Introdução à teoria de regularidade elíptica: uma abordagem geométrica

Aula 1: Teoria de Schauder

Eduardo V. Teixeira

Universidade Federal do Ceará

III ENAMA
Novembro de 2009, Maringá

O operator Laplaciano

Se $u\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável, o Laplaciano de u, denotado por Δu é definido por:

O operator Laplaciano

Se $u\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável, o Laplaciano de u, denotado por Δu é definido por:

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

Alguns Exemplos

- Equações de Cauchy-Riemann: Uma função complexa $h\colon B_1 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $h(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$, é holomorfa se e somente se

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{and} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

- Problemas de Minimização: Encontrar uma função u que minimiza a energia

$$\int |Du|^2 dx.$$

Alguns Exemplos

- Equações de Cauchy-Riemann: Uma função complexa $h\colon B_1 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $h(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, é holomorfa se e somente se

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{and} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

- Problemas de Minimização: Encontrar uma função u que minimiza a energia

$$\int |Du|^2 dx.$$

De onde as equações elípticas de 2ª ordem aparecem?

- Geometria Diferencial
- Mecânica (dinâmica dos flúidos, elasticidade, etc...)
- Teoria de termodinâmica e eletrostática
- Finanças
- Cáuculo das Variações
- Processamento de imagens
- Controle ótimo e estocástico
- Teoria de Probabilidade
- Problemas de transporte ótimo
- Biologia

De onde as equações elípticas de 2ª ordem aparecem?

- Geometria Diferencial
- Mecânica (dinâmica dos flúidos, elasticidade, etc...)
- Teoria de termodinâmica e eletrostática
- Finanças
- Cáuculo das Variações
- Processamento de imagens
- Controle ótimo e estocástico
- Teoria de Probabilidade
- Problemas de transporte ótimo
- Biologia

De onde as equações elípticas de 2ª ordem aparecem?

- Geometria Diferencial
- Mecânica (dinâmica dos flúidos, elasticidade, etc...)
- Teoria de termodinâmica e eletrostática
- Finanças
- Cáuculo das Variações
- Processamento de imagens
- Controle ótimo e estocástico
- Teoria de Probabilidade
- Problemas de transporte ótimo
- Biologia

De onde as equações elípticas de 2ª ordem aparecem?

- Geometria Diferencial
- Mecânica (dinâmica dos flúidos, elasticidade, etc...)
- Teoria de termodinâmica e eletrostática
- Finanças
- Cáuculo das Variações
- Processamento de imagens
- Controle ótimo e estocástico
- Teoria de Probabilidade
- Problemas de transporte ótimo
- Biologia

De onde as equações elípticas de 2ª ordem aparecem?

- Geometria Diferencial
- Mecânica (dinâmica dos flúidos, elasticidade, etc...)
- Teoria de termodinâmica e eletrostática
- Finanças
- Cáuculo das Variações
- Processamento de imagens
- Controle ótimo e estocástico
- Teoria de Probabilidade
- Problemas de transporte ótimo
- Biologia

De onde as equações elípticas de 2ª ordem aparecem?

- Geometria Diferencial
- Mecânica (dinâmica dos flúidos, elasticidade, etc...)
- Teoria de termodinâmica e eletrostática
- Finanças
- Cáuculo das Variações
- Processamento de imagens
- Controle ótimo e estocástico
- Teoria de Probabilidade
- Problemas de transporte ótimo
- Biologia

De onde as equações elípticas de 2^a ordem aparecem?

- Geometria Diferencial
- Mecânica (dinâmica dos flúidos, elasticidade, etc...)
- Teoria de termodinâmica e eletrostática
- Finanças
- Cáuculo das Variações
- Processamento de imagens
- Controle ótimo e estocástico
- Teoria de Probabilidade
- Problemas de transporte ótimo
- Biologia

De onde as equações elípticas de 2ª ordem aparecem?

- Geometria Diferencial
- Mecânica (dinâmica dos flúidos, elasticidade, etc...)
- Teoria de termodinâmica e eletrostática
- Finanças
- Cáuculo das Variações
- Processamento de imagens
- Controle ótimo e estocástico
- Teoria de Probabilidade
- Problemas de transporte ótimo
- Biologia

De onde as equações elípticas de 2ª ordem aparecem?

- Geometria Diferencial
- Mecânica (dinâmica dos flúidos, elasticidade, etc...)
- Teoria de termodinâmica e eletrostática
- Finanças
- Cáuculo das Variações
- Processamento de imagens
- Controle ótimo e estocástico
- Teoria de Probabilidade
- Problemas de transporte ótimo
- Biologia

De onde as equações elípticas de 2ª ordem aparecem?

- Geometria Diferencial
- Mecânica (dinâmica dos flúidos, elasticidade, etc...)
- Teoria de termodinâmica e eletrostática
- Finanças
- Cáuculo das Variações
- Processamento de imagens
- Controle ótimo e estocástico
- Teoria de Probabilidade
- Problemas de transporte ótimo
- Biologia

Questões Típicas

1. Existência de Soluções
2. Estabilidade (unicidade)
3. Propriedades qualitativas e geométricas de soluções
4. Regularidade (suavidade) de soluções

Questões Típicas

1. Existência de Soluções
2. Estabilidade (unicidade)
3. Propriedades qualitativas e geométricas de soluções
4. Regularidade (suavidade) de soluções

Questões Típicas

1. Existência de Soluções
2. Estabilidade (unicidade)
3. Propriedades qualitativas e geométricas de soluções
4. Regularidade (suavidade) de soluções

Questões Típicas

1. Existência de Soluções
2. Estabilidade (unicidade)
3. Propriedades qualitativas e geométricas de soluções
4. Regularidade (suavidade) de soluções

Questões Típicas

1. Existência de Soluções
2. Estabilidade (unicidade)
3. Propriedades qualitativas e geométricas de soluções
4. Regularidade (suavidade) de soluções

Existência $\times$ Regularidade

- Teoria de Existência são em geral obtidos por abordagens variacionais ou por interpretações probabilisticas.
  - Considerações de Energia: Soluções em espaços de diferenciabilidade fraca.
  - Método de Perron: Soluções contínuas ou semi-contínuas.
- Teoria de regulariddade permite soluções clássicas.

Existência $\times$ Regularidade

- Teoria de Existência são em geral obtidos por abordagens variacionais ou por interpretações probabilisticas.
  - Considerações de Energia: Soluções em espaços de diferenciabilidade fraca.
  - Método de Perron: Soluções contínuas ou semi-contínuas.
- Teoria de regulariddade permite soluções clássicas.

Existência $\times$ Regularidade

- Teoria de Existência são em geral obtidos por abordagens variacionais ou por interpretações probabilisticas.
    - Considerações de Energia: Soluções em espaços de diferenciabilidade fraca.
    - Método de Perron: Soluções contínuas ou semi-contínuas.
- Teoria de regulariddade permite soluções clássicas.

Existência $\times$ Regularidade

- Teoria de Existência são em geral obtidos por abordagens variacionais ou por interpretações probabilisticas.
  - Considerações de Energia: Soluções em espaços de diferenciabilidade fraca.
  - Método de Perron: Soluções contínuas ou semi-contínuas.

- Teoria de regulariddade permite soluções clássicas.

