

# II ENAMA

segundo

Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações

## Minicurso 1

### Análise e Métodos Numéricos em EDPs com Múltiplas Escalas

Alexandre L. Madureira  
Laboratório Nacional de Computação Científica

Realização



João Pessoa, 05 a 07 de novembro de 2008

## **II ENAMA**

O II ENAMA é uma realização conjunta das Universidades Federais da Paraíba e de Campina Grande cujas atividades acontecem no Hardman Praia Hotel, praia de Manaíra, na cidade de João Pessoa, capital da Paraíba, no período de 05 a 07 de novembro de 2008.

O ENAMA é um evento na área de Matemática, mais especificamente, em Análise Funcional, Análise Numérica e Equações Diferenciais, criado para ser um fórum de debates e de intercâmbio de conhecimentos entre diversos especialistas, professores, pesquisadores e alunos de pós-graduação em Matemática do Brasil e do exterior. Nesta segunda edição, o evento contou com três mini-cursos, três palestras plenárias (conferências), noventa e uma comunicações orais e quinze apresentações de pôsteres.

Os organizadores do II ENAMA desejam expressar sua gratidão aos órgãos e instituições que apoiaram e tornaram possível a realização deste evento: CNPq, CAPES, UFPB, UFCG, Banco do Brasil e Prefeitura Municipal de João Pessoa. Agradecem também a todos participantes do evento, bem como aos colaboradores pelo entusiasmo e esforço, que tanto contribuíram para o sucesso deste evento.

A Comissão Organizadora

### **Comitê Organizador**

Daniel Cordeiro de Moraes (UFCG)  
Fágner D. Araruna (UFPB)  
João Marcos B. do Ó (UFPB)  
Joaquim R. Feitosa(UFPB)  
Marco Aurélio S. Souto (UFCG)  
Sandra M. C. Malta (LNCC/MCT)  
Uberlandio B. Severo (UFPB)

### **Comitê Científico do II ENAMA**

Geraldo M. de A. Botelho (UFU)  
Haroldo R. Clark (UFF)  
Luis Adauto Medeiros (UFRJ)  
Olimpio Miyagaki (UFV)  
Sandra M.C. Malta (LNCC/MCT)

# Análise e Métodos Numéricos em EDPs com Múltiplas Escalas

Alexandre L. Madureira

LABORATÓRIO NACIONAL DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA—LNCC, BRAZIL  
*URL:* <http://www.lncc.br/~alm>

Gostaria de agradecer aos organizadores do ENAMA II pelo amável convite para apresentar alguns tópicos que considero importante em análise numérica. Em particular gostaria de mencionar Fágner Araruna, Joaquim Feitosa e Sandra Malta, com quem tive contato direto durante a preparação para este encontro.

PREFÁCIO. Neste minicurso serão apresentados tópicos em análise numérica, onde ferramentas de análise e EDPs são essenciais. Será dada ênfase em problemas que apresentam múltiplas escalas, com exemplos de EDPs em domínios delgados, EDPs com coeficientes oscilatórios, e problemas em domínios com fronteiras rugosas.

Diferentes técnicas de análise assintótica e de discretização serão abordadas, considerando as seguintes duas questões principais:

- (1) Como discretizar de forma "eficiente" problemas com múltiplas escalas.
- (2) Como preservar certas propriedades sob discretização, i.e., como manter propriedades qualitativas das soluções contínuas quando estas são discretizadas.

Estas notas de aula servem de apoio ao minicurso, mostrando detalhes técnicos que não serão mostrados durante as apresentações, bem como apontando referências importantes.

## Conteúdo

Capítulo 1. Placas linearmente elásticas	1
1.1. Introdução	1
1.2. Resultados de convergência	2
1.3. Modelos do tipo Reissner–Mindlin	5
1.4. Aspectos numéricos	8
Capítulo 2. Modelagem em domínios com fronteiras rugosas	13
2.1. Definição do problema	13
2.2. Modelos baseados em leis de parede	14
2.3. Um método de elementos finitos multiescalas	20
Capítulo 3. Métodos Numéricos para EDPs com Múltiplas Escalas	27
3.1. Introdução	27
3.2. Um modelo unidimensional	33
3.3. Aproximação por Elementos Finitos	35
3.4. Elementos Finitos Múltiescala	39
3.5. Métodos alternativos	45
Bibliography	49



## CAPÍTULO 1

### Placas linearmente elásticas

Consideramos neste capítulo o problema de modelar placas linearmente elásticas. Uma placa é um corpo *tridimensional fino*, e por modelos entende-se equações postas num domínio bidimensional que “aproximem” o problema original.

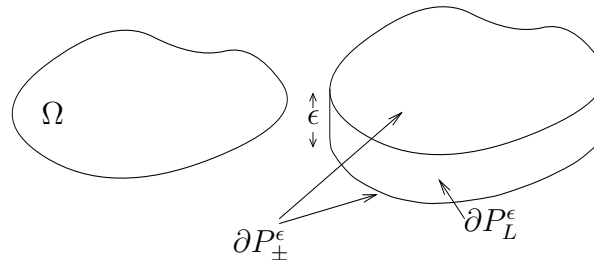
A necessidade desta modelagem, também conhecida como *redução de dimensão*, é antiga, e deveu-se primeiramente a possibilidade de se utilizar técnicas analíticas exclusivas a duas dimensões, como variáveis complexas, para atacar problemas tridimensionais de difícil análise. A redução de dimensão ganhou nova utilidade com o surgimento de aproximações computacionais, mais baratas em duas dimensões do que em três.

A equação biarmônica, também conhecida por Kirchhoff–Love, para placas, derivada a partir de argumentos físicos, ficou tão conhecido que é também chamado de *equação da placa*. Na verdade este modelo não é o único, e nem de longe o melhor. Nas engenharias, variantes do modelo do tipo de *Reissner–Mindlin* são utilizados. Tipicamente, suas derivações são mais uma vez baseadas em argumentos físicos.

A seguir descreveremos como os modelos biarmônico e de Reissner–Mindlin podem (deveriam?) ser derivados, a relação entre eles, o quão bom eles são, e aspectos numéricos pertinentes.

#### 1.1. Introdução

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio suave, e seja  $\epsilon \in (0, 1]$  a metade da espessura de uma placa homogênea e linearmente elástica que ocupa o domínio  $P^\epsilon = \Omega \times (-\epsilon, \epsilon)$ . Denotamos seu lado por  $\partial P_L^\epsilon = \partial\Omega \times (-\epsilon, \epsilon)$ , e suas partes de cima e de baixo por  $\partial P_\pm^\epsilon = \Omega \times \{-\epsilon, \epsilon\}$ .



O deslocamento  $\underline{\mathbf{u}}^\epsilon : P^\epsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$  e a tensão  $\underline{\underline{\sigma}}^\epsilon : P^\epsilon \rightarrow \mathbb{R}_{\text{sim}}^{3 \times 3}$  (espaço das matrizes simétricas  $3 \times 3$ ) são tais que

$$(1.1.1) \quad \begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}^\epsilon &= \mathcal{C} \underline{\underline{e}}(\underline{\mathbf{u}}^\epsilon), & \text{div } \underline{\underline{\sigma}}^\epsilon &= -\underline{\mathbf{f}}^\epsilon & \text{em } P^\epsilon, \\ \underline{\underline{\sigma}}^\epsilon \underline{\mathbf{n}} &= \underline{\mathbf{g}}^\epsilon & \text{sobre } \partial P_\pm^\epsilon, & & \underline{\mathbf{u}}^\epsilon = 0 & \text{sobre } \partial P_L^\epsilon, \end{aligned}$$

onde  $\underline{\mathbf{f}}^\epsilon : P^\epsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\underline{\mathbf{g}}^\epsilon : \partial P_\pm^\epsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$  representam os carregamentos volumétricos e de tração. Supomos ainda que não há deslocamento na parte lateral da placa. Denotamos a parte

simétrica do gradiente de  $\underline{\mathbf{u}}$  por

$$\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\mathbf{u}}^\epsilon) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{u}}^\epsilon + \underline{\underline{\nabla}}^T \underline{\mathbf{u}}^\epsilon),$$

i.e.,  $e_{ij}(\underline{\mathbf{u}}^\epsilon) = (\partial_i u_j^\epsilon + \partial_j u_i^\epsilon)/2$ . Além disso,  $(\underline{\mathbf{div}} \underline{\underline{\sigma}}^\epsilon)_i = \sum_{j=1}^3 \partial_j \sigma_{ij}^\epsilon$ . O tensor de elasticidade  $\mathcal{C}$  é definido tal que  $\mathcal{C} \underline{\underline{\tau}} = 2\mu \underline{\underline{\tau}} + \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\tau}}) \underline{\underline{\delta}}$ , onde  $\mu$  e  $\lambda$  são as constantes de Lamé, e  $\underline{\underline{\delta}}$  a matriz identidade  $3 \times 3$ .

Estendendo a notação já utilizada, decomponos vetores tridimensionais e matrizes  $3 \times 3$  como abaixo:

$$\underline{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\sigma}} & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma}^T & \sigma_{33} \end{pmatrix},$$

onde  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ , são vetores bidimensionais,  $\underline{\underline{\sigma}}$  é matriz  $2 \times 2$ , e  $u_3$  e  $\sigma_{33}$  são escalares. Um ponto arbitrário em  $P^\epsilon$  é dado por  $\underline{\mathbf{x}}^\epsilon = (\mathbf{x}^\epsilon, x_3^\epsilon)$ , onde  $\mathbf{x}^\epsilon \in \Omega$ . Notação similar é utilizada para os espaços de funções e outras variáveis.

O problema de elasticidade tridimensional se desacopla em dois problemas, um relacionado ao *alongamento* da placa, outro com a *flexão*. Para uma dada função  $k$  em  $P^\epsilon$  ou  $\partial P_\pm^\epsilon$ , existe uma única decomposição em suas partes pares e ímpares com respeito a  $x_3^\epsilon$ , i.e.,  $k = k^{\text{par}} + k^{\text{ímpar}}$  onde

$$k^{\text{par}}(\underline{\mathbf{x}}^\epsilon) = \frac{k(\mathbf{x}^\epsilon, x_3^\epsilon) + k(\mathbf{x}^\epsilon, -x_3^\epsilon)}{2}, \quad k^{\text{ímpar}}(\underline{\mathbf{x}}^\epsilon) = \frac{k(\mathbf{x}^\epsilon, x_3^\epsilon) - k(\mathbf{x}^\epsilon, -x_3^\epsilon)}{2}.$$

Decompomos então

$$\underline{\mathbf{u}}^\epsilon = \underline{\mathbf{u}}^{\epsilon^s} + \underline{\mathbf{u}}^{\epsilon^b}, \quad \underline{\underline{\sigma}}^\epsilon = \underline{\underline{\sigma}}^{\epsilon^s} + \underline{\underline{\sigma}}^{\epsilon^b}, \quad \underline{\mathbf{g}}^\epsilon = \underline{\mathbf{g}}^{\epsilon^s} + \underline{\mathbf{g}}^{\epsilon^b}, \quad \underline{\mathbf{f}}^\epsilon = \underline{\mathbf{f}}^{\epsilon^s} + \underline{\mathbf{f}}^{\epsilon^b},$$

onde

$$(1.1.2) \quad \underline{\mathbf{u}}^{\epsilon^s} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{\epsilon^{\text{par}}} \\ u_3^{\epsilon^{\text{ímpar}}} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\sigma}}^{\epsilon^s} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\sigma}}^{\epsilon^{\text{par}}} & \boldsymbol{\sigma}^{\epsilon^{\text{ímpar}}} \\ (\boldsymbol{\sigma}^{\epsilon^{\text{ímpar}}})^T & \sigma_{33}^{\epsilon^{\text{par}}} \end{pmatrix},$$

$$(1.1.3) \quad \underline{\mathbf{u}}^{\epsilon^b} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{\epsilon^{\text{ímpar}}} \\ u_3^{\epsilon^{\text{par}}} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\sigma}}^{\epsilon^b} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\sigma}}^{\epsilon^{\text{ímpar}}} & \boldsymbol{\sigma}^{\epsilon^{\text{par}}} \\ (\boldsymbol{\sigma}^{\epsilon^{\text{par}}})^T & \sigma_{33}^{\epsilon^{\text{ímpar}}} \end{pmatrix},$$

$$(1.1.4) \quad \underline{\mathbf{g}}^{\epsilon^s} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}^{\epsilon^{\text{par}}} \\ g_3^{\epsilon^{\text{ímpar}}} \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{g}}^{\epsilon^b} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}^{\epsilon^{\text{ímpar}}} \\ g_3^{\epsilon^{\text{par}}} \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{f}}^{\epsilon^s} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^{\epsilon^{\text{par}}} \\ f_3^{\epsilon^{\text{ímpar}}} \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{f}}^{\epsilon^b} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^{\epsilon^{\text{ímpar}}} \\ f_3^{\epsilon^{\text{par}}} \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que a parte de alongamento  $\underline{\mathbf{u}}^{\epsilon^s}$ ,  $\underline{\underline{\sigma}}^{\epsilon^s}$  é solução de (1.1.1) com  $\underline{\mathbf{g}}^\epsilon$  substituído por  $\underline{\mathbf{g}}^{\epsilon^s}$  e  $\underline{\mathbf{f}}^\epsilon$  substituído por  $\underline{\mathbf{f}}^{\epsilon^s}$ . Similarmente para os termos de flexão  $\underline{\mathbf{u}}^{\epsilon^b}$ ,  $\underline{\underline{\sigma}}^{\epsilon^b}$ . Nestas notas consideramos apenas os problemas de flexão.

## 1.2. Resultados de convergência

Consideramos agora a sequência de problemas parametrizados por  $\epsilon$ , e buscaremos qualificar o comportamento assintótico de  $\underline{\mathbf{u}}^\epsilon$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Seguimos aqui as idéias básicas apresentadas em [27].

A primeira dificuldade é que o domínio  $P^\epsilon$  depende também de  $\epsilon$ , e esta é superada através da mudança de variáveis  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}, x_3) = (\mathbf{x}^\epsilon, \epsilon^{-1}x_3^\epsilon)$ . Definimos então a placa escalonada  $P = \Omega \times (-1, 1)$ , sua lateral  $\partial P_L = \partial \Omega \times (-1, 1)$ , e suas partes de cima e de baixo por  $\partial P_\pm = \Omega \times \{-1, 1\}$ .



Definimos também os deslocamentos escalonados

$$\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)(\underline{\mathbf{x}}) = (\mathbf{u}(\epsilon)(\underline{\mathbf{x}}), u_3(\epsilon)(\underline{\mathbf{x}})) = (\epsilon^{-1}\mathbf{u}^\epsilon(\underline{\mathbf{x}}^\epsilon), u_3^\epsilon(\underline{\mathbf{x}}^\epsilon)).$$

Por simplicidade consideramos o caso em que a única força atuante é  $f_3^\epsilon$ , e consideramos que  $f_3^\epsilon(\underline{\mathbf{x}}^\epsilon) = \epsilon^2 f_3(\underline{\mathbf{x}})$ , onde  $f_3 : P \rightarrow \mathbb{R}$  independe de  $\epsilon$ . Baseado nas definições acima temos imediatamente que

$$(1.2.1) \quad \int_P \mathcal{C} \underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)) : \underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{v}}) d\underline{\mathbf{x}} = \int_P f_3 v_3 d\underline{\mathbf{x}} \quad \text{para todo } \underline{\mathbf{v}} \in \underline{\mathbf{V}}(P),$$

onde  $\underline{\mathbf{V}}(P) = \{\underline{\mathbf{v}} \in H^1(P) : \underline{\mathbf{v}} = 0 \text{ em } \partial P_L\}$  e

$$\underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{v}}) = \begin{pmatrix} \underline{\underline{e}}(\underline{\mathbf{v}}) & \epsilon^{-1} \mathbf{e}(\underline{\mathbf{v}}) \\ \epsilon^{-1} \mathbf{e}^T(\underline{\mathbf{v}}) & \epsilon^{-2} e_{33}(\underline{\mathbf{v}}) \end{pmatrix}.$$

Temos então o seguinte resultado

**TEOREMA 1.2.1.** *A seqüência de soluções de soluções  $\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)$  de (1.2.1) converge forte para  $\underline{\mathbf{u}}_{KL}$  em  $H^1(P)$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , onde*

$$(1.2.2) \quad \underline{\mathbf{u}}_{KL}(\mathbf{x}, x_3) = \begin{pmatrix} -x_3 \nabla \zeta(\mathbf{x}) \\ \zeta(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

e  $\zeta \in H_0^2(\Omega)$  é solução fraca de

$$(1.2.3) \quad \frac{8\mu(\lambda + \mu)}{3(\lambda + 2\mu)} \Delta^2 \zeta = \int_{-1}^1 f_3(\mathbf{x}, x_3) dx_3 \quad \text{em } \Omega, \quad \zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0 \quad \text{em } \partial \Omega$$

**DEMONSTRAÇÃO.** Dividiremos a demonstração em alguns passos.

*Passo 1:* De (1.2.1) temos que  $\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)$  e  $\underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon))$  são limitados em  $\underline{\mathbf{V}}(P)$  e  $\underline{\underline{L}}^2(P)$ , e portanto existem  $\underline{\mathbf{u}} \in \underline{\mathbf{V}}(P)$  e  $\underline{\underline{e}} \in \underline{\underline{L}}^2(P)$ , e subsequências (que também indexamos por  $\epsilon$ ) convergindo fraco para  $\underline{\mathbf{u}}$  e  $\underline{\underline{e}}$ , nos respectivos espaços, i.e.,  $\underline{\mathbf{u}}(\epsilon) \rightharpoonup \underline{\mathbf{u}}$  em  $\underline{\mathbf{V}}(P)$ , e  $\underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)) \rightharpoonup \underline{\underline{e}}$  em  $\underline{\underline{L}}^2(P)$ .

*Passo 2:* *Mostrar que  $\underline{\mathbf{u}} \in \underline{\mathbf{V}}_{KL}(P)$ , onde*

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{V}}_{KL}(P) &\stackrel{def}{=} \{(\mathbf{v}, v_3) \in \underline{\mathbf{V}}(P) : \partial_3 \mathbf{v} = -\nabla v_3, \partial_3 v_3 = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) - x_3 \nabla \zeta(\mathbf{x}) \\ \zeta(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \in \underline{\mathbf{V}}(P) : \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \zeta \in H_0^2(\Omega) \right\}. \end{aligned}$$

Como  $\underline{\mathbf{u}}(\epsilon) \rightharpoonup \underline{\mathbf{u}}$  em  $\underline{\mathbf{V}}(P)$ , então  $\underline{\underline{e}}(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)) \rightharpoonup \underline{\underline{e}}(\underline{\mathbf{u}})$  em  $\underline{\underline{L}}^2(P)$ . Como  $\underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)) = \underline{\underline{e}}(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon))$ , então  $\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{e}}(\underline{\mathbf{u}})$ . Além disto, como  $\underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon))$  é limitada, então por definição  $\|e_{i,3}(\underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)))\|_{L^2(P)} \leq c\epsilon$  para  $i = 1, 2, 3$ . Logo  $e_{i,3}(\underline{\underline{e}}(\underline{\mathbf{u}})) \rightarrow 0$  em  $L^2(P)$  e portanto  $e_{i,3}(\underline{\underline{e}}(\underline{\mathbf{u}})) = 0$ .

As duas formas para se definir  $\underline{\mathbf{V}}_{KL}$  são válidas pois de  $\partial_3 v_3 = 0$  e  $v_3 = 0$  em  $\partial P_L$  implica em  $v_3(\underline{\mathbf{x}}) = \eta_3(\mathbf{x})$  para algum  $\eta_3 \in H_0^1(\Omega)$ . Além disto,  $\partial_3 \mathbf{v} = -\nabla \eta_3$  e então  $\mathbf{v}(\underline{\mathbf{x}}) = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) - x_3 \nabla \eta_3(\mathbf{x})$  para algum  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ . Como  $\mathbf{v} \in \underline{\mathbf{V}}(P)$ , então  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  e  $\eta_3 \in H_0^2(\Omega)$ .

*Passo 3:* *Mostrar que*

$$\underline{\underline{e}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{e}}(\underline{\mathbf{u}}) & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \text{tr}(\underline{\underline{e}}(\underline{\mathbf{u}})) \end{pmatrix}$$

Note de (1.2.1) que para  $\underline{\mathbf{v}} \in \underline{\mathbf{V}}(P)$ ,

$$\begin{aligned}
(1.2.4) \quad & \epsilon^2 \int_P f_3 v_3 \, d\underline{\mathbf{x}} = \epsilon^2 \int_P \mathcal{C} \underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)) : \underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{v}}) \, d\underline{\mathbf{x}} \\
& = \epsilon^2 \int_P 2\mu \underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)) : \underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{v}}) + 4\mu \mathbf{e}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)) \cdot \mathbf{e}^\epsilon(\underline{\mathbf{v}}) + 2\mu e_{33}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)) e_{33}^\epsilon(\underline{\mathbf{v}}) + \lambda \operatorname{tr}(\underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon))) \operatorname{tr}(\underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{v}})) \, d\underline{\mathbf{x}} \\
& = \int_P 2\mu \epsilon^2 \underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)) : \underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{v}}) + 4\mu \epsilon \mathbf{e}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)) \cdot \mathbf{e}^\epsilon(\underline{\mathbf{v}}) + 2\mu e_{33}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)) e_{33}^\epsilon(\underline{\mathbf{v}}) \\
& \quad + \lambda \operatorname{tr}(\underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon))) [\epsilon^2 \operatorname{tr}(\underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{v}})) + e_{33}^\epsilon(\underline{\mathbf{v}})] \, d\underline{\mathbf{x}}.
\end{aligned}$$

Como  $\underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)) \rightarrow \underline{\underline{e}}$ , então tomando  $\epsilon \rightarrow 0$  acima, obtemos

$$\int_P [2\mu e_{33} + \lambda \operatorname{tr}(\underline{\underline{e}})] \partial_3 v_3 \, d\underline{\mathbf{x}} = 0,$$

para todo  $v_3 \in H^1(\Omega)$  tal que  $v_3 = 0$  em  $\partial P_L$ . Logo  $e_{33} = -\lambda/(2\mu + \lambda) \operatorname{tr}(\underline{\underline{e}}(\underline{\mathbf{u}}))$ . Tomando agora  $v_3 = 0$  e dividindo por  $\epsilon$  em (1.2.4), temos

$$\epsilon \int_P f_3 v_3 \, d\underline{\mathbf{x}} = \int_P 2\mu \epsilon \underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)) : \underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{v}}) + 4\mu \mathbf{e}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)) \cdot \partial_3 \underline{\mathbf{v}} + \lambda \epsilon \operatorname{tr}(\underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon))) \operatorname{tr}(\underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{v}})) \, d\underline{\mathbf{x}}.$$

Tomando novamente  $\epsilon \rightarrow 0$  temos que  $\mathbf{e} = 0$ .

*Passo 4: unicidade do limite.* Para definir o problema que  $\underline{\mathbf{u}}$  satisfaz, note que

$$\int_P 2\mu \underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)) : \underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{v}}) + \lambda \operatorname{tr}(\underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon))) \operatorname{tr}(\underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{v}})) \, d\underline{\mathbf{x}} = \int_P f_3 v_3 \, d\underline{\mathbf{x}} \quad \text{para todo } \underline{\mathbf{v}} \in \underline{\mathbf{V}}_{KL}(P).$$

Logo, tomando  $\epsilon \rightarrow 0$  e usando resultados anteriores, obtemos

$$(1.2.5) \quad \int_P 2\mu \underline{\underline{e}}(\underline{\mathbf{u}}) : \underline{\underline{e}}(\underline{\mathbf{v}}) + \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda} \operatorname{tr}(\underline{\underline{e}}(\underline{\mathbf{u}})) \operatorname{tr}(\underline{\underline{e}}(\underline{\mathbf{v}})) \, d\underline{\mathbf{x}} = \int_P f_3 v_3 \, d\underline{\mathbf{x}} \quad \text{para todo } \underline{\mathbf{v}} \in \underline{\mathbf{V}}_{KL}(P).$$

Mas este espaço é fechado em  $\underline{\mathbf{V}}(P)$ , e a forma (1.2.5) é coerciva em  $\underline{\mathbf{V}}(P)$ , portanto  $\underline{\mathbf{u}}$  está unicamente definido. Concluimos também que toda família  $\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)$  converge fraco para  $\underline{\mathbf{u}}$ , e não somente subsequências.

Usando que  $\underline{\mathbf{u}} \in \underline{\mathbf{V}}_{KL}$ , escrevemos  $\underline{\mathbf{u}} = (\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) - x_3 \nabla \zeta(\mathbf{x}), \zeta(\mathbf{x}))$ . Escolhendo  $\underline{\mathbf{v}} = (\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}), 0)$  em (1.2.5), concluimos que  $\boldsymbol{\xi} = 0$ . Escolhendo  $\underline{\mathbf{v}} = (-x_3 \nabla \eta(\mathbf{x}), \eta(\mathbf{x}))$  em (1.2.5), e integrando por partes obtemos (1.2.3).

*Passo 5: Convergência forte de  $\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)$ .* Mostraremos que  $\underline{\underline{e}}(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon))$  converge forte para  $\underline{\underline{e}}(\underline{\mathbf{u}})$  em  $L^2(P)$ , e deste resultado teremos pela desigualdade de Korn que  $\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)$  converge forte em  $\underline{\mathbf{V}}(P)$ .

