SOBRE OS TEOREMAS DE BISHOP-PHELPS

por

Nilson Bernardes Jr.

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Caixa Postal 68530, Ilha do Fundão

Rio de Janeiro, RJ, 21945-970, Brasil

1. Funcionais que assumem a norma

Em tudo o que se segue, denotamos por $\mathbb{K}$ o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais ou o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos.

Seja X um espaço normado (sobre $\mathbb{K}$). Denotamos por X' o *dual topológico* de X, ou seja, o espaço vetorial de todos os funcionais lineares contínuos sobre X munido da norma

$$\|f\| = \sup_{x \in B_X} |f(x)| \quad (f \in X'),$$

onde B_X denota a bola unitária fechada de X. Sabemos que X' é um espaço de Banach. Dizemos que um funcional $f \in X'$ *assume a norma* se o supremo na definição da norma de f é um máximo, ou seja, se existe um ponto $x_0 \in B_X$ tal que

$$\|f\| = |f(x_0)|,$$

o que equivale a dizer que existe um ponto $x_1 \in B_X$ tal que $\|f\| = f(x_1)$.

Como ilustração vamos determinar os funcionais sobre c_0 que assumem a norma:

Exemplo 1. Para cada $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$, seja $f_a : c_0 \to \mathbb{K}$ dado por

$$f_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n \quad \big(x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0\big).$$

Pela Proposição 3.1 de [26], cada f_a pertence a $(c_0)'$ e a função

$$a \in \ell_1 \mapsto f_a \in (c_0)'$$

é um isomorfismo isométrico. Seja

$$A = \{(a_0, \ldots, a_m, 0, 0, \ldots); m \in \mathbb{N} \text{ e } a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{K}\}.$$

Vamos mostrar que os funcionais $f \in (c_0)'$ que assumem a norma são exatamente os funcionais da forma f_a com $a \in A$. De fato, se $a = (a_0, \ldots, a_m, 0, 0, \ldots) \in A$ e escrevemos $a_n = |a_n|e^{i\theta_n}$ com $\theta_n \in [0, 2\pi]$ $(0 \leq n \leq m)$, então $x = (e^{-i\theta_0}, \ldots, e^{-i\theta_m}, 0, 0, \ldots) \in B_{c_0}$ e

$$|f_a(x)| = \Big|\sum_{n=0}^{m} a_n e^{-i\theta_n}\Big| = \sum_{n=0}^{m} |a_n| = \|a\| = \|f_a\|,$$

provando que f_a assume a norma. Por outro lado, se $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1 \backslash A$ e $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B_{c_0}$, então existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $a_r \neq 0$ e $|x_r| \leq 1/2$, donde

$$|f_a(x)| = \Big|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n\Big| \leq \sum_{n\neq r} |a_n| + \frac{|a_r|}{2} < \|a\| = \|f_a\|,$$

provando que f_a não assume a norma.

O exemplo anterior mostra que existem funcionais lineares contínuos sobre c_0 que não assumem a norma. Esse fenômeno não ocorre em espaços reflexivos, como nos diz a seguinte

Proposição 2. *Se um espaço normado X é reflexivo, então todo funcional $f \in X'$ assume a norma.*

Podemos provar este resultado usando um dos corolários canônicos do teorema de extensão de Hahn-Banach. Para futura referência vamos enunciar este teorema e o referido corolário a seguir.

Teorema 3 (Teorema de extensão de Hahn-Banach)**.** *Se X é um espaço normado, M é um subespaço vetorial de X e $f \in M'$, então existe $\tilde{f} \in X'$ tal que*

$$\tilde{f}|_M = f \qquad e \qquad \|\tilde{f}\| = \|f\|.$$

Corolário 4. *Se x é um vetor não nulo em um espaço normado X, então existe $f \in X'$ tal que*

$$\|f\| = 1 \qquad e \qquad f(x) = \|x\|.$$

Estes resultados podem ser encontrados em praticamente qualquer livro de Análise Funcional. Veja [26], Teorema 8.2 e Corolário 8.1, por exemplo.

Provemos agora a Proposição 2. Dado um funcional não nulo $f \in X'$, segue do Corolário 4 que existe $\psi \in X''$ tal que $\|\psi\| = 1$ e $\psi(f) = \|f\|$. Como X é reflexivo, existe $x_0 \in X$ com $\|x_0\| = 1$ tal que $\psi(g) = g(x_0)$ para todo $g \in X'$. Em particular, $\|f\| = \psi(f) = f(x_0)$, provando que f assume a norma.

Um teorema profundo devido a Robert James afirma que a recíproca da Proposição 2 é verdadeira dentro da classe dos espaços de Banach:

Teorema 5 (James)**.** *Se X é um espaço de Banach e todo funcional $f \in X'$ assume a norma, então X é reflexivo.*

Este teorema foi obtido por James em [9] para espaços separáveis e em [10] no caso geral. Mencionemos que James havia provado em [8] que um espaço de Banach separável X com base de Schauder é reflexivo se todo $f \in X'$ assume a norma em qualquer cópia (isomorfa) de X e que, pouco depois, Victor Klee [13] conseguiu remover a hipótese de X ter uma base de Schauder. Mencionemos também que o próprio James exibiu em [11] um espaço normado não completo (logo não reflexivo) com a propriedade de que todos os seus funcionais lineares contínuos assumem a norma.

Para a demonstração do teorema de James, veja o artigo [12] no qual James apresenta uma demonstração simplificada do seu teorema.

Motivado pelo teorema de James, Robert Phelps definiu em [21] o conceito de subreflexividade: um espaço normado X é dito *subreflexivo* se o conjunto dos funcionais $f \in X'$ que assumem a norma é denso em X'. Neste artigo Phelps obteve várias condições suficientes para que um espaço normado seja subreflexivo e construiu um exemplo de um espaço normado que não é subreflexivo (o artigo [22] contém uma correção para [21]). Pouco depois, Errett Bishop e Robert Phelps [1] provaram que todo espaço de Banach é subreflexivo. Em outras palavras, temos o seguinte teorema profundo:

Teorema 6 (Bishop-Phelps)**.** *Para todo espaço de Banach X, o conjunto dos funcionais $f \in X'$ que assumem a norma é denso em X'.*

Os próprios Bishop e Phelps estabeleceram generalizações deste teorema no artigo [2]. Apresentaremos essas generalizações nas próximas duas seções. O Teorema 6 seguirá então como um corolário.

Observamos que a presente exposição foi baseada principalmente nos artigos originais [2,15,16] e na dissertação [4].

2. Os teoremas de Bishop-Phelps - caso real

Dados um espaço normado real X, um subconjunto convexo C de X e um funcional $f \in X'$, dizemos que:

- f é um *funcional suporte* para C se f não é nulo e existe um ponto $x_0 \in C$ tal que
$$f(x_0) = \sup_{x \in C} f(x).$$
Neste caso, dizemos que x_0 é um *ponto suporte* de C.

- f é um *funcional módulo-suporte* para C se f não é nulo e existe um ponto $x_0 \in C$ tal que
$$|f(x_0)| = \sup_{x \in C} |f(x)|.$$
Neste caso, dizemos que x_0 é um *ponto módulo-suporte* de C.

Como todo funcional linear contínuo não nulo é uma aplicação aberta, segue que todo ponto suporte de C e todo ponto módulo-suporte de C pertence à fronteira de C. Observemos também que no caso em que C é simétrico (isto é, "$x \in C \Rightarrow -x \in C$"), os conceitos de funcional suporte para C e ponto suporte de C coincidem com os conceitos de funcional módulo-suporte para C e ponto módulo-suporte de C, respectivamente.

A ferramenta chave para a construção de funcionais suporte e de pontos suporte é a seguinte versão do teorema de separação de Hahn-Banach (veja [26], Corolário 8.4, por exemplo):

Teorema 7 (Teorema de separação de Hahn-Banach)**.** *Sejam C e B subconjuntos convexos não vazios de um espaço normado real X tais que* $\operatorname{Int} B \neq \emptyset$ *e* $C \cap \operatorname{Int} B = \emptyset$*. Então existe $f \in X'$ não nulo tal que*
$$\sup_{x \in C} f(x) \leq \inf_{y \in B} f(y).$$

Observe que se $C \cap B \neq \emptyset$ e $x_0 \in C \cap B$, então
$$\sup_{x \in C} f(x) = f(x_0) = \inf_{y \in B} f(y),$$

mostrando que f é um funcional suporte para C e x_0 é um ponto suporte de C. No que se segue esta observação será aplicada no caso particular em que B é uma translação de um cone convexo. Relembremos que um subconjunto não vazio K de X é dito um cone convexo se K é um conjunto convexo e $tx \in K$ sempre que $x \in K$ e $t \geq 0$. Se K é um cone convexo em X, A é um subconjunto de X e $x_0 \in A$, dizemos que $K + x_0$ *suporta* A *em* x_0 se

$$(K + x_0) \cap A = \{x_0\}.$$

Com esta definição, temos a seguinte consequência imediata do teorema anterior:

Lema 8. *Sejam X um espaço normado real e C um subconjunto convexo de X. Se K é um cone convexo em X com interior não vazio, $K \neq X$, $x_0 \in C$ e $K + x_0$ suporta C em x_0, então existe $f \in X'$ não nulo tal que*

$$\sup_{x \in C} f(x) = f(x_0) = \inf_{y \in K + x_0} f(y).$$

Em particular, f é um funcional suporte para C e x_0 é um ponto suporte de C.

