_{v^*}\} \subset \{v^* \leq 0\} \subset \{v \leq -\varphi\} \subset \{v \leq M\}.$$

- Aplicando Estimativa ABP, obtemos

$$1 \leq \sup(v^*)^- \leq \int\limits_{\{v^*=\Gamma_{v^*}\}} \left(a_{ij}(x)D_{ij}v^*\right)^+ \leq C\mathcal{L}^n\left(\{v \leq M\}\right).$$

Estimativa L^ϵ fraco

Lemma (Supersoluções estão no L^ϵ fraco)

Suponha que v satisfaz $a_{ij}(x)D_{ij}v \leq 0$ em Q_1 (no sentido da viscosidade) e que $v(0) = 1$. Então

$$\mathcal{L}^n(\{v > t\}) \leq Ct^{-\epsilon},$$

para constantes universais C and ϵ.

Prova da Estimativa L^ϵ fraco

1. Definamos
$$A_k := \{v > M^k \cap Q_1\}$$
2. Mostraremos que para $\delta := 1 - \theta$, os conjuntos $A = A_k$ and $B = A_{k-1}$ satisfazem as hipóteses do Lema de Calderón-Zygmund.
3. Para isto, suponha que $\mathcal{L}^n(A \cap Q) > \delta$, i.e., $\mathcal{L}^n\left(\{v \leq M^k\} \cap Q\right) \leq \theta \mathcal{L}^n(Q)$ mas $\tilde{Q} \not\subset B$.
4. Assim, existiria $X_0 \in \tilde{Q}$ no qual $v_1 := \frac{v}{M^{k-1}} \leq M$.
5. Lema anterior implicaria que
$$\theta \leq \mathcal{L}^n\left(\{v_1(Y) \leq M\} \cap Q_1\right) = 2^{in}\mathcal{L}^n\left(\{v(X) \leq M^k\} \cap Q\right).$$

Prova da Estimativa L^ϵ fraco

1. Definamos
$$A_k := \{v > M^k \cap Q_1\}$$
2. Mostraremos que para $\delta := 1 - \theta$, os conjuntos $A = A_k$ and $B = A_{k-1}$ satisfazem as hipóteses do Lema de Calderón-Zygmund.
3. Para isto, suponha que $\mathcal{L}^n(A \cap Q) > \delta$, i.e., $\mathcal{L}^n\left(\{v \leq M^k\} \cap Q\right) \leq \theta \mathcal{L}^n(Q)$ mas $\tilde{Q} \not\subset B$.
4. Assim, existiria $X_0 \in \tilde{Q}$ no qual $v_1 := \frac{v}{M^{k-1}} \leq M$.
5. Lema anterior implicaria que
$$\theta \leq \mathcal{L}^n\left(\{v_1(Y) \leq M\} \cap Q_1\right) = 2^{in}\mathcal{L}^n\left(\{v(X) \leq M^k\} \cap Q\right).$$

Prova da Estimativa L^ϵ fraco

1. Definamos
$$A_k := \{v > M^k \cap Q_1\}$$
2. Mostraremos que para $\delta := 1 - \theta$, os conjuntos $A = A_k$ and $B = A_{k-1}$ satisfazem as hipóteses do Lema de Calderón-Zygmund.
3. Para isto, suponha que $\mathcal{L}^n(A \cap Q) > \delta$, i.e., $\mathcal{L}^n\left(\{v \leq M^k\} \cap Q\right) \leq \theta \mathcal{L}^n(Q)$ mas $\tilde{Q} \not\subset B$.
4. Assim, existiria $X_0 \in \tilde{Q}$ no qual $v_1 := \frac{v}{M^{k-1}} \leq M$.
5. Lema anterior implicaria que
$$\theta \leq \mathcal{L}^n\left(\{v_1(Y) \leq M\} \cap Q_1\right) = 2^{in}\mathcal{L}^n\left(\{v(X) \leq M^k\} \cap Q\right).$$