Primeiramente note que como  $\|e_{i,3}(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon))\|_{L^2(P)} \rightarrow 0$ , e  $e_{i,3}(\underline{\mathbf{u}}) = 0$ , a convergência de  $e_{i,3}(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon))$  é forte. Note a seguir que

$$\begin{aligned}
(1.2.6) \quad & \int_P \mathcal{C}[\underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)) - \underline{\underline{e}}] : [\underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)) - \underline{\underline{e}}] \, d\underline{\mathbf{x}} = \int_P f_3 u_3(\epsilon) \, d\underline{\mathbf{x}} + \int_P \mathcal{C}[\underline{\underline{e}} - 2\underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon))] : \underline{\underline{e}} \, d\underline{\mathbf{x}} \\
& \rightarrow \int_P f_3 u_3 \, d\underline{\mathbf{x}} - \int_P \mathcal{C} \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{e}} \, d\underline{\mathbf{x}} = \int_P f_3 u_3 \, d\underline{\mathbf{x}} - \int_P 2\mu (\underline{\underline{e}} : \underline{\underline{e}}) + \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} [\operatorname{tr}(\underline{\underline{e}})]^2 \, d\underline{\mathbf{x}} = 0
\end{aligned}$$

por (1.2.5). Então  $\underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)) \rightarrow \underline{\underline{e}}$ , e segue-se que  $\underline{\underline{e}}(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)) = \underline{\underline{e}}^\epsilon(\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)) \rightarrow \underline{\underline{e}} = \underline{\underline{e}}(\underline{\mathbf{u}})$ .  $\square$

**OBSERVAÇÃO.** Cabe ressaltar que no desenvolvimento acima, os termos devidos ao deslocamento de *membrana* não aparecem. Isto é devido à simplificação no carregamento, dado somente por  $f_3$ . Em geral, o deslocamento de membrana é modelado por uma equação de segunda ordem desacoplada do problema biharmônico. Este desacoplamento é também um caso particular das propriedades materiais escolhidas. Para laminados por exemplo, ou mesmo materiais homogêneos porém ortotrópicos, os regimes de flexão e membrana se acoplam.

Possíveis críticas à derivação do modelo biharmônico pelo resultado acima são a perda de contato com o comportamento físico da placa, e que a convergência é dada num domínio não físico, a placa escalonada  $P$ . Ao nosso ver entretanto, a demonstração acima é preferível do ponto de vista matemático do que aos clássicos argumentos de que “fibras permanecem normais à superfície média”, argumentação de provavelmente difícil formalização lógica.

Mantendo o espírito de modelagem assintótica, mas utilizando-se de técnicas de expansões formais, justificadas somente *a posteriori*, Dauge e Gruais [31] desenvolveram expansões de ordem arbitrárias para  $\underline{\mathbf{u}}(\epsilon)$  na forma

$$(1.2.7) \quad \underline{\mathbf{u}}(\epsilon) \sim \underline{\mathbf{u}}_{KL} + \epsilon \underline{\mathbf{u}}_{KL}^1 + \epsilon \underline{\mathbf{w}}^1 + \epsilon^2 \underline{\mathbf{u}}^2 + \epsilon^2 \underline{\mathbf{w}}^2 + \dots .$$

O primeiro termo da expansão acima é dado como em (1.2.2), justificando novamente o modelo biharmônico. Os termos subsequentes são  $\underline{\mathbf{u}}_{KL}^1 \in \underline{\mathbf{V}}_{KL}$ , e  $\underline{\mathbf{u}}^2$ ,  $\underline{\mathbf{u}}^3$ , etc, que não satisfazem as condições de contorno corretas em  $\partial P_L$ . Este erro é compensado pelos corretores de fronteira  $\underline{\mathbf{w}}^1$ ,  $\underline{\mathbf{w}}^2$ , etc. Um interessante resultado deste trabalho é a estimativa de erro

$$\|\underline{\mathbf{u}}(\epsilon) - \underline{\mathbf{u}}_{KL}\|_{H^1(P)} \leq c\epsilon^{1/2}.$$

**OBSERVAÇÃO.** Em [63] foi utilizado o Teorema de Prager–Synge para demonstrar a convergência do modelo biharmônico, mas este não é derivado.

### 1.3. Modelos do tipo Reissner–Mindlin

Um outro modelo para placas linearmente elásticas é o Reissner–Mindlin (tomaremos aqui a liberdade de denominar por Reissner–Mindlin todas as variantes deste tipo de modelo). Normalmente este modelo é também obtido com uma certa dose de considerações de ordem físicas, e se tornou popular na comunidade de engenharia por “incluir cisalhamento”.

Existe entretanto uma derivação [7] totalmente baseada em argumentos matemáticos e que posiciona o sistema de Reissner–Mindlin numa hierarquia de modelos que se tornam cada vez mais complexos (e acurados) [71]. A modelagem não tem cunho assintótico, e é baseada num princípio variacional de Hellinger–Reissner. Uma das vantagens desta modelagem é que permite o uso do princípio das duas energias (ou Teorema de Prager–Synge) para estimação do erro de aproximação.

Abaixo mostramos como se pode definir as equações de Reissner–Mindlin, e discutimos sua “consistência asintótica”, num sentido que deixaremos claro mais a seguir.

**1.3.1. Redução de dimensão.** O *segundo princípio variacional de Hellinger–Reissner* caracteriza a solução  $(\underline{\mathbf{u}}^\epsilon, \underline{\underline{\sigma}}^\epsilon)$  de (1.1.1) como o único ponto crítico de

$$L'(\underline{\mathbf{v}}, \underline{\underline{\tau}}) = \frac{1}{2} \int_{P^\epsilon} \mathcal{C}^{-1} \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\tau}} d\underline{\mathbf{x}}^\epsilon + \int_{P^\epsilon} \mathbf{div} \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\mathbf{v}} d\underline{\mathbf{x}}^\epsilon + \int_{P^\epsilon} \underline{\mathbf{f}}^\epsilon \cdot \underline{\mathbf{v}} d\underline{\mathbf{x}}^\epsilon$$

em  $\underline{\mathbf{V}}'(P^\epsilon) \times \underline{S}'_0(P^\epsilon)$ , onde

$$\underline{\mathbf{V}}'(P^\epsilon) = \underline{\mathbf{L}}^2(P^\epsilon), \quad \underline{S}'_0(P^\epsilon) = \{ \underline{\tau} \in \underline{H}(\operatorname{div}, P^\epsilon) : \underline{\tau} \underline{\mathbf{n}} = 0 \text{ sobre } \partial P^\epsilon_\pm \}.$$

De forma equivalente,  $\underline{\mathbf{u}}^\epsilon \in \underline{\mathbf{V}}'(P^\epsilon)$  e  $\underline{\tau} \in \underline{S}'_0(P^\epsilon)$  satisfazem

$$\begin{aligned} \int_{P^\epsilon} \mathcal{C}^{-1} \underline{\sigma}^\epsilon : \underline{\tau} \, d\underline{\mathbf{x}} + \int_{P^\epsilon} \underline{\mathbf{u}}^\epsilon \cdot \underline{\operatorname{div}} \underline{\tau} \, d\underline{\mathbf{x}}^\epsilon &= 0 \quad \text{para todo } \underline{\tau} \in \underline{S}'_0(P^\epsilon), \\ \int_{P^\epsilon} \underline{\operatorname{div}} \underline{\sigma}^\epsilon \cdot \underline{\mathbf{v}} \, d\underline{\mathbf{x}}^\epsilon &= \int_{P^\epsilon} -\underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, d\underline{\mathbf{x}}^\epsilon \quad \text{para todo } \underline{\mathbf{v}} \in \underline{\mathbf{V}}'(P^\epsilon). \end{aligned}$$

Ao procurar pontos críticos de  $L'$  em subespaços de  $\underline{\mathbf{V}}'(P^\epsilon) \times \underline{S}'_0(P^\epsilon)$ , definimos classes de modelos. Os subespaços escolhidos são compostos por funções que variam polinomialmente na direção transversa. Uma possibilidade é escolher

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{V}}'(P^\epsilon, 1) &= \{ \underline{\mathbf{v}} \in \underline{\mathbf{V}}'(P^\epsilon) : \operatorname{grau}_3 \mathbf{v} = 1, \operatorname{grau}_3 v_3 = 2 \}, \\ \underline{S}'_0(P^\epsilon, 1) &= \{ \underline{\tau} \in \underline{S}'_0(P^\epsilon) : \operatorname{grau}_3 \underline{\tau} = 1, \operatorname{grau}_3 \underline{\tau} = 2, \operatorname{grau}_3 \tau_{33} = 3 \}. \end{aligned}$$

Por  $\operatorname{grau}_3 \mathbf{v} = 1$  indicamos que  $\mathbf{v}$  é um polinômio linear com respeito à  $x_3^\epsilon$ , etc.

Note que pela escolha feita,  $\underline{\operatorname{div}} \underline{S}'_0(P^\epsilon, p) = \underline{\mathbf{V}}'(P^\epsilon, p)$  e a condição *inf-sup* garante a existência de um único ponto crítico  $(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\sigma})$  de  $L'$ . Segue-se também que não apenas

$$\underline{\operatorname{div}} \underline{\sigma}(p) = -\underline{\pi}_{\underline{\mathbf{V}}'} \underline{\mathbf{f}}^\epsilon,$$

onde  $\underline{\pi}_{\underline{\mathbf{V}}'} \underline{\mathbf{f}}^\epsilon$  é a projeção ortogonal  $L^2$  de  $\underline{\mathbf{f}}^\epsilon$  em  $\underline{\mathbf{V}}'(P^\epsilon, 1)$ , mas  $\underline{\sigma}$  minimiza a energia complementar

$$J_c(\underline{\tau}) = \frac{1}{2} \int_{P^\epsilon} \mathcal{C}^{-1} \underline{\tau} : \underline{\tau} \, d\underline{\mathbf{x}}^\epsilon$$

sobre  $\underline{\tau} \in \underline{S}'_0(P^\epsilon, 1)$  tais que  $\underline{\operatorname{div}} \underline{\tau} = -\underline{\pi}_{\underline{\mathbf{V}}'} \underline{\mathbf{f}}^\epsilon$ .

**OBSERVAÇÃO.** Fica claro que a escolha de espaços acima, é só uma das possíveis para se obter modelos. Intuitivamente espera-se que aumentando a grau dos polinômios escolhidos, ou melhor, *enriquecendo-se* os espaços aproximantes, Entretanto há que se prestar atenção no fato de que nem todas as escolhas de graus polinomiais gerarão problemas bem postos.

Quanto ao modelo final, por simplicidade levaremos em conta que a única força atuante é o peso da placa, i.e., existe uma densidade de força volumétrica dada por uma constante  $f_3^\epsilon$ . Suponha que

$$(1.3.1) \quad \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}^\epsilon) = \begin{pmatrix} -\phi(\underline{\mathbf{x}}^\epsilon) x_3^\epsilon \\ \omega(\underline{\mathbf{x}}^\epsilon) + \omega^2(\underline{\mathbf{x}}^\epsilon) p_2(x_3^\epsilon) \end{pmatrix},$$

onde  $p_2(z) = (3/2)(z^2 - \epsilon^2/5)$ . Então

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} \operatorname{div} \mathcal{C}^* \underline{e}(\phi) + \epsilon^{-2} \frac{5\lambda}{6} (\phi - \nabla \omega) &= 0 \quad \text{em } \Omega, \\ \epsilon^{-2} \frac{5\lambda}{6} \operatorname{div}(\phi - \nabla \omega) &= \epsilon^{-2} f_3^\epsilon \quad \text{em } \Omega, \\ \phi = 0 \quad \omega = 0 &\quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{C}^* \underline{e}(\mathbf{u}) = 2\mu \underline{e}(\mathbf{u}) + \frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda} \operatorname{tr}(\underline{e}(\mathbf{u})) \underline{\delta}$ .

Este é um modelo de Reissner–Mindlin model, com fator de cisalhamento  $5/6$ . As outras incógnitas podem ser calculadas a *posteriori* por simples substituições. Veja [7], onde as equações acima são calculadas explicitamente.

**1.3.2. Consistência.** Dizemos que um modelo de placas é *assintoticamente consistente* quando o limite  $\epsilon \rightarrow 0$  é o mesmo do problema original (1.3.1). De forma mais precisa, se obedecendo aos mesmos escalonamentos do Teorema 1.2.1, o limite em  $H^1(P)$  da solução do modelo é  $\underline{\mathbf{u}}_{KL}$ , definido em (1.2.2).

OBSERVAÇÃO. Outra forma de se definir consistência assintótica para uma sequência de aproximações  $\underline{\mathbf{u}}^{M,\epsilon}$  para  $\underline{\mathbf{u}}^\epsilon$  é impor

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\|\underline{\mathbf{u}}^\epsilon - \underline{\mathbf{u}}^{M,\epsilon}\|_{L^2(P^\epsilon)}}{\|\underline{\mathbf{u}}^\epsilon\|_{L^2(P^\epsilon)}} = 0,$$

para todo carregamento tal que a solução do modelo biarmônico seja diferente de zero. A vantagem desta definição alternativa é evitar o uso da placa escalonada e estimar a consistência no domínio original  $P^\epsilon$ .

No caso de Reissner–Mindlin definido por, basta mostrar que

$$\boldsymbol{\phi} \rightarrow \nabla \zeta, \quad \omega \rightarrow \zeta,$$

forte quando  $\epsilon \rightarrow 0$  (é fácil depois mostrar que o termo  $\omega^2$ , que não foi explicitado nestas notas, converge para zero). Para mostrar que esta convergência, reescrevemos a solução de Reissner–Mindlin como

$$(1.3.2) \quad (\boldsymbol{\phi}, \omega) = \arg \min_{(\mathbf{v}, v_3) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} J(\mathbf{v}, v_3)$$

onde a energia de Reissner–Mindlin é dada por

$$(1.3.3) \quad J(\mathbf{v}, v_3) = \frac{1}{3} \int_{\Omega} \mathbf{C}^* \underline{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{v}) : \underline{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \epsilon^{-2} \frac{5\lambda}{6} \int_{\Omega} |\mathbf{v} - \nabla v_3|^2 \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} f_3 v_3 \, d\mathbf{x}.$$

Usamos acima o escalonamento  $f_3^\epsilon = \epsilon^2 f_3$ . A fim de calcular o limite quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , usamos o seguinte resultado [13, 26].

LEMA 1.3.1. Sejam  $X$  e  $Z$  espaços de Hilbert,  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  forma bilinear simétrica limitada e não negativa,  $B : X \rightarrow Z$  e  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  lineares e limitados. Suponha que exista  $c > 0$  tal que

$$a(x, x) + \|Bx\|_Z^2 \geq c\|x\|_X^2 \text{ para todo } x \in X.$$

Então,

- (1) Para todo  $\epsilon > 0$  existe um único  $x^\epsilon \in X$  que minimiza

$$E^\epsilon(x) = \frac{1}{2}a(x, x) + \frac{\epsilon^{-2}}{2}\|Bx\|_Z^2 - F(x).$$

- (2) Existe um único  $x^0 \in \mathcal{N}(B)$  (núcleo de  $B$ ) que minimiza

$$E^0(x) = \frac{1}{2}a(x, x) - F(x).$$

- (3)  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} x^\epsilon = x^0$  em  $X$ .

DEMONSTRAÇÃO. A primeira e segunda afirmativas seguem-se do fato que

$$(x_1, x_2) \mapsto a(x_1, x_2) + \epsilon^{-2}(Bx_1, Bx_2)_Z$$

define uma aplicação bilinear coerciva e limitada em  $X$ , e por Lax–Milgram. Aqui,  $(\cdot, \cdot)_Z$  indica o produto interno em  $Z$ . De fato,  $x^\epsilon \in X$  e  $x^0 \in \mathcal{N}(B)$  são as soluções de

$$\begin{aligned} a(x^\epsilon, x) + \epsilon^{-2}(Bx^\epsilon, Bx)_Z &= F(x) \quad \text{para todo } x \in X, \\ a(x^0, x) &= F(x) \quad \text{para todo } x \in \mathcal{N}(B). \end{aligned}$$

A seguir note que existe constante  $c$  tal que para todo  $\epsilon \leq 1$ ,

$$\|x^\epsilon\|^2 \leq c[a(x^\epsilon, x^\epsilon) + \epsilon^{-2}\|Bx^\epsilon\|_Z^2] = cF(x^\epsilon) \leq c\|F\|_{X^*}\|x^\epsilon\|_X.$$

Portanto  $\|x^\epsilon\|_X$  e  $\epsilon^{-1}\|Bx^\epsilon\|_Z$  são limitados uniformemente em  $\epsilon$ . Logo  $Bx^\epsilon \rightarrow 0$ , e existe subsequência de  $(x^\epsilon)$ , ainda denotada por  $(x^\epsilon)$ , convergindo fraco para algum  $\bar{x}$  em  $X$ . Note que  $B\bar{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Bx^\epsilon = 0$ . Da mesma forma,  $\epsilon^{-1}Bx^\epsilon$  converge fraco para algum  $p$  em  $Z$ . Tomando o limite em  $a(x^\epsilon, x) = F(x)$  para  $x \in \mathcal{N}(B)$ , temos que

$$a(\bar{x}, x) = F(x) \quad \text{para todo } x \in \mathcal{N}(B),$$

e portanto  $\bar{x} = x^0$ . Concluimos então que toda a sequência  $(x^\epsilon)$  converge fraco para  $x^0$ . Para mostrar que a convergência é forte, usamos que

$$\begin{aligned} \|x^\epsilon - x^0\|_X^2 &\leq a(x^\epsilon - x^0, x^\epsilon - x^0) + \epsilon^{-2}\|B(x^\epsilon - x^0)\|_Z^2 = a(x^\epsilon, x^\epsilon) + a(x^0, x^0 - 2x^\epsilon) + \epsilon^{-2}\|Bx^\epsilon\|_Z^2 \\ &= F(x^\epsilon) + a(x^0, x^0 - 2x^\epsilon) \rightarrow F(x^0) - a(x^0, x^0) = 0, \end{aligned}$$

e portanto  $x^\epsilon \rightarrow x^0$ . Note também que como  $Bx^0 = 0$ , então  $\epsilon^{-1}Bx^\epsilon \rightarrow 0$ .  $\square$

Aplicamos agora o resultado de convergência acima para a solução de Reissner–Mindlin definida por (1.3.2). Sejam

$$\begin{aligned} X &= \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega), & Z &= L^2(\Omega), & F(\mathbf{v}, v_3) &= \int_\Omega f_3 v_3 \, d\mathbf{x}, \\ a((\mathbf{v}, v_3); (\mathbf{w}, w_3)) &= \frac{1}{3} \int_\Omega \mathcal{C}^* \underline{\underline{e}}(\mathbf{v}) : \underline{\underline{e}}(\mathbf{w}) \, d\mathbf{x}, & B(\mathbf{v}, v_3) &= \frac{5\lambda}{6} \int_\Omega |\mathbf{v} - \nabla v_3|^2 \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

Primeiro observamos que  $\mathcal{N}(B) = \{(\nabla v_3, v_3) : v_3 \in H_0^2(\Omega)\}$ . Então por substituição concluimos que  $(\phi, \omega) \rightarrow (\nabla \zeta, \zeta)$ , onde  $\zeta$  é a solução do problema biarmônico (1.2.3). Portanto, o modelo de Reissner–Mindlin aqui apresentado é assintoticamente consistente, como queríamos mostrar.

OBSERVAÇÃO. É possível também expandir  $\phi$  e  $\omega$  em suas séries assintóticas [16], como em (1.2.7). Isto gera uma expansão para  $\underline{\mathbf{u}}$  (1.3.1) que coincide com a de (1.2.7) em seu primeiro termo.

#### 1.4. Aspectos numéricos

Os dois modelos aqui apresentados, o biarmônico e o de Reissner–Mindlin apresentam dificuldades distintas porém interligadas, sob o ponto de vista de discretizações com métodos de Galerkin, em particular com elementos finitos.

Abaixo descrevemos rapidamente o método de elementos finitos “clássico” e a seguir discutimos a discretização dos modelos para placas.

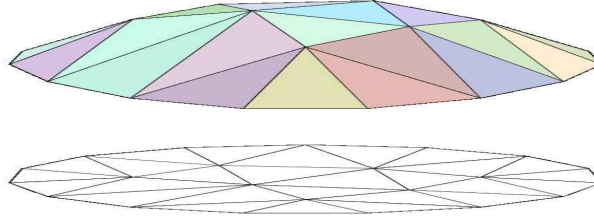


FIG. 1. Discretização e função linear por partes [75].

**1.4.1. O método de elementos finitos.** O método de Galerkin com elementos finitos para EDPs baseia-se em formulações fracas. A idéia é satisfazer as formas fracas não no espaço original, mas sim buscar uma solução aproximada num subespaço deste, em geral de dimensão finita. Por sua praticidade, o método de elementos finitos popularizou-se nas últimas décadas.

Para exemplificar o caso mais comum, seja  $\Omega$  um domínio poligonal, e considere uma triangulação regular  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$ , cujos triângulos tenham diâmetro máximo  $h$ . Denominamos de *nós* os vértices dos triângulos. Seja o espaço  $V_h(\Omega) \subset H^1(\Omega)$  de funções lineares em cada triângulo de  $\mathcal{T}_h$ . Ou seja, é o espaço de funções contínuas lineares por partes. Uma triangulação típica e uma função linear por partes são representadas na figura 1. Se  $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma forma bilinear, coerciva e limitada, e  $u \in H^1(\Omega)$  satisfaz

$$a(u, v) = f(v) \quad \text{para todo } v \in H^1(\Omega),$$

onde  $f \in H^{-1}(\Omega)$ , então a solução por elementos finitos  $u_h \in V_h(\Omega)$  resolve

$$a(u, v_h) = f(v_h) \quad \text{para todo } v_h \in V_h(\Omega).$$

Note não somente que o Lema de Lax–Milgram garante existência e unicidade da solução  $u_h$ , mas que  $a(u - u_h, v_h) = 0$  para todo  $v_h \in V_h(\Omega)$ . Logo, usando a coercividade e continuidade da forma bilinear temos que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq ca(u - u_h, u - u_h) = ca(u - u_h, u - v_h) \leq c\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}\|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}$$

para todo  $v_h \in V_h(\Omega)$ . Portanto  $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c \inf_{v_h \in V_h(\Omega)} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}$ , o que garante uma “certa” optimalidade do método. Usando teoria de interpolação obtemos a desigualdade clássica

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq ch^2 \|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

**1.4.2. Discretizações para Reissner–Mindlin.** Como a forma bilinear associada ao problema biarmônico exige maior regularidades dos espaços aproximantes, discretizações “clássicas” demandam a construção de funções também com maior regularidade, no caso funções com derivadas contínuas. Esta construção é não trivial em geral, e existem várias alternativas (métodos não conformes, mistos, descontínuos) na literatura que propõe o uso de subespaços menos regulares.

Quanto ao sistema de Reissner–Mindlin, uma interessante situação se apresenta. O sistema é de segunda ordem, e a forma bilinear é contínua e coerciva. Portanto, não só a solução por elementos finitos se aproxima da solução exata quando a dimensão do subespaço aproximante cresce, como o resultado de melhor aproximação garante que a solução numérica

é a melhor do subespaço, na norma da energia (1.3.3). Em outras palavras, o método de Galerkin com polinômios de baixa ordem *converge* quando  $h \rightarrow 0$ .

O problema aqui é que a convergência depende fortemente de  $\epsilon$ . Isto não chega a ser surpresa pois o problema limite, quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , é de quarta ordem, e neste limite a técnica utilizada para equações de segunda ordem simplesmente não funcionam.

Mais precisamente, dada uma triangularização  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$ , sejam  $\Phi_h \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  e  $W_h \subset H_0^1(\Omega)$  espaços das funções contínuas e lineares por partes. Seja

$$(\phi_h, \omega_h) = \arg \min_{(\mathbf{v}, v_3) \in \Phi_h \times W_h} J(\mathbf{v}, v_3)$$

a solução de Galerkin que minimiza a energia de Reissner–Mindlin (1.3.3). Pelo Lema 1.3.1,  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\phi_h, \omega_h) \rightarrow (\nabla \omega_h^0, \omega_h^0) \in \Phi_h \times W_h$ . Mas como  $\omega_h^0 \in W_h$  é linear por partes, então  $\nabla \omega_h^0$  é constante por partes. Mas  $\nabla \omega_h^0 \in \Phi_h \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  implica que  $\nabla \omega_h^0$  é constante em  $\Omega$  e se anula na fronteira  $\partial\Omega$ . A conclusão é que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi_h \rightarrow \nabla \omega_h^0 = 0$ . De forma análoga  $\nabla \omega_h^0 = 0$  e  $\omega_h^0 \in H_0^1(\Omega)$  implicam em  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \omega_h = \omega_h^0 = 0$ . Logo a solução numérica “limite” é dada por  $\phi_h^0 = 0$ ,  $\omega_h^0 = 0$ . Para  $\epsilon \ll h$  porém não nulo,  $(\phi_h, \omega_h)$  torna-se “quase” zero, distante da solução exata. A este fenômeno dá-se o nome de *trancamento* ou *locking numérico*.