Equações Elípticas e Curvatura

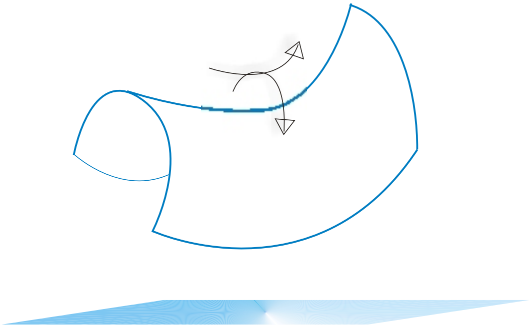
Interpretação Geométrica de Elipticidade

Geométricamente, uma equação diferencial de 2^{nd} ordem é Elíptica se esta prescreve um balanço sobre quanto uma solução curva-se em cada direção.

Equações Elípticas e Curvatura

Interpretação Geométrica de Elipticidade

Geométricamente, uma equação diferencial de 2nd ordem é Elíptica se esta prescreve um balanço sobre quanto uma solução curva-se em cada direção.



Diferente precisões

- Bastante Preciso:
- Bastante Impreciso:

Diferente precisões

- Bastante Preciso: Média da torção é zero.
- Bastante Impreciso:

Diferente precisões

- Bastante Preciso: Média da torção é zero.
  ✓ Equação de Laplace

$$\Delta u = 0.$$

- Bastante Impreciso:

Diferente precisões

- Bastante Preciso: Média da torção é zero.
  ✓ Equação de Laplace

$$\Delta u = 0.$$

- Bastante Impreciso: A curvatura em uma direção não pode exceder 10 vezes a curvatura na outra direção.

Diferente precisões

- Bastante Preciso: Média da torção é zero.
  ✓ Equação de Laplace

$$\Delta u = 0.$$

- Bastante Impreciso: A curvatura em uma direção não pode exceder 10 vezes a curvatura na outra direção.
  ✓ Operadores com coeficientes mensuráveis

$$a_{ij}(X) D_{ij} u = 0$$

O fenômeno da regularidade elíptica

Pergunta

Por que soluções de Equações Elípticas são suaves?

1. Difusão:
2. Considerações de Energia:
3. Princípio de Comparação:

O fenômeno da regularidade elíptica

Pergunta

Por que soluções de $\Delta u = 0$ são suaves?

1. Difusão:
2. Considerações de Energia:
3. Princípio de Comparação:

O fenômeno da regularidade elíptica

Pergunta

Por que soluções de $\Delta u = 0$ são suaves?

1. Difusão:
2. Considerações de Energia:
3. Princípio de Comparação:

O fenômeno da regularidade elíptica

Pergunta

Por que soluções de $\Delta u = 0$ são suaves?

1. Difusão:
$$\mathcal{F}(\Delta u) = -|\xi|^2 \hat{u}.$$
2. Considerações de Energia:
3. Princípio de Comparação:

O fenômeno da regularidade elíptica

Pergunta

Por que soluções de $\Delta u = 0$ são suaves?

1. Difusão:
$$\mathcal{F}(\Delta u) = -|\xi|^2 \hat{u}.$$
2. Considerações de Energia:
3. Princípio de Comparação:

O fenômeno da regularidade elíptica

Pergunta

Por que soluções de $\Delta u = 0$ são suaves?

1. Difusão:
$$\mathcal{F}(\Delta u) = -|\xi|^2 \hat{u}.$$
2. Considerações de Energia:
$$u \text{ minimiza } E(v) = \int |Dv(X)|^2 dX.$$
3. Princípio de Comparação:

O fenômeno da regularidade elíptica

Pergunta

Por que soluções de $\Delta u = 0$ são suaves?

1. Difusão:
$$\mathcal{F}(\Delta u) = -|\xi|^2 \hat{u}.$$
2. Considerações de Energia:
$$u \text{ minimiza } E(v) = \int |Dv(X)|^2 dX.$$
3. Princípio de Comparação:

O fenômeno da regularidade elíptica

Pergunta

Por que soluções de $\Delta u = 0$ são suaves?

1. Difusão:
$$\mathcal{F}(\Delta u) = -|\xi|^2 \hat{u}.$$
2. Considerações de Energia:
$$u \text{ minimiza } E(v) = \int |Dv(X)|^2 dX.$$
3. Princípio de Comparação:
$$\mathrm{Tr}(D^2 u) \text{ é monótono em } D^2 u.$$

O fenômeno da regularidade elíptica

Pergunta

Por que soluções de $\Delta u = 0$ são suaves?

1. Difusão:

$$\mathcal{F}(\Delta u) = -|\xi|^2 \hat{u}.$$

2. Considerações de Energia:

$$u \text{ minimiza } E(v) = \int |Dv(X)|^2 dX. \text{ (Estrutura Variacional)}$$

3. Princípio de Comparação:

$$\mathrm{Tr}(D^2 u) \text{ é monótono em } D^2 u. \text{ (Estrutura Não-Variacional)}$$

Tipo de Resultados de Regularidade Elíptica

Consideramos operadores da forma

$$Lu = a_{ij}(X)D_{ij}u = f \quad \text{ou} \quad Lu = \mathrm{div}(a_{ij}(X)Du) = f$$

1. $a_{ij}(X)$ tem módulo de continuidade apropriado:
   - Argumento de *Scaling*:

     $$\text{“}a_{ij}(\epsilon X) \to \text{Matriz elíptica constante.”}$$

   - Regularidade para u pode ser derivado via a teoria correspondente para a equação de Poisson $\Delta u = f$.
2. Nenhuma informação acerca de $a_{ij}(X)$, apenas elipticidade.
   - Invariante por *Scaling*.
   - Exige abordagem diferente.
   - Conveniente para Equações Não-Lineares.

Tipo de Resultados de Regularidade Elíptica

Consideramos operadores da forma

$$Lu = a_{ij}(X)D_{ij}u = f \quad \text{ou} \quad Lu = \mathrm{div}(a_{ij}(X)Du) = f$$

1. $a_{ij}(X)$ tem módulo de continuidade apropriado:
   - Argumento de *Scaling*:
     $$\text{“}a_{ij}(\epsilon X) \to \text{Matriz elíptica constante.”}$$
   - Regularidade para u pode ser derivado via a teoria correspondente para a equação de Poisson $\Delta u = f$.
2. Nenhuma informação acerca de $a_{ij}(X)$, apenas elipticidade.
   - Invariante por *Scaling*.
   - Exige abordagem diferente.
   - Conveniente para Equações Não-Lineares.

Tipo de Resultados de Regularidade Elíptica

Consideramos operadores da forma

$$Lu = a_{ij}(X)D_{ij}u = f \quad \text{ou} \quad Lu = \mathrm{div}(a_{ij}(X)Du) = f$$

1. $a_{ij}(X)$ tem módulo de continuidade apropriado:
    - Argumento de *Scaling*:

$$\text{“}a_{ij}(\epsilon X) \to \text{Matriz elíptica constante.''}$$

    - Regularidade para u pode ser derivado via a teoria correspondente para a equação de Poisson $\Delta u = f$.
2. Nenhuma informação acerca de $a_{ij}(X)$, apenas elipticidade.
    - Invariante por *Scaling*.
    - Exige abordagem diferente.
    - Conveniente para Equações Não-Lineares.