Dessa forma, a existência de funcionais suporte e de pontos suporte para C se reduz à existência de cones convexos que suportam C e têm interior não vazio. Os cones convexos que usaremos para tal fim serão do seguinte tipo: se X é um espaço normado real, $f \in X'$, $\|f\| = 1$ e $r > 0$, definimos

$$K(f, r) = \{x \in X; \|x\| \leq r f(x)\}.$$

Vejamos algumas propriedades desses cones:

Proposição 9. *Sejam X um espaço normado real, $f \in X'$ com $\|f\| = 1$, e $r > 0$. Temos que:*

(a) *$K(f, r)$ é um cone convexo fechado.*

(b) *Se $x \in K(f, r)$ e $x \neq 0$, então $-x \notin K(f, r)$.*

(c) *Se $r > 1$ então $K(f, r)$ tem interior não vazio.*

Demonstração. A propriedade (a) é clara. Se $x, -x \in K(f, r)$ então $\|x\| \leq r f(x)$ e $\|x\| \leq -r f(x)$, donde $x = 0$, provando a propriedade (b). Se $r > 1$ então o conjunto aberto

$\{x \in X; \|x\| < rf(x)\}$ não é vazio (pois $\|f\| = 1$) e, obviamente, está contido em $K(f, r)$, o que prova a propriedade (c).

O próximo lema fundamental estabelece condições para a existência de um cone convexo que suporta um dado conjunto.

Lema 10. *Suponha X um espaço normado real, A um subconjunto completo de X e $f \in X'$ tal que $\|f\| = 1$ e f é limitado superiormente em A. Dados $z \in A$ e $r > 0$, existe $x_0 \in A$ tal que*

$$x_0 \in K(f, r) + z \qquad e \qquad K(f, r) + x_0 \text{ suporta } A \text{ em } x_0.$$

Demonstração. Ponha $K = K(f, r)$. Definimos uma relação de ordem "$\leq$" sobre X declarando $x \leq y$ exatamente quando $y - x \in K$, o que equivale a dizer que

$$\|y - x\| \leq r[f(y) - f(x)].$$

Logo,

$$x, y \in X \;\text{ e }\; x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(y). \tag{1}$$

Com esta definição, note que $x_0 \in K + z$ se e somente se $x_0 \geq z$, e $K + x_0$ suporta A em x_0 se e somente se o único elemento de A que é maior ou igual a x_0 é o próprio x_0, ou seja, x_0 é um elemento maximal de A. Portanto, basta provarmos que A possui um elemento maximal $x_0 \geq z$. Seja $B = \{x \in A; x \geq z\}$. A fim de aplicarmos o lema de Zorn, tomemos um subconjunto totalmente ordenado W de B e provemos que W tem uma cota superior em B. Como f é limitada superiormente em A, existe

$$\alpha = \sup_{x \in W} f(x).$$

Se $\alpha \in f(W)$ e $w \in W$ satisfaz $f(w) = \alpha$, segue de (1) que w é elemento máximo de W (já que W é totalmente ordenado). Em particular, w é uma cota superior de W em B. Logo, suponha $\alpha \notin f(W)$. Então existe uma sequência crescente $t_1 < t_2 < t_3 < \cdots$ em $f(W)$ que converge para α. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $x_n \in W$ tal que $f(x_n) = t_n$. Como quaisquer dois elementos de W são comparáveis, segue de (1) que

$$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots. \tag{2}$$

Portanto, $\|x_m - x_n\| \leq r[f(x_m) - f(x_n)] = r[t_m - t_n]$ sempre que $m \geq n$, o que implica que (x_n) é uma sequência de Cauchy em B. Como $B = A \cap (K + z)$ e K é fechado, B é completo.

Por conseguinte, (x_n) converge para um certo $y \in B$. Agora, seja $x \in W$ arbitrário. Como $f(x) < \alpha$, existe $n_0 \geq 1$ tal que $f(x) < t_{n_0} = f(x_{n_0})$. Por (1) e (2), $x < x_n$ para todo $n \geq n_0$, e assim

$$\|x_n - x\| \leq r[f(x_n) - f(x)] \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\|y - x\| \leq r[f(y) - f(x)],$$

ou seja, $y \geq x$. Isto prova que y é uma cota superior de W em B. Portanto, pelo lema de Zorn, B possui um elemento maximal x_0. Claramente $x_0 \geq z$ e x_0 também é um elemento maximal de A. Isto completa a demonstração.

Teorema 11 (Bishop-Phelps)**.** *Se C é um subconjunto convexo e fechado de um espaço de Banach real X, então o conjunto dos pontos suporte de C é denso na fronteira de C.*

Demonstração. Suponha que z pertence à fronteira de C e fixe $\epsilon > 0$. Seja $w \in X \backslash C$ tal que $\|w - z\| < \epsilon/2$. Como C é fechado, existe uma vizinhança aberta e convexa V de w tal que $V \subset X \backslash C$. Pelo teorema de separação de Hahn-Banach (Teorema 7), existe $f \in X'$ com $\|f\| = 1$ tal que

$$\sup_{x \in C} f(x) \leq \inf_{y \in V} f(y) \leq f(w).$$

Como C é completo, o Lema 10 garante a existência de um ponto $x_0 \in C$ tal que

$$x_0 \in K(f, 2) + z \qquad \text{e} \qquad K(f, 2) + x_0 \text{ suporta } C \text{ em } x_0.$$

Pelo Lema 8, x_0 é um ponto suporte de C. Como $x_0 - z \in K(f, 2)$, $x_0 \in C$ e $\|f\| = 1$, temos que

$$\|x_0 - z\| \leq 2[f(x_0) - f(z)] \leq 2[f(w) - f(z)] \leq 2\|w - z\| < \epsilon,$$

como desejado.

Como consequência imediata temos o seguinte resultado:

Corolário 12. *Seja C um subconjunto convexo e fechado de um espaço de Banach real X. Se C é simétrico, então o conjunto dos pontos módulo-suporte de C é denso na fronteira de C.*

Observemos que sem a hipótese adicional de C ser simétrico, a conclusão do corolário acima pode ser falsa. Por exemplo, se $X = \mathbb{R}$ e $C = [-1, 2]$, então $|f(2)| = 2|f(-1)|$ para todo $f \in X'$, donde -1 não é ponto módulo-suporte de C.

O teorema anterior responde na afirmativa a seguinte pergunta feita por Klee [14]:

> *Será verdade que todo subconjunto não vazio, convexo, fechado e limitado de um espaço de Banach real tem pelo menos um ponto suporte?*

Note que a hipótese de C ser limitado é supérflua para uma resposta afirmativa a esta pergunta. Apesar da observação feita imediatamente após o Corolário 12, também obtemos uma resposta afirmativa se considerarmos ponto módulo-suporte ao invés de ponto suporte. De fato, isto decorre do Teorema 16 que veremos mais adiante. Todavia, neste caso, a hipótese de C ser limitado é essencial: se $X = \mathbb{R}$ e $C = [0, +\infty)$, então o conjunto dos pontos módulo-suporte de C é vazio.