Uma estratégia bem sucedida na literatura para evitar trancamento é a seguinte. Começa-se definindo um espaço de elementos finitos  $\Gamma_h \supset \nabla W_h$ , bem como um operador  $\mathbf{P}_h : \Phi_h \rightarrow \Gamma_h$ . Busca-se então minimizar a energia

$$(1.4.1) \quad J_h(\mathbf{v}, v_3) = \frac{1}{3} \int_{\Omega} \mathcal{C}^* \underline{\underline{e}}(\mathbf{v}) : \underline{\underline{e}}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \epsilon^{-2} \frac{5\lambda}{6} \int_{\Omega} |\mathbf{P}_h \mathbf{v} - \nabla v_3|^2 \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} f_3 v_3 \, d\mathbf{x},$$

ao invés de (1.3.3). Quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , a restrição limite torna-se  $\mathbf{P}_h \phi_h^0 = \nabla \omega_h^0$ . A introdução de  $\Gamma_h$  e  $\mathbf{P}_h$  gera flexibilidade e possibilita definições de esquemas numéricos que não sofrem com o trancamento [40].

Outra estratégia comum para gerar métodos sem trancamento é a seguinte [14]. Definimos o cisalhamento

$$\zeta = \epsilon^{-2} \frac{5\lambda}{6} (\nabla \omega - \phi),$$

e reescrevemos a solução  $(\phi, \omega, \zeta)$  de Reissner–Mindlin na *forma mista*, como único ponto crítico, na verdade de sela, de

$$(1.4.2) \quad L(\mathbf{v}, v_3, \gamma) = \frac{1}{3} \int_{\Omega} \mathcal{C}^* \underline{\underline{e}}(\mathbf{v}) : \underline{\underline{e}}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \gamma \cdot (\nabla v_3 - \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \epsilon^2 \frac{6}{10\lambda} \int_{\Omega} |\gamma|^2 \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} f_3 v_3 \, d\mathbf{x},$$

em  $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$ . Note que a reformulação acima elimina o comportamento singular em  $\epsilon = 0$  ao preço de não ser mais um problema de mínimo. Ao contrário do método de Galerkin, discretizações mistas envolvendo (1.4.2) são normalmente livres de trancamento, mas nem todas as escolhas de espaços de aproximação são bem postas ou estáveis. Em Galerkin, “qualquer” escolha de espaços é estável, mas o problema de trancamento está presente.



Nesta linha de pensamento, temos que  $(\phi, \omega, \zeta)$  ponto crítico de (1.4.2) resolve em  $\Omega$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} \operatorname{div} \mathcal{C}^* \underset{\approx}{e}(\phi) - \zeta &= 0, \\ -\operatorname{div} \zeta &= f_3, \\ \frac{5\lambda}{6} (\nabla \omega - \phi) - \epsilon^2 \zeta &= 0, \end{aligned}$$

com as condições de contorno  $\phi = 0$ ,  $\omega = 0$  sobre  $\partial\Omega$ . Usando a decomposição de Helmholtz, existem únicos  $r \in H_0^1(\Omega)$  e  $p \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$  tais que  $\zeta = \nabla r + \operatorname{curl} p$ , onde  $\operatorname{curl} p = (\partial p/\partial y, -\partial p/\partial x)$ . O sistema torna-se então

$$\begin{aligned} -\Delta r &= f_3, \\ -\frac{1}{3} \operatorname{div} \mathcal{C}^* \underset{\approx}{e}(\phi) - \operatorname{curl} p &= \nabla r, \\ -(\phi - \nabla \omega) - \epsilon^2 \frac{6}{5\lambda} \operatorname{curl} p &= \epsilon^2 \nabla r. \end{aligned}$$

ou, na forma fraca,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla r \cdot \nabla \nu \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} f_3 \nu \, d\mathbf{x} \quad \text{para todo } \nu \in H_0^1(\Omega), \\ \frac{1}{3} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathcal{C}^* \underset{\approx}{e}(\phi) : \underset{\approx}{e}(\psi) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \operatorname{curl} p \cdot \psi \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \nabla r \cdot \psi \, d\mathbf{x} \quad \text{para todo } \psi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} -\phi \cdot \operatorname{curl} q \, d\mathbf{x} - \epsilon^2 \frac{6}{5\lambda} \int_{\Omega} \operatorname{curl} p \cdot \operatorname{curl} q \, d\mathbf{x} &= 0 \quad \text{para todo } q \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}, \\ \int_{\Omega} \nabla \omega \cdot \nabla s \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \phi \cdot \nabla s \, d\mathbf{x} + \epsilon^2 \int_{\Omega} \nabla r \cdot \nabla s \, d\mathbf{x} \quad \text{para todo } s \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

A discretização do sistema acima torna-se agora mais acessível. De fato, a primeira equação é a de Poisson. Calculado  $r$ , as duas equações seguintes representam um sistema de Stokes perturbado para  $(-\phi_2, \phi_1)$ . Finalmente temos uma outra equação de Poisson para  $\omega$ . Para todos os problemas acima existem eficientes formulações numéricas com elementos finitos.

Mais recentemente, alternativas envolvendo métodos do tipo *Galerkin descontínuo* têm sido explorados com sucesso [15].



## CAPÍTULO 2

### Modelagem em domínios com fronteiras rugosas

Estamos interessados em EDPs definidas em domínios cuja fronteira, ou ao menos parte dela, é rugosa. Este tipo de problemas tem várias aplicações, e soluções numéricas são em geral caras computacionalmente pois envolvem a discretização da fronteira com malhas muito refinadas. Uma saída é substituir a EDP original por outra, num domínio mais fácil de ser discretizado. Discutimos este tipo de procedimento, restritos a casos periódicos, na Seção 2.2. Outra possibilidade, que proporemos na Seção 2.3, é o uso de elementos finitos multiescalas, que dispensa periodicidade num processo de *homogeneização numérica*.

Em ambos métodos, técnicas de análise assintótica são ferramentas fundamentais, motivando o desenvolvimento de novos modelos, e ajudando na análise de erro.

#### 2.1. Definição do problema

Considere a sequência de soluções  $u^\epsilon$ , parametrizada por  $\epsilon < 1$ , tal que

$$(2.1.1) \quad \begin{aligned} -\Delta u^\epsilon &= f && \text{em } \Omega^\epsilon, \\ u^\epsilon &= 0 && \text{sobre } \partial\Omega^\epsilon, \end{aligned}$$

onde  $f \in L^2(\Omega^\epsilon)$ .

Suponha que o domínio  $\Omega^\epsilon$  é um retângulo com um fundo rugoso, como na Figura 1. Para  $d > \epsilon$ , seja

$$(2.1.2) \quad \Omega^\epsilon = \{ \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, -d + \psi_r^\epsilon(x) < y < 1 \},$$

onde a função de Lipschitz  $\psi_r^\epsilon$  é tal que  $\psi_r^\epsilon(0) = \psi_r^\epsilon(1) = 0$ , e  $\|\psi_r^\epsilon\|_{L^\infty(0,1)} < \epsilon$ . O gráfico de  $\psi_r^\epsilon$  define  $\Gamma_r^\epsilon$ , a fronteira inferior de  $\Omega^\epsilon$ :

$$\Gamma_r^\epsilon = \{ (x, y) \in \partial\Omega^\epsilon : y = -d + \psi_r^\epsilon(x) \}.$$

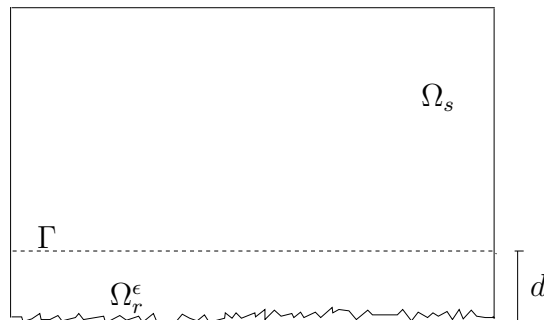


FIG. 1. O domínio  $\Omega^\epsilon$ .

Definimos dois subdomínios de  $\Omega^\epsilon$ , um contendo as rugosidades, e outro longe delas, como na Figura 1. Sejam

$$(2.1.3) \quad \Omega_s = (0, 1) \times (0, 1), \quad \Omega_r^\epsilon = \Omega^\epsilon \setminus \overline{\Omega_s}, \quad \Gamma = (0, 1) \times \{0\}.$$

Note que

$$(2.1.4) \quad \Omega_r^\epsilon = \{\mathbf{x} = (x, y) \in \Omega^\epsilon : 0 < x < 1, -d + \psi_r^\epsilon(x) < y < 0\}.$$

Por simplicidade supomos que  $f$  se anula em  $\Omega_r^\epsilon$ .

## 2.2. Modelos baseados em leis de parede

Supomos neste caso que as rugosidades são *periódicas*, i.e.,  $\psi_r^\epsilon(x) = \epsilon\psi_r(\epsilon^{-1}x_1)$ , onde a função  $\psi_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é independente de  $\epsilon$ , de Lipschitz e periódica com período 1. Sem perda de generalidade, supomos que  $\|\psi_r\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1$ . Finalmente, Seja

$$(2.2.1) \quad d = d_0\epsilon,$$

onde  $d_0 > 1$ .

**2.2.1. Definição da expansão assintótica.** É claro que a solução  $u^\epsilon$  depende não trivialmente de  $\epsilon$ . O objetivo aqui é tornar esta dependência explícita, e mostrar como se pode desenvolver modelos para (2.1.1). Procuramos uma expansão formal na forma

$$(2.2.2) \quad u^\epsilon \sim u^0 + \epsilon v^1(\epsilon) + \epsilon \Psi^1(\epsilon) + \epsilon^2 v^2(\epsilon) + \epsilon^2 \Psi^2(\epsilon) + \dots,$$

onde os  $\Psi^i(\epsilon)$  são “corretores de fronteira”. Os termos  $v^i(\epsilon)$ , e  $\Psi^i(\epsilon)$  dependem de  $\epsilon$ , como a notação indica. Apesar de parecer estranho à primeira vista, sua introdução na verdade torna o desenvolvimento da expansão mais simples. Numa segunda etapa, é possível reordenar (2.2.2) formalmentetal que todos seus termos independam de  $\epsilon$ .

O procedimento para encontrar os termos da expansão usa argumentos baseados em “decomposição de domínios”, veja a Figura 2, e se baseia no seguinte resultado.

**LEMA 2.2.1.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  limitado e de Lipschitz, e seja  $\Gamma$  uma interface que divide  $\Omega$  em dois subdomínios  $\Omega^-$  e  $\Omega^+$ . Seja  $e$  função tal que  $e = 0$  em  $(\partial\Omega^- \setminus \Gamma) \cup (\partial\Omega^+ \setminus \Gamma)$ . Então existe uma constante  $c$  independente de  $\Omega^-$  e tal que

$$(2.2.3) \quad \|e\|_{H^1(\Omega^-)} + \|e\|_{H^1(\Omega^+)} \leq c(\|\Delta e\|_{L^2(\Omega^-)} + \|\Delta e\|_{L^2(\Omega^+)} + \|J(e)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|J(\partial e/\partial n)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)})$$

onde  $J(\cdot)$  representa o salto sobre  $\Gamma$ .

**DEMONSTRAÇÃO.** Sejam  $e^- = e|_{\Omega^-}$ ,  $e^+ = e|_{\Omega^+}$ . Segue-se da identidade de Green que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^-} |\nabla e^-|^2 d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega^-} e^- \Delta e^- d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} e^- \frac{\partial e^-}{\partial n^+} d\Gamma, \\ \int_{\Omega^+} |\nabla e^+|^2 d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega^+} e^+ \Delta e^+ d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} e^+ \frac{\partial e^+}{\partial n^+} d\Gamma, \end{aligned}$$

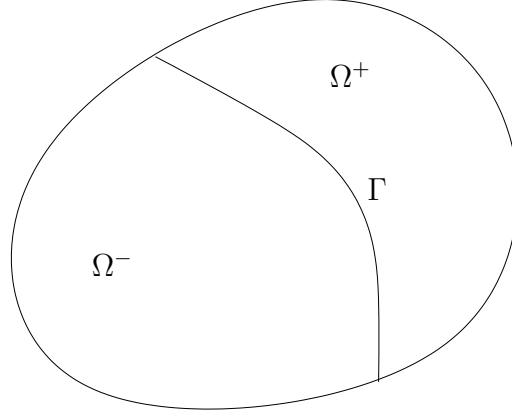


FIG. 2. Decomposição de um domínio.

onde  $n^+$  indica o vetor normal (apontando para fora) à  $\partial\Omega^+$ . Combinando as identidades, e somando e subtraindo  $\int_{\Gamma} e^- \partial e^+ / \partial n^+ d\Gamma$ , concluímos que

$$\begin{aligned}
& |e^-|_{H^1(\Omega^-)}^2 + |e^+|_{H^1(\Omega^+)}^2 \\
&= - \int_{\Omega^-} e^- \Delta e^- d\mathbf{x} - \int_{\Omega^+} e^+ \Delta e^+ d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} e^- \left( \frac{\partial e^+}{\partial n^+} - \frac{\partial e^-}{\partial n^+} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} (e^+ - e^-) \frac{\partial e^+}{\partial n^+} d\Gamma \\
&\leq \|e^-\|_{L^2(\Omega^-)} \|\Delta e^-\|_{L^2(\Omega^-)} + \|e^+\|_{L^2(\Omega^+)} \|\Delta e^+\|_{L^2(\Omega^+)} \\
&\quad + \|e^-\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \left\| J \left( \frac{\partial e}{\partial n} \right) \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|J(e)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \left\| \frac{\partial e^+}{\partial n} \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\
&\leq (\|\Delta e^-\|_{L^2(\Omega^-)} + \|\Delta e^+\|_{L^2(\Omega^+)}) \|e\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \|e^-\|_{H^1(\Omega^-)} \left\| J \left( \frac{\partial e}{\partial n} \right) \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|J(e)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|e^+\|_{H^1(\Omega^+)}.
\end{aligned}$$

Usamos acima a desigualdade de Cauchy–Schwartz e do traço, e a dualidade entre  $H^{-1/2}(\Gamma)$  e  $H^{1/2}(\Gamma)$ . O lema segue então de uma aplicação da desigualdade de Poincaré.  $\square$

Aplicamos o Lema 2.2.1 com a decomposição proposta na Seção 2.1. É natural definir  $u^0$ , o primeiro termo da expansão assintótica, tal que

$$\begin{aligned}
(2.2.4) \quad & -\Delta u^0 = f \quad \text{em } \Omega_s, \\
& u^0 = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_s, \quad u^0 = 0 \quad \text{sobre } \Omega_r^\epsilon.
\end{aligned}$$

Usando o Lema 2.2.1 com  $e = u^\epsilon - u^0$ , vemos que a fonte de erro é o salto  $J(\partial_{x_2} u^0)$ :

$$\|e\|_{H^1(\Omega_r^\epsilon)} + \|e\|_{H^1(\Omega_s)} \leq c \|\partial_{x_2} u^0\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Para remediar isto, seja  $\phi^0(x_1) = \partial_{x_2} u^0(x_1, 0)$ , i.e.,  $\phi^0$  é a restrição de  $\partial_{x_2} u^0|_{\Omega_s}$  sobre  $\Gamma$ . A mesma convenção vale para  $\partial u^1 / \partial y(x, 0)$ , etc. Seja  $\chi_r^\epsilon$  a função característica do conjunto  $\Omega_r^\epsilon$ , i.e.,

$$\chi_r^\epsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega_r^\epsilon, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Adicionamos então a função  $-\chi_r^\epsilon(\mathbf{x})(x_2 + d)\phi^0(x_1)$  à expansão assintótica a fim de corrigir o salto na derivada  $x_2$ . Como a condição de contorno de Dirichlet em  $\Gamma_r^\epsilon$  não é satisfeita, adicionamos um corretor à expansão,  $\Psi^1(\epsilon) - \chi_r^\epsilon Z^1(\epsilon)$ , onde

$$(2.2.5) \quad -\Delta \Psi^1(\epsilon) = -\chi_r^\epsilon \Delta[(\epsilon^{-1}x_2 + d_0)\phi^0 + Z^1(\epsilon)] \quad \text{em } \Omega^\epsilon,$$

$$(2.2.6) \quad \Psi^1(\epsilon) = (\epsilon^{-1}x_2 + d_0)\phi^0 + Z^1(\epsilon) \quad \text{sobre } \Gamma_r^\epsilon.$$

A introdução de  $Z^1(\epsilon)$  é necessária para garantir o decaimento exponencial de  $\Psi^1(\epsilon)$  para zero na direção de  $x_2$ . Note que  $\Psi^1(\epsilon)$  e  $Z^1(\epsilon)$  dependem de  $\epsilon$ , e que na verdade ainda não estão nem bem definidos. De fato, definimos em geral  $\Psi^i(\epsilon)$  e  $Z^i(\epsilon)$  como expansões formais em  $\epsilon$ ,

$$(2.2.7)$$

$$\Psi^i(\epsilon)(\mathbf{x}) \sim \psi^0(\epsilon^{-1}\mathbf{x})\phi^{i-1}(x_1) + \epsilon\psi^1(\epsilon^{-1}\mathbf{x})\partial_{x_1}\phi^{i-1}(x_1) + \epsilon^2\psi^2(\epsilon^{-1}\mathbf{x})\partial_{x_1x_1}\phi^{i-1}(x_1) + \dots,$$

$$(2.2.8) \quad Z^i(\epsilon)(\mathbf{x}) \sim z^0\phi^{i-1}(x_1) + \epsilon z^1\partial_{x_1}\phi^{i-1}(x_1) + \epsilon^2 z^2\partial_{x_1x_1}\phi^{i-1}(x_1) + \dots.$$

Acima,  $\psi^i$  é periódica com período  $\epsilon^{-1}$  na direção  $x_1$ , e  $z^i$  são constantes que dependem da geometria das rugosidades, mas são independentes de  $\epsilon$ . Adiamos a definição precisa destes termos para a Subseção 2.2.2.

Portanto, com o erro  $e = u^\epsilon - [u^0 - \chi_r^\epsilon(x_2 + d)\phi^0 - \epsilon\chi_r^\epsilon Z^1(\epsilon) + \epsilon\Psi^1(\epsilon)]$ , temos

$$\|e\|_{H^1(\Omega_r^\epsilon)} + \|e\|_{H^1(\Omega_s)} \leq \epsilon \|Z^1(\epsilon) + d_0\phi^0\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Continuamos a definir os termos da expansão. Seja

$$(2.2.9) \quad \begin{aligned} &-\Delta u^1 = 0 \quad \text{em } \Omega_s, \\ u^1 &= -(d_0 + z^0)\phi^0 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad u^1 = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega_s \setminus \Gamma, \quad u^1 = 0 \quad \text{sobre } \Omega_r^\epsilon. \end{aligned}$$

Logo, se  $e = u^\epsilon - [u^0 - (x_2 + d)\chi_r^\epsilon\phi^0 - \epsilon Z^1(\epsilon)\chi_r^\epsilon + \epsilon\Psi^1(\epsilon) + \epsilon u^1]$ , então

$$\|e\|_{H^1(\Omega_r^\epsilon)} + \|e\|_{H^1(\Omega_s)} \leq \epsilon \|\partial_{x_2} u^1\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \epsilon^2 \|z^1\partial_{x_1}\phi^0 + \epsilon^2\partial_{x_1x_1}\phi^0 + \dots\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Definimos  $\phi^1 = \partial_{x_2} u^1|_\Gamma$ , e adicionamos  $-\epsilon\chi_r^\epsilon(x_2 + d)\phi^1 + \epsilon^2\Psi^2(\epsilon) - \epsilon^2\chi_r^\epsilon Z^2(\epsilon)$  à expansão, onde

$$-\Delta \Psi^2(\epsilon) = -\chi_r^\epsilon \Delta[(\epsilon^{-1}x_2 + d_0)\phi^1 + Z^2(\epsilon)] \quad \text{em } \Omega^\epsilon,$$

$$\Psi^2(\epsilon) = (\epsilon^{-1}x_2 + d_0)\phi^1 + Z^2(\epsilon) \quad \text{sobre } \Gamma_r^\epsilon.$$

Temos agora

$$e = u^\epsilon - [u^0 - (x_2 + d)\chi_r^\epsilon\phi^0 - \epsilon Z^1(\epsilon)\chi_r^\epsilon + \epsilon\Psi^1(\epsilon) + \epsilon u^1 - \epsilon(x_2 + d)\chi_r^\epsilon\phi^1 + \epsilon^2\Psi^2(\epsilon) - \epsilon^2\chi_r^\epsilon Z^2(\epsilon)],$$

e

$$\|e\|_{H^1(\Omega_r^\epsilon)} + \|e\|_{H^1(\Omega_s)} \leq \epsilon^2 \|Z^2(\epsilon) + d_0\phi^1 + z^1\partial_{x_1}\phi^0 + \epsilon z^2\partial_{x_1x_1}\phi^0 + \dots\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Continuamos ainda um pouco definindo  $\phi^2 = \partial_{x_2} u^2|_\Gamma$ , e adicionando

$$\epsilon^2 u^2 - \epsilon^2(x_2 + d)\chi_r^\epsilon\partial_{x_2} u^2 + \epsilon^3\Psi^3(\epsilon) - \epsilon^3\chi_r^\epsilon Z^3(\epsilon)$$

à expansão, onde

$$(2.2.10)$$

$$-\Delta u^2 = 0 \quad \text{in } \Omega_s,$$

$$u^2 = -(d_0 + z^0)\phi^1 + z^1\partial_{x_1}\phi^0 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad u^2 = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega_s \setminus \Gamma, \quad u^2 = 0 \quad \text{sobre } \Omega_r^\epsilon,$$

e

$$(2.2.11) \quad \begin{aligned} -\Delta \Psi^3(\epsilon) &= -\chi_r^\epsilon \Delta[(\epsilon^{-1}x_2 + d_0)\phi^2 + Z^3(\epsilon)] \quad \text{em } \Omega^\epsilon, \\ \Psi^3(\epsilon) &= (\epsilon^{-1}x_2 + d_0)\phi^2 + Z^3(\epsilon) \quad \text{sobre } \Gamma_r^\epsilon. \end{aligned}$$

O erro agora é

$$e = u^\epsilon - [u^0 - (x_2 + d)\chi_r^\epsilon \phi^0 + \epsilon \Psi^1(\epsilon) - \epsilon \chi_r^\epsilon Z^1(\epsilon) + \epsilon u^1 - \epsilon(x_2 + d)\chi_r^\epsilon \phi^1 + \epsilon^2 \Psi^2(\epsilon) - \epsilon^2 \chi_r^\epsilon Z^2(\epsilon) + \epsilon^2 u^2 - \epsilon^2(x_2 + d)\chi_r^\epsilon \partial_{x_2} u^2 + \epsilon^3 \Psi^3(\epsilon) - \epsilon^3 \chi_r^\epsilon Z^3(\epsilon)],$$

e

$$\|e\|_{H^1(\Omega_s^\epsilon)} + \|e\|_{H^1(\Omega_s)} \leq \epsilon^3 \|z^2 \partial_{x_1 x_1} \phi^0 + z^1 \partial_{x_1} \phi^1 + z^0 \phi^2 + \epsilon \cdots\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Os termos subsequentes deste procedimento formal são definidos de forma similar.

**2.2.2. O problema do corretor de fronteira.** Analisamos agora o problema do corretor em detalhes. Considere o problema de achar  $\Psi$  e  $Z$  tais que

$$(2.2.12) \quad -\Delta \Psi = -\chi_r^\epsilon \Delta[(\epsilon^{-1}x_2 + d_0)\phi + Z] \quad \text{em } \Omega^\epsilon,$$

$$(2.2.13) \quad \Psi = (\epsilon^{-1}x_2 + d_0)\phi + Z \quad \text{sobre } \Gamma_r^\epsilon.$$

Aqui, enquanto  $\phi$  é uma função dada variando somente com  $x_1$ ,  $Z$  é desconhecida a priori, e é introduzida para garantir que  $\Psi$  decaia exponencialment para zero na direção  $x_2$ . As soluções  $\Psi$  e  $Z$  dependem de  $\epsilon$  não trivialmente, então supomos que formalmente

$$(2.2.14) \quad \Psi \sim \Psi^0 + \epsilon \Psi^1 + \epsilon^2 \Psi^2 + \cdots, \quad Z \sim Z^0 + \epsilon Z^1 + \epsilon^2 Z^2 + \cdots,$$

As funções em (2.2.12), (2.2.13) não são periódicas em geral. Entretanto fazemos uso da periodicidade das rugosidades e reescrevemos o problema do corretor como uma sequência de problemas em domínios periódicos. Além disto, motivados pelas variações rápidas das rugosidades, usamos as coordenadas escalonadas

$$\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (\epsilon^{-1}x_1, \epsilon^{-1}x_2),$$

e supomos uma primeira aproximação para  $\Psi$  e  $Z$  são dadas por

$$(2.2.15) \quad \Psi^0(\mathbf{x}) = \psi^0(\hat{x}_1, d_0 + \hat{x}_2)\phi(x_1), \quad Z^0(x_1) = z^0\phi(x_1),$$

onde  $\psi^0$  é  $\hat{x}_1$ -periódica,  $z^0$  é constante, e tanto  $\Psi^0$  como  $z^0$  ainda têm que ser determinadas.

**OBSERVAÇÃO.** Neste ponto, ainda não há bons argumentos indicando que  $z^0$  é constante, mas note que quanto mais simples  $Z^0$  for, melhor. Mostraremos ainda, *a posteriori*, que a forma que supomos para  $Z^0$  é suficiente para que  $\Psi^0$  decaia exponencialmente.