Tipo de Resultados de Regularidade Elíptica

Consideramos operadores da forma

$$Lu = a_{ij}(X)D_{ij}u = f \quad \text{ou} \quad Lu = \mathrm{div}(a_{ij}(X)Du) = f$$

1. $a_{ij}(X)$ tem módulo de continuidade apropriado:
   - Argumento de *Scaling*:

     $$\text{“}a_{ij}(\epsilon X) \to \text{Matriz elíptica constante.”}$$

   - Regularidade para u pode ser derivado via a teoria correspondente para a equação de Poisson $\Delta u = f$.
2. Nenhuma informação acerca de $a_{ij}(X)$, apenas elipticidade.
   - Invariante por *Scaling*.
   - Exige abordagem diferente.
   - Conveniente para Equações Não-Lineares.

Tipo de Resultados de Regularidade Elíptica

Consideramos operadores da forma

$$Lu = a_{ij}(X)D_{ij}u = f \quad \text{ou} \quad Lu = \operatorname{div}(a_{ij}(X)Du) = f$$

1. $a_{ij}(X)$ tem módulo de continuidade apropriado:
   - Argumento de *Scaling*:

     $$\text{“}a_{ij}(\epsilon X) \to \text{Matriz elíptica constante.”}$$

   - Regularidade para u pode ser derivado via a teoria correspondente para a equação de Poisson $\Delta u = f$.
2. Nenhuma informação acerca de $a_{ij}(X)$, apenas elipticidade.
   - Invariante por *Scaling*.
   - Exige abordagem diferente.
   - Conveniente para Equações Não-Lineares.

Tipo de Resultados de Regularidade Elíptica

Consideramos operadores da forma

$$Lu = a_{ij}(X)D_{ij}u = f \quad \text{ou} \quad Lu = \mathrm{div}(a_{ij}(X)Du) = f$$

1. $a_{ij}(X)$ tem módulo de continuidade apropriado:
   - Argumento de *Scaling*:

     $$\text{“}a_{ij}(\epsilon X) \to \text{Matriz elíptica constante.”}$$

   - Regularidade para u pode ser derivado via a teoria correspondente para a equação de Poisson $\Delta u = f$.
2. Nenhuma informação acerca de $a_{ij}(X)$, apenas elipticidade.
   - Invariante por *Scaling*.
   - Exige abordagem diferente.
   - Conveniente para Equações Não-Lineares.

Tipo de Resultados de Regularidade Elíptica

Consideramos operadores da forma

$$Lu = a_{ij}(X)D_{ij}u = f \quad \text{ou} \quad Lu = \mathrm{div}(a_{ij}(X)Du) = f$$

1. $a_{ij}(X)$ tem módulo de continuidade apropriado:
   - Argumento de *Scaling*:

     $$\text{“}a_{ij}(\epsilon X) \to \text{Matriz elíptica constante.”}$$

   - Regularidade para u pode ser derivado via a teoria correspondente para a equação de Poisson $\Delta u = f$.
2. Nenhuma informação acerca de $a_{ij}(X)$, apenas elipticidade.
   - Invariante por *Scaling*.
   - Exige abordagem diferente.
   - Conveniente para Equações Não-Lineares.

Tipo de Resultados de Regularidade Elíptica

Consideramos operadores da forma

$$Lu = a_{ij}(X)D_{ij}u = f \quad \text{ou} \quad Lu = \mathrm{div}(a_{ij}(X)Du) = f$$

1. $a_{ij}(X)$ tem módulo de continuidade apropriado:
   - Argumento de *Scaling*:

     $$\text{“}a_{ij}(\epsilon X) \to \text{Matriz elíptica constante.”}$$

   - Regularidade para u pode ser derivado via a teoria correspondente para a equação de Poisson $\Delta u = f$.
2. Nenhuma informação acerca de $a_{ij}(X)$, apenas elipticidade.
   - Invariante por *Scaling*.
   - Exige abordagem diferente.
   - Conveniente para Equações Não-Lineares.

Tipo de Resultados de Regularidade Elíptica

Consideramos operadores da forma

$$Lu = a_{ij}(X)D_{ij}u = f \quad \text{ou} \quad Lu = \mathrm{div}(a_{ij}(X)Du) = f$$

1. $a_{ij}(X)$ tem módulo de continuidade apropriado:
    - Argumento de *Scaling*:

      $$\text{“}a_{ij}(\epsilon X) \rightarrow \text{Matriz elíptica constante.''}$$

    - Regularidade para u pode ser derivado via a teoria correspondente para a equação de Poisson $\Delta u = f$.
2. Nenhuma informação acerca de $a_{ij}(X)$, apenas elipticidade.
    - Invariante por *Scaling*.
    - Exige abordagem diferente.
    - Conveniente para Equações Não-Lineares.

Teoria de Schauder para a equação de Poisson

$$\Delta u = f, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

Objetivo

Derivar regularidade da Hessiana de u, $D^2 u$, a partir da suavidade de seu Laplaciano. Ou seja, examinar se $D^2 u$ é tão regular quanto f.

Theorem (Teoria de Schauder para Equação de Poisson)

Se $f \in C^\alpha$, então $D_{ij} u \in C^\alpha$.

Teoria de Schauder para a equação de Poisson

$$\Delta u = f, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

Objetivo

Derivar regularidade da Hessiana de u, $D^2 u$, a partir da suavidade de seu Laplaciano. Ou seja, examinar se $D^2 u$ é tão regular quanto f.

Theorem (Teoria de Schauder para Equação de Poisson)

Se $f \in C^\alpha$, então $D_{ij} u \in C^\alpha$.

Teoria de Schauder para a equação de Poisson

$$\Delta u = f, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

Objetivo

Derivar regularidade da Hessiana de u, $D^2 u$, a partir da suavidade de seu Laplaciano. Ou seja, examinar se $D^2 u$ é tão regular quanto f.

Theorem (Teoria de Schauder para Equação de Poisson)

Se $f \in C^\alpha$, então $D_{ij} u \in C^\alpha$.

Teoria de Schauder para a equação de Poisson

$$\Delta u = f, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

Objetivo

Derivar regularidade da Hessiana de u, $D^2 u$, a partir da suavidade de seu Laplaciano. Ou seja, examinar se $D^2 u$ é tão regular quanto f.

Theorem (Teoria de Schauder para Equação de Poisson)

Se $f \in C^\alpha$, então $D_{ij} u \in C^\alpha$. Dito de outra forma

$$\sum_{i=1}^{n} D_{ii} u \in C^\alpha \quad \textit{se e somente se} \quad D_{ij} u \in C^\alpha, \quad \forall i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

Peculiaridades do Teorema de Schauder

- É claro que $u \in C^{2,\alpha}$ então $\Delta u \in C^{2,\alpha}$.
- A reciproca ser verdadeira (Teorema de Schauder) é um resultado surpreendente.
- Se f é contínua, não é verdade que $u \in C^2$.

Peculiaridades do Teorema de Schauder

- É claro que $u \in C^{2,\alpha}$ então $\Delta u \in C^{2,\alpha}$.
- A reciproca ser verdadeira (Teorema de Schauder) é um resultado surpreendente.
- Se f é contínua, não é verdade que $u \in C^2$.

Peculiaridades do Teorema de Schauder

- É claro que $u \in C^{2,\alpha}$ então $\Delta u \in C^{2,\alpha}$.
- A reciproca ser verdadeira (Teorema de Schauder) é um resultado surpreendente.
- Se f é contínua, não é verdade que $u \in C^2$.