Para provarmos a densidade dos funcionais suporte, precisaremos do seguinte resultado devido a Phelps [23]:

Lema 13. *Sejam X um espaço normado real, $f, g \in X'$ com $\|f\| = \|g\| = 1$, e $\epsilon > 0$. Se $|g(x)| \leq \epsilon/2$ sempre que $x \in \ker f$ e $\|x\| \leq 1$, então*

$$\|f + g\| \leq \epsilon \qquad \textit{ou} \qquad \|f - g\| \leq \epsilon.$$

Demonstração. Considere o subespaço $M = \ker f$ de X. Como $g|_M \in M'$, o teorema de extensão de Hahn-Banach (Teorema 3) garante a existência de um funcional $h \in X'$ tal que

$$h|_M = g|_M \qquad \text{e} \qquad \|h\| = \|g|_M\| \leq \epsilon/2,$$

pela hipótese. Como $g - h = 0$ em M, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $g - h = \alpha f$. Como $\|f\| = \|g\| = 1$, obtemos

$$\big|1 - |\alpha|\big| = \big|\|g\| - \|g - h\|\big| \leq \|h\| \leq \epsilon/2.$$

Portanto, se $\alpha \geq 0$ então

$$\|f - g\| = \|(1 - \alpha)f - h\| \leq |1 - \alpha| + \|h\| \leq \epsilon,$$

e se $\alpha \leq 0$ então

$$\|f + g\| = \|(1 + \alpha)f + h\| \leq |1 + \alpha| + \|h\| \leq \epsilon.$$

Lema 14. *Sejam X um espaço normado real e $f, g \in X'$ com $\|f\| = \|g\| = 1$. Se $0 < \epsilon < 1$, $r > 1 + 2/\epsilon$ e $g(x) \geq 0$ para todo $x \in K(f, r)$, então*

$$\|f - g\| \leq \epsilon.$$

Demonstração. Como $r^{-1}(1 + 2/\epsilon) < 1 = \|f\|$, existe $x_0 \in X$ tal que

$$\|x_0\| = 1 \qquad \text{e} \qquad f(x_0) > r^{-1}(1 + 2/\epsilon).$$

Se $x \in \ker f$ e $\|x\| \leq 1$, então

$$\left\|x_0 \pm \frac{2}{\epsilon}\, x\right\| \leq \|x_0\| + \frac{2}{\epsilon}\, \|x\| \leq 1 + \frac{2}{\epsilon} < rf(x_0) = rf\big(x_0 \pm \frac{2}{\epsilon}\, x\big),$$

donde $x_0 \pm \frac{2}{\epsilon}\, x \in K(f, r)$. Pela hipótese, $g(x_0 \pm \frac{2}{\epsilon}\, x) \geq 0$, donde $|g(\frac{2}{\epsilon}\, x)| \leq g(x_0) \leq \|g\| \|x_0\| = 1$, ou seja, $|g(x)| \leq \epsilon/2$. Logo, pelo Lema 13, $\|f + g\| \leq \epsilon$ ou $\|f - g\| \leq \epsilon$. Agora, tome $z \in X$ tal que

$$\|z\| = 1 \qquad \text{e} \qquad f(z) > \max\{r^{-1}, \epsilon\}.$$

Como $\|z\| = 1 < rf(z)$, ou seja, $z \in K(f, r)$, temos que $g(z) \geq 0$. Logo,

$$\|f + g\| \geq (f + g)(z) = f(z) + g(z) > \epsilon + g(z) \geq \epsilon.$$

Isto prova que não ocorre o caso $\|f + g\| \leq \epsilon$. Assim, $\|f - g\| \leq \epsilon$, como desejado.

Teorema 15 (Bishop-Phelps)**.** *Se C é um subconjunto não vazio, convexo, fechado e limitado de um espaço de Banach real X, então o conjunto dos funcionais suporte para C é denso em X'.*

Demonstração. Fixe $f \in X' \backslash \{0\}$ e $0 < \epsilon < 1$. Seja $h = f/\|f\| \in X'$ e escolha $z \in C$ e $r > 1 + 2/\epsilon$. Pelo Lema 10, existe $x_0 \in C$ tal que

$$x_0 \in K(h, r) + z \qquad \text{e} \qquad K(h, r) + x_0 \text{ suporta } C \text{ em } x_0.$$

Ponha $K = K(h, r)$. Pelo Lema 8, existe $g \in X'$ com $\|g\| = 1$ tal que

$$\sup_{x \in C} g(x) = g(x_0) = \inf_{y \in K + x_0} g(y).$$

Em particular, g é um funcional suporte para C. Como $g(x_0) = \inf_{y \in K + x_0} g(y) = g(x_0) + \inf_{y \in K} g(y)$, vemos que $g(y) \geq 0$ para todo $y \in K$. Logo, o Lema 14 garante que $\|h - g\| \leq \epsilon$.

Assim, $\varphi = \|f\|g$ é um funcional suporte para C e $\|f - \varphi\| \leq \epsilon\|f\|$, o que completa a demonstração.

Aplicando o teorema anterior com $C = B_X$, obtemos o Teorema 6 para espaços reais. Além disso, o teorema anterior também implica imediatamente o seguinte resultado:

> *Seja C um subconjunto não vazio, convexo, fechado e limitado de um espaço de Banach real X. Se C é simétrico, então o conjunto dos funcionais módulo-suporte para C é denso em X'.*

Entretanto, ao contrário do que ocorre com o Corolário 12 (no qual a hipótese de C ser simétrico é essencial), aqui a hipótese de C ser simétrico é supérflua, como nos mostra o seguinte

Teorema 16. *Se C é um subconjunto não vazio, convexo, fechado e limitado de um espaço de Banach real X, então o conjunto dos funcionais módulo-suporte para C é denso em X'.*

Demonstração. Para cada $f \in X'$, sejam

$$\alpha(f) = -\inf_{x \in C} f(x) \qquad \text{e} \qquad \beta(f) = \sup_{x \in C} f(x).$$

Note que

$$\sup_{x \in C} |f(x)| = \max\{\alpha(f), \beta(f)\}.$$

Além disso, como C é limitado, as funções

$$f \in X' \mapsto \alpha(f) \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad f \in X' \mapsto \beta(f) \in \mathbb{R}$$

são contínuas. Fixemos $f \in X'$ e $\epsilon > 0$. Pelo Teorema 15, existe um funcional suporte g para C tal que

$$\|g - f\| < \epsilon/2.$$

Se $\sup_{x \in C} |g(x)| = \sup_{x \in C} g(x)$, então g é um funcional módulo-suporte para C e não há mais nada a fazer. Suponhamos

$$\sup_{x \in C} |g(x)| \neq \sup_{x \in C} g(x).$$

Então $\beta(g) < \alpha(g)$, donde $\alpha(-g) < \beta(-g)$. Novamente pelo Teorema 15, existe um funcional suporte h para C tal que

$$\|h - (-g)\| < \epsilon/2.$$

Além disso, escolhendo h suficientemente próximo de $-g$, nós também teremos que $\alpha(h) < \beta(h)$. Por conseguinte,

$$\sup_{x \in C} |h(x)| = \beta(h) = \sup_{x \in C} h(x),$$

o que implica que h é um funcional módulo-suporte para C. Logo, $-h$ é um funcional módulo-suporte para C e

$$\|(-h) - f\| \leq \|(-h) - g\| + \|g - f\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

como queríamos demonstrar.

Os teoremas de Bishop-Phelps permanecem válidos se X for apenas um espaço normado (não necessariamente completo) desde que suponhamos C completo ao invés de fechado. Isto decorre do fato de usarmos apenas a completude de C e não de X (veja o Lema 10). Todavia, alguma condição de completude é necessária. Com efeito, Bishop e Phelps provaram em [2] que vale uma certa recíproca do Teorema 15, a saber:

Se X é um espaço normado não completo, então existe um subconjunto convexo, fechado e limitado C de X com interior não vazio tal que o conjunto dos funcionais suporte para C não é denso em X'.

Assim, a validade do Teorema 15 caracteriza a classe dos espaços de Banach dentro da classe dos espaços normados.

Sobre a possibilidade de estender os teoremas de Bishop-Phelps a espaços localmente convexos, Peck[20] deu uma resposta negativa:

Se $(X_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência infinita de espaços de Banach não reflexivos, então o espaço produto $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ contém um subconjunto não vazio, convexo, fechado e limitado que não tem pontos suporte.

Note que este X é um espaço de Fréchet, que é separável caso cada X_n o seja. Entretanto, alguns resultados positivos sobre densidade (na norma) de pontos suporte foram obtidos por Phelps[24] e Luna[18] no caso de um espaço dual X' munido da topologia fraca estrela, onde X é um espaço de Banach.

3. Os teoremas de Bishop-Phelps - caso complexo

Dados um espaço normado complexo X, um subconjunto convexo C de X e um funcional $f \in X'$, dizemos que:

- f é um *funcional suporte* para C se f não é nulo e existe um ponto $x_0 \in C$ tal que
$$\operatorname{Re} f(x_0) = \sup_{x \in C} \operatorname{Re} f(x).$$
Neste caso, dizemos que x_0 é um *ponto suporte* de C.