Uma conta rápida mostra que o laplaciano de uma função da forma  $u(\hat{x}_1, \hat{x}_2)v(x_1)$  é

$$(2.2.16) \quad -(\partial_{x_1 x_1} + \partial_{x_2 x_2})(uv) = -\epsilon^{-2}(\partial_{\hat{x}_2 \hat{x}_2} u + \partial_{\hat{x}_1 \hat{x}_1} u)v - 2\epsilon^{-1} \partial_{\hat{x}_1} u v' - u v''.$$

Logo,

$$(2.2.17) \quad \begin{aligned} -\Delta(\psi^0 \phi) &= -\epsilon^{-2}(\partial_{\hat{x}_2 \hat{x}_2} \psi^0 + \partial_{\hat{x}_1 \hat{x}_1} \psi^0)\phi - 2\epsilon^{-1} \partial_{\hat{x}_1} \psi^0 \phi' - \psi^0 \phi'', \\ -\Delta(\hat{x}_2 \phi) &= -\hat{x}_2 \phi'', \quad -\Delta(z^0 \phi) = -z^0 \phi''. \end{aligned}$$

Para continuar a descrição da expansão, introduzimos o *problema de cela*, comum em homogeneização. Normalmente estes problemas de cela servem para levar informações da pequena escala para o comportamento macrosópico da solução.

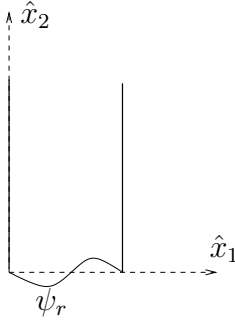


FIG. 3. A cela.

No presente caso, o problema da cela é definida na faixa semi-infinita  $\Omega_r$ , que contém a geometria das rugosidades, i.e.,  $\Omega_r$  ocupa a faixa semi-infinita limitada lateralmente em  $\hat{x}_1 = 0$  e  $\hat{x}_1 = 1$ , e inferiormente pela fronteira  $\Gamma_r^- = \{(\hat{x}_1, \psi_r(\hat{x}_1)) : \hat{x}_1 \in (0, 1)\}$ , i.e.,

$$\Omega_r = \{(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2 : \hat{x} \in (0, 1), \hat{y} > \psi_r(\hat{x})\},$$

Veja a Figura 3.

Definimos  $C_{per}^\infty(\Omega_r)$  restringindo a  $\Omega_r$  as funções  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$  que são 1-periódicas com respeito à  $\hat{\theta}$ . Seja  $H_{per}^1(\Omega_r)$  o fechamento de  $C_{per}^\infty(\Omega_r)$  com respeito à norma  $H^1(\Omega_r)$ . Introduzimos também o espaço de funções com decaimento exponencial.

$$S(\Omega_r) = \{w \in H_{per}^1(\Omega_r) : w(\hat{x}, \hat{y})e^{\alpha\hat{y}} \in H^1(\Omega_r) \text{ para algum } \alpha > 0\}.$$

Basedo em (2.2.12), (2.2.14), (2.2.15), e (2.2.17), e formalmente igualando as mesmas potências de  $\epsilon$ , concluímos que  $\psi^0$  é harmônica. As condições de contorno sobre as rugosidades vêm de (2.2.13), (2.2.14), e (2.2.15). É possível mostrar [9, 60] que existe uma única  $\psi^0 \in S(\Omega_r)$ , e uma única constante  $z^0$  tal que

$$\begin{aligned} \partial_{\hat{x}_1\hat{x}_1}\psi^0 + \partial_{\hat{x}_2\hat{x}_2}\psi^0 &= 0 \quad \text{em } \Omega_r, & \psi^0 &= \hat{x}_2 + z^0 \quad \text{sobre } \Gamma_r^-, \\ \psi^0 &\text{ é } \hat{x}_1\text{-periódica,} & \lim_{\hat{x}_2 \rightarrow \infty} \psi^0 &= 0. \end{aligned}$$

Além disto,  $0 \leq z \leq \|\psi_r\|_{L^\infty(0,1)}$ , e  $\|w\|_{H^1(\Omega_r)} \leq c$ , onde  $c$  depende somente da geometria da rugosidade.

Temos então que

$$\begin{aligned} -\Delta[(\psi^0 - \chi_r^\epsilon \hat{x}_2 + \chi_r^\epsilon z^0)\phi] &= -2\epsilon^{-1}\partial_{\hat{x}_1}\psi^0\phi' - \psi^0\phi'' + \chi_r^\epsilon \hat{x}_2\phi'' - \chi_r^\epsilon z^0\phi'' \quad \text{em } \Omega^\epsilon, \\ \psi^0 - \hat{x}_2 + z^0 &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma_r^\epsilon. \end{aligned}$$

Definimos então  $\Psi^1(\mathbf{x}) = \psi^1(\hat{x}_1, d_0 + \hat{x}_2)\phi'(x_1)$ ,  $Z^1 = z^1\phi'$  onde

$$-[\partial_{\hat{x}_2\hat{x}_2}\psi^1 + \partial_{\hat{x}_1\hat{x}_1}\psi^1] = 2\partial_{\hat{x}_1}\psi^0 \quad \text{em } \Omega_r, \quad \psi^1 = z^1 \quad \text{sobre } \Gamma_r^-.$$

Logo,

$$\begin{aligned} -\Delta[(\psi^0 - \chi_r^\epsilon \hat{x}_2 + \chi_r^\epsilon z^0)\phi + \epsilon(\psi^1 + \chi_r^\epsilon z^1)\phi'] & \\ = -\psi^0\phi'' + \chi_r^\epsilon \hat{x}_2\phi'' - \chi_r^\epsilon z^0\phi'' - 2\partial_{\hat{x}_1}\psi^1\phi'' - \epsilon\psi^1\phi''' - \epsilon\chi_r^\epsilon z^1\phi''' & \quad \text{em } \Omega^\epsilon, \\ (\psi^0 - \chi_r^\epsilon \hat{x}_2 + \chi_r^\epsilon z^0)\phi + \epsilon(\psi^1 + \chi_r^\epsilon z^1)\phi' &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma_r^\epsilon. \end{aligned}$$



Analogamente,  $\Psi^2(\mathbf{x}) = \psi^2(\hat{x}_1, c_0 + \hat{x}_2)\phi''(x_1)$ , e  $Z^2 = z^2\phi''$  onde

$$-[\partial_{\hat{x}_2\hat{x}_2}\psi^2 + \partial_{\hat{x}_1\hat{x}_1}\psi^2] = \psi^0 - \chi_r\hat{x}_2 + \chi_r z^0 + 2\partial_{\hat{x}_1}\psi^1 \quad \text{em } \Omega_r, \quad \psi^2 = z^2 \quad \text{sobre } \Gamma_r^-,$$

onde  $\chi_r(\hat{x}_2) = 1$  se  $\hat{x}_2 \leq c_0$ , e  $\chi_r(\hat{x}_2) = 0$  caso contrário. É fácil ver que os lados direitos das equações ficam mais complicados à medida que avança na determinação dos termos da expansão. É crucial notar entretanto que as equações não envolvem  $\phi$  ou suas derivadas.

Concluimos finalmente que

$$(2.2.18) \quad \Psi(\epsilon) \sim \psi^0\phi + \epsilon\psi^1\phi' + \epsilon^2\psi^2\phi'' + \dots, \quad Z(\epsilon) \sim z^0\phi + \epsilon z^1\phi' + \epsilon^2 z^2\phi'' + \dots.$$

**2.2.3. Derivação das leis de parede.** O objetivo é aproximar  $u^\epsilon$  usando elementos finitos (ou diferenças finitas), sem ter que discretizar a fronteira rugosa. Uma solução é aproximar  $u^\epsilon$  somente em  $\Omega_s$ , pois este domínio é suave. Aproximaremos então  $u^\epsilon$  por

$$u^\epsilon \approx u^0 + \epsilon u^1.$$

mas sem ter que resolver os problemas que definem cada termo. As funções  $u^0$ ,  $u^1$  são dadas por (2.2.4), (2.2.9). Heuristicamente, consideraremos somente funções que têm influência no interior do domínio. Sobre  $\Gamma$  temos  $u^\epsilon \approx u^0 + \epsilon u^1 = -\epsilon(c_0 + z^0)\phi^0$ , e  $\partial_{x_2}u^\epsilon \approx \phi^0 + \epsilon\phi^1$ , e então

$$u^\epsilon + \epsilon(c_0 + z^0)\partial_{x_2}u^\epsilon \approx \epsilon^2(c_0 + z^0)\phi^1,$$

e este termo pode ser pequeno dependendo da aplicação.

Definimos então  $\bar{u}$  aproximando  $u^\epsilon$  em  $\Omega_s$  por

$$(2.2.19) \quad \begin{aligned} -\Delta \bar{u} &= f \quad \text{em } \Omega_s, \\ \bar{u} + \epsilon(c_0 + z^0)\partial_{x_2}\bar{u} &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad \bar{u} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega_s \setminus \Gamma. \end{aligned}$$

As estimativas de erro são obtidas expandindo  $\bar{u}$  em sua série assintótica. De fato,

$$\bar{u} \sim \bar{u}^0 + \epsilon\bar{u}^1 + \epsilon^2\bar{u}^2 + \dots,$$

onde

$$(2.2.20) \quad \begin{aligned} -\Delta \bar{u}^i &= \delta_{i,0}f \quad \text{em } \Omega_s, \\ \bar{u}^i &= -(c_0 + z^0)\partial_{x_2}\bar{u}^{i-1} \quad \text{sobre } \Gamma, \quad \bar{u}^i = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega_s \setminus \Gamma. \end{aligned}$$

Note também que,

$$(2.2.21) \quad \left\| \bar{u} - \sum_{i=0}^n \epsilon^i \bar{u}^i \right\|_{H^k(\Omega_s)} \leq c\epsilon^{n+1}.$$

O erro de modelagem é estimado então por

$$\begin{aligned} \|u^\epsilon - \bar{u}\|_{H^1(\Omega_s)} &\leq \|u^\epsilon - u^0 - \epsilon u^1\|_{H^1(\Omega_s)} + \|\bar{u} - \bar{u}^0 - \epsilon\bar{u}^1\|_{H^1(\Omega_s)} \\ &\leq \|u^\epsilon - u^0 - \epsilon u^1 - \epsilon\psi^0\phi^0\|_{H^1(\Omega_s)} + \epsilon\|\psi^0\phi^0\|_{H^1(\Omega_s)} + c\epsilon^2 \leq c\epsilon^{1/2}, \end{aligned}$$

onde na primeira desigualdade usamos a desigualdade triangular, e as identidades  $u^0 = \bar{u}^0$  e  $u^1 = \bar{u}^1$ .

Podemos também estimar o erro em outras normas, de forma similar. Por exemplo

$$\|u^\epsilon - \bar{u}\|_{L^2(\Omega_s)} \leq c\epsilon^2.$$

TABLE 1. Estimativas de erro relativo para modelos de ordem 0.

quantidade	erro em $L^2(\Omega_s)$	erro em $L^2(\overset{\circ}{\Omega}_s)$
$u$	$O(\epsilon)$	$O(\epsilon)$
$\nabla u$	$O(\epsilon^{1/2})$	$O(\epsilon)$

TABLE 2. Estimativas de erro relativo para modelos de ordem 1.

quantidade	erro em $L^2(\Omega_s)$	erro em $L^2(\overset{\circ}{\Omega}_s)$
$u$	$O(\epsilon^2)$	$O(\epsilon^2)$
$\nabla u$	$O(\epsilon^{1/2})$	$O(\epsilon^2)$

Uma outra medida importante é o quão bem o modelo aproxima a solução exata no interior do domínio, i.e., considere  $\overset{\circ}{\Omega}_s \subset \Omega_s$  tal que  $\overline{\overset{\circ}{\Omega}_s} \cap \overline{\Gamma} = \emptyset$ . Então

$$\|u^\epsilon - \bar{u}\|_{0,\Omega_s} + \|u^\epsilon - \bar{u}\|_{H^k(\overset{\circ}{\Omega}_s)} \leq c\epsilon^2.$$

A melhora na convergência é porque a camada limite não tem influência “expressiva” longe das rugosidades.

Comparamos nas tabelas 1 e 2 as estimativas de aproximação do presente modelo (“modelo de ordem um”) com um que aproxima  $u^\epsilon$  por  $u^0$  (“modelo de ordem zero”). Note as melhores taxas de convergência na maioria das normas, com exceção da norma em  $H^1$ . Isto ocorre porque nenhum dos modelos captura a camada limite exatamente.

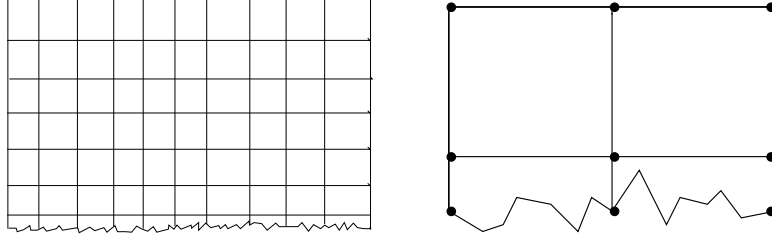
**OBSERVAÇÃO.** Trabalhando com hipóteses de periodicidade das rugosidades, vários autores propuseram leis de parede do tipo da descrita acima para diferentes operadores [1–6, 10–12, 22, 24, 59, 60]. O procedimento envolve em geral problemas de cela, como é típico em homogeneização. Em particular o caso de rugosidades em fronteiras rugosas curvas foi considerado em [59, 60]. O caso randômico foi também considerado recentemente [23].

### 2.3. Um método de elementos finitos multiescalas

Propomos e analisamos um esquema de elemento finitos multiescalas para lidar com EDPs em domínios com fronteiras rugosas. Não há necessidade de se supor nenhum tipo de periodicidade da fronteira, e portanto o método é bastante geral. No caso de fronteiras periódicas, provamos a convergência do esquema.

Apesar dos avanços obtidos com técnicas como as discutidas acima, o caso não periódico não foi considerado, com a exceção já mencionada [23].

Por outro lado, como discutido no capítulo 3, vários métodos numéricos para EDPs com coeficientes oscilatórios foram recentemente considerados na literatura [19, 33–35, 38, 39, 50–53, 69]. Uma propriedade destes métodos é que não há a necessidade de se derivar equações homogeneizadas para somente depois se discretizar o problema. Ao contrário, os métodos tratam do problema em sua forma original.

FIG. 4. A mesh for  $\Omega^\epsilon$ , and a patch of elements of  $\mathcal{T}_h$  intercepting  $\Gamma_r^\epsilon$ .

O objetivo aqui é discutir um método de elementos finitos multiescalas para se tratar o problema de fronteiras rugosas (2.1.1).

**2.3.1. Definição do método.** Variações de métodos numéricos multiescalas (MEFMs) são usados em diferentes contextos [38, 39, 50–53], as funções de base são soluções locais, em cada elemento do problema original, e captura as propriedades qualitativas da “pequena escala”, e traz estas informações para formulações globais, num processo de “upscale”.

Propomos aqui um método de Galerkin onde as funções de base têm suporte local, como no método de elementos finitos tradicional. Entretanto, o presente método não usa funções poligonais. Na verdade, aqui, os *elementos finitos* não são nem polígonos, mas podem ter uma geometria “rugosa”. A idéia básica por trás do método é que a influência da geometria deve ser capturada pelas funções de base, sem afetar a dimensão do espaço aproximante. Portanto, o método é de Galerkin, onde as funções de base são soluções locais do operador considerado (laplaciano), possivelmente num elemento rugoso.

Sejam  $N \in \mathbb{N}$  e  $h = 1/(N + 1) > \epsilon$ . Para  $i = 0, \dots, N$ , seja  $K_i^\epsilon = \{(x, y) \in \Omega_r^\epsilon : ih < x < (i + 1)h\}$ . Note que estes elementos definem uma partição de  $\Omega_r^\epsilon$ . Em seguida, introduzimos uma malha cartesiana para  $\Omega_s$  usando quadrados de lado  $h$ . Este procedimento induz uma partição  $\mathcal{T}_h$  para  $\Omega^\epsilon$  em elementos finitos, nem todos sendo quadriláteros. De fato, se  $K \in \mathcal{T}_h \cap \Omega_s$ , então  $K$  é um quadrado de lado  $h$ . Caso contrário,  $K$  tem um fundo rugoso, e lados e topo retos, como na figura 4. A malha  $\mathcal{T}_h$  tem como nós o conjunto  $\mathcal{N} = \{(ih, jh) \in \Omega^\epsilon : i = 1, \dots, N, j = 0, \dots, N\}$ .

Para cada nó  $\mathbf{x}_i \in \mathcal{N} \cap \Omega_s$ , associamos uma função bilinear por partes  $\lambda_i \in H_0^1(\Omega^\epsilon)$ , tal que  $\lambda_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$  para todo  $\mathbf{x}_j \in \mathcal{N}$ .

Para cada nó  $\mathbf{x}_i \in \mathcal{N} \cap \Gamma$ , definimos  $\lambda_i \in H_0^1(\Omega^\epsilon)$  tal que

$$(2.3.1) \quad \begin{aligned} -\Delta \lambda_i &= 0 \quad \text{em } \cup_{j=0}^N K_j^\epsilon, \\ \lambda_i(\mathbf{x}_j) &= \delta_{ij} \quad \text{para todo } \mathbf{x}_j \in \mathcal{N}, \quad \lambda_i \text{ é linear sobre } \cup_{j=0}^N \partial K_j^\epsilon \cap \Omega^\epsilon. \end{aligned}$$

Estendemos  $\lambda_i$  para  $\Omega_s$  impondo que  $\lambda_i$  seja bilinear por partes em  $\Omega_s$ .

Usando as funções acima, definimos

$$V_h^\epsilon = \text{span}\{\lambda_i\} \subset H_0^1(\Omega^\epsilon).$$

A solução multiescala  $u_h^\epsilon \in V_h^\epsilon$  é simplesmente a aproximação de Galerkin de  $u^\epsilon$  em  $V_h^\epsilon$ , i.e,

$$(2.3.2) \quad \int_{\Omega^\epsilon} \nabla u_h^\epsilon(\mathbf{x}) \cdot \nabla v_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega^\epsilon} f(\mathbf{x}) v_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \text{para todo } v_h \in V_h^\epsilon.$$

**OBSERVAÇÃO.** Observe que o cálculo de cada função de base depende de  $\epsilon$ , e é portanto cara computacionalmente. Apesar de ser possível reduzir os custos via computação paralela, isto é uma desvantagem do método. Entretanto, como observado por Marcus Sarkis [70], ao menos para problemas bidimensionais, é possível obter matriz de banda reduzida se se numerar os nós apropriadamente.

**OBSERVAÇÃO.** O presente método é particularmente atraente se (2.1.1) tem que ser resolvido repetidas vezes para diferentes fontes. De fato, as funções de base têm que ser calculadas apenas uma vez, e o tamanho das matrizes finais são independentes de  $\epsilon$ .

**2.3.2. Análise numérica.** Nesta subseção desenvolvemos uma análise de erro para o esquema numérico proposto. A análise é baseada em métodos assintóticos, e nos restringimos ao caso de periódico. Nos baseamos nos resultados apresentados na Seção 2.2.

Ao contrário de (2.2.1), supomos que existe constantes  $\gamma \in (0, 1]$ , e  $c_0$  positivos tal que

$$(2.3.3) \quad c_0 \epsilon^{1-\gamma} \leq d.$$

Lembramos que o parâmetro  $d$  entra na definição de  $\Omega^\epsilon$ . Veja Figuras 1, e também as equações (2.1.2), (2.1.4).

**OBSERVAÇÃO.** A restrição (2.3.3) relaciona-se ao fato que  $d$  não deve ser muito pequeno. De fato, as rugosidade acarreta oscilações em  $u^\epsilon$  que decaem exponencialmente quando  $y/\epsilon$  cresce, e com (2.3.3) garantimos que a parte oscilatória da solução é no máximo polinomial em  $\Omega_s$  com respeito à  $\epsilon$ .

**2.3.2.1. Expansão assintótica da solução exata.** Redefinimos aqui como  $u^\epsilon$  depende de  $\epsilon$ . Os termos da expansão são ligeiramente diferente da Seção 2.2, devido à mudança (2.3.3), como abaixo:

$$(2.3.4) \quad u^\epsilon(\mathbf{x}) \sim \begin{cases} (d + y - \epsilon W - \epsilon z) \frac{\partial u^0}{\partial y}(x, 0) + (d + y) \frac{\partial u^1}{\partial y}(x, 0) + \dots & \text{in } \Omega_r^\epsilon, \\ u^0(\mathbf{x}) + u^1(\mathbf{x}) + \dots & \text{in } \Omega_s. \end{cases}$$

finimos  $u^0$  como em (2.2.4) e  $W(x, y) = \psi^0(\epsilon^{-1}x, \epsilon^{-1}(d + y))$  em  $\Omega_r^\epsilon$ .

Finalmente, seja

$$(2.3.5) \quad \begin{aligned} -\Delta u^1 &= 0 \quad \text{em } \Omega_s, \\ u^1 &= (d - \epsilon z^0) \frac{\partial u^0}{\partial y} \quad \text{sobre } \Gamma, \quad u^1 = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega_s \setminus \Gamma, \quad u^1 = 0 \quad \text{sobre } \Omega_r^\epsilon. \end{aligned}$$

Para

$$e(\mathbf{x}) = u^\epsilon(\mathbf{x}) - u^0(\mathbf{x}) - u^1(\mathbf{x}) + (y - \epsilon W) \frac{\partial u^0}{\partial y}(x, 0) \chi_r^\epsilon,$$

sob as hipótese (2.3.3), existe constante  $c$  independente de  $\epsilon$  tal que

$$(2.3.6) \quad \|e\|_{H^1(\Omega^\epsilon)} \leq cd^{3/2}, \quad \|e\|_{H^1(\Omega_s)} \leq cd^2.$$

Valem ainda as seguintes estimativas.

**LEMA 2.3.1.** Sejam  $u^0$ ,  $u^1$ , e  $W$  como acima. Então existe constante  $c$ , independente de  $\epsilon$  tal que

$$\|u^0\|_{H^1(\Omega_s)} + d^{-1} \|u^1\|_{H^1(\Omega_s)} + \epsilon^{-1/2} \|W\|_{L^2(\Omega_r^\epsilon)} + \epsilon^{1/2} \|\nabla W\|_{L^2(\Omega_r^\epsilon)} \leq c.$$

Notamos a seguir que a desigualdade de Poincaré's vale uniformemente com respeito à  $\epsilon$  [60], i.e., existe uma constante  $c$  independente de  $\epsilon$  tal que

$$\|v\|_{L^2(\Omega^\epsilon)} \leq c|v|_{H^1(\Omega^\epsilon)},$$

para todo  $v \in H_0^1(\Omega^\epsilon)$ . Concluimos então que o Lema de Céa's vale uniformemente com respeito à  $\epsilon$ .

LEMA 2.3.2. [Lema de Céa] Seja  $u^\epsilon \in H_0^1(\Omega^\epsilon)$  solução de (2.1.1), e  $u_h^\epsilon \in V_h^\epsilon$  solução de (2.3.2). Então existe constante  $c$  independente de  $\epsilon$  tal que

$$\|u^\epsilon - u_h^\epsilon\|_{H^1(\Omega^\epsilon)} \leq c \inf_{v_h^\epsilon \in V_h^\epsilon} |u^\epsilon - v_h^\epsilon|_{H^1(\Omega^\epsilon)}.$$

A meta agora é achar uma boa aproximação para  $u^\epsilon$  em  $V_h^\epsilon$ . Usaremos as expansões de  $u^\epsilon$  e das funções de base como ferramenta [52]. Apresentamos agora a expansão em  $K_i^\epsilon$  das funções de base  $\lambda_i$  definidas em (2.3.1), correspondente ao nó  $(ih, 0) \in \Gamma \cap \mathcal{N}$ . A expansão de  $\lambda_i$  em  $K_{i-1}^\epsilon$  é similar. Em  $K_i^\epsilon$ ,

$$(2.3.7) \quad \lambda_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{h(d - \epsilon z)} [(d + y - \epsilon W - \epsilon z)(x_{i+1} - x) + \epsilon \theta_i(\mathbf{x}) + \epsilon r_i(\mathbf{x})],$$

onde  $x_{i+1} = (i + 1)h$ , e  $\theta_i$  satisfaz

$$\begin{aligned} -\Delta \theta_i &= 0 \quad \text{em } K_i^\epsilon, \\ \theta_i(x, y) &= (x_{i+1} - x) \left[ W(x, y) - \frac{zy}{d} \right] \quad \text{sobre } \partial K_i^\epsilon \setminus \Gamma_r^\epsilon, \quad \theta_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_r^\epsilon. \end{aligned}$$

Também

$$-\Delta r_i = 2 \frac{\partial W}{\partial x} \quad \text{em } K_i^\epsilon, \quad r_i = 0 \quad \text{sobre } \partial K_i^\epsilon.$$

Note que a expansão (2.3.4) em  $\Omega_r^\epsilon$ , e (2.3.7) são similares pois em ambos os casos, os termos de ordem mais baixa envolvem  $d + y - \epsilon W - \epsilon z$  vezes uma função de  $x$ , no caso,  $\partial u^0 / \partial y$  em (2.3.4), e  $(x_{i+1} - x) / [h(d - \epsilon z)]$  em (2.3.7).