Potencial Newtoniano

O *Potencial Newtoniano* de uma função f é dado por:

$$N_f(X) := \Gamma * f(X) = \int_\Omega \Gamma(X - Y) f(Y) dY, \tag{1}$$

onde Γ denota a solução fundamental do Laplaciano:

Potencial Newtoniano

O *Potencial Newtoniano* de uma função f é dado por:

$$N_f(X) := \Gamma * f(X) = \int_\Omega \Gamma(X - Y) f(Y) dY, \tag{1}$$

onde Γ denota a solução fundamental do Laplaciano:

$$\Gamma(Z) := \begin{cases} \dfrac{|Z|^{2-n}}{n(2-n)\omega_n}, & n > 2 \\ \dfrac{1}{2\pi} \log |Z|, & n = 2. \end{cases} \tag{2}$$

Estimativas para Γ

$$\Gamma(Z) \sim |Z|^{2-n} \tag{3}$$

Conclusão

Γ e $D\Gamma$ são kernels integráveis, entretanto $D^2\Gamma$ não é integrável (mas é “quase integrável").

Estimativas para Γ

$$\Gamma(Z) \sim |Z|^{2-n}$$

$$D_i\Gamma(Z) = \frac{1}{n\omega_n} Z_i |Z|^{-n} \sim |Z|^{1-n} \tag{3}$$

Conclusão

Γ e $D\Gamma$ são kernels integráveis, entretanto $D^2\Gamma$ não é integrável (mas é “quase integrável").

Estimativas para Γ

$$\begin{aligned} \Gamma(Z) &\sim |Z|^{2-n} \\ D_i\Gamma(Z) = \frac{1}{n\omega_n} Z_i |Z|^{-n} &\sim |Z|^{1-n} \\ D_{ij}\Gamma(Z) = \frac{1}{n\omega_n}\left\{|Z|^2\delta_{ij} - nZ_iZ_j\right\}|Z|^{-n-2} &\sim |Z|^{-n} \end{aligned} \tag{3}$$

Conclusão

Γ e $D\Gamma$ são kernels integráveis, entretanto $D^2\Gamma$ não é integrável (mas é “quase integrável").

Estimativas para Γ

$$
\begin{aligned}
\Gamma(Z) &\sim |Z|^{2-n} \\
D_i\Gamma(Z) = \frac{1}{n\omega_n} Z_i |Z|^{-n} &\sim |Z|^{1-n} \\
D_{ij}\Gamma(Z) = \frac{1}{n\omega_n}\left\{|Z|^2\delta_{ij} - nZ_iZ_j\right\}|Z|^{-n-2} &\sim |Z|^{-n}
\end{aligned} \tag{3}
$$

Conclusão

Γ e $D\Gamma$ são kernels integráveis, entretanto $D^2\Gamma$ não é integrável (mas é “quase integrável").

Entendendo a Sutileza da Teoria

- Integrabilidade de Γ e $D\Gamma$ garante que se $f \in L^\infty(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ então $N_f \in C^1(\mathbb{R}^n)$.
- Da "quase integrabilidade" de $D^2\Gamma$ emerge a rica teoria das integrais singulares.
- Formalmente,

$$D_{ij}N_f(X) \text{``} = \text{''} \int D_{ij}\Gamma(X-Y)f(Y)dY, \tag{4}$$

não está bem definido.
- $D_{ij}\Gamma(Z)|Z|^\alpha$ torna-se integrável para qualquer $\alpha > 0$.

Entendendo a Sutileza da Teoria

- Integrabilidade de Γ e $D\Gamma$ garante que se $f \in L^\infty(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ então $N_f \in C^1(\mathbb{R}^n)$.
- Da “quase integrabilidade" de $D^2\Gamma$ emerge a rica teoria das integrais singulares.
- Formalmente,

$$D_{ij}N_f(X)\text{“}=\text{”}\int D_{ij}\Gamma(X-Y)f(Y)dY, \tag{4}$$

  não está bem definido.
- $D_{ij}\Gamma(Z)|Z|^\alpha$ torna-se integrável para qualquer $\alpha > 0$.

Entendendo a Sutileza da Teoria

- Integrabilidade de Γ e $D\Gamma$ garante que se $f \in L^\infty(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ então $N_f \in C^1(\mathbb{R}^n)$.
- Da "quase integrabilidade" de $D^2\Gamma$ emerge a rica teoria das integrais singulares.
- Formalmente,

$$D_{ij}N_f(X) \text{``}=\text{''} \int D_{ij}\Gamma(X-Y)f(Y)dY, \tag{4}$$

não está bem definido.
- $D_{ij}\Gamma(Z)|Z|^\alpha$ torna-se integrável para qualquer $\alpha > 0$.

Entendendo a Sutileza da Teoria

- Integrabilidade de Γ e $D\Gamma$ garante que se $f \in L^\infty(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ então $N_f \in C^1(\mathbb{R}^n)$.
- Da “quase integrabilidade" de $D^2\Gamma$ emerge a rica teoria das integrais singulares.
- Formalmente,

$$D_{ij}N_f(X) \text{``} = \text{''} \int D_{ij}\Gamma(X-Y)f(Y)dY, \tag{4}$$

não está bem definido.
- $D_{ij}\Gamma(Z)|Z|^\alpha$ torna-se integrável para qualquer $\alpha > 0$.

Estabelencendo o Teorema de Schauder

$$\int D_{ij}\Gamma(X-Y)f(Y)dY$$

Estabelencendo o Teorema de Schauder

$$
\begin{aligned}
\int D_{ij}\Gamma(X-Y)f(Y)dY &= \int_\Omega D_{ij}\Gamma(X-Y)\left[f(Y)-f(X)\right]dY \\
&+ \int_\Omega f(X)D_{ij}\Gamma(X-Y)dY
\end{aligned}
$$

Estabelencendo o Teorema de Schauder

$$
\begin{aligned}
\int D_{ij}\Gamma(X-Y)f(Y)dY &= \int_\Omega D_{ij}\Gamma(X-Y)\left[f(Y)-f(X)\right]dY \\
&+ \int_\Omega f(X)D_{ij}\Gamma(X-Y)dY \\
&= \int_\Omega D_{ij}\Gamma(X-Y)\left[f(Y)-f(X)\right]dY \\
&+ f(X)\int_{\partial\Omega} D_i\Gamma(X-Y)\nu_j(Y)d\mathcal{H}^{n-1}(Y)
\end{aligned}
$$

Estabelencendo o Teorema de Schauder

$$\begin{aligned}\int D_{ij}\Gamma(X-Y)f(Y)dY &= \int_\Omega D_{ij}\Gamma(X-Y)\left[f(Y)-f(X)\right]dY\\ &+ f(X)\int_{\partial\Omega} D_i\Gamma(X-Y)\nu_j(Y)d\mathcal{H}^{n-1}(Y)\end{aligned}$$

Verifica-se imediatamente que o termo

$$f(X)\int_{\partial\Omega} D_i\Gamma(X-Y)\nu_j(Y)d\mathcal{H}^{n-1}(Y)$$

está bem definido.