- f é um *funcional módulo-suporte* para C se f não é nulo e existe um ponto $x_0 \in C$ tal que
$$|f(x_0)| = \sup_{x \in C} |f(x)|.$$
Neste caso, dizemos que x_0 é um *ponto módulo-suporte* de C.

Como todo funcional linear contínuo não nulo é uma aplicação aberta, segue que todo ponto suporte de C e todo ponto módulo-suporte de C pertence à fronteira de C. Observemos também que se C é circular (isto é, "$\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$ e $x \in C \Rightarrow \lambda x \in C$") então
$$\sup_{x \in C} \operatorname{Re} f(x) = \sup_{x \in C} |f(x)|,$$
para todo $f \in X'$. Com efeito, a desigualdade "$\leq$" é óbvia. Por outro lado, se $x \in C$ e escrevemos $f(x) = |f(x)|e^{i\theta}$ com $\theta \in [0, 2\pi]$, então $e^{-i\theta}x \in C$ e $|f(x)| = e^{-i\theta} f(x) = f(e^{-i\theta}x) = \operatorname{Re} f(e^{-i\theta}x)$, o que prova a desigualdade oposta. Logo, no caso em que C é circular, os conceitos de funcional suporte para C e ponto suporte de C coincidem com os conceitos de funcional módulo-suporte para C e ponto módulo-suporte de C, respectivamente.

Se X é um espaço normado complexo, denotamos por $X_{\mathbb{R}}$ o espaço normado real obtido de X restringindo o corpo de escalares a $\mathbb{R}$.

Proposição 17. *Seja X um espaço normado complexo.*

(a) *Se $f \in X'$ então $u = \operatorname{Re} f \in (X_{\mathbb{R}})'$ e*
$$f(x) = u(x) - iu(ix) \qquad (x \in X).$$

(b) *Se $u \in (X_{\mathbb{R}})'$ e definimos f pela fórmula acima, então $f \in X'$.*

(c) *Se $f \in X'$ e $u = \operatorname{Re} f$, então $\|f\| = \|u\|$.*

Demonstração. (a): É fácil verificar que $u \in (X_{\mathbb{R}})'$. Seja $v = \operatorname{Im} f$. Como

$$u(ix) + iv(ix) = f(ix) = if(x) = i(u(x) + iv(x)) = iu(x) - v(x),$$

temos que $v(x) = -u(ix)$ $(x \in X)$, o que prova a fórmula desejada.
(b): Como u é contínua, f também o é. A linearidade de f decorre facilmente do fato de que

$$f(ix) = u(ix) - iu(-x) = u(ix) + iu(x) = i(u(x) - iu(ix)) = if(x),$$

para todo $x \in X$.
(c): Como $|u(x)| \leq |f(x)|$ para todo $x \in X$, vemos que $\|u\| \leq \|f\|$. Por outro lado, se $x \in B_X$ e escrevemos $f(x) = |f(x)|e^{i\theta}$ com $\theta \in [0, 2\pi]$, então

$$|f(x)| = e^{-i\theta} f(x) = f(e^{-i\theta}x) = u(e^{-i\theta}x) = |u(e^{-i\theta}x)| \leq \|u\|,$$

já que $e^{-i\theta}x \in B_X$. Isto implica que $\|f\| \leq \|u\|$.

Teorema 18 (Bishop-Phelps)**.** *Se C é um subconjunto convexo e fechado de um espaço de Banach complexo X, então o conjunto dos pontos suporte de C é denso na fronteira de C.*

Demonstração. Suponha que z pertence à fronteira de C e fixe $\epsilon > 0$. Pelo Teorema 11, existem $u \in (X_{\mathbb{R}})'$ e $x_0 \in C$ tais que

$$u(x_0) = \sup_{x \in C} u(x) \qquad \text{e} \qquad \|x_0 - z\| < \epsilon.$$

Definindo $f(x) = u(x) - iu(ix)$ $(x \in X)$, obtemos um funcional $f \in X'$. Como

$$\operatorname{Re} f(x_0) = u(x_0) = \sup_{x \in C} u(x) = \sup_{x \in C} \operatorname{Re} f(x),$$

concluímos que x_0 é um ponto suporte de C.

Como consequência imediata temos o seguinte resultado:

Corolário 19. *Seja C um subconjunto convexo e fechado de um espaço de Banach complexo X. Se C é circular, então o conjunto dos pontos módulo-suporte de C é denso na fronteira de C.*

Observemos que sem a hipótese adicional de C ser circular, a conclusão do corolário acima pode ser falsa (mesmo se C for simétrico). Por exemplo, se

$$X = \mathbb{C} \qquad \text{e} \qquad C = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1 \text{ e } |\operatorname{Im} z| \leq 1/2\},$$

então o conjunto dos pontos módulo-suporte de C está contido no círculo unitário $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, e assim não é denso na fronteira de C. De fato, se $f \in X'\backslash\{0\}$ e $z_0 \in C$ satisfazem $|f(z_0)| = \sup_{x\in C} |f(z)|$, então

$$|f(z_0)| = |z_0||f(1)| \leq |z_0||f(z_0)|,$$

já que $1 \in C$. Isto implica que $|z_0| = 1$.

Note que o teorema anterior dá uma resposta afirmativa ao caso complexo da pergunta de Klee:

> *Será verdade que todo subconjunto não vazio, convexo, fechado e limitado de um espaço de Banach complexo tem pelo menos um ponto suporte?*

Teorema 20 (Bishop-Phelps)**.** *Se C é um subconjunto não vazio, convexo, fechado e limitado de um espaço de Banach complexo X, então o conjunto dos funcionais suporte para C é denso em X'.*

Demonstração. Sejam $f \in X'$ e $\epsilon > 0$. Como $u = \operatorname{Re} f \in (X_{\mathbb{R}})'$, o Teorema 15 garante que existem $\varphi \in (X_{\mathbb{R}})'$ e $x_0 \in C$ tais que

$$\varphi(x_0) = \sup_{x\in C} \varphi(x) \qquad \text{e} \qquad \|\varphi - u\| < \epsilon.$$

Definindo $g(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix)$ $(x \in X)$, obtemos um funcional $g \in X'$. Como

$$\operatorname{Re} g(x_0) = \varphi(x_0) = \sup_{x\in C} \varphi(x) = \sup_{x\in C} \operatorname{Re} g(x),$$

g é um funcional suporte para C. Finalmente, $\|g - f\| = \|\operatorname{Re}(g - f)\| = \|\varphi - u\| < \epsilon$.

Aplicando o teorema anterior com $C = B_X$, obtemos o Teorema 6 para espaços complexos. Além disso, o teorema anterior também implica imediatamente o seguinte resultado:

Corolário 21. *Seja C um subconjunto não vazio, convexo, fechado e limitado de um espaço de Banach complexo X. Se C é circular, então o conjunto dos funcionais módulo-suporte para C é denso em X'.*

O problema de saber se a conclusão do corolário anterior continua válida sem a hipótese adicional de C ser circular permaneceu em aberto por um longo tempo (veja o artigo [25] de Phelps, por exemplo). Outro problema que permaneceu em aberto por um longo tempo foi uma resposta à versão complexa da pergunta de Klee para pontos módulo-suporte:

Será verdade que todo subconjunto não vazio, convexo, fechado e limitado de um espaço de Banach complexo tem pelo menos um ponto módulo-suporte?

Victor Lomonosov mostrou no artigo [16] (veja também [17]) que, ao contrário do que ocorre no caso real (Teorema 16), a resposta para ambos os problemas no caso complexo é negativa. De fato, Lomonosov exibiu um subconjunto não vazio, convexo, fechado e limitado C de um certo espaço de Banach complexo X tal que o conjunto dos funcionais módulo-suporte para C é vazio. Apresentaremos este resultado na próxima seção.

4. O contra-exemplo de Lomonosov

Vamos começar esta seção apresentando alguns preliminares sobre álgebras de Banach que serão necessários mais adiante. Para um tratamento mais completo, veja o livro [27] por exemplo.

Uma *álgebra de Banach* é um espaço de Banach complexo A munido de uma operação de multiplicação

$$(x, y) \in A \times A \mapsto xy \in A$$

satisfazendo as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$:

(a) $x(yz) = (xy)z$;

(b) $(x + y)z = xz + yz$;

(c) $x(y + z) = xy + xz$;

(d) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$;

(e) $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$.

Também vamos supor que existe um elemento $e \in A$ tal que:

(f) $xe = ex = x$ $(x \in A)$;

(g) $\|e\| = 1$.