O lema seguinte nos dá uma cota superior para a a norma  $H^1$  de  $r_i$  e  $\theta_i$ .

LEMA 2.3.3. Sejam  $r_i$  e  $\theta_i$  como acima. Então existe constante  $c$  independente de  $\epsilon$  e  $h$  tal que

$$\|r_i\|_{H^1(K_i^\epsilon)} \leq c\epsilon^{1/2}h^{1/2}, \quad \|\theta_i\|_{H^1(K_i^\epsilon)} \leq ch.$$

DEMONSTRAÇÃO. Por estimativas clássicas temos  $\|r_i\|_{H^1(K_i^\epsilon)} \leq \|W\|_{L^2(K_i^\epsilon)}$ . Argumentando como na demonstraçãodo Lema 2.3.1 obtemos a primeira estimativa. Segue-se também de estimativas clássicas que  $\|\nabla \theta_i\|_{L^2(K_i^\epsilon)} \leq c\|\theta_i\|_{H^{1/2}(\partial K_i^\epsilon \setminus \Gamma_r^\epsilon)}$ . Note que

$$\|\theta_i\|_{H^{1/2}(\partial K_i^\epsilon \setminus \Gamma_r^\epsilon)} \leq h\|W\|_{H^{1/2}(\partial K_i^\epsilon \setminus \Gamma_r^\epsilon)} + hz.$$

Do decaimento exponencial de  $W$ , e das desigualdades de interpolação e do traço, obtemos que  $\|W\|_{H^{1/2}(\partial K_i^\epsilon \setminus \Gamma_r^\epsilon)} \leq c$ , e o resultado segue.  $\square$

TEOREMA 2.3.4. *Seja  $u^\epsilon$  solução de (2.1.1), e  $u_h^\epsilon \in V_h^\epsilon$  solução de (2.3.2). suponha ainda (2.3.3), e que o traço de  $\partial u^0 / \partial y|_{\Omega_s}$  em  $\Gamma$  esteja em  $H^2(\Gamma)$ , onde  $u^0$  resolve (2.2.4). Então existe constante  $c$  independente de  $\epsilon$  e  $h$  tal que*

$$\|u^\epsilon - u_h^\epsilon\|_{H^1(\Omega^\epsilon)} \leq c(h + d^{3/2} + \epsilon h^{-1/2} + \epsilon^{3/2}h^{-1}).$$

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração é baseada no Lema 2.3.2 e nas expansões assintóticas de  $u^\epsilon$  e das funções em  $V_h^\epsilon$ . Seja  $\Upsilon(\mathbf{x}) = (y - \epsilon W)\partial u^0/\partial y(x, h)\chi_r^\epsilon$ . Usando a desigualdade triangular e (2.3.6), obtemos que

$$(2.3.8) \quad |u^\epsilon - v_h|_{H^1(\Omega^\epsilon)} \leq |u^\epsilon - u^0 - u^1 + \Upsilon|_{H^1(\Omega^\epsilon)} + |u^0 + u^1 + \Upsilon - v_h|_{H^1(\Omega^\epsilon)} \\ \leq cd^{3/2} + |u^0 + u^1 + \Upsilon - v_h|_{H^1(\Omega^\epsilon)}$$

para todo  $v_h \in V_h^\epsilon$ . Escolha  $v_h$  como  $u_I(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x}_i \in \mathcal{N}} [u_0(\mathbf{x}_i) + u_1(\mathbf{x}_i)]\lambda_i(\mathbf{x})$ . Logo em  $\Omega_s$ ,  $u_I$  é linear por partes, contínua e interpola  $u^0 + u^1$ . Logo,

$$(2.3.9) \quad |u^0 + u^1 - u_I|_{H^1(\Omega_s)} \leq ch.$$

Em  $\Omega_r^\epsilon$ ,

$$u_I(\mathbf{x}) = (d + y - \epsilon W - \epsilon z)I_h\left(\frac{\partial u^0}{\partial y}\right)(x) + R_I, \\ R_I(\mathbf{x}) = \epsilon h^{-1} \sum_{i=1}^N \frac{\partial u^0}{\partial y}(x_i, 0)[\theta_i(\mathbf{x}) + r_i(\mathbf{x})],$$

onde  $I_h(\partial u^0/\partial y)(\cdot)$  é o interpolante linear por partes de  $\partial u^0/\partial y(\cdot, 0)$  em  $(0, 1)$ . Seja  $e_I(x, y) = \partial u^0/\partial y(x, h) - I_h(\partial u^0/\partial y)(x)$  o erro de interpolação. Preisaremos das estimativas [28, 68]

$$\|e_I\|_{L^2(0,1)} + h\left\|\frac{\partial e_I}{\partial x}\right\|_{L^2(0,1)} + h\|e_I\|_{L^\infty(0,1)} + h^2\left\|\frac{\partial e_I}{\partial x}\right\|_{L^\infty(0,1)} \leq ch^2\left\|\frac{\partial u^0}{\partial y}\right\|_{H^2(0,1)}.$$

Calculamos

$$(2.3.10) \quad |\Upsilon - u_I|_{H^1(\Omega_r^\epsilon)} \leq |ye_I|_{H^1(\Omega_r^\epsilon)} + \epsilon|we_I|_{H^1(\Omega_r^\epsilon)} + |d - \epsilon z||I_h\left(\frac{\partial u^0}{\partial y}\right)|_{H^1(\Omega_r^\epsilon)} + |R_I|_{H^1(\Omega_r^\epsilon)}.$$

Estimando cada termo,

$$|ye_I|_{H^1(\Omega_r^\epsilon)}^2 \leq d \int_{\Omega_r^\epsilon} \left|\frac{\partial e_I}{\partial x}\right|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega_r^\epsilon} |e_I|^2 d\mathbf{x} \leq cd^2h^2 + cdh^4, \\ |we_I|_{H^1(\Omega_r^\epsilon)}^2 \leq \|e_I\|_{L^\infty(0,1)}^2 |w|_{H^1(\Omega_r^\epsilon)}^2 + \left\|\frac{\partial e_I}{\partial x}\right\|_{L^\infty(0,1)}^2 |w|_{L^2(\Omega_r^\epsilon)}^2 \leq c\epsilon^{-1}h^2 + c\epsilon, \\ |d - \epsilon z|^2 |I_h\left(\frac{\partial u^0}{\partial y}\right)|_{H^1(\Omega_r^\epsilon)}^2 \leq cd^2 |I_h\left(\frac{\partial u^0}{\partial y}\right)|_{H^1(\Omega_r^\epsilon)}^2 \leq cd^2 \int_{\Omega_r^\epsilon} \left|\frac{\partial I_h\left(\frac{\partial u^0}{\partial y}\right)}{\partial x}\right|^2 d\mathbf{x} \leq cd^3.$$

Usando o Lema 2.3.3 finalmente estimamos

$$|R_I|_{H^1(K_\epsilon)}^2 \leq c\epsilon^2 h^{-2} (\|\theta_i\|_{H^1(K_\epsilon)}^2 + \|r_i\|_{H^1(K_\epsilon)}^2) \leq c(\epsilon^2 + \epsilon^3 h^{-1}).$$

Somando sobre os elementos, obtemos que  $|R_I|_{H^1(K_\epsilon)} \leq c(\epsilon h^{-1/2} + \epsilon^{3/2} h^{-1})$ . Finalmente, de (2.3.10) obtemos que

$$(2.3.11) \quad |\Upsilon - u_I|_{H^1(\Omega_r^\epsilon)} \leq c(dh + d^{1/2}h^2 + \epsilon^{1/2}h + \epsilon^{3/2} + d^{3/2} + \epsilon h^{-1/2} + \epsilon^{3/2}h^{-1}).$$

O teorema segue de (2.3.3), (2.3.8), (2.3.9), e (2.3.11).  $\square$

OBSERVAÇÃO. Se  $d \leq c_1 h^{2/3}$ , e  $\epsilon \leq c_2 h$  para constantes  $c_1, c_2$ , então

$$(2.3.12) \quad \|u^\epsilon - u_h^\epsilon\|_{H^1(\Omega^\epsilon)} \leq ch + c\epsilon h^{-1/2}.$$

Na prática, o melhor é escolher  $d$  pequeno, a fim de reduzir os custos computacionais associados aos cálculos das funções de base.

No Teorema 2.3.4 e estimativa (2.3.12), o termo  $\epsilon h^{-1/2}$  está relacionado com a escolha de condições de contorno lineares para  $\lambda_i$  o que acarreta o termo espúrio  $\theta_i$  em (2.3.7). Este tipo de erro de *ressonância* não é exclusividade deste método. Por exemplo, alguns métodos multiescalas propostos para lidar com EDPs com coeficientes oscilatórios, veja Capítulo 3, também têm o mesmo tipo de problema, e várias estratégias alternativas foram propostas [51–53, 69].

Uma estratégia promissora é o *oversampling* [38, 50, 51, 53]. A meta é evitar a restrição de que  $\lambda_i$  seja linear nas arestas. Considere o elemento  $K_i^\epsilon$ , e o elemento aumentado

$$\hat{K}_i^\epsilon = \{(x, y) \in \Omega_r^\epsilon : ih - l < x < (i + 1)h + l\},$$

para algum  $l > 0$ . Sejam as funções multiescalas auxiliares  $\psi_i, \psi_{i+1}$  soluções de (2.3.1) em  $\hat{K}_i^\epsilon$ . Definimos então  $\lambda_i$  como

$$\lambda_i = c_i^1 \psi_i + c_i^2 \psi_{i+1},$$

a as constantes  $c_i^1, c_i^2$  são unicamente determinadas das restrições  $\lambda_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$  for  $j = i, i + 1$ . A solução numérica é definida por (2.3.2), onde novamente  $V_h^\epsilon = \text{span}\{\lambda_i\}$ .

Para concluir a definição do método oversampling, é necessário definir  $l$ . Tal constante precisa ser grande o suficiente para que o efeito em  $K_i^\epsilon$  das condições de contorno em  $\partial\hat{K}_i^\epsilon \cap \Omega^\epsilon$  seja desprezível. Por outro lado, aumentando  $l$  aumenta-se o custo computacional. Uma boa escolha seria  $l = O(\epsilon)$ .

Note que o método torna-se não conforme pois  $\lambda_i$  pode não ser contínua, e então  $V_h^\epsilon \not\subset H^1(\Omega^\epsilon)$  em geral.

**2.3.3. Conclusões.** Nesta seção discutimos um método de elementos finitos multiescalas para lidar com EDPs em domínios com fronteiras rugosas.

Anteriormente este problema era tratado com homogeneização, com as exceções conhecidas sendo [65, 66], com um método aparentemente mais complicado que o nosso.

O método atual é bem geral, e sua definição não depende de nenhuma propriedade especial das rugosidades. Como o esquema é baseado em soluções de problemas locais, paralelização é trivial. O método ainda é caro pois os problemas locais dependem de  $\epsilon$ , mas é bem mais eficiente que usar funções lineares por partes no domínio todo. Entretanto, se as rugosidades são periódicas, ainda é mais barato usar as leis de parede tradicionais.

Em relação às estimativas, a análise de erro é restrita ao caso periódico, e a convergência na norma  $H^1(\Omega^\epsilon)$  é de  $h + \epsilon h^{-1/2}$ . O termo  $h^{-1/2}$  é relacionado a erros de ressonância, também presente em outros métodos multiescalas aplicados a EDPs com coeficientes oscilatórios [38, 50–53, 69]. Técnicas de oversampling podem resolver tal problema.





## CAPÍTULO 3

### Métodos Numéricos para EDPs com Múltiplas Escalas

Apresentamos neste capítulo uma introdução a técnicas numéricas modernas e eficientes para se aproximar soluções de equações diferenciais parciais (EDPs) com coeficientes altamente oscilatórios. Considerando uma equação simples, estacionária, mas que carrega em si várias das dificuldades presentes em problemas mais sofisticados, discutimos três alternativas de modelagem: homogeneização, elementos finitos clássicos, e elementos finitos multiescala. Mostramos vantagens e desvantagens de cada técnica e apresentamos exemplos numéricos. Concluimos mostrando resumidamente outras técnicas que têm sido utilizadas recentemente para lidar com problemas com múltiplas escalas.

#### 3.1. Introdução

Discutiremos algumas técnicas numéricas para aproximar soluções de problemas com múltiplas escalas. Apresentamos as idéias no contexto mais simples possível, com um problema unidimensional com coeficientes oscilatórios e periódicos, tendo em vista que os casos de interesse ocorrem em dimensões maiores. Apresentamos um método que funciona bem para estas classes de problemas.

É notório que o método tradicional de Galerkin com elementos finitos e funções polinomiais por partes não é adequado para resolver problemas na presença de múltiplas escalas. De fato, o método não resolve as pequenas escalas a custo aceitável e pode não ser uniformemente estável [68]. O objetivo da modelagem multiescala é capturar o comportamento macroscópico sem resolver as pequenas escalas, num sentido que deixaremos claro.

Diferentes estratégias que estendem o método tradicional de elementos finitos foram desenvolvidas para se tratar destas dificuldades. Uma formulação bem geral e flexível em relação às escolhas dos espaços das funções admissíveis e funções testes foi apresentada por Babuška e Osborn [20, 21], mas estas escolhas não são triviais em geral pois têm que ser feitas levando-se em consideração as especificidades do problema.

Uma escolha feita por Hou e Wu [51] foi a de formar o espaço de elementos finitos com *soluções locais* do operador. É principalmente sobre esta classe de métodos que concentraremos nossa atenção.

A seguir, na Seção 3.1, após motivar a área de multiescala em termos de aplicações e introduzir algumas notações, descrevemos um problema de interesse e mostramos uma forma clássica de aproximá-lo, através de expansão assintótica em duas escalas. Na Seção 3.2 apresentamos uma versão unidimensional do problema e descrevemos o comportamento das soluções homogeneizada. Outra possibilidade de aproximação é discutida na Seção 3.3, e envolve discretizar o problema usando *elementos finitos* com funções de base polinomiais por partes. Esta escolha de método numérico deve-se tanto à aplicabilidade do método em

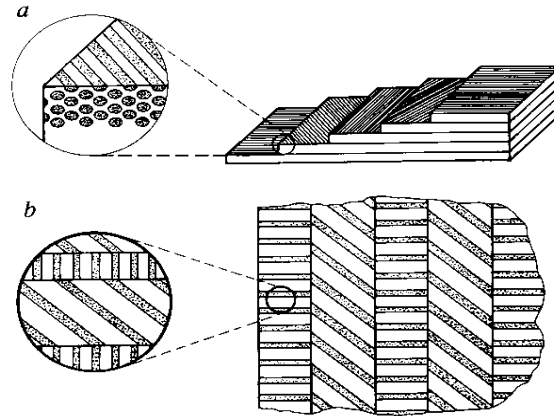


FIG. 1. Material com múltiplas escalas

diversos problemas de interesse, como também a facilidade em desenvolver uma análise de erro que ressalte eventuais dificuldades numéricas.

Uma opção mais eficiente baseada em pesquisa recente [51, 52] é o uso de *elementos finitos multiescala*. Nesta técnica, descrita na Seção 3.4, funções de base que resolvem o problema *localmente* são utilizadas para gerar um espaço de elementos finitos, e automaticamente levam informações da pequena escala para a grande escala, num processo de *homogeneização numérica*.

Finalmente, vários comentários sobre este e outros métodos existentes na literatura aparecem na Seção 3.5.

Parte deste texto apareceu originariamente em [57, 58, 67].

**3.1.1. Motivação.** Múltiplas escalas são comuns em problemas de interesse prático, e apresentam um grande e interessante desafio do ponto de vista matemático. Recentemente, com o aumento da capacidade computacional e com a necessidade de modelagem de novos materiais e sistemas complexo, a área vem recebendo redobrada atenção.

Como exemplo de aplicação, consideramos uma material compósito como na Figura 1 (gentilmente cedida por Roderic Lakes [55]). O material *a* é um laminado onde cada lâmina contém fibras dispostas com diferentes orientações, resultando numa determinada *anisotropia*. No material *b*, cada lâmina contém um sub-laminado, representando um material altamente heterogêneo.

É fácil perceber que, por exemplo, usar elasticidade não linear para modelar deslocamento de laminados como os acima descritos é uma tarefa não trivial, pois o comportamento de cada uma das fibras e sub-laminados teria que ser levado em conta. Uma forma prática de se obter informações é tomar o comportamento “macroscópico” ou “homogeneizado” do material. A idéia é então levar em conta a microestrutura material para formular uma equação homogeneizada que pode ser resolvida mais facilmente.

Outra área onde técnicas de homogeneização são utilizadas é em escoamentos em meios porosos, em particular para simular poluição de aquíferos, extração de petróleo, contaminação por dejetos radiotivos, etc. Ver o artigo [30], e as referências nele contidas.

**3.1.2. Notações e definições.** Usaremos vários conceitos introdutórios de formulações fracas de equações diferenciais e de espaços de Sobolev. Vários livros tratam destes assuntos em diversos níveis de profundidade [17, 18, 28, 32, 54, 56].

Começamos por impor algumas razoáveis restrições nos domínios que utilizaremos. Consideraremos  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um aberto, limitado e de Lipschitz. Tipicamente,  $\Omega$  será um polígono convexo, e quando houver necessidade de mais regularidade, esta será indicada explicitamente. Em particular entendemos por “suave” um domínio com fronteira  $C^\infty$ .

Para  $p \geq 1$ , seja  $L^p(\Omega)$  o espaço das funções mensuráveis  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|v|^p$  seja integrável. Neste espaço usamos a norma

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p}.$$

Definimos também o espaço das funções *essencialmente limitadas*:

$$L^\infty(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \|v\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty\}, \quad \|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \Omega} |v(\mathbf{x})|.$$

Usando a noção de derivadas fracas, definimos para um número inteiro não negativo  $k$ , e para  $p \in [1, \infty)$  ou  $p = \infty$ , o espaço  $W^{k,p}(\Omega)$  das funções  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$\frac{\partial^{k_1+k_2} v}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} \in L^p(\Omega),$$

para todo  $k_1, k_2$  inteiros não negativos tais que  $k_1 + k_2 \leq k$ . Usando as seminormas

$$|v|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left( \sum_{\substack{k_1, k_2=0 \\ k_1+k_2=k}}^k \left\| \frac{\partial^{k_1+k_2} v}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p},$$

equipamos  $W^{k,p}(\Omega)$  com a norma

$$\|v\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left( \sum_{i=0}^k |v|_{W^{i,p}(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

Definimos ainda o espaço  $W_0^{k,p}(\Omega)$  dado pelo completamento de  $C_0^\infty(\Omega)$  (espaço das funções infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto em  $\Omega$ ) usando a norma de  $W^{k,p}(\Omega)$ .

Denotamos em geral  $W^{k,2}(\Omega)$  por  $H^k(\Omega)$ , e  $W_0^{k,2}(\Omega)$  por  $H_0^k(\Omega)$ . Quando  $k = 0$  temos simplesmente  $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ . Finalmente, temos a desigualdade de Poincaré que garante a existência de uma constante  $c$ , que depende somente de  $\Omega$ , tal que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c|v|_{H^1(\Omega)}$$

para todo  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

**3.1.3. Expansão assintótica em duas escalas.** Dado um domínio aberto e limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , com fronteira suave  $\partial\Omega$ , uma função  $f$  também suave em  $\Omega$ , considere o problema de achar  $u^\epsilon$  tal que

$$(3.1.1) \quad \begin{aligned} -\operatorname{div}[a^\epsilon(\mathbf{x}) \nabla u^\epsilon(\mathbf{x})] &= f(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Omega, \\ u^\epsilon &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Para cada  $\epsilon > 0$ , definimos  $a^\epsilon(\mathbf{x}) = a(\epsilon^{-1}\mathbf{x})$ , onde  $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é suave e periódica com período  $Q = (0, 1) \times (0, 1)$ . Além disto, suporemos que existem constantes  $\beta$  e  $\alpha$  tais que  $\beta \geq a(\mathbf{x}) \geq \alpha > 0$  para todo  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

Algumas perguntas naturais surgem:

- (1) A sequência de soluções  $u^\epsilon$  converge em algum sentido para alguma função  $u^*$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ ?
- (2) Em que sentido a convergência ocorre, i.e., qual é a topologia apropriada?
- (3) Quão rápida é esta convergência em relação a  $\epsilon$ ?
- (4) Finalmente, qual é a equação que determina  $u^*$ ?

Chamaremos a função  $u^*$  de *solução homogeneizada*, e o problema por ela satisfeito de *problema ou equação homogeneizada*.

Ao menos formalmente, não é difícil começar a obter algumas respostas. Usando as idéias de expansão assintótica em duas escalas, começamos supondo que

$$(3.1.2) \quad u^\epsilon(\mathbf{x}) \sim u^0(\mathbf{x}, \epsilon^{-1}\mathbf{x}) + \epsilon u^1(\mathbf{x}, \epsilon^{-1}\mathbf{x}) + \epsilon^2 u^2(\mathbf{x}, \epsilon^{-1}\mathbf{x}) + \dots,$$

onde as funções

$$\begin{aligned} u^i &: \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\mapsto u^i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

estão ainda indeterminadas. Impomos ainda uma condição extra nos termos  $u^i$ , que sejam  $Q$ -periódicos com respeito a  $\mathbf{y}$ . Apesar destas condições de contorno parecerem *ad hoc*, elas fazem com que a expansão assintótica “funcione” e que seus termos sejam bem definidos. Além disto, estas condições são *intuitivas*, no sentido que como a pequena escala é periódica, parece natural também impor condições periódicas na variável  $\mathbf{y}$ .

A expansão (3.1.2) deve ser entendida como uma identidade *formal*, e nenhum sentido de convergência pode sê-la atribuída, por enquanto. É válido se perguntar o porquê de tal forma para a expansão. Respostas só podem ser dadas *a posteriori*, quando mostrarmos que a expansão assintoticamente aproxima  $u^\epsilon$ . Entretanto uma possível justificativa é que existem duas escalas importantes no problema, a macroescala descrita pela variável  $\mathbf{x} \in \Omega$ , e a microescala descrita pela variável  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ .

Usando a regra da cadeia temos

$$\nabla[u^i(\mathbf{x}, \epsilon^{-1}\mathbf{x})] = [\nabla_{\mathbf{x}} u^i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon^{-1} \nabla_{\mathbf{y}} u^i(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \Big|_{\mathbf{y}=\epsilon^{-1}\mathbf{x}},$$

e similarmente, definindo o operador

$$(3.1.3) \quad \mathcal{L}^\epsilon v = \operatorname{div}(a^\epsilon \nabla v),$$

para funções  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  suficientemente suaves, temos

$$(3.1.4) \quad (\mathcal{L}^\epsilon u^i)(\mathbf{x}) = \left\{ \epsilon^{-2} \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u^i(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\mathbf{x}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u^i(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \right. \\ \left. + \epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} u^i(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \operatorname{div}_{\mathbf{x}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} u^i(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \right\} \Big|_{\mathbf{y}=\epsilon^{-1}\mathbf{x}},$$

onde  $\nabla_{\mathbf{x}}$  e  $\nabla_{\mathbf{y}}$  denotam o gradiente com respeito às variáveis  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , respectivamente. Notação similar se aplica para  $\operatorname{div}_{\mathbf{x}}$  e  $\operatorname{div}_{\mathbf{y}}$ . Substituindo *formalmente* (3.1.2) em (3.1.4), temos

$$(3.1.5) \quad (\mathcal{L}^\epsilon u^\epsilon)(\mathbf{x}) = \left\{ \begin{aligned} & \epsilon^{-2} \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \\ & + \epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\mathbf{x}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \epsilon^{-1} \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} u^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \\ & + \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \operatorname{div}_{\mathbf{x}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} u^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \\ & + \operatorname{div}_{\mathbf{x}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} u^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \epsilon \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} u^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \epsilon \operatorname{div}_{\mathbf{x}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \\ & + \epsilon \operatorname{div}_{\mathbf{x}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} u^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \epsilon^2 \operatorname{div}_{\mathbf{x}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} u^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \dots \end{aligned} \right\} \Big|_{\mathbf{y}=\epsilon^{-1}\mathbf{x}}.$$

Vale observar que todos os termos multiplicados por  $\epsilon^{-2}$ ,  $\epsilon^{-1}$  e  $\epsilon^0$  estão presentes. Faltam entretanto termos em  $\epsilon$ ,  $\epsilon^2$ , etc, pois estes dependeriam de  $u^3$ , etc.