Estabelencendo o Teorema de Schauder

$$\begin{aligned}\int D_{ij}\Gamma(X-Y)f(Y)dY &= \int_{\Omega} D_{ij}\Gamma(X-Y)\left[f(Y)-f(X)\right]dY \\ &+ f(X)\int_{\partial\Omega} D_i\Gamma(X-Y)\nu_j(Y)d\mathcal{H}^{n-1}(Y)\end{aligned}$$

Verifica-se imediatamente que o termo

$$f(X)\int_{\partial\Omega} D_i\Gamma(X-Y)\nu_j(Y)d\mathcal{H}^{n-1}(Y)$$

está bem definido. Se $f \in C^{\alpha}$,

$$\left|D_{ij}\Gamma(X-Y)\left[f(Y)-f(X)\right]\right| \lesssim |Z|^{-n+\alpha},$$

e portanto integrável.

Estabelencendo o Teorema de Schauder

$$\begin{aligned}\int D_{ij}\Gamma(X-Y)f(Y)dY &= \int_{\Omega} D_{ij}\Gamma(X-Y)\left[f(Y)-f(X)\right]dY \\ &+ f(X)\int_{\partial\Omega} D_i\Gamma(X-Y)\nu_j(Y)d\mathcal{H}^{n-1}(Y)\end{aligned}$$

Assim, se $f \in C^{\alpha}$, a expressão

$$\begin{aligned}\phi_{ij}(X) &:= \int_{\Omega} D_{ij}\Gamma(X-Y)\left[f(Y)-f(X)\right]dY \\ &+ f(X)\int_{\partial\Omega} D_i\Gamma(X-Y)\nu_j(Y)d\mathcal{H}^{n-1}(Y),\end{aligned}$$

está bem definida.

Estabelencendo o Teorema de Schauder

$$\begin{aligned}\int D_{ij}\Gamma(X-Y)f(Y)dY &= \int_\Omega D_{ij}\Gamma(X-Y)\left[f(Y)-f(X)\right]dY \\ &+ f(X)\int_{\partial\Omega} D_i\Gamma(X-Y)\nu_j(Y)d\mathcal{H}^{n-1}(Y)\end{aligned}$$

Assim, se $f \in C^\alpha$, a expressão

$$\begin{aligned}\phi_{ij}(X) &:= \int_\Omega D_{ij}\Gamma(X-Y)\left[f(Y)-f(X)\right]dY \\ &+ f(X)\int_{\partial\Omega} D_i\Gamma(X-Y)\nu_j(Y)d\mathcal{H}^{n-1}(Y),\end{aligned}$$

está bem definida. Não é difícil verificar que $D_{ij}N_f = \phi_{ij}$ e que ϕ_{ij} é localmente α-Hölder contínua.

Estabelencendo o Teorema de Schauder

$$\int D_{ij}\Gamma(X-Y)f(Y)dY = \int_\Omega D_{ij}\Gamma(X-Y)\left[f(Y)-f(X)\right]dY + f(X)\int_{\partial\Omega} D_i\Gamma(X-Y)\nu_j(Y)d\mathcal{H}^{n-1}(Y)$$

Assim, se $f \in C^\alpha$, a expressão

$$\phi_{ij}(X) := \int_\Omega D_{ij}\Gamma(X-Y)\left[f(Y)-f(X)\right]dY + f(X)\int_{\partial\Omega} D_i\Gamma(X-Y)\nu_j(Y)d\mathcal{H}^{n-1}(Y),$$

está bem definida. Não é difícil verificar que $D_{ij}N_f = \phi_{ij}$ e que ϕ_{ij} é localmente α-Hölder contínua. Ademais

$$[\phi_{ij}]_{C^\alpha}(\Omega') \leq C(n,\alpha,\Omega')[f]_{C^\alpha(\Omega)} \quad \Box$$

Estimativas de Schauder: uma nova visão da teoria

Nosso Objetivo

Desenvolder uma nova solução (geométrica) à teoria de Schauder, versátil e poderosa o suficiente para contemplar equações não-lineares com coeficientes variáveis.

Estimativas de Schauder: uma nova visão da teoria

Nosso Objetivo

Desenvolder uma nova solução (geométrica) à teoria de Schauder, versátil e poderosa o suficiente para contemplar equações não-lineares com coeficientes variáveis.

Estratégia

Mostraremos que se $\Delta u = f$em B_1 e f é α-Hölder contínua na origem, então existe um polinômio quadrático $P(X) = X^t AX + b \cdot X + c$, com $|A| + |b| + |c|$ controlado por $\|u\|_{L^\infty(B_1)} + [f]_{C^\alpha(0)}$, tal que

$$|u(X) - P(X)| \leq C|X|^{2+\alpha}.$$

Ou seja u é $C^{2,\alpha}$ na origem.

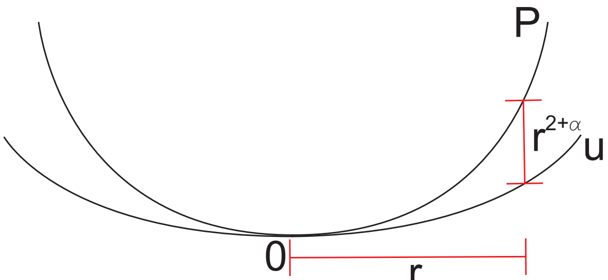
Estimativas de Schauder: uma nova visão da teoria

Estratégia

existe um polinômio quadrático $P(X) = X^t AX + b \cdot X + c$, com $|A| + |b| + |c|$ controlado por $\|u\|_{L^\infty(B_1)} + [f]_{C^\alpha(0)}$, tal que

$$|u(X) - P(X)| \leq C|X|^{2+\alpha}.$$

Ou seja u é $C^{2,\alpha}$ na origem.



Funções harmônicas próximas de soluções da Equação de Poisson

Conseguência do Princípio do Máximo

Se

$$\Delta u = f, \quad \text{em } B_1.$$

Então,

$$\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq \|u\|_{L^\infty(\partial B_1)} + \frac{1}{2n}\|f\|_{L^\infty(B_1)}.$$

Funções harmônicas próximas de soluções da Equação de Poisson

Conseguência do Princípio do Máximo

Se

$$\Delta u = f, \quad \text{em } B_1.$$

Então,

$$\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq \|u\|_{L^\infty(\partial B_1)} + \frac{1}{2n}\|f\|_{L^\infty(B_1)}.$$

Assim, se h é a função harmônica em B_1 com valores u na fronteira, temos

$$\|u - h\|_{L^\infty(B_1)} \leq \frac{1}{2n}\|f\|_{L^\infty(B_1)}$$

Lema Chave de Iteração

Lemma

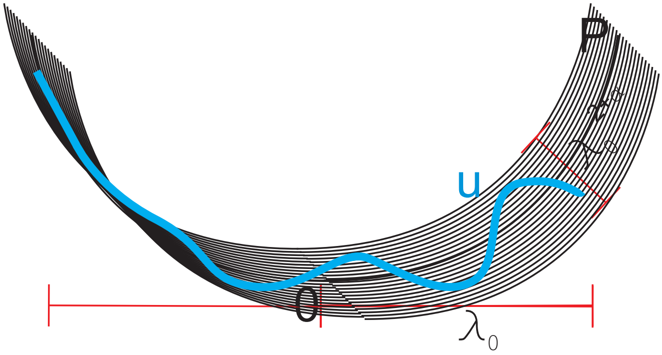
Fixado $0 < \alpha < 1$, *existem constantes* $C_0 > 0$, $0 < \lambda_0 < 1$ *e* $0 < \epsilon_0 < 1$ *tais que para quaisquer* u *e* f *com* $\Delta u = f$ *em* B_1, $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1$ *e* $\|f\|_{L^\infty(B_1)} \leq \epsilon_0$, *é possível encontrar um polinômio quadrático harmônico* $p(X) = X^t AX + b \cdot X + c$ *tal que*

$$|u(X) - p(X)| \leq \lambda_0^{2+\alpha}, \quad \text{para qualquer } |X| \leq \lambda_0.$$