Prova da Estimativa L^ϵ fraco

1. Definamos
$$A_k := \{v > M^k \cap Q_1\}$$
2. Mostraremos que para $\delta := 1 - \theta$, os conjuntos $A = A_k$ and $B = A_{k-1}$ satisfazem as hipóteses do Lema de Calderón-Zygmund.
3. Para isto, suponha que $\mathcal{L}^n(A \cap Q) > \delta$, i.e., $\mathcal{L}^n\left(\{v \leq M^k\} \cap Q\right) \leq \theta \mathcal{L}^n(Q)$ mas $\tilde{Q} \not\subset B$.
4. Assim, existiria $X_0 \in \tilde{Q}$ no qual $v_1 := \frac{v}{M^{k-1}} \leq M$.
5. Lema anterior implicaria que

$$\theta \leq \mathcal{L}^n\left(\{v_1(Y) \leq M\} \cap Q_1\right) = 2^{in}\mathcal{L}^n\left(\{v(X) \leq M^k\} \cap Q\right).$$

Prova da Estimativa L^ϵ fraco

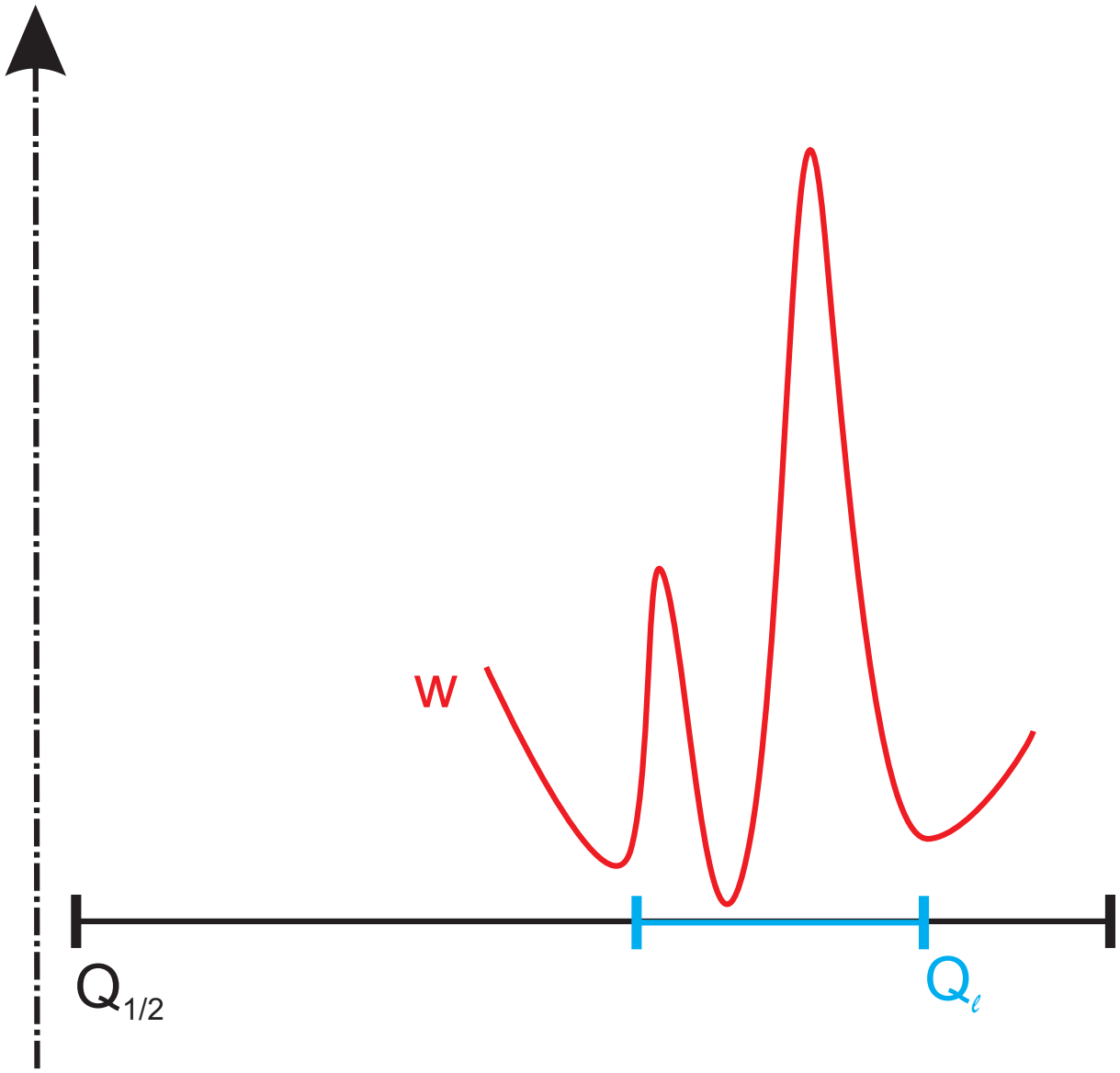
1. Definamos
$$A_k := \{v > M^k \cap Q_1\}$$
2. Mostraremos que para $\delta := 1 - \theta$, os conjuntos $A = A_k$ and $B = A_{k-1}$ satisfazem as hipóteses do Lema de Calderón-Zygmund.
3. Para isto, suponha que $\mathcal{L}^n(A \cap Q) > \delta$, i.e., $\mathcal{L}^n\left(\{v \leq M^k\} \cap Q\right) \leq \theta \mathcal{L}^n(Q)$ mas $\tilde{Q} \not\subset B$.
4. Assim, existiria $X_0 \in \tilde{Q}$ no qual $v_1 := \frac{v}{M^{k-1}} \leq M$.
5. Lema anterior implicaria que
$$\theta \leq \mathcal{L}^n\left(\{v_1(Y) \leq M\} \cap Q_1\right) = 2^{in}\mathcal{L}^n\left(\{v(X) \leq M^k\} \cap Q\right).$$