Utilizando (3.1.1) e (3.1.5), e agrupando os termos multiplicados por  $\epsilon^{-2}$  temos

$$(3.1.6) \quad \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = 0 \quad \text{em } \Omega \times Q.$$

Note que propomos a equação (3.1.6) para *todo*  $\mathbf{y} \in Q$  e não apenas em  $\mathbf{y} = \epsilon^{-1}\mathbf{x}$ , como em (3.1.5). Deste modo temos uma equação em  $Q$ , parametrizada por  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Portanto, concluímos de (3.1.6) que  $u^0$  independe de  $\mathbf{y}$ , i.e., existe uma função  $u^* : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$u^*(\mathbf{x}) = u^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Agrupando os termos multiplicados por  $\epsilon^0$  em (3.1.5) resulta em

$$(3.1.7) \quad \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \operatorname{div}_{\mathbf{x}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \\ + \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} u^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \operatorname{div}_{\mathbf{x}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} u^*(\mathbf{x})] = f \quad \text{em } \Omega \times Q.$$

Observe que (3.1.7) tem condição de compatibilidade resultante de integração em  $Q$  com respeito a  $\mathbf{y}$ :

$$(3.1.8) \quad \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \int_Q a(\mathbf{y}) [\nabla_{\mathbf{y}} u^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{x}} u^*(\mathbf{x})] d\mathbf{y} = f \quad \text{em } \Omega.$$

Para determinar  $u^*$ , juntamos os termos em  $\epsilon^{-1}$  e concluímos que

$$(3.1.9) \quad \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = -\nabla_{\mathbf{y}} a(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} u^*(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Omega \times Q.$$

Note que resolvendo

$$(3.1.10) \quad \operatorname{div}_{\mathbf{y}}[a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} H_j(\mathbf{y})] = -\frac{\partial a}{\partial y_j}(\mathbf{y}) \quad \text{em } Q, \quad H_j(\cdot) \text{ periódico com período } Q,$$

para  $j = 1, 2$ , vemos facilmente que

$$(3.1.11) \quad u^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^2 H_j(\mathbf{y}) \frac{\partial u^*}{\partial x_j}(\mathbf{x})$$

satisfaz (3.1.9). Finalmente, substituindo em (3.1.8), concluímos que

$$(3.1.12) \quad \operatorname{div}_{\mathbf{x}} A^* \nabla_{\mathbf{x}} u^* = f \quad \text{em } \Omega, \quad u^* = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

onde

$$A_{i,j}^* = \int_Q a(\mathbf{y}) \left[ \frac{\partial H_j}{\partial y_i}(\mathbf{y}) + \delta_{ij} \right] d\mathbf{y}.$$

Os problemas definidos por (3.1.10) são denominados *problemas de célula*, e são funções apenas do comportamento “local” de  $a(\cdot)$ , não dependendo de  $\epsilon$ ,  $\Omega$  ou  $f$ . Depois de resolvido (3.1.10), o problema (3.1.12) está bem-definido, e é também independente do parâmetro  $\epsilon$ .

OBSERVAÇÃO. Mesmo sendo isotrópico o problema original (3.1.1), a equação homogeneizada resultante é anisotrópica em geral.

**3.1.4. Justificando a expansão assintótica.** Apesar de não se poder concluir da derivação formal acima que  $u^*$  é de fato o limite de  $u^\epsilon$ , existem técnicas apropriadas para provar convergência de  $u^\epsilon$  para  $u^*$ , justificando assim (3.1.12). Citamos por exemplo o método de funções testes oscilatórias de Tartar, bem como o método de duas escalas de Nguetseng e Allaire [8, 29]. Apresentamos aqui uma argumentação mais simples e de escopo mais limitado [50], porém suficiente para nossos propósitos. Por outro lado, exigimos suavidade do domínio e dos coeficientes que não ocorre na maioria dos problemas de interesse prático.

Seja  $z = u^\epsilon - (u^* + \epsilon u^1 + \epsilon^2 u^2)$ . Note que tanto  $u^*$  como  $u^1$  estão bem definidos por (3.1.12) e (3.1.11). Como a condição de compatibilidade (3.1.8) é satisfeita, então existe solução para (3.1.7). Por substituição direta temos  $\mathcal{L}^\epsilon z = r$ , onde

$$r(\mathbf{x}) = \left\{ \epsilon \operatorname{div}_{\mathbf{y}} [a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} u^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \epsilon \operatorname{div}_{\mathbf{x}} [a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} u^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \right. \\ \left. + \epsilon \operatorname{div}_{\mathbf{x}} [a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} u^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \epsilon^2 \operatorname{div}_{\mathbf{x}} [a(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}} u^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \right\} \Big|_{\mathbf{y}=\epsilon^{-1}\mathbf{x}}.$$

Supondo  $a$ ,  $\Omega$  e  $f$  suficientemente suaves, temos que  $\|r\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c\epsilon$ . No bordo de  $\Omega$  temos  $z = -\epsilon u^1 - \epsilon^2 u^2$ , logo  $\|z\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq c\epsilon$ . Aplicando o princípio do máximo [48] para  $z$ ,  $u^1$  e  $u^2$ , concluímos que

$$(3.1.13) \quad \|u^\epsilon - u^*\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u^\epsilon - (u^* + \epsilon u^1 + \epsilon^2 u^2)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\epsilon u^1\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\epsilon^2 u^2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c\epsilon.$$

Logo, a solução exata de (3.1.1) não só converge para a solução homogeneizada (3.1.12), como o erro decresce linearmente com  $\epsilon$  em  $L^\infty(\Omega)$ . Temos portanto respostas para as perguntas da Subseção 3.1.3.

Um resultado de convergência como o dado por (3.1.13) pode ser obtido sob condições mais fracas. Seja  $\theta \in H^1(\Omega)$  solução fraca de

$$(3.1.14) \quad \begin{aligned} -\operatorname{div} [a^\epsilon(\mathbf{x}) \nabla \theta(\mathbf{x})] &= 0 \quad \text{em } \Omega, \\ \theta(\mathbf{x}) &= u^1(\mathbf{x}, \epsilon^{-1}\mathbf{x}) \quad \text{para } \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned}$$

Temos então o seguinte resultado [52, Lema 3.1, Corolário 3.2, Observação 3.3].

**TEOREMA 3.1.1.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  aberto limitado com fronteira  $\partial\Omega$  Lipschitz e  $a \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ ,  $p > 2$ , periódica com período  $Q$ . Suponha que  $f \in L^2(\Omega)$ , e seja  $u^\epsilon$  solução de (3.1.1). Sejam  $u^*$ ,  $u^1$  e  $\theta$  definidos por (3.1.12), (3.1.11) e (3.1.14) respectivamente. Então existe*

uma constante  $C$  independente de  $f$  e de  $\epsilon$  tal que

$$\begin{aligned}\|u^\epsilon - u^* - \epsilon u^1 + \epsilon \theta\|_{H^1(\Omega)} &\leq C\epsilon \|u^*\|_{H^2(\Omega)}, \\ \|u^\epsilon - u^*\|_{H^1(\Omega)} &\leq C\epsilon \|u^*\|_{H^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Normalmente, em aplicações,  $a(\cdot)$  é pouco regular. Em compósitos por exemplo, o coeficiente é de fato *descontínuo*, refletindo a inclusão de materiais com propriedades distintas do meio predominante.

### 3.2. Um modelo unidimensional

Para descrever as propriedades qualitativas e dificuldades relacionadas com problemas que apresentam caráter oscilatório, consideramos o seguinte modelo unidimensional:

$$(3.2.1) \quad \begin{aligned}-\frac{d}{dx} \left( a(x/\epsilon) \frac{du^\epsilon}{dx}(x) \right) &= f(x) \quad \text{em } (0, 1), \\ u^\epsilon(0) &= u^\epsilon(1) = 0.\end{aligned}$$

onde  $a(\cdot)$  é suave e periódica com período 1, e existem  $\beta, \alpha$  reais tais que  $\beta \geq a(x) \geq \alpha > 0$ . Estamos interessados somente no caso em que  $\epsilon \leq 1$ , portanto supomos também esta desigualdade.

Neste caso unidimensional, é fácil obter uma solução analítica para (3.2.1):

$$\begin{aligned}u^\epsilon(x) &= - \int_0^x \frac{1}{a(\xi/\epsilon)} \left( \int_0^\xi f(t) dt + c_0 \right) d\xi, \\ c_0 &= - \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{a(\xi/\epsilon)} d\xi} \int_0^1 \left( \frac{1}{a(\xi/\epsilon)} \int_0^\xi f(t) dt \right) d\xi.\end{aligned}$$

**3.2.1. Solução exata.** Nos nossos exemplos, consideramos

$$(3.2.2) \quad f(x) = 1, \quad a(x) = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(1 + \sin(2\pi x)) + \alpha, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{5}{2}.$$

Seja a sequência de problemas onde  $\epsilon = 1/4$ ,  $\epsilon = 1/8$  e  $\epsilon = 1/16$ . É fácil notar pelas Figuras 2, 3 e 4 deste exemplo, que crescem as oscilações de  $a(\cdot/\epsilon)$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Em geral, não é possível obter soluções analíticas para dimensões maiores. Motivados por esta dificuldade, investigaremos agora como encontrar soluções aproximadas para (3.2.1).

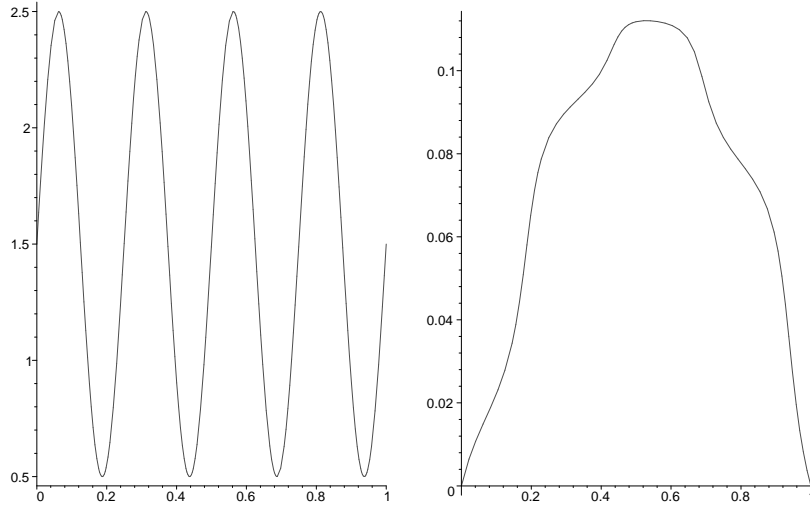
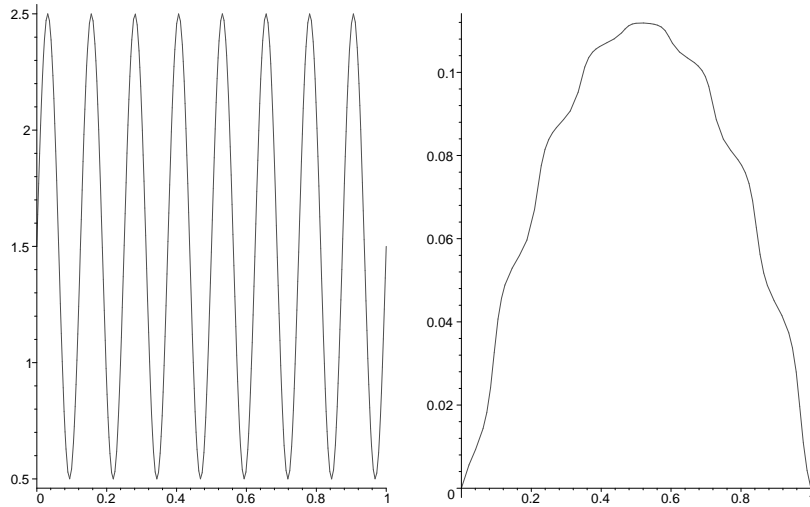
Uma possibilidade explorada na Seção 3.2.2 é o uso de técnicas de homogeneização. Como vimos, a idéia básica apoia-se no fato de que, quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , a solução exata converge para a solução homogeneizada. Espera-se então que para valores de  $\epsilon$  pequenos, a aproximação pela solução homogeneizada seja boa o suficiente.

**3.2.2. Solução homogeneizada.** Considere  $u^\epsilon$  solução de (3.2.1), e o problema homogeneizado

$$(3.2.3) \quad -\frac{1}{\mathcal{M}(1/a)} \frac{d^2}{dx^2} u^0 = f(x) \quad \text{em } (0, 1), \quad u^0(0) = u^0(1) = 0,$$

e

$$\mathcal{M}(1/a) = \int_0^1 \frac{1}{a(x)} dx.$$

FIG. 2. Gráficos de  $a(\cdot/\epsilon)$  e da solução exata para  $\epsilon = 1/4$ .FIG. 3. Gráficos de  $a(\cdot/\epsilon)$  e da solução exata para  $\epsilon = 1/8$ .

Em uma dimensão, é fácil calcular  $u^0$  analiticamente:

$$(3.2.4) \quad u^0(x) = \mathcal{M}(1/a) \left[ - \int_0^x \int_0^\xi f(t) dt d\xi + x \int_0^1 \int_0^\xi f(t) dt d\xi \right].$$

Pela versão unidimensional do Teorema 3.1.1, temos convergência de  $u^\epsilon$  para  $u^0$ .

Supondo (3.2.2), comparamos agora como a solução homogeneizada se comporta. Considere a sequência de exemplos onde  $\epsilon = 1/4$ ,  $\epsilon = 1/8$  e  $\epsilon = 1/16$ . Pode-se notar pelas Figuras 5 e 6 que para valores de  $\epsilon$  pequenos, a solução homogeneizada  $u^0$  torna-se uma boa aproximação para a solução exata  $u^\epsilon$ .

Apesar de serem extremamente úteis em várias aplicações, as técnicas de homogeneização apresentam algumas limitações. Por exemplo, sua aplicabilidade está limitada a valores de  $\epsilon$



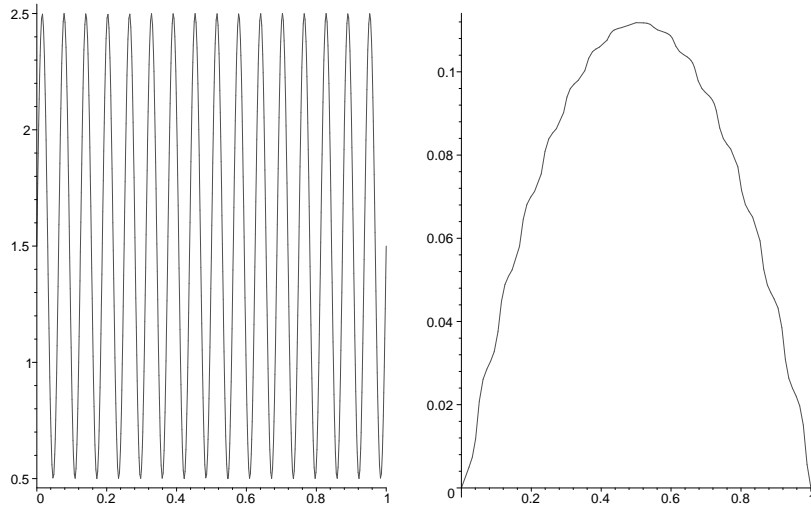


FIG. 4. Gráficos de  $a(\cdot/\epsilon)$  e da solução exata para  $\epsilon = 1/16$ .

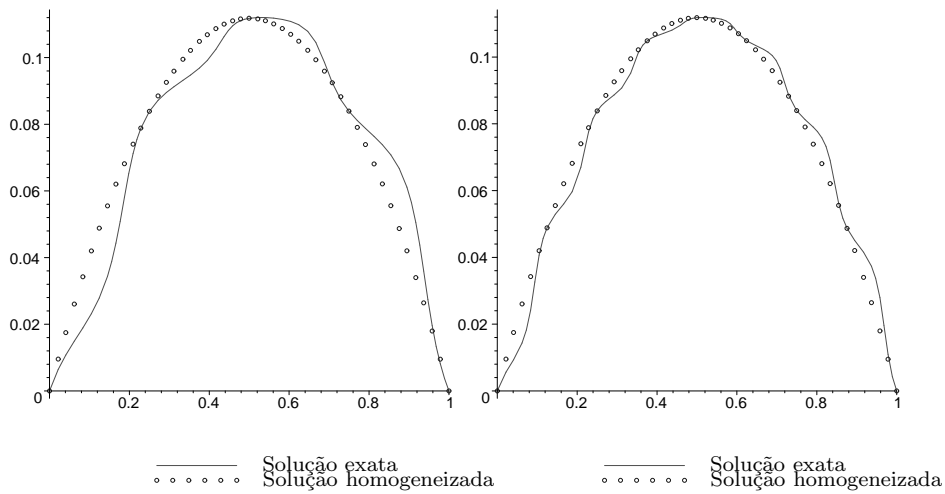


FIG. 5. Soluções exatas e homogeneizadas para  $\epsilon = 1/4$  e  $\epsilon = 1/8$ .

pequenos, como fica aparente na Figura 5. Outras dificuldades surgem em casos mais gerais, por exemplo quando  $a(\cdot)$  é não periódico.

### 3.3. Aproximação por Elementos Finitos

A forma fraca para (3.2.1), temos que  $u^\epsilon \in H_0^1(0, 1)$  é tal que

$$(3.3.1) \quad \int_0^1 a(x/\epsilon) \frac{du^\epsilon}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx \quad \text{para todo } v \in H_0^1(0, 1).$$

A existência e unicidade de soluções para (3.3.1) se segue imediatamente do Lema de Lax–Milgram.

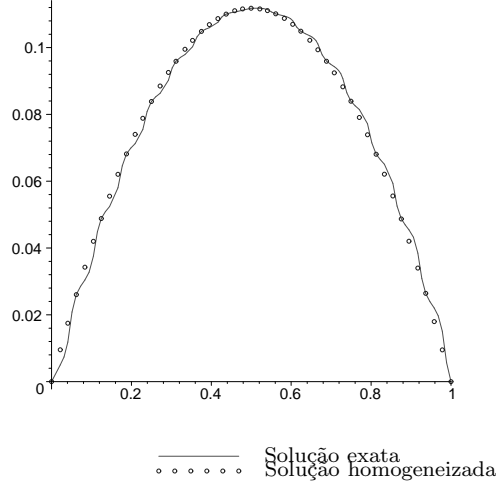


FIG. 6. Comparação entre as soluções exata e homogeneizada para  $\epsilon = 1/16$ .

**3.3.1. Discretização por Elementos Finitos.** No método de Galerkin, escolhemos um subespaço de  $H_0^1(0, 1)$  e buscamos soluções aproximadas de (3.3.1) dentro desse subespaço. Para usar elementos finitos, primeiro discretizamos o domínio  $(0, 1)$  em  $N + 1$  elementos definindo os nós  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N+1} = 1$ , onde  $x_j = jh$ , e  $h = 1/(N + 1)$  é o tamanho da malha. A seguir, definimos o espaço de dimensão finita de funções lineares por partes  $V_0^h \subset H_0^1(0, 1)$ , onde

$$V_0^h = \{v^h \in H_0^1(0, 1) : v^h \text{ é linear em } (x_{j-1}, x_j) \text{ for } j = 1, \dots, N + 1\}.$$

A aproximação por elementos finitos de  $u^\epsilon$  é  $u^h \in V_0^h$  tal que

$$(3.3.2) \quad \int_0^1 a(x/\epsilon) \frac{du^h}{dx}(x) \frac{dv^h}{dx}(x) dx = \int_0^1 f(x)v^h(x) dx \quad \text{para todo } v^h \in V_0^h.$$

Mais uma vez, a existência e unicidade de soluções para (3.3.2) é consequência imediata do Lema de Lax–Milgram.

**OBSERVAÇÃO.** Note que  $u^h$  também depende de  $\epsilon$ , apesar desta dependência não estar explicitada na notação.

Observe que uma função em  $V_0^h$  pode ser caracterizada de forma única pelos seus valores nos nós  $x_1, x_2$ , etc. Em vista disto, introduzimos uma *base* em  $V_0^h$  dada pelos  $\phi_i \in V_0^h$  tal que  $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$  para  $j = 1, \dots, N$ . Temos então  $V_0^h = \text{span} \{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ .

Finalmente, se  $u^h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i(x)$ , então reescrevemos (3.3.2) como

$$(3.3.3) \quad \sum_{i=1}^N u_i \int_0^1 \left( a(x/\epsilon) \frac{d\phi_i}{dx}(x) \frac{d\phi_j}{dx}(x) \right) dx = \int_0^1 f(x)\phi_j(x) dx \quad \text{para } j = 1, \dots, N.$$

Note que  $u_j = u^h(x_j)$  é o valor de  $u^h$  no nó  $x_j$ .

As aproximações numéricas para (3.2.1), onde  $a$  é dada por (3.2.2) apresentam resultados variados. Para  $\epsilon = 1/4$  e  $h = 1/32$ , o método de elementos finitos aproxima razoavelmente bem a solução exata, como mostra a primeira comparação na Figura 7. Entretanto, a

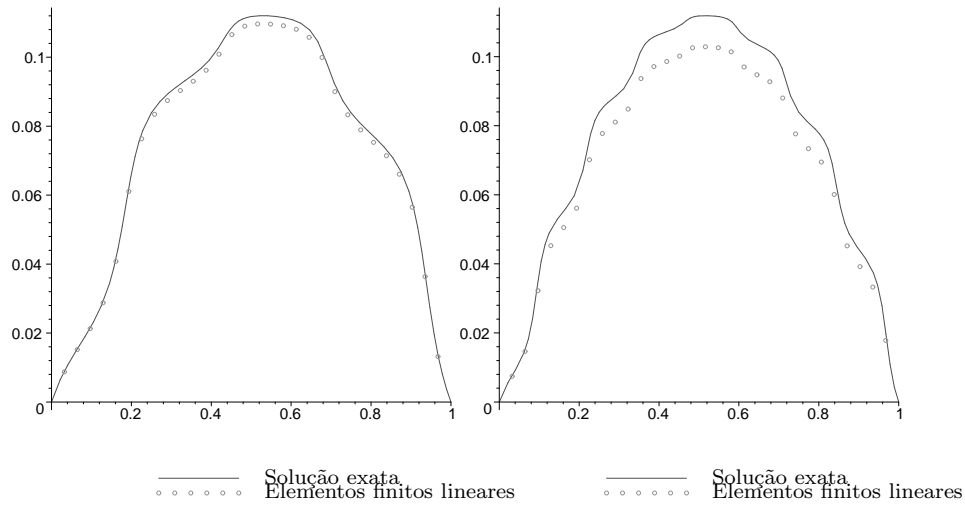


FIG. 7. Solução exata e sua aproximação com  $h = 1/32$  para  $\epsilon = 1/4$  e  $\epsilon = 1/8$ .

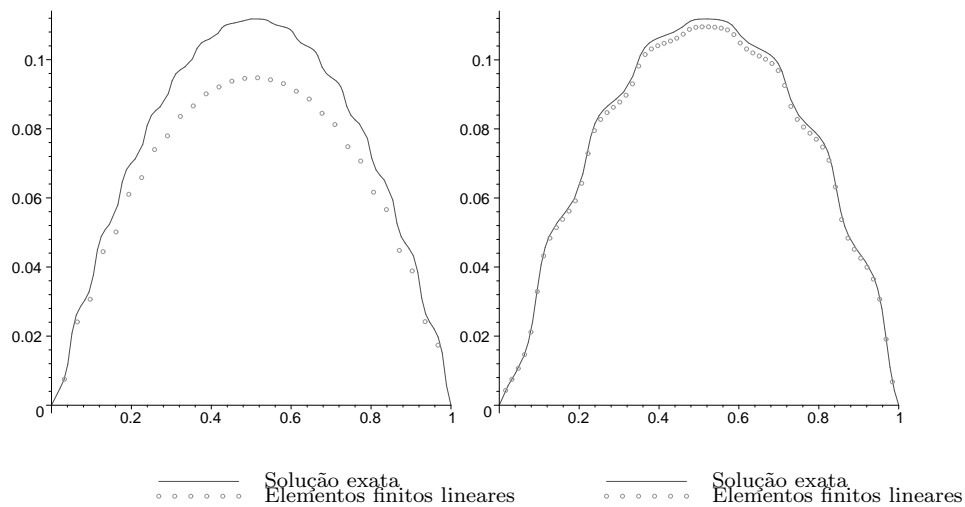


FIG. 8. À esquerda:  $\epsilon = 1/16$  e  $h = 1/32$ . À direita:  $\epsilon = 1/8$  e  $h = 1/64$ .

aproximação se deteriora quando  $\epsilon$  se torna menor. Veja os gráficos para  $h = 1/32$ , mas  $\epsilon = 1/8$  na Figura 7, e  $\epsilon = 1/16$  na Figura 8 (à esquerda). A aproximação melhora se refinarmos a malha. Por exemplo, tomando o caso  $\epsilon = 1/8$ , mas com  $h = 1/64$ , temos uma melhoria na aproximação, como mostra a Figura 8.

O ponto que queremos ressaltar é que o método de elementos finitos converge, mas a *convergência depende de  $\epsilon$* . Isto pode ser um problema em dimensões maiores, quando o uso de malhas refinadas torna-se caro computacionalmente.

**3.3.2. O que dá errado?** A fim de entender melhor porque o método de elementos finitos clássico não funciona bem, desenvolvemos uma análise de erro para esse problema. Denotamos por  $c$  uma constante independente de  $\epsilon$ ,  $h$ ,  $f$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ .

A análise é baseada no *Lema de Céa*, que indica que, a menos de uma constante multiplicativa, a aproximação dada pelo método de Galerkin é a melhor possível.