Ademais,

$$|A| + |b| + |c| \leq C_0.$$

Lema Chave - Passo 1



Prova do Lema Chave

- Seja h harmônica tal que $\|u - h\|_\infty \leq \epsilon_0$.
- Defina $p(X) := \frac{1}{2}X^t D^2 h(0)X + Dh(0) \cdot X + h(0)$.
- $|h(X) - P(X)| \leq C_0|X|^3$ devido ao controle em $D^3 h(0)$.
- Desigualdade Triangular fornece

$$\begin{aligned} |u(X) - p(X)| &\leq \epsilon_0 + C_0|X|^3 \\ &\leq \epsilon_0 + \frac{1}{2}\lambda_0^{2+\alpha}, \quad \text{para } |X| \leq \lambda_0 \\ &\leq \lambda_0^{2+\alpha}. \end{aligned}$$

se $\lambda_0 < 1$ e ϵ_0 forem escolhidos adequadamente.

Prova do Lema Chave

- Seja h harmônica tal que $\|u - h\|_\infty \leq \epsilon_0$.
- Defina $p(X) := \frac{1}{2} X^t D^2 h(0) X + Dh(0) \cdot X + h(0)$.
- $|h(X) - P(X)| \leq C_0 |X|^3$ devido ao controle em $D^3 h(0)$.
- Desigualdade Triangular fornece

$$\begin{aligned} |u(X) - p(X)| &\leq \epsilon_0 + C_0|X|^3 \\ &\leq \epsilon_0 + \frac{1}{2}\lambda_0^{2+\alpha}, \quad \text{para } |X| \leq \lambda_0 \\ &\leq \lambda_0^{2+\alpha}. \end{aligned}$$

se $\lambda_0 < 1$ e ϵ_0 forem escolhidos adequadamente.

Prova do Lema Chave

- Seja h harmônica tal que $\|u - h\|_\infty \leq \epsilon_0$.
- Defina $p(X) := \frac{1}{2}X^t D^2 h(0) X + Dh(0) \cdot X + h(0)$.
  Coeficientes universalmente controlados por estimativas elípticas.
- $|h(X) - P(X)| \leq C_0 |X|^3$ devido ao controle em $D^3 h(0)$.
- Desigualdade Triangular fornece

$$\begin{aligned} |u(X) - p(X)| &\leq \epsilon_0 + C_0 |X|^3 \\ &\leq \epsilon_0 + \frac{1}{2}\lambda_0^{2+\alpha}, \quad \text{para } |X| \leq \lambda_0 \\ &\leq \lambda_0^{2+\alpha}. \end{aligned}$$

  se $\lambda_0 < 1$ e ϵ_0 forem escolhidos adequadamente.

Prova do Lema Chave

- Seja h harmônica tal que $\|u - h\|_\infty \leq \epsilon_0$.
- Defina $p(X) := \frac{1}{2} X^t D^2 h(0) X + Dh(0) \cdot X + h(0)$. Coeficientes universalmente controlados por estimativas elípticas.
- $|h(X) - P(X)| \leq C_0 |X|^3$ devido ao controle em $D^3 h(0)$.
- Desigualdade Triangular fornece

$$\begin{aligned} |u(X) - p(X)| &\leq \epsilon_0 + C_0|X|^3 \\ &\leq \epsilon_0 + \frac{1}{2}\lambda_0^{2+\alpha}, \quad \text{para } |X| \leq \lambda_0 \\ &\leq \lambda_0^{2+\alpha}. \end{aligned}$$

se $\lambda_0 < 1$ e ϵ_0 forem escolhidos adequadamente.

Prova do Lema Chave

- Seja h harmônica tal que $\|u - h\|_\infty \leq \epsilon_0$.
- Defina $p(X) := \frac{1}{2} X^t D^2 h(0) X + Dh(0) \cdot X + h(0)$. Coeficientes universalmente controlados por estimativas elípticas.
- $|h(X) - P(X)| \leq C_0 |X|^3$ devido ao controle em $D^3 h(0)$.
- Desigualdade Triangular fornece

$$
\begin{aligned}
|u(X) - p(X)| &\leq \epsilon_0 + C_0 |X|^3 \\
&\leq \epsilon_0 + \frac{1}{2} \lambda_0^{2+\alpha}, \quad \text{para } |X| \leq \lambda_0 \\
&\leq \lambda_0^{2+\alpha}.
\end{aligned}
$$

se $\lambda_0 < 1$ e ϵ_0 forem escolhidos adequadamente.

Versão pontual do Teorema de Schauder

Theorem

Considere a equação de Poisson $\Delta u = f$ em B_1. Suponhamos que para $0 < \alpha < 1$, f seja α-Hölder contínua na origem. Ou seja,

$$[f]_{C^\alpha(0)} := \sup_{X \in B_1} \frac{|f(X) - f(0)|}{|X|^\alpha} < +\infty.$$

Então u é $C^{2,\alpha}$ na origem.

Versão pontual do Teorema de Schauder

Theorem

Considere a equação de Poisson $\Delta u = f$ em B_1. Suponhamos que para $0 < \alpha < 1$, f seja α-Hölder contínua na origem. Então u é $C^{2,\alpha}$ na origem. Mais presisamente, existe um polinômio quadrático $p(X) = X^t AX + b \cdot X + c$ tal que $\Delta p = f(0)$ e

$$|u(X) - p(X)| \leq C_0 \cdot \left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + [f]_{C^\alpha(0)} \right) |X|^{2+\alpha},$$

para uma constante C_0 que depende apenas da dimensão e do expoente α.

Versão pontual do Teorema de Schauder

Theorem

Considere a equação de Poisson $\Delta u = f$ *em* B_1. *Suponhamos que para* $0 < \alpha < 1$, f *seja* α*-Hölder contínua na origem. Então* u *é* $C^{2,\alpha}$ *na origem. Mais presisamente, existe um polinômio quadrático* $p(X) = X^t AX + b \cdot X + c$ *tal que* $\Delta p = f(0)$ *e*

$$|u(X) - p(X)| \leq C_0 \cdot \left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + [f]_{C^\alpha(0)}\right) |X|^{2+\alpha},$$

para uma constante C_0 *que depende apenas da dimensão e do expoente* α. *Ademais o seguinte controle dos coeficientes é garantido:*

$$|A| + |b| + |c| \leq C_0 \left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + f(0) + [f]_{C^\alpha(0)}\right).$$

Prova do Teorema de Schauder

Passo 0 Podemos assumir $f(0) = 0$, $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1$ e $[f]_{C^\alpha(0)} \leq \epsilon_0$.