Subsoluções em $L^{\varepsilon}_{\text{fraco}}$ são limitadas

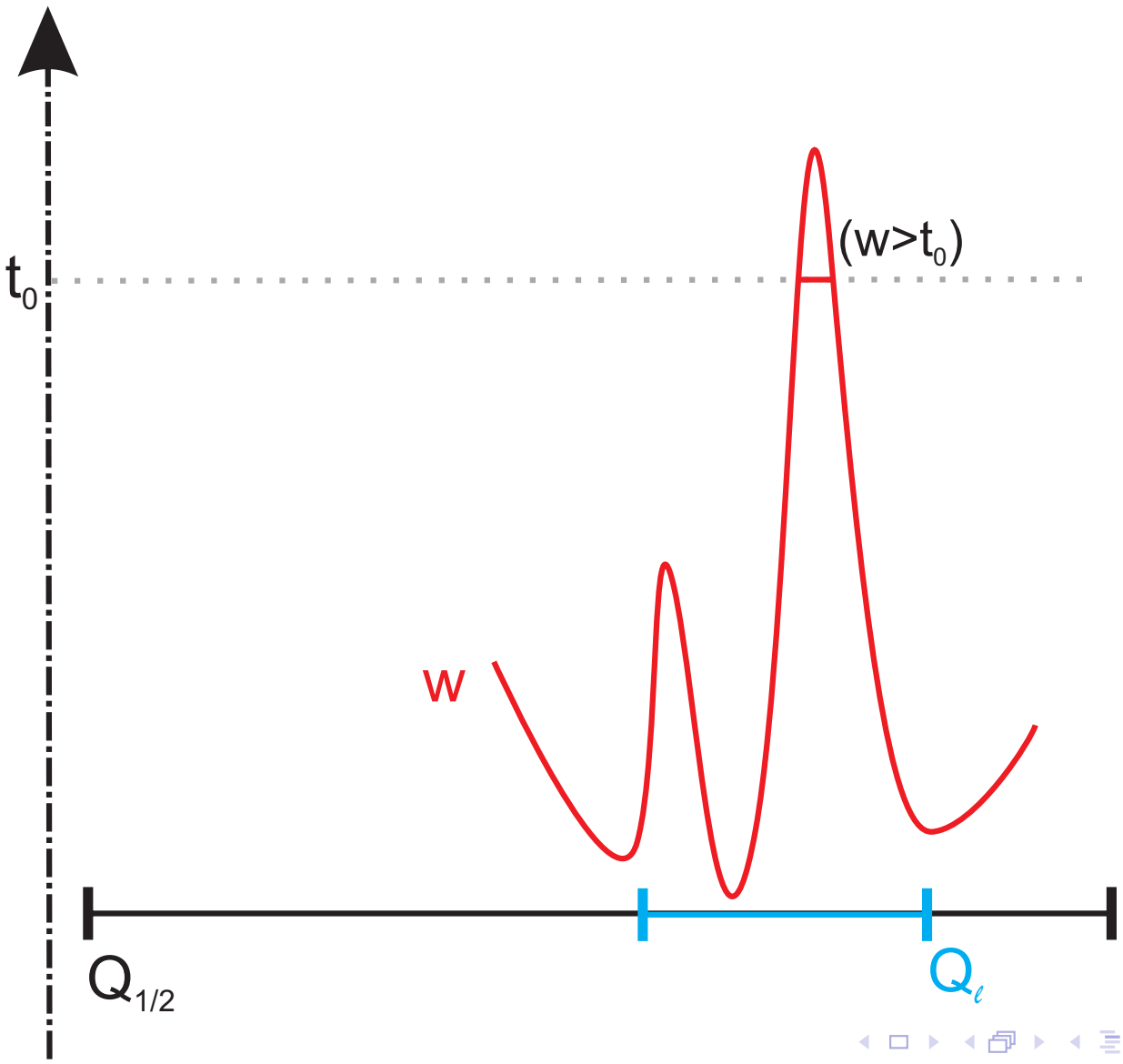
Lemma (Lema de Oscilação)

Suponhamos que w satisfaz $a_{ij}(x)D_{ij}w \geq 0$ em $Q_{4\sqrt{n}}$ e $w \in L^{\epsilon}_{w}$.

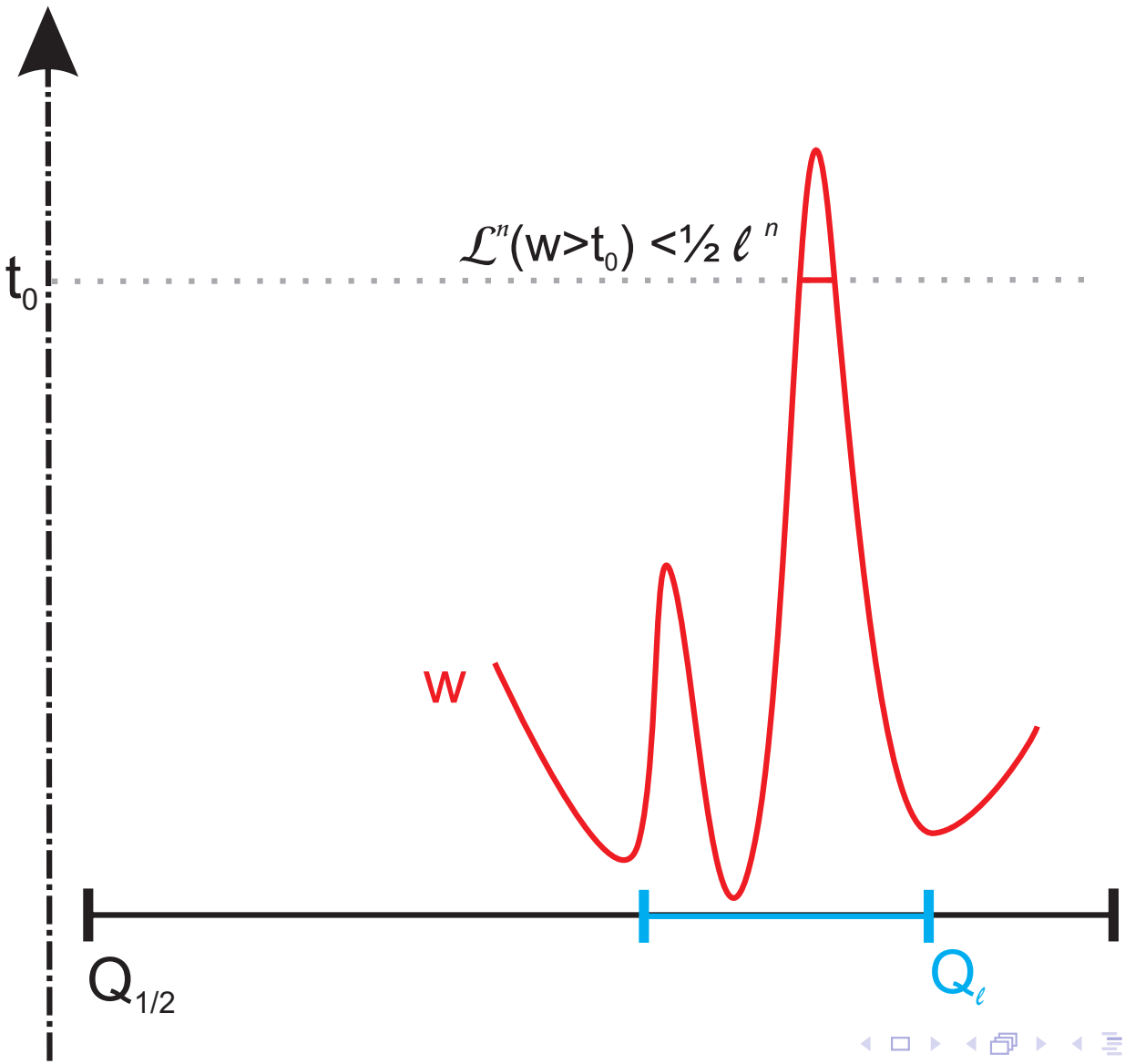
Justificativa da Prova do Lema de Oscilação



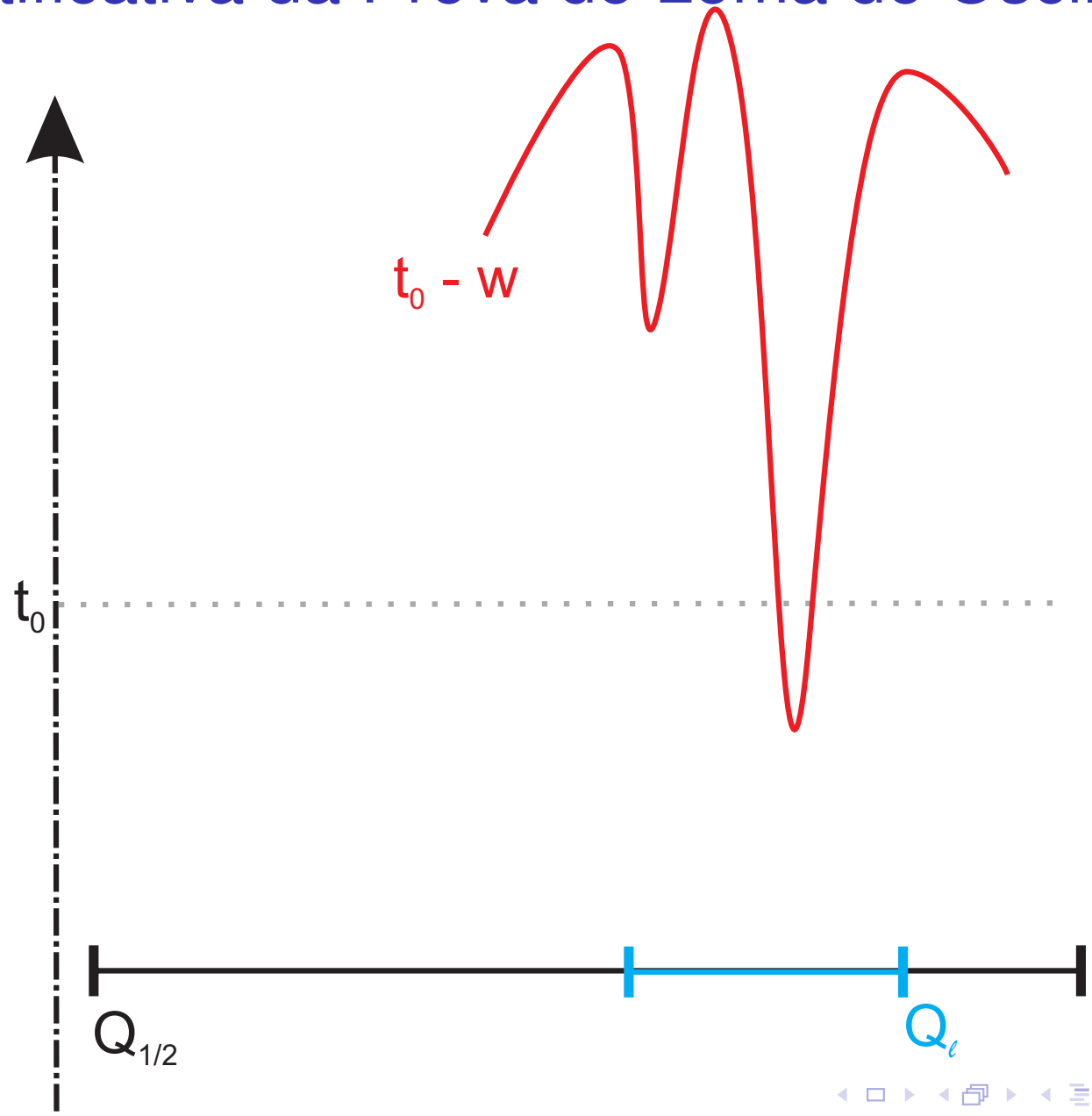
Justificativa da Prova do Lema de Oscilação



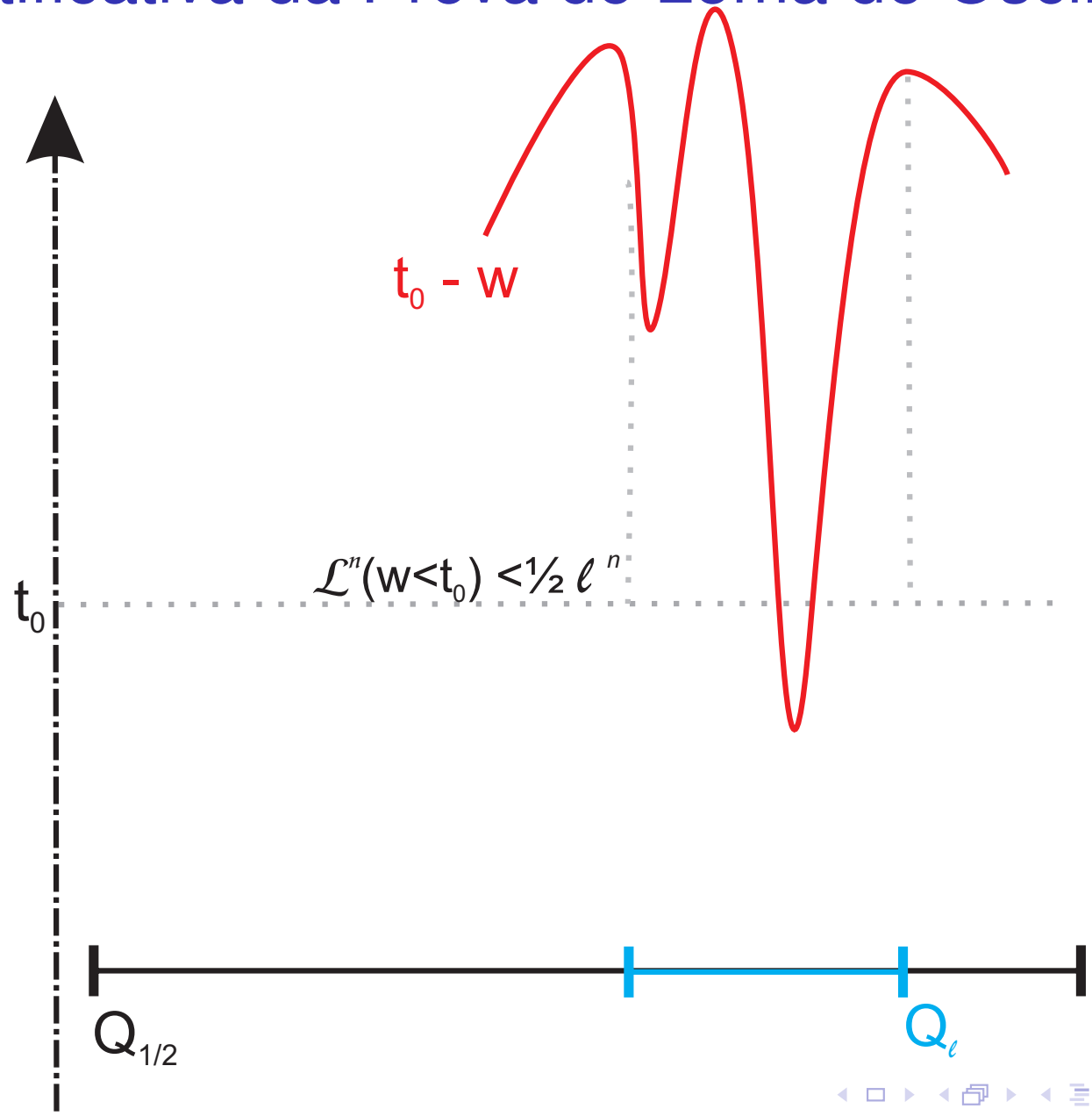
Justificativa da Prova do Lema de Oscilação



Justificativa da Prova do Lema de Oscilação



Justificativa da Prova do Lema de Oscilação



Prova da Desigualdade de Harnack

- ✓ Seja $u \geq 0$ solução $a_{ij}(x)D_{ij}u = 0$ em B_1.
- ✓ Pelo Lema $L^{\varepsilon}_{\text{fraco}}$,

$$\mathcal{L}^n\left(\left\{u > t\inf_{B_1} u\right\}\right) \leq C_1 t^{-\epsilon}.$$

- ✓ Pelo Lema de oscilação,

$$\sup_{B_{1/2}} \leq C_2 \inf_{B_{1/2}} u,$$

Prova da Desigualdade de Harnack

- ✓ Seja $u \geq 0$ solução $a_{ij}(x)D_{ij}u = 0$ em B_1.
- ✓ Pelo Lema $L^{\varepsilon}_{\text{fraco}}$,

$$\mathcal{L}^n\left(\left\{u > t\inf_{B_1} u\right\}\right) \leq C_1 t^{-\epsilon}.$$

- ✓ Pelo Lema de oscilação,

$$\sup_{B_{1/2}} \leq C_2 \inf_{B_{1/2}} u,$$

Prova da Desigualdade de Harnack

- ✓ Seja $u \geq 0$ solução $a_{ij}(x)D_{ij}u = 0$ em B_1.
- ✓ Pelo Lema $L^{\varepsilon}_{\text{fraco}}$,

$$\mathcal{L}^n\left(\left\{u > t\inf_{B_1} u\right\}\right) \leq C_1 t^{-\epsilon}.$$

- ✓ Pelo Lema de oscilação,

$$\sup_{B_{1/2}} \leq C_2 \inf_{B_{1/2}} u,$$

Closing

FIM!

Closing

FIM!

Universidade Federal do Ceará
Departamento de Matemática

Eduardo Teixeira

www.mat.ufc.br/∼teixeira
eteixeira@ufc.br

Research partially supported by CNPq