O elemento e, que é obviamente único, é chamado o *elemento unidade* de A. Se

$$xy = yx \quad \text{para todo } x, y \in A,$$

dizemos que A é uma *álgebra de Banach comutativa*.

Se A é uma álgebra de Banach, então a desigualdade (e) implica que a operação de multiplicação em A é contínua. De fato, se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ em A, então

$$\|x_n y_n - xy\| = \|(x_n - x)y_n + x(y_n - y)\| \leq \|x_n - x\|\|y_n\| + \|x\|\|y_n - y\| \to 0,$$

provando que $x_n y_n \to xy$ em A.

Vejamos alguns exemplos de álgebras de Banach:

Exemplo 22. **(a)** Consideremos o espaço de Banach $\mathbb{C}^n$ de todas as n-uplas $(z_1, \ldots, z_n)$ de números complexos munido da norma do máximo

$$\|(z_1, \ldots, z_n)\| = \max\{|z_1|, \ldots, |z_n|\}.$$

Munido da operação de multiplicação definida por

$$(z_1, \ldots, z_n)(w_1, \ldots, w_n) = (z_1 w_1, \ldots, z_n w_n),$$

$\mathbb{C}^n$ é uma álgebra de Banach comutativa. Note que o elemento unidade de $\mathbb{C}^n$ é a n-upla $(1, \ldots, 1)$. Em particular, $\mathbb{C}$ é uma álgebra de Banach comutativa.

(b) Seja K um espaço de Hausdorff compacto e consideremos o espaço de Banach $C(K)$ de todas as funções contínuas $f : K \to \mathbb{C}$ munido da norma do supremo

$$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Munido da operação de multiplicação definida por

$$(fg)(t) = f(t)g(t) \qquad (t \in K),$$

$C(K)$ é uma álgebra de Banach comutativa. Note que o elemento unidade de $C(K)$ é a função constante igual a 1.

(c) Seja $X \neq \{0\}$ um espaço de Banach complexo e consideremos o espaço de Banach $\mathcal{B}(X)$ de todos os operadores lineares contínuos $T : X \to X$ munido da norma dos operadores

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|.$$

Munido da operação de multiplicação definida por

$$TS = T \circ S,$$

$\mathcal{B}(X)$ é uma álgebra de Banach, que não é comutativa se $\dim X > 1$. Note que o elemento unidade de $\mathcal{B}(X)$ é o operador identidade I.

O próximo exemplo será de fundamental importância nesta seção.

Exemplo 23. Seja $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ o disco unitário aberto em $\mathbb{C}$. Denotamos por H^∞ o conjunto de todas as funções $f : D \to \mathbb{C}$ que são holomorfas e limitadas. Definimos as operações de adição, multiplicação e multiplicação por escalar em H^∞ pontualmente:

$$(f+g)(z) = f(z) + g(z), \quad (fg)(z) = f(z)g(z) \;\text{ e }\; (\lambda f)(z) = \lambda f(z) \quad (z \in D).$$

Munido da norma

$$\|f\| = \sup_{z \in D} |f(z)|,$$

H^∞ é uma álgebra de Banach comutativa, cujo elemento unidade é a função constante igual a 1. Provaremos apenas a completude de H^∞, já que as demais propriedades são simples. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em H^∞. Para cada $z \in D$, como

$$|f_n(z) - f_m(z)| \le \|f_n - f_m\| \quad (n, m \in \mathbb{N}),$$

temos que $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{C}$, donde existe o limite

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$$

em $\mathbb{C}$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon \;\text{ sempre que } n, m \ge n_0 \text{ e } z \in D.$$

Fixando $z \in D$ e $n \ge n_0$, e fazendo $m \to \infty$, vemos que

$$|f_n(z) - f(z)| \le \epsilon \;\text{ para todo } n \ge n_0 \text{ e } z \in D.$$

Portanto, $f_n \to f$ uniformemente em D, o que implica que f é uma função holomorfa ([28], Teorema 10.28). A desigualdade acima também implica que f é limitada (donde $f \in H^\infty$) e que $f_n \to f$ na norma de H^∞.

Sejam A e B álgebras de Banach. Uma função $\psi : A \to B$ é dita um *homomorfismo* (*de álgebras*) se ψ é linear e satisfaz

$$\psi(xy) = \psi(x)\psi(y) \quad \text{para todo } x, y \in A.$$

Se, além disso, ψ é bijetivo, então dizemos que ψ é um *isomorfismo* (*de álgebras*). Um homomorfismo não nulo de A em $\mathbb{C}$ é chamado um *homomorfismo complexo* sobre A. Note que todo homomorfismo complexo h sobre A satisfaz

$$h(e) = 1,$$

onde e denota o elemento unidade de A. Com efeito, como h não é nulo, podemos tomar $y \in A$ tal que $h(y) \neq 0$. Como

$$h(y) = h(ye) = h(y)h(e),$$

concluímos que $h(e) = 1$, como desejado.

Proposição 24. *Se A é uma álgebra de Banach, então todo homomorfismo complexo h sobre A é automaticamente contínuo e temos $\|h\| = 1$.*

Demonstração. Como $\|e\| = 1$ e $h(e) = 1$, basta provarmos que

$$|h(x)| \leq 1 \quad \text{sempre que } \|x\| \leq 1.$$

Suponhamos que exista $x \in A$ tal que $\|x\| \leq 1$ e $|h(x)| > 1$. Seja $y = x/h(x)$. Então

$$\|y\| < 1 \qquad \text{e} \qquad h(y) = 1.$$

Como $\|y^n\| \leq \|y\|^n$ para todo $n \geq 1$, os elementos

$$s_n = y + y^2 + \cdots + y^n \quad (n \geq 1)$$

formam uma sequência de Cauchy em A, que necessariamente converge para um certo $z \in A$. Como

$$s_n - y = y^2 + \cdots + y^n = y(y + \cdots + y^{n-1}) = ys_{n-1} \quad (n \geq 2),$$

fazendo $n \to \infty$ obtemos $z - y = yz$. Como $h(y) = 1$, concluímos que

$$h(z) = h(y)h(z) = h(yz) = h(z - y) = h(z) - h(y) = h(z) - 1,$$

uma contradição.

Seja A uma álgebra de Banach comutativa e seja Δ o conjunto de todos os homomorfismos complexos sobre A. Como cada elemento de Δ é uma função de A em $\mathbb{C}$, temos que Δ é um subconjunto do conjunto produto $\mathbb{C}^A$. A topologia induzida em Δ pela topologia produto de $\mathbb{C}^A$ é chamada a *topologia de Gelfand* de Δ. Munido desta topologia, Δ é chamado o *espaço ideal maximal* de A (esta terminologia vem do fato de existir uma correspondência entre os homomorfismos complexos sobre A e os chamados "ideais maximais de A"; veja [27], Teorema 11.5).

Teorema 25. *Se A é uma álgebra de Banach comutativa, então o espaço ideal maximal Δ de A é um espaço de Hausdorff compacto.*

Demonstração. Consideremos $\mathbb{C}^A$ munido da topologia produto. Então, para cada $x \in A$, a função projeção

$$\pi_x : f \in \mathbb{C}^A \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$$

é contínua. Logo, os conjuntos $\pi_e^{-1}(\{1\})$, $\ker(\pi_{x+y} - \pi_x - \pi_y)$, $\ker(\pi_{\lambda x} - \lambda\pi_x)$ e $\ker(\pi_{xy} - \pi_x\pi_y)$ são todos fechados em $\mathbb{C}^A$. Como Δ é exatamente a interseção de todos esses conjuntos (com x, y variando em A e λ variando em $\mathbb{C}$), Δ é fechado em $\mathbb{C}^A$. Como $|h(x)| \leq \|h\|\|x\| = \|x\|$ para quaisquer $x \in A$ e $h \in \Delta$ (Proposição 24), temos que Δ está contido no produto

$$\prod_{x \in A} \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq \|x\|\},$$

que é um subconjunto compacto de $\mathbb{C}^A$ pelo teorema de Tychonoff. Como a topologia de Δ é a topologia induzida pela de $\mathbb{C}^A$, concluímos que Δ é compacto. Finalmente, Δ é um espaço de Hausdorff já que é um subespaço topológico do espaço de Hausdorff $\mathbb{C}^A$.

Sejam A uma álgebra de Banach comutativa e Δ o espaço ideal maximal de A. Para cada $x \in A$, definimos a *transformação de Gelfand de x* como sendo a função $\hat{x} : \Delta \to \mathbb{C}$ dada por

$$\hat{x}(h) = h(x) \qquad (h \in \Delta).$$

Note que $\hat{x}$ nada mais é do que a restrição a Δ da projeção $\pi_x : f \in \mathbb{C}^A \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$. Logo, pela definição da topologia de Gelfand, $\hat{x}$ é contínua. A função

$$x \in A \mapsto \hat{x} \in C(\Delta),$$

que é conhecida como a *transformação de Gelfand*, é um homomorfismo de álgebras. De fato, para quaisquer $x, y \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $h \in \Delta$, temos que

$$\widehat{\lambda x}(h) = h(\lambda x) = \lambda h(x) = \lambda\hat{x}(h) = (\lambda\hat{x})(h),$$

$$\widehat{x+y}(h) = h(x+y) = h(x) + h(y) = \hat{x}(h) + \hat{y}(h) = (\hat{x} + \hat{y})(h)$$

e

$$\widehat{xy}(h) = h(xy) = h(x)h(y) = \hat{x}(h)\hat{y}(h) = (\hat{x}\hat{y})(h).$$

No caso da álgebra H^∞, a transformação de Gelfand é uma isometria, como nos mostra a seguinte

Proposição 26. *Se Δ é o espaço ideal maximal da álgebra H^∞, então a transformação de Gelfand é um isomorfismo da álgebra H^∞ sobre a subálgebra $\widehat{H^\infty} = \{\hat{f}; f \in H^\infty\}$* de $C(\Delta)$ e

$$\|\hat{f}\| = \|f\| \quad \text{para todo } f \in H^\infty.$$

Demonstração. Fixemos $f \in H^\infty$. Como $|h(f)| \leq \|h\|\|f\| = \|f\|$ para todo $h \in \Delta$ (Proposição 24), temos que

$$\|\hat{f}\| = \sup_{h \in \Delta} |\hat{f}(h)| = \sup_{h \in \Delta} |h(f)| \leq \|f\|.$$

Por outro lado, para cada $z \in D$, a função $h_z : g \in H^\infty \mapsto g(z) \in \mathbb{C}$ é claramente um homomorfismo complexo sobre H^∞. Por conseguinte,

$$\|\hat{f}\| = \sup_{h \in \Delta} |h(f)| \geq \sup_{z \in D} |h_z(f)| = \sup_{z \in D} |f(z)| = \|f\|.$$

O próximo teorema é de fundamental importância nesta seção, já que o espaço de Banach X que nele aparece é o espaço com o qual Lomonosov construiu o seu contra-exemplo. Este teorema pode ser encontrado no livro [7] de Kenneth Hoffman (veja o Capítulo 9), mas apresentaremos uma demonstração bastante detalhada a seguir, para a conveniência do leitor. Todavia, iremos precisar de alguns resultados sobre análise complexa e sobre os espaços L^1 e L^∞, resultados estes que estão devidamente referenciados.

Teorema 27. *Existe um isomorfismo isométrico $f \in H^\infty \mapsto \tilde{f} \in X'$ entre o espaço de Banach H^∞ e o dual topológico X' de um certo espaço de Banach X com a propriedade de que, para cada $z \in D$, existe um elemento $\varphi_z \in X$ tal que*

$$\tilde{f}(\varphi_z) = f(z) \quad \textit{para todo } f \in H^\infty.$$

Demonstração. Seja $T = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ o círculo unitário em $\mathbb{C}$. Denotamos por $L^1(T)$ o espaço de Banach de todas as funções Lebesgue integráveis $\phi : T \to \mathbb{C}$ com a norma

$$\|\phi\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\phi(e^{it})|dt,$$

e denotamos por $L^\infty(T)$ o espaço de Banach de todas as funções essencialmente limitadas $\phi : T \to \mathbb{C}$ (com respeito à medida de Lebesgue) com a norma

$$\|\phi\|_\infty = \sup\operatorname{ess}|\phi|,$$

o supremo essencial de $|\phi|$. Seja

$$M = \big\{\phi \in L^1(T); \int_{-\pi}^{\pi} \phi(e^{it})e^{int}dt = 0 \text{ para todo } n \geq 0\big\},$$

que é um subespaço vetorial fechado de $L^1(T)$, e consideremos o espaço de Banach quociente

$$X = L^1(T)/M.$$

Relembremos que o núcleo de Poisson é definido por

$$P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{int} \quad (0 \leq r < 1, t \in \mathbb{R}).$$

Como a série acima converge uniformemente em $\mathbb{R}$, cada P_r é uma função contínua. Integrando termo a termo, obtemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt = 1.$$

Além disso, como

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}$$

([28], Seção 5.24), temos que

$$P_r(t) \geq 0 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Para cada $z = re^{i\theta} \in D$, definimos $\phi_z \in C(T) \subset L^1(T)$ por $\phi_z(e^{it}) = P_r(\theta - t)$ $(t \in \mathbb{R})$, e colocamos

$$\varphi_z = \phi_z + M \in X.$$

Pelo Teorema 11.32 de [28], para cada $f \in H^\infty$, o limite radial

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})$$

existe para quase todo θ e define uma função $f^* \in L^\infty(T)$ que satisfaz

$$\|f^*\|_\infty = \|f\|.$$

Por outro lado, pelos Teoremas 11.23 e 11.30 de [28],

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f^*(e^{it})dt, \tag{3}$$

para quaisquer $z = re^{i\theta} \in D$ e $f \in H^\infty$. Para cada $f \in H^\infty$, seja $\tilde{f} : X \to \mathbb{C}$ definida por

$$\tilde{f}(\phi + M) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(e^{it}) f^*(e^{it})dt \quad (\phi \in L^1(T)).$$

Provemos que $\tilde{f}$ está bem definida no sentido de que não depende da escolha do representante ϕ da classe $\phi + M$. Para tal fim, basta provarmos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi(e^{it}) f^*(e^{it})dt = 0 \quad \text{sempre que } \phi \in M.$$

Para cada $0 \leq r < 1$, seja $f_r \in C(T)$ definida por

$$f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta}) \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi).$$

Expandindo f em sua série de Taylor centrada na origem e fazendo integração termo a termo, vemos que a relação $\phi \in M$ implica

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi(e^{it}) f_r(e^{it})dt = 0 \quad \text{para todo } 0 \leq r < 1,$$

donde

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi(e^{it}) f^*(e^{it})dt = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(e^{it}) f_{1-1/n}(e^{it})dt = 0,$$

pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue. Claramente, $\tilde{f}$ é linear. Se $x \in X$ e ϕ é um representante da classe x, então

$$|\tilde{f}(x)| = |\tilde{f}(\phi + M)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\phi(e^{it})||f^*(e^{it})|dt \leq \frac{\|f^*\|_\infty}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\phi(e^{it})|dt = \|f\|\|\phi\|_1.$$

Tomando o ínfimo sobre os representantes ϕ de x, obtemos $|\tilde{f}(x)| \leq \|f\|\|x\|$. Isto prova que $\tilde{f}$ é contínua e $\|\tilde{f}\| \leq \|f\|$. Dessa forma, temos uma função

$$f \in H^\infty \mapsto \tilde{f} \in X' \tag{4}$$

que é claramente linear. Se $z = re^{i\theta} \in D$ então

$$\tilde{f}(\varphi_z) = \tilde{f}(\phi_z + M) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f^*(e^{it})dt = f(z)$$

(por (3)) e

$$\|\varphi_z\| \leq \|\phi_z\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)dt = 1, \tag{5}$$

donde $\|\tilde{f}\| \geq |\tilde{f}(\varphi_z)| = |f(z)|$. Isto implica que $\|\tilde{f}\| \geq \|f\|$. Logo, $\|\tilde{f}\| = \|f\|$. Resta apenas provarmos a sobrejetividade da função (4). Fixemos então $F \in X'$. Seja $q : L^1(T) \to X$ a aplicação canônica e seja

$$H = F \circ q \in L^1(T)'.$$

Pelo Teorema 6.16 de [28], existe $\psi \in L^\infty(T)$ tal que

$$H(\phi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(e^{it})\psi(e^{it})dt \quad \text{para todo } \phi \in L^1(T).$$

Defina $g : D \to \mathbb{C}$ por

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\psi(e^{it})dt \quad (z = re^{i\theta} \in D).$$

Para cada $n \leq -1$, como a função $u_n : z \in T \mapsto z^{-n} \in \mathbb{C}$ pertence a M, temos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(e^{it})e^{-int}dt = H(u_n) = F(q(u_n)) = F(0) = 0.$$

Por conseguinte, para todo $z = re^{i\theta} \in D$,

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in(\theta - t)}\Big)\psi(e^{it})dt = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(e^{it})e^{-int}dt\Big)z^n.$$

Isto prova que g é holomorfa em D. Como

$$|g(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)|\psi(e^{it})|dt \leq \|\psi\|_\infty \quad \text{para todo } z = re^{i\theta} \in D,$$

concluímos que $g \in H^\infty$. Finalmente, pelo Teorema 11.23 de [28], $g^* = \psi$. Consequentemente, $\tilde{g} = F$, como queríamos demonstrar.

Vejamos agora o contra-exemplo de Lomonosov. Pelo resto desta seção, X, φ_z $(z \in D)$ e $\tilde{f}$ $(f \in H^\infty)$ são como no Teorema 27. Denotamos por e o elemento unidade da álgebra H^∞, ou seja, a função constante igual a 1. Definimos

$$C = \overline{\text{co}}(\{\varphi_z; z \in D\}),$$

a envoltória convexa fechada de $\{\varphi_z; z \in D\}$ em X. Por (5),

$$C \subset B_X. \tag{6}$$

Como $\tilde{e}(\varphi_z) = e(z) = 1$ $(z \in D)$, temos que

$$\tilde{e}(x) = 1 \quad (x \in C). \tag{7}$$

Além disso,

$$\|f\| = \sup_{x \in C} |\tilde{f}(x)| \quad (f \in H^\infty). \tag{8}$$

Com efeito,

$$\|f\| = \sup_{z \in D} |f(z)| = \sup_{z \in D} |\tilde{f}(\varphi_z)| \leq \sup_{x \in C} |\tilde{f}(x)| \leq \sup_{x \in B_X} |\tilde{f}(x)| = \|\tilde{f}\| = \|f\|.$$

Lema 28. *Se $f \in B_{H^\infty}$ e $f \neq \lambda e$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| = 1$, então*

$$\lim_{n \to \infty} \widetilde{f^n}(x) = 0 \ \ \textit{para todo } x \in C.$$

Demonstração. Como $\mathrm{co}(\{\varphi_z; z \in D\})$ é denso em C e a sequência $(\widetilde{f^n})$ é limitada na norma, basta considerarmos o caso em que x está em $\mathrm{co}(\{\varphi_z; z \in D\})$, ou seja, x é da forma

$$x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \varphi_{z_j} \quad \text{com } z_1, \ldots, z_k \in D, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0 \text{ e } \sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1.$$

Ponha

$$\gamma = \max_{1 \leq j \leq k} |f(z_j)|.$$

Se f não é uma função constante, então o teorema do módulo máximo implica que $\gamma < 1$, uma vez que $\|f\| \leq 1$. Se $f = \lambda e$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$, então $|\lambda| < 1$ pois f não é uma função constante de módulo 1, donde $\gamma = |\lambda| < 1$. Em qualquer caso, segue que

$$|\widetilde{f^n}(x)| = \Big| \sum_{j=1}^{k} \alpha_j f^n(z_j) \Big| \leq \sum_{j=1}^{k} \alpha_j |f(z_j)|^n \leq \gamma^n \to 0,$$

quando $n \to \infty$.

Lema 29. *Se $x \in C$ e $f \in H^\infty$ satisfazem*

$$\tilde{f}(x) = \|f\| = 1,$$

então

$$\widetilde{f^n}(x) = 1 \ \ \textit{para todo } n \geq 1.$$

Demonstração. Sejam Δ o espaço ideal maximal da álgebra H^∞ e $g \in H^\infty \mapsto \hat{g} \in C(\Delta)$ a transformação de Gelfand. Sabemos que Δ é um espaço de Hausdorff compacto (Teorema 25) e que a transformação de Gelfand é um isomorfismo da álgebra H^∞ sobre a subálgebra $\widehat{H^\infty} = \{\hat{g}; g \in H^\infty\}$ de $C(\Delta)$ satisfazendo

$$\|\hat{g}\| = \|g\| \quad \text{para todo } g \in H^\infty$$

(Proposição 26). Defina $\phi : \widehat{H^\infty} \to \mathbb{C}$ por

$$\phi(\hat{g}) = \tilde{g}(x) \quad (g \in H^\infty).$$

Como $|\phi(\hat{g})| = |\tilde{g}(x)| \leq \|\tilde{g}\|\|x\| = \|g\|\|x\| = \|\hat{g}\|\|x\|$ para todo $g \in H^\infty$, temos que ϕ é um funcional linear contínuo com norma

$$\|\phi\| \leq \|x\|.$$

Pelo teorema de extensão de Hahn-Banach (Teorema 3), existe uma extensão $\Phi \in C(\Delta)'$ de ϕ com $\|\Phi\| = \|\phi\|$. Pelo teorema de representação de Riesz ([28], Teorema 6.19), existe uma medida de Borel complexa regular μ sobre Δ tal que

$$\Phi(u) = \int_\Delta u\, d\mu \quad (u \in C(\Delta)) \qquad \text{e} \qquad \|\Phi\| = |\mu|(\Delta).$$

Em particular,

$$\tilde{g}(x) = \int_\Delta \hat{g}\, d\mu \quad \text{para todo } g \in H^\infty.$$

Como $\mu(\Delta) = \int_\Delta d\mu = \int_\Delta \hat{e}\, d\mu = \tilde{e}(x) = 1$ (por (7)) e $|\mu|(\Delta) = \|\Phi\| = \|\phi\| \leq \|x\| \leq 1$ (por (6)), μ é uma medida positiva. Como

$$\int_\Delta \hat{f} d\mu = \tilde{f}(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad \|\hat{f}\| = \|f\| = 1,$$

segue que $\hat{f} = 1$ q.t.p.$[\mu]$. Logo, $\widehat{f^n} = \hat{f}^n = 1$ q.t.p.$[\mu]$, donde

$$\widetilde{f^n}(x) = \int_\Delta \widehat{f^n} d\mu = \mu(\Delta) = 1 \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Vejamos agora que a versão complexa do teorema de Bishop-Phelps para funcionais módulo-suporte não é válida em geral.

Teorema 30. *$\psi \in X'$ é um funcional módulo-suporte para C se e somente se*

$$\psi = \alpha\tilde{e} \quad \textit{para algum } \alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Em particular, o conjunto dos funcionais módulo-suporte para C não é denso em X'.

Demonstração. Suponha que $\psi \in X'$ é um funcional módulo-suporte para C e seja $g \in H^\infty$ tal que $\psi = \tilde{g}$. Então existe $x_0 \in C$ tal que

$$|\tilde{g}(x_0)| = \sup_{x \in C} |\tilde{g}(x)| = \|g\|,$$

por (8). Escreva $\tilde{g}(x_0) = |\tilde{g}(x_0)|e^{i\theta}$ com $\theta \in [0, 2\pi]$ e seja

$$f = \frac{e^{-i\theta}}{\|g\|} g \in H^\infty.$$

Como $\|f\| = 1$ e $\tilde{f}(x_0) = 1$, segue do Lema 29 que $\widetilde{f^n}(x_0) = 1$ para todo $n \geq 1$. Portanto, pelo Lema 28, $f = \lambda e$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| = 1$. Daí, $g = \alpha e$, onde $\alpha = \lambda \|g\| e^{i\theta}$.

Reciprocamente, cada $\alpha \tilde{e}$ (com $\alpha \neq 0$) é um funcional módulo-suporte para C, uma vez que $(\alpha \tilde{e})(x) = \alpha$ para todo $x \in C$ (por (7)).

Uma pequena alteração no exemplo anterior nos dá uma resposta negativa à versão complexa da pergunta de Klee para pontos módulo-suporte, como nos mostra o seguinte

Teorema 31. *Seja $L = \{\lambda\varphi_0; \lambda \in \mathbb{C}\}$ o subespaço vetorial de X gerado por φ_0. Consideremos o espaço de Banach quociente $Y = X/L$ e seja $B = q(C)$, onde $q : X \to Y$ é a aplicação canônica. Então B é um subconjunto não vazio, convexo, fechado e limitado de Y tal que o conjunto dos pontos módulo-suporte de B é vazio.*

Demonstração. Suponha que $\psi \in Y'$ e $y_0 \in B$ satisfazem

$$|\psi(y_0)| = \sup_{y \in B} |\psi(y)|.$$

Como $\psi \circ q \in X'$, existe $f \in H^\infty$ tal que $\psi \circ q = \tilde{f}$. Seja $x_0 \in C$ tal que $y_0 = q(x_0)$. Então

$$|\tilde{f}(x_0)| = |\psi(y_0)| = \sup_{y \in B} |\psi(y)| = \sup_{x \in C} |\tilde{f}(x)|.$$

Pelo Teorema 30, $f = \alpha e$ para algum $\alpha \in \mathbb{C}$. Como $f(0) = \tilde{f}(\varphi_0) = \psi(q(\varphi_0)) = \psi(0) = 0$, concluímos que $f = 0$, donde $\psi = 0$. Isto completa a demonstração.

5. Comentários sobre operadores que assumem a norma

O problema de estabelecer versões vetoriais dos teoremas de Bishop-Phelps foi levantado pelos próprios Bishop e Phelps em [1]. Mais precisamente, eles propuseram a seguinte pergunta: para que pares de espaços de Banach X, Y é verdade que o conjunto $NA(X; Y)$ de todas as aplicações lineares contínuas de X em Y que assumem a norma é denso no espaço de Banach $L(X;Y)$ de todas as aplicações lineares contínuas de X em Y? Esta pergunta continua sem uma resposta completa e talvez ela seja geral demais para admitir uma tal resposta. Todavia, muito progresso foi feito nesta direção. No artigo [15], Joram Lindenstrauss introduziu as seguintes propriedades sobre um espaço de Banach X:

- X tem a *propriedade (A)* se $NA(X;Y)$ é denso em $L(X;Y)$ para todo espaço de Banach Y.
- X tem a *propriedade (B)* se $NA(Y;X)$ é denso em $L(Y;X)$ para todo espaço de Banach Y.

Lindenstrauss provou que todo espaço de Banach reflexivo tem a propriedade (A), estabeleceu um critério para que um espaço de Banach tenha a propriedade (B) e construiu um exemplo de um espaço de Banach Z tal que $NA(Z;Z)$ não é denso em $L(Z;Z)$. Em particular, este espaço de Banach Z não tem a propriedade (A) e nem a propriedade (B). Vejamos o exemplo de Lindenstrauss:

Exemplo 32. Seja $X = c_0$ com a norma usual e seja Y um espaço estritamente convexo isomorfo a X. Consideremos o espaço produto

$$Z = X \times Y$$

com a norma do máximo

$$\|(x,y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Vamos mostrar que $NA(Z;Z)$ não é denso em $L(Z;Z)$. Para tal fim, fixamos um isomorfismo T de X sobre Y com $\|T\| \leq 1$ e definimos $R \in L(Z;Z)$ por

$$R(x,y) = (0, Tx).$$

Como T é um isomorfismo, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\|Tx\| \geq 2\epsilon\|x\| \quad \text{para todo } x \in X.$$

Afirmamos que não existe $S \in NA(Z;Z)$ tal que $\|S - R\| < \epsilon$. Com efeito, suponhamos que este não é o caso. Seja $S \in NA(Z;Z)$ com $\|S - R\| < \epsilon$ e seja $(x_0, y_0) \in Z$ tal que

$$\|(x_0, y_0)\| = 1 \qquad \text{e} \qquad \|S(x_0, y_0)\| = \|S\|.$$

Escreva $S(x_0, y_0) = (a, b)$. Então $\|a\| \leq \|S(x_0, y_0) - R(x_0, y_0)\| < \epsilon$. Como $\|R\| = \|T\| \geq 2\epsilon$, vemos que $\|S\| > \epsilon$. Logo,

$$\|S\| = \max\{\|a\|, \|b\|\} = \|b\|.$$

Como B_X não tem pontos extremos, existe $x_1 \neq 0$ em X tal que

$$\|x_0 + x_1\| = \|x_0 - x_1\| \leq 1.$$

Logo, $\|S(x_0, y_0) \pm S(x_1, 0)\| \leq \|S\|$. Daí, escrevendo $S(x_1, 0) = (\alpha, \beta)$ obtemos

$$\|b \pm \beta\| \leq \|b\|.$$

Como Y é estritamente convexo, $\beta = 0$. Por conseguinte,

$$\epsilon\|x_1\| \geq \|S(x_1, 0) - R(x_1, 0)\| = \|(\alpha, 0) - (0, Tx_1)\| \geq \|Tx_1\| \geq 2\epsilon\|x_1\|,$$

uma contradição.

No artigo [3], Jean Bourgain introduziu o seguinte conceito: um espaço de Banach X é dito ter a *propriedade de Bishop-Phelps* se para todo subconjunto não vazio, absolutamente convexo, fechado e limitado C de X e para todo espaço de Banach Y, o conjunto dos operadores $T \in L(X; Y)$ para os quais $\sup\{\|Tx\|; x \in C\}$ é assumido em algum ponto de C é denso em $L(X; Y)$. Bourgain provou o seguinte belo teorema:

Um espaço de Banach tem a propriedade de Bishop-Phelps se e somente se ele tem a propriedade de Radon-Nikodym.

Em particular, todo espaço de Banach com a propriedade de Radon-Nikodym tem também a propriedade (A). Recomendamos o livro [5] de Joseph Diestel e J. Jerry Uhl Jr. para informações sobre a propriedade de Radon-Nikodym.

Sobre a propriedade (B), mencionemos também que Jonathan Partington provou em [19] que todo espaço de Banach admite uma norma equivalente com a qual ele tem a propriedade (B), e William Gowers provou em [6] que os espaços ℓ_p (com $1 < p < \infty$) não têm a propriedade (B).

Referências

[1] E. Bishop & R. R. Phelps, *A proof that every Banach space is subreflexive*, Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961), 97–98.

[2] E. Bishop & R. R. Phelps, *The support functionals of a convex set*, Proc. Symp. Pure Math. (Convexity), AMS, **7** (1963), 27–35.

[3] J. Bourgain, *On dentability and the Bishop-Phelps property*, Israel J. Math. **28** (1977), 265–271.

[4] D. T. da Conceição Jr., *Os Teoremas de Bishop-Phelps e o Contra-exemplo de Lomonosov*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática, Universidade Federal Fluminense, 2002.

[5] J. Diestel & J. J. Uhl Jr., *Vector Measures*, Math. Surveys **15**, Amer. Math. Soc., 1977.

[6] W. T. Gowers, *Symmetric block bases of sequences with large average growth*, Israel J. Math. **69** (1990), 129–151.

[7] K. Hoffman, *Banach Spaces of Analytic Functions*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1962.

[8] R. C. James, *Bases and reflexivity of Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **56** (1950), 58 (abstract 80).

[9] R. C. James, *Reflexivity and the supremum of linear functionals*, Ann. of Math. **66** (1957), 159–169.

[10] R. C. James, *Characterizations of reflexivity*, Studia Math. **23** (1964), 205–216.

[11] R. C. James, *A counterexample for a sup theorem in normed spaces*, Israel J. Math. **9** (1971), 511–512.

[12] R. C. James, *Reflexivity and the sup of linear functionals*, Israel J. Math. **13** (1972), 289–300.

[13] V. L. Klee Jr., *Some characterizations of reflexivity*, Rev. Ci. (Lima) **52** (1950), 15–23.

[14] V. L. Klee Jr., *Extremal structure of convex sets II*, Math. Z. **69** (1958), 90–104.

[15] J. Lindenstrauss, *On operators which attain their norm*, Israel J. Math. **1** (1963), 139–148.

[16] V. Lomonosov, *A counterexample to the Bishop-Phelps theorem in complex spaces*, Israel J. Math. **115** (2000), 25–28.

[17] V. Lomonosov, *On the Bishop-Phelps theorem in complex spaces*, Quaest. Math. **23** (2000), 187–191.

[18] G. Luna, *The dual of a theorem of Bishop and Phelps*, Proc. Amer. Math. Soc. **47** (1975), 171–174.

[19] J. R. Partington, *Norm attaining operators*, Israel J. Math. **43** (1982), 273–276.

[20] N. T. Peck, *Support points in locally convex spaces*, Duke Math. J. **38** (1971), 271–278.

[21] R. R. Phelps, *Subreflexive normed linear spaces*, Arch. Math. (Basel) **8** (1957), 444–450.

[22] R. R. Phelps, *Correction to "Subreflexive normed linear spaces"*, Arch. Math. (Basel) **9** (1958), 439–440.

[23] R. R. Phelps, *A representation theorem for bounded convex sets*, Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), 976–983.

[24] R. R. Phelps, *Weak* support points of convex sets in E^**, Israel J. Math. **2** (1964), 177–182.

[25] R. R. Phelps, *The Bishop-Phelps theorem in complex spaces: an open problem*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **136** (1991), 337–340.

[26] D. P. Pombo Jr., *Introdução à Análise Funcional*, EdUFF - Editora da Universidade Federal Fluminense, Niterói, 1999.

[27] W. Rudin, *Functional Analysis*, Second Edition, McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

[28] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Third Edition, McGraw-Hill, Inc., New York, 1987.