Passo 1 Existem polinômios harmônicos $p_k(X) = X^t A_k X + b_k \cdot X + c_k$ tais que

$$|u(X) - p_k(X)| \leq \lambda_0^{(2+\alpha)k}, \quad \text{para } |X| \leq \lambda_0^k. \tag{5}$$

Ademais, as seguintes estimativas dos coeficientes são satisfeita:

$$\begin{cases} |A_k - A_{k-1}| & \leq & C_0 \lambda_0^{\alpha(k-1)}, \\ |b_k - b_{k-1}| & \leq & C_0 \lambda_0^{(1+\alpha)(k-1)}, \\ |c_k - c_{k-1}| & \leq & C_0 \lambda_0^{(2+\alpha)(k-1)}. \end{cases} \tag{6}$$

Prova do Teorema de Schauder

Passo 0 Podemos assumir $f(0) = 0$, $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1$ e $[f]_{C^\alpha(0)} \leq \epsilon_0$. De fato, se $v(X) = \delta u(rX)$, $X \in B_1$, observamos

$$\|v\|_{L^\infty(B_1)} \leq \delta \|u\|_{L^\infty(B_1)} \quad \text{e} \quad \Delta v = \delta r^2 f(rX).$$

Passo 1 Existem polinômios harmônicos $p_k(X) = X^t A_k X + b_k \cdot X + c_k$ tais que

$$|u(X) - p_k(X)| \leq \lambda_0^{(2+\alpha)k}, \quad \text{para } |X| \leq \lambda_0^k. \tag{5}$$

Ademais, as seguintes estimativas dos coeficientes são satisfeita:

$$\begin{cases} |A_k - A_{k-1}| & \leq & C_0 \lambda_0^{\alpha(k-1)}, \\ |b_k - b_{k-1}| & \leq & C_0 \lambda_0^{(1+\alpha)(k-1)}, \\ |c_k - c_{k-1}| & \leq & C_0 \lambda_0^{(2+\alpha)(k-1)}. \end{cases} \tag{6}$$

Prova do Teorema de Schauder

Passo 0 Podemos assumir $f(0) = 0$, $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1$ e $[f]_{C^\alpha(0)} \leq \epsilon_0$.

Passo 1 Existem polinômios harmônicos
$p_k \quad k$

Verificação do Passo 1: Argumento de Indução

- Caso $i = 1$. Exatamente o Lema Chave
- Assumindo $i = k$, a função

$$v(X) := \frac{(u - p_k)(\lambda_0^k X)}{\lambda^{(2+\alpha)k}}, \quad \text{em } B_1,$$

  está nas hipóteses do Lema Chave.
- Assim, exite polinômio P tal que

$$|v(X) - P(X)| \leq \lambda_0^{2+\alpha}, \quad \text{para } |X| \leq \lambda_0.$$

- Reescrevendo a conclusão acima, obtemos

$$|u(X) - p_k(X) - \lambda_0^{(2+\alpha)} P\left(\lambda_0^{-k} X\right)| \leq \lambda_0^{(k+1)(2+\alpha)}.$$

- Assim o $(k+1)$-ésimo passo de indução está verificado se definirmos

$$p_{k+1}(X) := p_k(X) + \lambda_0^{(2+\alpha)} P\left(\lambda_0^{-k} X\right).$$

Verificação do Passo 1: Argumento de Indução

- Caso $i = 1$. Exatamente o Lema Chave
- Assumindo $i = k$, a função

$$v(X) := \frac{(u - p_k)(\lambda_0^k X)}{\lambda^{(2+\alpha)k}}, \quad \text{em } B_1,$$

está nas hipóteses do Lema Chave.

- Assim, exite polinômio P tal que

$$|v(X) - P(X)| \leq \lambda_0^{2+\alpha}, \quad \text{para } |X| \leq \lambda_0.$$

- Reescrevendo a conclusão acima, obtemos

$$|u(X) - p_k(X) - \lambda_0^{(2+\alpha)} P\left(\lambda_0^{-k} X\right)| \leq \lambda_0^{(k+1)(2+\alpha)}.$$

- Assim o $(k+1)$-ésimo passo de indução está verificado se definirmos

$$p_{k+1}(X) := p_k(X) + \lambda_0^{(2+\alpha)} P\left(\lambda_0^{-k} X\right).$$

Verificação do Passo 1: Argumento de Indução

- Caso $i = 1$. Exatamente o Lema Chave
- Assumindo $i = k$, a função

$$v(X) := \frac{(u - p_k)(\lambda_0^k X)}{\lambda^{(2+\alpha)k}}, \quad \text{em } B_1,$$

está nas hipóteses do Lema Chave.

- Assim, exite polinômio P tal que

$$|v(X) - P(X)| \leq \lambda_0^{2+\alpha}, \quad \text{para } |X| \leq \lambda_0.$$

- Reescrevendo a conclusão acima, obtemos

$$\left| u(X) - p_k(X) - \lambda_0^{(2+\alpha)} P\left(\lambda_0^{-k} X\right) \right| \leq \lambda_0^{(k+1)(2+\alpha)}.$$

- Assim o $(k+1)$-ésimo passo de indução está verificado se definirmos

$$p_{k+1}(X) := p_k(X) + \lambda_0^{(2+\alpha)} P\left(\lambda_0^{-k} X\right).$$

Verificação do Passo 1: Argumento de Indução

- Caso $i = 1$. Exatamente o Lema Chave
- Assumindo $i = k$, a função

$$v(X) := \frac{(u - p_k)(\lambda_0^k X)}{\lambda^{(2+\alpha)k}}, \quad \text{em } B_1,$$

  está nas hipóteses do Lema Chave.
- Assim, exite polinômio P tal que

$$|v(X) - P(X)| \leq \lambda_0^{2+\alpha}, \quad \text{para } |X| \leq \lambda_0.$$

- Reescrevendo a conclusão acima, obtemos

$$|u(X) - p_k(X) - \lambda_0^{(2+\alpha)} P\left(\lambda_0^{-k} X\right)| \leq \lambda_0^{(k+1)(2+\alpha)}.$$

- Assim o $(k+1)$-ésimo passo de indução está verificado se definirmos

$$p_{k+1}(X) := p_k(X) + \lambda_0^{(2+\alpha)} P\left(\lambda_0^{-k} X\right).$$

Verificação do Passo 1: Argumento de Indução

- Caso $i = 1$. Exatamente o Lema Chave
- Assumindo $i = k$, a função

$$v(X) := \frac{(u - p_k)(\lambda_0^k X)}{\lambda^{(2+\alpha)k}}, \quad \text{em } B_1,$$

  está nas hipóteses do Lema Chave.
- Assim, exite polinômio P tal que

$$|v(X) - P(X)| \leq \lambda_0^{2+\alpha}, \quad \text{para } |X| \leq \lambda_0.$$

- Reescrevendo a conclusão acima, obtemos

$$|u(X) - p_k(X) - \lambda_0^{(2+\alpha)} P\left(\lambda_0^{-k} X\right)| \leq \lambda_0^{(k+1)(2+\alpha)}.$$

- Assim o $(k+1)$-ésimo passo de indução está verificado se definirmos

$$p_{k+1}(X) := p_k(X) + \lambda_0^{(2+\alpha)} P\left(\lambda_0^{-k} X\right).$$

Prova do Teorema de Schauder - Conclusão

Passo 2 Existe polinômio limite

$$P_k(X) \longrightarrow p_\infty(X) = X^t A_\infty X + b_\infty X + c_\infty.$$

Segue-se do controle dos coeficientes que

$$|p_k - p_\infty| \leq C_1 \left(\lambda_0^{\alpha k} |X|^2 + \lambda_0^{(1+\alpha)k} |X| + \lambda_0^{(2+\alpha)k} \right),$$

para $C_1 = C_0(\lambda_0 - \lambda_0^{(1+\alpha)})^{-1}$.