LEMA 3.3.1 (Lema de Céa). Sejam  $u^\epsilon$  e  $u^h$  soluções de (3.2.1) e (3.3.2). Então existe uma constante universal  $c$  tal que

$$\|u^\epsilon - u^h\|_{H^1(0,1)} \leq c \frac{\beta}{\alpha} \|u^\epsilon - v^h\|_{H^1(0,1)} \quad \text{para todo } v^h \in V_0^h.$$

DEMONSTRAÇÃO. Para facilitar a notação, definimos as formas bilineares

$$b(u, v) = \int_0^1 a(x/\epsilon) \frac{du^\epsilon}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) dx, \quad (f, v) = \int_0^1 f(x)v(x) dx.$$

Temos então que a solução exata  $u^\epsilon \in H_0^1(0, 1)$  e sua aproximação por elementos finitos  $u^h \in V_0^h$  satisfazem

$$b(u^\epsilon, v) = (f, v), \quad b(u^h, v^h) = (f, v^h),$$

para todo  $v \in H_0^1(0, 1)$  e para todo  $v^h \in V_0^h$ . Portanto  $b(u^\epsilon - u^h, v^h) = 0$ . Na nossa análise, usamos o fato que  $\beta \geq a(x) \geq \alpha > 0$ . Começamos por investigar a continuidade da forma bilinear  $b(\cdot, \cdot)$ . Segue-se de sua definição que

$$(3.3.4) \quad b(u, v) \leq \beta \|u\|_{H^1(0,1)} \|v\|_{H^1(0,1)} \quad \text{para todo } u, v \in H_0^1(0, 1).$$

A seguir, estimamos a coercividade:

$$(3.3.5) \quad b(v, v) \geq \alpha \int_0^1 \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx \geq c\alpha \|v\|_{H^1(0,1)}^2 \quad \text{para todo } v \in H_0^1(0, 1),$$

onde usamos a desigualdade de Poincaré no último passo. Podemos agora obter estimativas de erro. Usando (3.3.5), e depois (3.3.4), concluímos que

$$(3.3.6) \quad \|u^\epsilon - u^h\|_{H^1(0,1)}^2 \leq \frac{c}{\alpha} b(u^\epsilon - u^h, u^\epsilon - u^h) = \frac{c}{\alpha} b(u^\epsilon - u^h, u^\epsilon - v^h) \\ \leq c \frac{\beta}{\alpha} \|u^\epsilon - u^h\|_{H^1(0,1)} \|u^\epsilon - v^h\|_{H^1(0,1)} \quad \text{para todo } v^h \in V_0^h.$$

□

A fim de aplicar o Lema de Céa (Lema 3.3.1) usamos uma estimativa clássica de erro de interpolação garantindo que

$$(3.3.7) \quad \|u^\epsilon - I^h u^\epsilon\|_{H^1(0,1)} \leq ch |u^\epsilon|_{H^2(0,1)},$$

onde  $I^h u^\epsilon = \sum_{j=1}^N u^\epsilon(x_j) \phi_j$  é o interpolador de  $u^\epsilon$  em  $V_0^h$ . Fazendo  $v^h = I^h u^\epsilon$  em (3.3.6), concluímos que

$$\|u^\epsilon - u^h\|_{H^1(0,1)} \leq c \frac{\beta}{\alpha} h |u^\epsilon|_{H^2(0,1)}.$$

Obtemos finalmente o teorema a seguir usando a estimativa

$$(3.3.8) \quad |u^\epsilon|_{H^2(0,1)} \leq \frac{c\beta}{\alpha^2 \epsilon} \|f\|_{L^2(0,1)},$$

onde supomos  $|a'(x)| \leq c\beta$ .

TEOREMA 3.3.2. *Seja  $f \in L^2(0,1)$ , e seja  $u^\epsilon$  solução de (3.2.1). Então existe uma constante  $c$  independente de  $\epsilon, f, \alpha, \beta$  tal que*

$$(3.3.9) \quad \|u^\epsilon - u^h\|_{H^1(0,1)} \leq c \frac{\beta^2 h}{\alpha^3 \epsilon} \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Interpretando a estimativa obtida, percebemos de imediato que *o método converge quando  $h \rightarrow 0$* . De fato, para  $\epsilon$  fixo, o erro vai a zero quando o tamanho da malha vai a zero. O problema é que a convergência em  $h$  não é uniforme em  $\epsilon$ .

Logo, para  $\epsilon$  pequeno, a menos que a malha seja muito refinada ( $h \ll \epsilon$ ), a estimativa (3.3.9) indica que o erro na norma  $H^1(0,1)$  é grande. Isto faz com que o método de elementos finitos tradicional seja deficiente para este tipo de problema, e explica os maus resultados das Figuras 7 e 8 (à esquerda).

### 3.4. Elementos Finitos Múltiescala

Mais recentemente, Hou e Wu [51] propuseram uma nova forma de aproximação numérica para EDPs em duas dimensões com coeficientes oscilatórios. A idéia básica é mudar as funções de base do espaço de elementos finitos. Ao invés de usar funções lineares por partes, a técnica de *elementos finitos multiescala* usa funções que resolvem localmente (em cada elemento) a equação em questão.

Apresentamos aqui as idéias no caso unidimensional. Em quase todos os aspectos, incluindo a análise de erro, a extensão para duas dimensões é natural. Comentamos ao fim desta seção alguns pontos onde esta generalização não é trivial.

Ressaltamos que apesar da definição do método feita na Subseção 3.4.1 independer da periodicidade de  $a(\cdot)$ , a análise apresentada na Subseção 3.4.2 baseia-se nesta propriedade.

**3.4.1. Definição do método.** A fim de definir o método, construímos as funções de base. Seja  $\psi_i$  tal que

$$(3.4.1) \quad -\frac{d}{dx} \left( a(x/\epsilon) \frac{d\psi_i}{dx}(x) \right) = 0 \quad \text{em } \cup_{j=1}^{N+1} (x_{j-1}, x_j), \quad \psi_i(x_j) = \delta_{ij}$$

para  $i = 1, \dots, N$ . Definimos então o espaço de elementos finitos multiescala como sendo

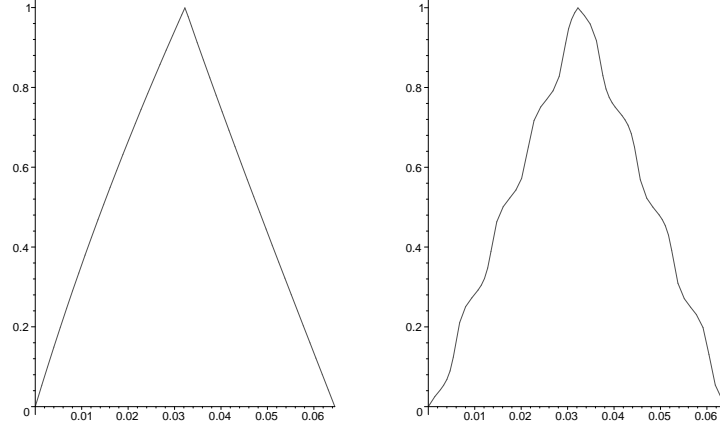
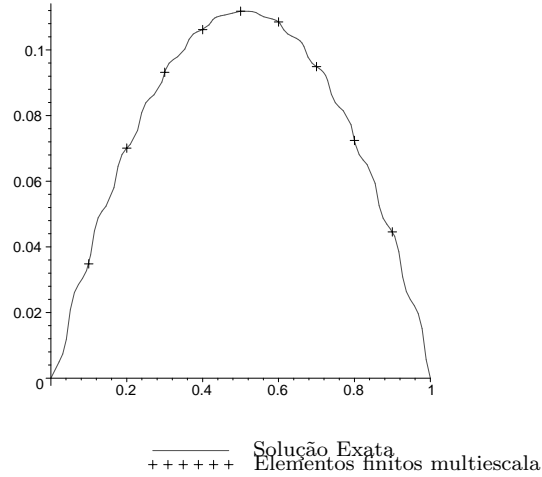
$$V_0^{h,\epsilon} = \text{span} \{ \psi_1, \dots, \psi_N \}.$$

Duas funções de base típica são apresentadas na Figura 9. No gráfico à esquerda os parâmetros são  $\epsilon = 1/4$  e  $h = 1/32$ . Note que a função se parece muito com a função de base do método de elementos finitos usual. Isto é bom, pois neste caso o parâmetro de malha  $h$  é bem menor do que  $\epsilon$ , e a função de base tradicional ainda funciona bem, vide a primeira comparação na Figura 7. No caso oposto, quando  $\epsilon$  é bem menor que  $h$ , temos que a função de base tem caráter oscilatório, como é mostrado no gráfico à direita na Figura 9, para  $\epsilon = 1/128$  e  $h = 1/32$ .

Definimos então a solução de elementos finitos multiescala  $u^{h,\epsilon} \in V_0^{h,\epsilon}$  onde

$$(3.4.2) \quad \int_0^1 a(x/\epsilon) \frac{du^{h,\epsilon}}{dx}(x) \frac{dv^{h,\epsilon}}{dx}(x) dx = \int_0^1 f(x) v^{h,\epsilon}(x) dx \quad \text{para todo } v^{h,\epsilon} \in V_0^{h,\epsilon}.$$

Testando então a aproximação para  $\epsilon = 1/16$  e  $h = 1/10$ , vemos na Figura 10 que a solução aproximada pelo método de elementos finitos multiescala interpola a solução exata nos nós.

FIG. 9. Para  $h = 1/32$ , gráficos de  $\psi_1$  com  $\epsilon = 1/4$  e  $\epsilon = 1/128$ .FIG. 10. Gráficos de  $u^\epsilon$  e de sua aproximação por elementos finitos multiescala, com  $\epsilon = 1/16$  e  $h = 1/10$ .

Isto não é uma coincidência, mas sim uma característica de métodos de elementos finitos que utilizam funções que são soluções locais da própria EDP que estão aproximando, em uma dimensão . Em dimensões maiores essa propriedade é, infelizmente!, perdida.

**3.4.2. Análise de erro.** A análise de erro desenvolvida em [52] baseia-se no Lema de Céa, como feito na Subseção 3.3.2.

LEMA 3.4.1 (Lema de Céa). Sejam  $u^\epsilon$  e  $u^{h,\epsilon}$  soluções de (3.2.1) e (3.4.2). Então existe uma constante universal  $c$  tal que

$$\|u^\epsilon - u^{h,\epsilon}\|_{H^1(0,1)} \leq c \frac{\beta}{\alpha} \|u^\epsilon - v^{h,\epsilon}\|_{H^1(0,1)} \quad \text{para todo } v^{h,\epsilon} \in V_0^{h,\epsilon}.$$

No método de elementos finitos clássico, encontramos uma função em  $V_0^h$  que “aproximava bem”  $u^\epsilon$  e estimamos o erro de aproximação. No caso, a função em  $V_0^h$  era o interpolador de  $u^\epsilon$ . Utilizando o Lema de Céa (Lema 3.3.1) obtivemos a estimativa final.

Similarmente, o desafio agora é achar uma aproximação para  $u^\epsilon$  no espaço multiescala  $V_0^{h,\epsilon}$ . A análise divide-se em dois casos distintos, dependendo se a malha é refinada o suficiente ou não, em relação a  $\epsilon$ . Na verdade, em uma dimensão, esta divisão em casos distintos não faz sentido. Mesmo assim, mantemos a análise dividida nestes dois casos, pois em dimensões maiores a análise de erro dá informações qualitativas diferentes dependendo se  $h \ll \epsilon$  ou  $\epsilon \ll h$ .

**Caso I:**  $h \ll \epsilon$ . Neste caso em que supomos a malha suficientemente refinada, obtemos a seguinte resultado de convergência, que a menos de constantes, é o mesmo que o do Teorema 3.3.2. Ou seja, para malhas refinadas, *o método multiescala funciona tão bem quanto o método tradicional*.

**TEOREMA 3.4.2.** *Seja  $f \in L^2(0,1)$  e seja  $u^\epsilon$  solução de (3.2.1). Então existe uma constante  $c$  independente de  $\epsilon$ ,  $f$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  tal que*

$$\|u^\epsilon - u^{h,\epsilon}\|_{H^1(0,1)} \leq c \frac{\beta}{\alpha^2} h \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

O teorema acima segue-se facilmente do Lema de C ea (Lema 3.4.1) e do seguinte resultado de interpolação [52].

**LEMA 3.4.3.** *Seja  $u^\epsilon$  solução de (3.2.1), e seja  $I^{h,\epsilon}u^\epsilon = \sum_{j=1}^N u^\epsilon(x_j)\psi_j$  interpolador de  $u^\epsilon$  em  $V_0^{h,\epsilon}$ . Então existe uma constante  $c$  independente de  $\epsilon$ ,  $f$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  tal que*

$$\|u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon\|_{H^1(0,1)} \leq c \frac{h}{\alpha} \|f\|_{L^2(0,1)}^2.$$

**DEMONSTRAÇÃO.** Note que

$$\begin{aligned} \alpha |u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon|_{H^1(x_{j-1},x_j)}^2 &\leq \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{d}{dx}(u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon) a(x/\epsilon) \frac{d}{dx}(u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon) dx \\ &= - \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon) \frac{d}{dx} \left[ a(x/\epsilon) \frac{d}{dx}(u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon) \right] dx \\ &= - \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon) \frac{d}{dx} \left[ a(x/\epsilon) \frac{d}{dx} u^\epsilon \right] dx \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon) f dx \leq \|u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon\|_{L^2(x_{j-1},x_j)} \|f\|_{L^2(x_{j-1},x_j)}. \end{aligned}$$

Mas a desigualdade de Poincar e nos d a que  $\|v\|_{L^2(x_{j-1},x_j)} \leq ch|v|_{H^1(x_{j-1},x_j)}$  para todo  $v \in H_0^1(x_{j-1},x_j)$ , e então

$$\alpha |u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon|_{H^1(x_{j-1},x_j)}^2 \leq ch |u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon|_{H^1(x_{j-1},x_j)} \|f\|_{L^2(x_{j-1},x_j)}.$$

Logo,

$$|u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon|_{H^1(x_{j-1},x_j)} \leq c \frac{h}{\alpha} \|f\|_{L^2(x_{j-1},x_j)}.$$

Para encontrar uma estimativa global, basta somar a desigualdade acima em todos os elementos

$$\|u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon\|_{H^1(0,1)}^2 \leq ch^2 \sum_{j=1}^N \frac{1}{\alpha^2} \|f\|_{L^2(x_{j-1},x_j)}^2 = c \frac{h^2}{\alpha^2} \|f\|_{L^2(0,1)}^2,$$

e tirando raízes dos dois lados da equação obtemos o resultado.  $\square$

**OBSERVAÇÃO.** A estimativa obtida no Teorema 3.4.2 é particular ao caso unidimensional. Em duas dimensões, a demonstração do Lema 3.4.3 tem que ser modificada pois  $u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon$  não mais se anula no bordo dos elementos. O preço final a se pagar é uma estimativa que se comporta como  $h/\epsilon$ , ou seja não é mais uniforme em  $\epsilon$  como aqui.

**Caso II:**  $\epsilon \ll h$ . Mesmo quando  $\epsilon$  é pequeno em relação à malha, e o método de elementos finitos lineares não funciona a contento, os elementos finitos multiescala aproximam bem a solução exata. Abaixo apresentamos uma estimativa de erro. Para indicar uma constante que pode depender de  $\alpha$  ou  $\beta$ , mas não de  $\epsilon$ ,  $h$  ou  $f$ , utilizamos a letra maiúscula  $C$ .

**TEOREMA 3.4.4.** *Seja  $f \in L^2(0,1)$ , e seja  $u^\epsilon$  solução de (3.2.1). Então existe uma constante  $C$  independente de  $\epsilon$  e  $f$  tal que*

$$\|u^\epsilon - u^{h,\epsilon}\|_{H^1(0,1)} \leq C(\epsilon h^{-1/2} + h)\|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Para estimar o erro de aproximação do presente método, temos que encontrar uma função em  $V_0^{h,\epsilon}$  que aproxime  $u^\epsilon$  para então aplicar o Lema de Céa (Lema 3.4.1). Nosso candidato é  $u_I$ , interpolador de  $u^0$  em  $V_0^{h,\epsilon}$ . Note que no **Caso I** (quando  $h \ll \epsilon$ ), tomamos como candidato o interpolador de  $u^\epsilon$ , diferentemente do que fazemos agora.

Para entender porque este o método multiescala funciona bem para  $\epsilon \ll h$ , é necessário usar a expansão assintótica de  $u^\epsilon$ . Isto é possível se calcularmos os primeiros termos da expansão assintótica assim como foi feito no caso bidimensional (3.1.10), (3.1.11), (3.1.12). De fato, seja  $u^0$  como em (3.2.3), e  $H$  solução de

$$(3.4.3) \quad -\frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{dH}{dy}(y) \right) = \frac{da}{dy}(y) \quad \text{em } (0,1),$$

$$H \text{ periódica com período } 1, \quad \int_0^1 H(y) dy = 0.$$

Além disso, seja

$$(3.4.4) \quad u^1(x) = -H(x/\epsilon) \frac{du^0}{dx}(x).$$

e  $\theta$  tal que

$$(3.4.5) \quad -\frac{d}{dx} \left( a(x/\epsilon) \frac{d\theta}{dx}(x) \right) = 0 \quad \text{em } (0,1),$$

$$\theta(0) = u^1(0), \quad \theta(1) = u^1(1).$$

Temos então o seguinte resultado, que é a versão unidimensional do Teorema 3.1.1.

**TEOREMA 3.4.5.** *Suponha que  $f \in L^2(0,1)$ , e seja  $u^\epsilon$  solução de (3.2.1). Sejam  $u^0$ ,  $u^1$  e  $\theta$  definidos por (3.2.3), (3.4.4) e (3.4.5) respectivamente. Então existe uma constante  $C$  independente de  $f$  e de  $\epsilon$  tal que*

$$\|u^\epsilon - u^0 - \epsilon u^1 + \epsilon \theta\|_{H^1(0,1)} \leq C\epsilon \|u^0\|_{H^2(0,1)}.$$



Hou, Wu e Cai [52] notaram que a expansão acima vale tanto para a solução exata como para os elementos da base de elementos finitos multiescala. Logo, para  $i = 1, \dots, N$  a função  $\psi_i$  pode ser aproximada por  $\psi_i^0 + \epsilon\psi_i^1 - \epsilon\theta_i$ , onde

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi_i^0 = 0 \quad \text{em } \cup_{j=1}^{N+1}(x_{j-1}, x_j), \quad \psi_i(x_j) = \delta_{ij}$$

e  $\psi_i^1 = H(x/\epsilon)d\psi_i^0/dx$ . Finalmente

$$-\frac{d}{dx}\left(a(x/\epsilon)\frac{d\theta_i}{dx}(x)\right) = 0 \quad \text{em } \cup_{j=1}^{N+1}(x_{j-1}, x_j), \quad \theta_i(x_j) = \psi_i^1(x_j).$$

OBSERVAÇÃO. Note que  $\psi_i^0 = \phi_i$  nada mais é que a função de base linear por partes.

Como acima,  $u_I$  pode ser aproximado por  $u_I^0 + \epsilon u_I^1 - \epsilon\theta_I$ , onde

$$u_I^0 = \sum_{i=1}^N u^0(x_i)\psi_i^0, \quad u_I^1 = H(x/\epsilon)du_I^0/dx.$$

Além disto,

$$-\frac{d}{dx}\left(a(x/\epsilon)\frac{d\theta_I}{dx}(x)\right) = 0 \quad \text{em } \cup_{j=1}^{N+1}(x_{j-1}, x_j), \quad \theta_I(x_j) = u_I^1(x_j).$$

Temos então que

$$(3.4.6) \quad \|u^\epsilon - u_I\|_{H^1(0,1)} \leq \|u^\epsilon - u^0 - \epsilon u^1 + \epsilon\theta\|_{H^1(0,1)} + \|u^0 - u_I^0\|_{H^1(0,1)} \\ + \epsilon\|u^1 - u_I^1\|_{H^1(0,1)} + \epsilon\|\theta\|_{H^1(0,1)} + \epsilon\|\theta_I\|_{H^1(0,1)} + \|u_I - u_I^0 - \epsilon u_I^1 + \epsilon\theta_I\|_{H^1(0,1)}.$$

A desigualdade

$$(3.4.7) \quad \|u^\epsilon - u^0 - u^1 + \epsilon\theta\|_{H^1(0,1)} \leq C\epsilon\|u^0\|_{H^2(0,1)}$$

é apresentada no Teorema 3.4.5. Já

$$(3.4.8) \quad \|u_I - u_I^0 - u_I^1 + \epsilon\theta_I\|_{H^1(0,1)} \leq C\epsilon\|u^0\|_{H^2(0,1)}$$

baseia-se no Teorema 3.4.5 e na estimativa  $\|u_I^0\|_{H^2(x_{j-1}, x_j)} \leq C\|u^0\|_{H^2(x_{j-1}, x_j)}$  (ver os detalhes em [52]). Para obter

$$(3.4.9) \quad \|u^0 - u_I^0\|_{H^1(0,1)} \leq Ch\|u^0\|_{H^2(0,1)},$$

basta observar que  $u_I^0$  é a interpolação de  $u^0$  por funções lineares por partes. A seguir, usamos

$$\|u^1 - u_I^1\|_{H^1(x_{j-1}, x_j)} = \left\| H(\cdot/\epsilon)\frac{d(u^0 - u_I^0)}{dx} \right\|_{H^1(x_{j-1}, x_j)} \\ \leq \epsilon^{-1} \left\| \frac{dH}{dx} \right\|_{L^\infty(0,1)} \|u^0 - u_I^0\|_{H^1(x_{j-1}, x_j)} + \|H\|_{L^\infty(0,1)} \|u^0 - u_I^0\|_{H^2(x_{j-1}, x_j)} \\ \leq C\epsilon^{-1} \|u^0 - u_I^0\|_{H^1(x_{j-1}, x_j)} + C\|u^0\|_{H^2(x_{j-1}, x_j)}.$$

Somando o quadrado da desigualdade acima entre  $j = 1$  e  $j = N + 1$  temos

$$(3.4.10) \quad \|u^1 - u_I^1\|_{H^1(0,1)} \leq C(\epsilon^{-1}h + 1)\|u^0\|_{H^2(0,1)}.$$

Finalmente temos

$$(3.4.11) \quad \|\theta\|_{H^1(0,1)} \leq C(|u^1(0)| + |u^1(1)|) \leq C\|H\|_{L^\infty(0,1)} \left( \left| \frac{du^0}{dx}(0) \right| + \left| \frac{du^0}{dx}(1) \right| \right) \\ \leq C\|u^0\|_{H^2(0,1)},$$

e

$$\|\theta_I\|_{H^1(x_{j-1}, x_j)}^2 \leq Ch^{-1}(|u_I^1(x_{j-1})| + |u_I^1(x_j)|)^2 \\ \leq Ch^{-1}\|H\|_{L^\infty(0,1)}^2 \left( \left| \frac{du_I^0}{dx}(x_{j-1}) \right| + \left| \frac{du_I^0}{dx}(x_j) \right| \right)^2 \leq Ch^{-1}\|u^0\|_{H^2(x_{j-1}, x_j)}^2.$$

Somando a desigualdade acima entre  $j = 1$  e  $j = N + 1$ , concluímos que

$$(3.4.12) \quad \|\theta_I\|_{H^1(0,1)} \leq Ch^{-1/2}\|u^0\|_{H^2(0,1)}.$$

**DEMONSTRAÇÃO.** (do Teorema 3.4.4.) Para obtermos a estimativa, basta juntar o resultado do Lema 3.4.1 e as desigualdades (3.4.6)–(3.4.12), e o resultado de regularidade (3.3.8).  $\square$

**OBSERVAÇÃO.** A taxa de convergência do Teorema 3.4.4 é melhor que o que foi anunciado em [64], onde a convergência alegada é

$$\|u^\epsilon - u^{h,\epsilon}\|_{H^1(0,1)} \leq C_1 h \|f\|_{L^2(0,1)} + C_2 (\epsilon/h)^{1/2}.$$

A diferença aparece nas estimativas de  $\theta$  e  $\theta_I$ , que é diferente em uma ou duas dimensões.

**3.4.3. Comentários adicionais.** Uma importante diferença entre uma e duas dimensões na técnica de elementos multiescala é que no caso bidimensional não é claro que condições de contorno deve-se impor nas arestas na definição das funções de base  $\psi_i$ , ver (3.4.1). Em uma dimensão este problema não existe, já que não existe aresta.

Uma primeira idéia no caso de elementos poligonais seria impor  $\psi_i$  sendo linear nas arestas. Porém esta imposição de condições de contorno nas arestas dos elementos causa o surgimento de camadas limites puramente numéricas no interior do domínio, ausentes na solução exata, fenômeno chamado de *ressonância*.

Nos artigos [51, 52] surge a interessante proposta de que as funções de base também deveriam satisfazer uma “restrição unidimensional” do operador diferencial que define a EDP, ao longo das arestas. Esta proposta é *ad hoc*, assim como a definição do que seja uma restrição unidimensional de um operador bidimensional, mas parece funcionar bem numericamente. A demonstração de convergência em [52] foi feita supondo-se que as funções de base são lineares nas arestas.

Outra solução proposta em [51] para a *ressonância*, e analisada em [38] foi o uso de uma técnica de *oversampling*, o que torna o método não conforme.

Finalmente, em [53] aparece a proposta de se usar o método de Petrov–Galerkin a fim de diminuir ainda mais o efeito das camadas limites internas. O uso de Petrov–Galerkin para minimizar efeitos de camadas limites espúrias foi em proposto independentemente em [42, 43].

Para problemas elíticos não lineares, os autores de [37, 39] propõem e analisam um método de homogenização numérica. Através de técnicas de *G-convergência*, os autores provam que seu esquema converge (a menos de uma subsequência). Eles reescrevem suas propostas usando uma formulação de Petrov–Galerkin, e funções num espaço não linear. Torna-se claro

então que seu método, denominado *nonlinear multiscale finite element method* (NMsFEM) é uma generalização do MsFEM de Hou e Wu [51].