Passo 3 Finalmente, dado $X \in B_1$, existe k tal que $\lambda_0^{k+1} < |X| \leq \lambda_0^k$. Assim,

$$\begin{aligned} |u(X) - p_\infty(X)| &\leq |u - P_k| + |P_k - P_\infty| \\ &\leq (1 + 3C_1)\lambda_0^{(2+\alpha)k} \\ &\leq \frac{1 + 3C_1}{\lambda_0^{2+\alpha}} |X|^{2+\alpha} \end{aligned}$$

Prova do Teorema de Schauder - Conclusão

Passo 2 Existe polinômio limite

$$P_k(X) \longrightarrow p_\infty(X) = X^t A_\infty X + b_\infty X + c_\infty.$$

Segue-se do controle dos coeficientes que

$$|p_k - p_\infty| \leq C_1 \left(\lambda_0^{\alpha k} |X|^2 + \lambda_0^{(1+\alpha)k} |X| + \lambda_0^{(2+\alpha)k} \right),$$

para $C_1 = C_0(\lambda_0 - \lambda_0^{(1+\alpha)})^{-1}$.

Passo 3 Finalmente, dado $X \in B_1$, existe k tal que $\lambda_0^{k+1} < |X| \leq \lambda_0^k$. Assim,

$$\begin{aligned} |u(X) - p_\infty(X)| &\leq |u - P_k| + |P_k - P_\infty| \\ &\leq (1 + 3C_1)\lambda_0^{(2+\alpha)k} \\ &\leq \frac{1 + 3C_1}{\lambda_0^{2+\alpha}} |X|^{2+\alpha} \end{aligned}$$

Prova do Teorema de Schauder - Conclusão

Passo 2 Existe polinômio limite

$$P_k(X) \longrightarrow p_\infty(X) = X^t A_\infty X + b_\infty X + c_\infty.$$

Segue-se do controle dos coeficientes que

$$|p_k - p_\infty| \leq C_1 \left(\lambda_0^{\alpha k} |X|^2 + \lambda_0^{(1+\alpha)k} |X| + \lambda_0^{(2+\alpha)k} \right),$$

para $C_1 = C_0(\lambda_0 - \lambda_0^{(1+\alpha)})^{-1}$.

Passo 3 Finalmente, dado $X \in B_1$, existe k tal que $\lambda_0^{k+1} < |X| \leq \lambda_0^k$. Assim,

$$\begin{aligned} |u(X) - p_\infty(X)| &\leq |u - P_k| + |P_k - P_\infty| \\ &\leq (1 + 3C_1)\lambda_0^{(2+\alpha)k} \\ &\leq \frac{1 + 3C_1}{\lambda_0^{2+\alpha}} |X|^{2+\alpha} \end{aligned}$$

Equações com coeficientes C^α - Parte I

Theorem (Teoria de Schauder não-variacional)

Seja $a_{ij}(X)$ uniformemente elíptica. Assumimos que $a_{ij} \in C^\alpha$ e

$$a_{ij}(x)D_{ij}u = f \in C^\alpha$$

Então $u \in C^{2,\alpha}$.

Equações com coeficientes C^α - Parte II

Theorem (Teoria de Schauder Variacional)

Seja $a_{ij}(X)$ uniformemente elíptica. Assumimos que $a_{ij} \in C^\alpha$ e

$$\operatorname{div}\left(a_{ij}(X)Du\right) = f \in C^\alpha$$

Então $u \in C^{1,\alpha}$.

Teoria $C^{1,\alpha}$ para problemas elípticos com estrutura divergente

Objetivo

Iremos desenvolder a teoria de regularidade $C^{1,\alpha}$ para soluções fracas de problemas da forma divergente

$$\operatorname{div}\left(a_{ij}(X)Du\right) = f, \quad \text{em } B_1, \tag{7}$$

sob condições de elipticidade e α-Hölder continuidade de $a_{ij}(X)$ e $f(X)$.

Revisando a técnica

1. Achar uma função harmônica “próxima" da função em questão.
2. Estabelecer um Lema Chave que representa uma versão discreta do Teorema.
3. Iterar o Lema Chave para concluir, no limite, a regularidade pontual desejada.

Revisando a técnica

1. Achar uma função harmônica “próxima" da função em questão.
2. Estabelecer um Lema Chave que representa uma versão discreta do Teorema.
3. Iterar o Lema Chave para concluir, no limite, a regularidade pontual desejada.

Revisando a técnica

1. Achar uma função harmônica “próxima" da função em questão.
2. Estabelecer um Lema Chave que representa uma versão discreta do Teorema.
3. Iterar o Lema Chave para concluir, no limite, a regularidade pontual desejada.

Método de compacidade: estabelecendo o 1o passo do programa

Lemma

Fixados $0 < \lambda \leq \Lambda$ *e dado* $\delta > 0$, *existe um* $\varepsilon > 0$ *tal que para qualquer solução da equação* (7) *com*

$$\|a_{ij}(X) - \mathrm{Id}\|_{L^2(B_1)} + \|f\|_{L^2(B_1)} \leq \varepsilon,$$

existe uma função harmônica h *em* $B_{1/2}$ *tal que*

$$\|u - h\|_{L^2(B_{1/2})} \leq \delta.$$

Funções Hölder contínuas no sentido L^2

O Lema anterior fornece uma função harmônica próximo de u na métrica do L^2. Com o cronograma a ser seguido em mãos, somos naturalmente levados à seguinte definição.

Funções Hölder contínuas no sentido L^2

O Lema anterior fornece uma função harmônica próximo de u na métrica do L^2. Com o cronograma a ser seguido em mãos, somos naturalmente levados à seguinte definição.

Definition

Seja $f\colon B_1 \to \mathbb{R}$ uma função real e $0 < \alpha < 1$. Dizemos que f é α*-Hölder continua na origem no sentido* L^2, se

$[f]_{C^\alpha_{igem\,-}}$ *f . en d F . . d L F . - .*

Equivalência da Teoria Clássica e Teoria L^2: Espaços de Morrey e Campanato

Theorem

Seja $f \in L^2(B_1)$ uma função α-Hölder contínua no sentido L^2. Então f é α-Hölder contínua no sentido clássico, i.e.,

$$|f(X) - f(Y)| \leq C|X - Y|^{\alpha}.$$

Ademais, existe uma constante $c(n, \alpha)$ dependendo apenas da dimensão e do expoente α, tal que $[f]_{C^\alpha} \leq c(n, \alpha)[f]_{C^\alpha_{L^2}}$.

Teorema de Schauder

Theorem

Seja u uma solução fraca de (7) e assuma que a_{ij} é elíptica e α-Hölder contínua na origem no sentido L^2. Então existe uma função afim $L(X) = b \cdot X + c$ tal que

$$\left(\fint_{B_r} |u - L|^2 dX \right)^{1/2} \leq C_0 \left(\|u\|_{L^2(B_1)} + [a_{ij}]_{C^\alpha_{L^2}(0) + [f]_{C^\alpha_{L^2}}(0)} \right) r^{1+\alpha},$$

para uma constante C_0 que depende apenas da dimensão n, das constantes de elipticidade, λ, Λ e do expoente α. Ademais,

$$|b| + |c| \leq C_0.$$

Closing

Próxima Aula

Problemas Variacionais e a teoria de regularidade de De Giorgi.

Closing

Próxima Aula

Problemas Variacionais e a teoria de regularidade de De Giorgi.