### 3.5. Métodos alternativos

Outros métodos baseados em elementos finitos vêm sendo propostos recentemente na literatura. Apresentamos aqui alguns deles, com uma pequena lista de referências.

Nos métodos descritos abaixo consideramos o domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  como sendo um polígono convexo. Neste domínio definimos uma partição regular de  $\Omega$  em elementos finitos  $\mathcal{T}_h = \{K\}$ . O tamanho da malha  $h$  é definido como o diâmetro máximo de todos elementos da partição. Definimos ainda  $V_1 \subset H_0^1(\Omega)$  como sendo o espaço das funções lineares por partes em relação à partição  $\mathcal{T}_h$ .

**3.5.1. Residual Free Bubbles (RFB).** A fim de tratar problemas com múltiplas escalas de forma sistemática, o método de *Residual-Free Bubbles* (RFB) foi proposto em [25, 41, 44–47]. A motivação é que funções polinomiais por partes não são capazes de capturar os efeitos das pequenas escalas, e portanto o espaço de elementos finitos é enriquecido com “bolhas”, que são funções de  $H_0^1(\Omega)$  que se anulam na fronteira de cada elemento. Através de um formalismo, conclui-se que as “bolhas” resolvem a equação diferencial em cada elemento, onde o lado direito destes problemas vem do resíduo devido à parte polinomial da solução numérica. Na prática, estas soluções locais são calculadas de forma exata ou aproximada. A seguir apresentamos de forma breve o método RFB. Ver também [50], onde o método é descrito.

Em geral, para problemas com múltiplas escalas, é possível decompor a solução como

$$u_{\text{solução}} = u_{\text{macro}} + u_{\text{micro}},$$

onde  $u_{\text{macro}}$  descreve o comportamento macroscópico da solução, e  $u_{\text{micro}}$  o comportamento microscópico. No método RFB, a decomposição é

$$u_{\text{RFB}} = u_{\text{linear}} + u_b,$$

onde  $u_{\text{linear}}$  é a parte linear por partes, e a “bolha”  $u_b$  captura informações sobre a microescala.

Como exemplo consideramos o problema (3.1.1) e sua correspondente formulação fraca: achar  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que

$$b(u, v) = (f, v) \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

onde  $b(u, v) = \int_{\Omega} a^\epsilon \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x}$ . Definimos ainda  $\mathcal{L}^\epsilon$  como em (3.1.3). Para definir o método, não é necessário supor que  $a^\epsilon$  seja periódica.

Seja o *espaço enriquecido*  $V_h := V_1 \oplus B$ , onde

$$B = \{v \in H_0^1(\Omega) : v|_K \in H_0^1(K) \text{ para todo } K \in \mathcal{T}_h\}$$

é o espaço das “bolhas”. O método consiste em achar  $u_h \in V_h$  onde

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \text{para todo } v_h \in V_h.$$

Escrevendo  $u_h = u_1 + u_b$ , onde  $u_1 \in V_1$  e  $u_b \in B$  temos

$$(3.5.1) \quad a(u_1 + u_b, v_1) = (f, v_1) \quad \text{para todo } v_1 \in V_1,$$

$$(3.5.2) \quad a(u_1 + u_b, v_b) = (f, v_b) \quad \text{para todo } v_b \in B.$$

Tomando em (3.5.2) funções teste  $v_b$  com suporte em um elemento arbitrário  $K$ , e integrando por partes, temos que  $u_b$  é solução forte do problema local

$$\mathcal{L}^\epsilon u_b = -\mathcal{L}^\epsilon u_1 + f \quad \text{em } K, \quad u_b = 0 \quad \text{sobre } \partial K.$$

para todo elemento  $K$ . Escrevendo  $u_b = T(-\mathcal{L}^\epsilon u_1 + f)$ , substituindo em (3.5.1), e usando a linearidade do problema, a formulação final é: achar  $u_1 \in V_1$  onde

$$a(u_1, v_1) - a(T\mathcal{L}^\epsilon u_1, v_1) = (f, v_1) - a(Tf, v_1) \quad \text{para todo } v_1 \in V_1.$$

Uma primeira forma de se interpretar a formulação acima é como um *método estabilizado livre de parâmetros*:

Uma outra forma é se olhar como uma técnica de “upscaling” numérico: achar  $u_1 \in V_1$  onde

$$a^*(u_1, v_1) = \langle f^*, v_1 \rangle \quad \text{para todo } v_1 \in V_1,$$

e  $a^*(u_1, v_1) = a((I - T\mathcal{L}^\epsilon)u_1, v_1)$ , e  $\langle f^*, v_1 \rangle = (f, v_1) - a(Tf, v_1)$ . Na interpretação multiescala,  $V_1$  é o espaço macro, enxerga apenas as propriedades “macro”, e  $B$  é o espaço micro, capturando o efeito das pequenas escalas.

Finalmente, é possível ver esta formulação “quase” como um método de Petrov–Galerkin. Se  $\{\phi_i\}_{i=1}^N$  é uma base de  $V_1$  e  $u_1 = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i$ , então

$$\sum_{i=1}^N u_i a(\lambda_i, \phi_j) = (f, \phi_j) - a(Tf, \phi_j) \quad \text{para } j = 1, \dots, N,$$

onde  $\lambda_i = (I - T\mathcal{L}^\epsilon)\phi_i$ , i.e.,

$$\mathcal{L}^\epsilon \lambda_i = 0 \quad \text{em } K, \quad \lambda_i = \phi_i \quad \text{sobre } \partial K,$$

As funções de base do espaço das funções admissíveis resolvem o operador localmente, e as funções teste continuam as mesmas.

Recentemente, Sangalli [69] aplicou a idéia de RFB em problemas com coeficientes oscilatórios com excelentes resultados.

**3.5.2. Heterogeneous Multiscale Method (HMM).** Uma proposta diferente é o *heterogeneous multiscale method* (HMM) descrita em [33–36, 62]. Damos uma breve descrição do método considerando mais uma vez o problema (3.1.1). Se existir matriz efetiva  $A$  que incorpore os efeitos das microescalas, a forma bilinear

$$\int_D (A \nabla V) \cdot \nabla W \, dx \quad \text{para } V, W \in V_1,$$

seria adequada para se buscar uma aproximação para a solução original. Considerando para um elemento  $K \in \mathcal{T}_h$  a quadratura

$$\int_K p(x) \, dx \approx \sum_{l=1}^L w_l p(x_l),$$

temos então

$$\int_D (A \nabla V) \cdot \nabla W \, dx \approx \sum_{l=1}^L w_l [(A \nabla V) \cdot \nabla W](x_l).$$

Aproximamos  $[(A \nabla V) \cdot \nabla W](x_l)$  da seguinte forma. Considere  $I_\delta(x_l)$  o quadrado de tamanho  $\delta$  centrado em  $x_l$ , e, dado  $V \in V_1$  ache  $v_l = R(V)$  tal que

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}[a^\epsilon(x) \nabla v_l(x)] &= 0 \quad \text{em } I_\delta(x_l), \\ v_l &= V \quad \text{sobre } \partial I_\delta(x_l). \end{aligned}$$

Tome então

$$[(A \nabla V) \cdot \nabla W](x_l) \approx \frac{1}{\delta} \int_{I_\delta(x_l)} [a^\epsilon(x) \nabla v_l(x)] \cdot \nabla w_l(x) \, dx,$$

onde  $v_l = R(V)$  e  $w_l = R(W)$ .

**OBSERVAÇÃO.** A escolha de  $\delta$  depende do problema em questão. Por exemplo, para problemas periódicos,  $\delta$  pode ser o próprio período. As condições de contorno para se definir o operador  $R(\cdot)$  também podem ser mudadas para, por exemplo,  $V - R(V)$  periódico em  $I_\delta(x_l)$ .

No caso periódico, o erro de aproximação é dado por

$$\|U - U_{HMM}\|_{H^1(D)} \leq C(h + \epsilon),$$

desde que o problema de célula seja escolhido apropriadamente.

**3.5.3. Comentários adicionais.** O uso de soluções exatas ou aproximadas para construir os espaços variacionais com em [19–21, 51, 52] não é simples, já que pode ser complicado escolher o espaço “correto” para um determinado problema. Uma interessante comparação mostrando como diferentes escolhas de espaços influenciam as taxas de convergência para um problema de advecção unidimensional pode ser encontrado em [49].

O formalismo do método RFB serve como “guia” para definição dos espaços variacionais. Por outro lado, a construção via RFB também introduz camadas limites espúrias no interior do domínio; impor que a bolha se anula nas arestas é a causa. Sangalli [69] minimizou este efeito indesejável introduzindo *macrobolhas*, encarecendo entretanto as soluções dos problemas locais.

O HMM parece uma alternativa viável, tendo inclusive a vantagem de definir problemas locais independentes da pequena escala, ao contrário do MsFEM e do RFB.

Para problemas com coeficientes periódicos, Versieux e Sarkis [72–74] propõem um eficiente método numérico baseado em aproximações dos termos da expansão assintótica da solução. O custo computacional resulta também independente de  $\epsilon$ .



## Bibliography

- [1] Toufic Abboud and Habib Ammari, *Diffraction at a curved grating: approximation by an infinite plane grating*, J. Math. Anal. Appl. **202** (1996), no. 3, 1076–1100. MR1408368 (98b:78028)
- [2] ———, *Diffraction at a curved grating: TM and TE cases, homogenization*, J. Math. Anal. Appl. **202** (1996), no. 3, 995–1026. MR1408364 (98b:78027)
- [3] Yves Achdou, Olivier Pironneau, and Frédéric Valentin, *Shape control versus boundary control*, Équations aux dérivées partielles et applications, 1998, pp. 1–18. MR1648212 (99j:49080)
- [4] Yves Achdou, O. Pironneau, and F. Valentin, *Effective boundary conditions for laminar flows over periodic rough boundaries*, J. Comput. Phys. **147** (1998), no. 1, 187–218. MR1657773 (99j:76086)
- [5] Y. Achdou, P. Le Tallec, F. Valentin, and O. Pironneau, *Constructing wall laws with domain decomposition or asymptotic expansion techniques*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **151** (1998), no. 1-2, 215–232. MR1625432 (99h:76027)
- [6] Yves Achdou and Olivier Pironneau, *Domain decomposition and wall laws*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **320** (1995), no. 5, 541–547 (English, with English and French summaries). MR1322334 (95k:76087)
- [7] Stephen M. Alessandrini, Douglas N. Arnold, Richard S. Falk, and Alexandre L. Madureira, *Derivation and justification of plate models by variational methods*, Plates and shells (Québec, QC, 1996), CRM Proc. Lecture Notes, vol. 21, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 1–20. MR **1696513** (2000j:74055)
- [8] Grégoire Allaire, *Shape optimization by the homogenization method*, Applied Mathematical Sciences, vol. 146, Springer-Verlag, New York, 2002. MR **1859696** (2002h:49001)
- [9] Grégoire Allaire and Micol Amar, *Boundary layer tails in periodic homogenization*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **4** (1999), 209–243 (electronic) (English, with English and French summaries). MR1696289 (2000k:35019)
- [10] Youcef Amirat and Olivier Bodart, *Numerical approximation of laminar flows over rough walls with sharp asperities*, J. Comput. Appl. Math. **164/165** (2004), 25–38. MR2056866 (2004m:76118)
- [11] Youcef Amirat, Blanca Climent, Enrique Fernández-Cara, and Jacques Simon, *The Stokes equations with Fourier boundary conditions on a wall with asperities*, Math. Methods Appl. Sci. **24** (2001), no. 5, 255–276. MR1818895 (2002b:76042)
- [12] Y. Amirat, O. Bodart, U. De Maio, and A. Gaudiello, *Asymptotic approximation of the solution of the Laplace equation in a domain with highly oscillating boundary*, SIAM J. Math. Anal. **35** (2004), no. 6, 1598–1616 (electronic). MR2083791 (2005h:35064)
- [13] D.N. Arnold, *Linear Plate Theory, Analysis and Computation*, 2000.
- [14] Douglas N. Arnold, *Innovative finite element methods for plates*, Mat. Apl. Comput. **10** (1991), no. 2, 77–88 (English, with Portuguese summary). MR **1172086** (93c:65136)
- [15] Douglas N. Arnold, Franco Brezzi, Richard S. Falk, and L. Donatella Marini, *Locking-free Reissner-Mindlin elements without reduced integration*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **196** (2007), no. 37-40, 3660–3671. MR **2339992** (2008h:74083)
- [16] Douglas N. Arnold and Richard S. Falk, *Asymptotic analysis of the boundary layer for the Reissner-Mindlin plate model*, SIAM J. Math. Anal. **27** (1996), no. 2, 486–514. MR **1377485** (97i:73064)
- [17] Kendall Atkinson and Weimin Han, *Theoretical numerical analysis*, 2nd ed., Texts in Applied Mathematics, vol. 39, Springer, New York, 2005. A functional analysis framework. MR **2153422** (2006a:65001)
- [18] O. Axelsson and V. A. Barker, *Finite element solution of boundary value problems*, Computer Science and Applied Mathematics, Academic Press Inc., Orlando, FL, 1984. Theory and computation. MR **758437** (85m:65116)

- [19] Ivo Babuška, Gabriel Caloz, and John E. Osborn, *Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients*, SIAM J. Numer. Anal. **31** (1994), no. 4, 945–981. MR **1286212** (**95g**:65146)
- [20] I. Babuška and J. E. Osborn, *Generalized finite element methods: their performance and their relation to mixed methods*, SIAM J. Numer. Anal. **20** (1983), no. 3, 510–536. MR **701094** (**84h**:65076)
- [21] ———, *Finite element methods for the solution of problems with rough input data*, (Oberwolfach, 1983), Lecture Notes in Math., vol. 1121, Springer, Berlin, 1985, pp. 1–18. MR **806382** (**86m**:65138)
- [22] Gabriel R. Barrenechea, Patrick Le Tallec, and Frédéric Valentin, *New wall laws for the unsteady incompressible Navier-Stokes equations on rough domains*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. **36** (2002), no. 2, 177–203. MR1906814 (2003k:76104)
- [23] Arnaud Basson and David Gérard-Varet, *Wall laws for fluid flows at a boundary with random roughness*, ArXiv:math.AP/0606768v1 (29 Jun 2006).
- [24] Didier Bresch and Vuk Milisic, *Higher order boundary layer corrector and wall laws derivation: a unified approach*, ArXiv:math.AP/0611083v1 (3 Nov 2006).
- [25] Franco Brezzi and Alessandro Russo, *Choosing bubbles for advection-diffusion problems*, Math. Models Methods Appl. Sci. **4** (1994), no. 4, 571–587. MR **1291139** (**95h**:76079)
- [26] D. Chenais and J.-C. Paumier, *On the locking phenomenon for a class of elliptic problems*, Numer. Math. **67** (1994), no. 4, 427–440. MR **1274440** (**95g**:65147)
- [27] Philippe G. Ciarlet, *Mathematical elasticity. Vol. II*, Studies in Mathematics and its Applications, vol. 27, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1997. Theory of plates. MR **1477663** (**99e**:73001)
- [28] ———, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 4. MR 0520174 (58 #25001)
- [29] Doina Cioranescu and Patrizia Donato, *An introduction to homogenization*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, vol. 17, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1999. MR **1765047** (**2001j**:35019)
- [30] A. L. G. A. Coutinho, C. M. Dias, J. L. D. Alves, L. Landau, A. F. D. Loula, S. M. C. Malta, R. G. S. Castro, and E. L. M. Garcia, *Stabilized methods and post-processing techniques for miscible displacements*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **193** (2004), no. 15-16, 1421–1436. MR **2068902** (**2005b**:76083)
- [31] Monique Dauge and Isabelle Gruais, *Asymptotics of arbitrary order for a thin elastic clamped plate. I. Optimal error estimates*, Asymptotic Anal. **13** (1996), no. 2, 167–197. MR **1413859** (**98b**:73022)
- [32] Robert Dautray and Jacques-Louis Lions, *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol. 2*, Springer-Verlag, Berlin, 1988. Functional and variational methods; With the collaboration of Michel Artola, Marc Authier, Philippe Bénilan, Michel Cessenat, Jean Michel Combes, Hélène Lanchon, Bertrand Mercier, Claude Wild and Claude Zuily; Translated from the French by Ian N. Sneddon. MR **969367** (**89m**:00001)
- [33] Weinan E and Bjorn Engquist, *Multiscale modeling and computation*, Notices Amer. Math. Soc. **50** (2003), no. 9, 1062–1070. MR2002752 (2004m:65163)
- [34] ———, *The heterogeneous multiscale methods*, Commun. Math. Sci. **1** (2003), no. 1, 87–132. MR1979846 (2004b:35019)
- [35] Wei-nan E and Ping-bing Ming, *Analysis of multiscale methods*, J. Comput. Math. **22** (2004), no. 2, 210–219. MR2058933 (2005d:65188)
- [36] Weinan E, Pingbing Ming, and Pingwen Zhang, *Analysis of the heterogeneous multiscale method for elliptic homogenization problems*, J. Amer. Math. Soc. **18** (2005), no. 1, 121–156 (electronic). MR **2114818** (**2005k**:65246)
- [37] Y. Efendiev, T. Hou, and V. Ginting, *Multiscale finite element methods for nonlinear problems and their applications*, Commun. Math. Sci. **2** (2004), no. 4, 553–589. MR **2119929** (**2005m**:65265)
- [38] Yalchin R. Efendiev, Thomas Y. Hou, and Xiao-Hui Wu, *Convergence of a nonconforming multiscale finite element method*, SIAM J. Numer. Anal. **37** (2000), no. 3, 888–910 (electronic). MR1740386 (2002a:65176)
- [39] Yalchin Efendiev and Alexander Pankov, *Numerical homogenization of monotone elliptic operators*, Multiscale Model. Simul. **2** (2003), no. 1, 62–79 (electronic). MR2044957 (2005a:65153)



- [40] R.S. Falk, *Finite Elements for the Reissner–Mindlin Plate*, Mixed Finite Elements, Compatibility Conditions, and Applications, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 2008.
- [41] Leopoldo P. Franca, Charbel Farhat, Antonini P. Macedo, and Michel Lesoinne, *Residual-free bubbles for the Helmholtz equation*, Internat. J. Numer. Methods Engrg. **40** (1997), no. 21, 4003–4009. MR 1475348
- [42] Leopoldo P. Franca, Alexandre L. Madureira, Lutz Tobiska, and Frédéric Valentin, *Convergence analysis of a multiscale finite element method for singularly perturbed problems*, Multiscale Model. Simul. **4** (2005), no. 3, 839–866 (electronic). MR **2203943** (2006k:65316)
- [43] Leopoldo P. Franca, Alexandre L. Madureira, and Frederic Valentin, *Towards multiscale functions: enriching finite element spaces with local but not bubble-like functions*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **194** (2005), no. 27–29, 3006–3021. MR **2142535** (2006a:65159)
- [44] Leopoldo P. Franca and Alessandro Russo, *Unlocking with residual-free bubbles*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **142** (1997), no. 3–4, 361–364. MR **1442385** (98d:73060)
- [45] ———, *Mass lumping emanating from residual-free bubbles*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **142** (1997), no. 3–4, 353–360. MR **1442384** (98c:76064)
- [46] L. P. Franca and A. Russo, *Approximation of the Stokes problem by residual-free macro bubbles*, East-West J. Numer. Math. **4** (1996), no. 4, 265–278. MR **1430240** (97i:76076)
- [47] ———, *Deriving upwinding, mass lumping and selective reduced integration by residual-free bubbles*, Appl. Math. Lett. **9** (1996), no. 5, 83–88. MR **1415477** (97e:65121)
- [48] David Gilbarg and Neil S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition. MR **1814364** (2001k:35004)
- [49] P. P. N. de Groen and P. W. Hemker, *Error bounds for exponentially fitted Galerkin methods applied to stiff two-point boundary value problems*, Numerical analysis of singular perturbation problems (Proc. Conf., Math. Inst., Catholic Univ., Nijmegen, 1978), Academic Press, London, 1979, pp. 217–249. MR **556520** (81a:65076)
- [50] Thomas Y. Hou, *Numerical approximations to multiscale solutions in partial differential equations*, Frontiers in numerical analysis (Durham, 2002), 2003, pp. 241–301. MR2006969 (2004m:65219)
- [51] Thomas Y. Hou and Xiao-Hui Wu, *A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media*, J. Comput. Phys. **134** (1997), no. 1, 169–189. MR1455261 (98e:73132)
- [52] Thomas Y. Hou, Xiao-Hui Wu, and Zhiqiang Cai, *Convergence of a multiscale finite element method for elliptic problems with rapidly oscillating coefficients*, Math. Comp. **68** (1999), no. 227, 913–943. MR1642758 (99i:65126)
- [53] Thomas Y. Hou, Xiao-Hui Wu, and Yu Zhang, *Removing the cell resonance error in the multiscale finite element method via a Petrov-Galerkin formulation*, Commun. Math. Sci. **2** (2004), no. 2, 185–205. MR2119937
- [54] Claes Johnson, *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987. MR **925005** (89b:65003a)
- [55] R. Lakes, *Página pessoal*.
- [56] J.-L. Lions and E. Magenes, *Non-homogeneous boundary value problems and applications. Vol. I*, Springer-Verlag, New York, 1972. Translated from the French by P. Kenneth; Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 181. MR 0350177 (50 #2670)
- [57] Alexandre L. Madureira, *Métodos numéricos para Problemas com Múltiplas Escalas*, I Escola em modelagem Computacional (Petrópolis, RJ, 2005).
- [58] ———, *Métodos numéricos para Equações Diferenciais Parciais Múltiplas Escalas*, Seminário Brasileiro de Análise (Rio de Janeiro, RJ, 2005).
- [59] Alexandre Madureira and Frédéric Valentin, *Analysis of curvature influence on effective boundary conditions*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **335** (2002), no. 5, 499–504 (English, with English and French summaries). MR1937121 (2003j:35054)
- [60] Alexandre L. Madureira and Frédéric Valentin, *Asymptotics of the Poisson problem in domains with curved rough boundaries*, SIAM J. Math. Anal. **38** (2006/07), no. 5, 1450–1473 (electronic). MR 2286014
- [61] J. M. Melenk and C. Schwab, *Analytic regularity for a singularly perturbed problem*, SIAM J. Math. Anal. **30** (1999), no. 2, 379–400 (electronic). MR **1664765** (2000b:35010)

- [62] Pingbing Ming and Xingye Yue, *Numerical methods for multiscale elliptic problems*, J. Comput. Phys. **214** (2006), no. 1, 421–445. MR **2208685** (2006j:65359)
- [63] Dietrich Morgenstern, *Herleitung der Plattentheorie aus der dreidimensionalen Elastizitätstheorie*, Arch. Rational Mech. Anal. **4** (1959), 145–152 (1959) (German). MR 0111252 (22 #2116)
- [64] Shari Moskow and Michael Vogelius, *First-order corrections to the homogenised eigenvalues of a periodic composite medium. A convergence proof*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **127** (1997), no. 6, 1263–1299. MR **1489436** (99g:35018)
- [65] Serge Nicaise and Stefan A. Sauter, *Efficient numerical solution of Neumann problems on complicated domains*, Calcolo **43** (2006), no. 2, 95–120. MR **2245226** (2007c:65108)
- [66] M. Rech, S. Sauter, and A. Smolianski, *Two-scale composite finite element method for Dirichlet problems on complicated domains*, Numer. Math. **102** (2006), no. 4, 681–708. MR **2207285** (2006m:65283)
- [67] F.A. Rochinha and A.L. Madureira, *Modelagem Multiescala em Materiais e Estruturas*, Notas em Matemática Aplicada, vol. 12, SBMAC, 2004.
- [68] H.-G. Roos, M. Stynes, and L. Tobiska, *Numerical methods for singularly perturbed differential equations*, Springer Series in Computational Mathematics, vol. 24, Springer-Verlag, Berlin, 1996. Convection-diffusion and flow problems. MR **1477665** (99a:65134)
- [69] Giancarlo Sangalli, *Capturing small scales in elliptic problems using a residual-free bubbles finite element method*, Multiscale Model. Simul. **1** (2003), no. 3, 485–503 (electronic). MR **2030161** (2004m:65202)
- [70] Marcus Sarkis, *Private Communication*, 2007.
- [71] Christoph Schwab, *Hierarchic modelling in mechanics*, Wavelets, multilevel methods and elliptic PDEs (Leicester, 1996), Numer. Math. Sci. Comput., Oxford Univ. Press, New York, 1997, pp. 85–160. MR **1600680** (98m:73090)
- [72] Marcus Sarkis and Henrique Versieux, *Convergence analysis for the numerical boundary corrector for elliptic equations with rapidly oscillating coefficients*, SIAM J. Numer. Anal. **46** (2008), no. 2, 545–576. MR 2383203
- [73] Henrique Versieux and Marcus Sarkis, *A three-scale finite element method for elliptic equations with rapidly oscillating periodic coefficients*, Domain decomposition methods in science and engineering XVI, Lect. Notes Comput. Sci. Eng., vol. 55, Springer, Berlin, 2007, pp. 763–770. MR 2334173
- [74] H. M. Versieux and M. Sarkis, *Numerical boundary corrector for elliptic equations with rapidly oscillating periodic coefficients*, Comm. Numer. Methods Engrg. **22** (2006), no. 6, 577–589. MR **2235030** (2007d:65117)
- [75] Wikipedia, *Piecewise linear function* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*, 2008. [Online; accessed 27-October-2008].



## Apoio:



## Patrocínio:

