II segundo ENAMA

Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações

Resumo dos Trabalhos

Realização

UFPB **UFCG**

João Pessoa, 05 a 07 de novembro de 2008

II ENAMA

O II ENAMA é uma realização conjunta das Universidades Federais da Paraíba e de Campina Grande cujas atividades acontecem no Hardman Praia Hotel, praia de Manaíra, na cidade de João Pessoa, capital da Paraíba, no período de 05 a 07 de novembro de 2008.

O ENAMA é um evento na área de Matemática, mais especificamente, em Análise Funcional, Análise Numérica e Equações Diferenciais, criado para ser um fórum de debates e de intercâmbio de conhecimentos entre diversos especialistas, professores, pesquisadores e alunos de pós-graduação em Matemática do Brasil e do exterior. Nesta segunda edição, o evento contou com três mini-cursos, três palestras plenárias (conferências), noventa e uma comunicações orais e quinze apresentações de pôsteres.

Os organizadores do II ENAMA desejam expressar sua gratidão aos órgãos e instituições que apoiaram e tornaram possível a realização deste evento: CNPq, CAPES, UFPB, UFCG, Banco do Brasil e Prefeitura Municipal de João Pessoa. Agradecem também a todos participantes do evento, bem como aos colaboradores pelo entusiasmo e esforço, que tanto contribuíram para o sucesso deste evento.

A Comissão Organizadora

Comitê Organizador

Daniel Cordeiro de Morais (UFCG)
Fágner D. Araruna (UFPB)
João Marcos B. do Ó (UFPB)
Joaquim R. Feitosa(UFPB)
Marco Aurélio S. Souto (UFCG)
Sandra M. C. Malta (LNCC/MCT)
Uberlandio B. Severo (UFPB)

Comitê Científico do II ENAMA

Geraldo M. de A. Botelho (UFU)
Haroldo R. Clark (UFF)
Luis Adauto Medeiros (UFRJ)
Olimpio Miyagaki (UFV)
Sandra M.C. Malta (LNCC/MCT)

ÍNDICE

Palestra (Plenária)

Comunicação Oral

Poster

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{0}}$ 2 November 2008

Funções holomorfas e propriedade de aproximação

Jorge Mujica (UNICAMP)

Resumo

É importante saber se o espaço vetorial das funções holomorfas, com valores complexos, definidas em um subconjunto aberto de um espaço de Banach, tem a propriedade de aproximação de Grothendieck, quando munido de alguma das topologias naturais. Há vários resultados conhecidos quando as funções estão definidas em todo o espaço, mas pouco se sabe quando as funções estão definidas em um aberto arbitrário. Nesta palestra apresentaremos alguns teoremas nessa direção. Para obter esses teoremas nós provaremos que as funções holomorfas de tipo compacto, com valores em outro espaço de Banach, podem ser aproximadas por funções holomorfas de posto finito.

Modelagem computacional, análise numérica e aplicações

Abimael F. D. Loula (LNCC)

Resumo

Serão considerados modelos matemáticos, associados a aplicações de interesse da engenharia, que podem se representados por equações diferenciais parciais. Discutem-se aspectos básicos relativos existência e unicidade de solução, construção de aproximações por elementos finitos e análise numérica. Serão apresentados exemplos e contra-exemplos ilustrando comportamentos anômalos do modelo numérico, tais como instabilidade e poluição.

Sobre o limite de viscosidade nula de escoamentos

Helena Lopes (UNICAMP)

Resumo

O limite de viscosidade evanescente de soluções das equações de Navier-Stokes é um problema relevante, sobre o qual pouco se sabe. O objetivo desta palestra é explorar a dificuldade deste problema, descrever alguns dos avanços dos últimos 100 anos e alguns resultados recentes.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

A CONNECTION BETWEEN TWO CONCEPTS OF POSITIVE DEFINITENESS

J. C. FERREIRA * & V. A. MENEGATTO †

Abstract

Integral operators defined by the formula

$$\mathcal{K}(f)(x) := \int_X K(x,y) f(y)\, d\nu(y), \quad x \in X, \quad f \in L^2(X,\nu),$$

in which X is a metric space endowed with a convenient measure ν and K is an element of $L^2(X, \nu \times \nu)$ are the object of study in many papers in the literature. Such operators appear quite naturally in many problems of Functional Analysis, Approximation Theory, Integral Equations, etc. In recent papers such as [1, 2, 3, 4, 5, 7, 8] and references therein the most considered questions regarding such operators are these:
- to establish reasonable general conditions on X, the measure ν and K in order that the so called Mercer's theory holds true; Mercer's theory is well-established in the case when X is a closed interval and ν is the induced Lebesgue measure.
- to analyze compactness and other important properties the operator may have; if trace-class, to find formulas to compute the trace of the operator.
- to obtain a detailed spectral analysis of the operator.
- under additional hypotheses on either K or ν, to analyze decay rates for the eigenvalues; if the operator has countably many eigenvalues, say $\lambda_1(\mathcal{K}) \geq \lambda_2(\mathcal{K}) \geq \cdots \geq 0$, the basic decay rate given by Mercer's theory is $\lambda_n(\mathcal{K}) = o(n^{-1})$, as $n \to \infty$.
- for relevant choices of X, to investigate any additional properties the operator may have.

In order to analyze any of the questions listed above, the most common basic assumption on the kernel K is positive definiteness. Such concept has the following two standard formulations. A kernel $K : X \times X \to \mathbb{C}$ is *positive definite* when the inequality

$$\sum_{i,j=1}^{n} \overline{c_i}\, c_j K(x_i, x_j) \geq 0,$$

holds for all $n \geq 1$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ and scalars $c_1, c_2, \ldots, c_n$. The kernel K is L^2*-positive definite* ($L^2PD(X,\nu)$) when it belongs to $L^2(X \times X, \nu \times \nu)$ and the corresponding integral operator $\mathcal{K}$ is positive, that is, when the following condition holds

$$\int_X \left(\int_D K(x,y) f(y)\, d\nu(y) \right) \overline{f(x)}\, d\nu(x) \geq 0, \quad f \in L^2(X).$$

In [6] we show that Mercer's theory holds when the following assumptions are in force:
- K is an element of $\mathcal{A}(X,\nu)$, the subset of $C(X \times X) \cap L^2PD(X,\nu)$ formed by all kernels $K : X \times X \to \mathbb{C}$ for which $x \in X \to K(x,x)$ is an element of $L^1(X,\nu)$;
- the measure ν on X is *strictly-positive* in the sense that it is a Borel measure fulfilling the following requirements:

*Departamento de Matemática, ICMC-USP - São Carlos, SP, joseclaudineiferreira@gmail.com. Partially supported by FAPESP-Brazil, grant # 2007/58086 − 7 (doctorate).
†Departamento de Matemática, ICMC-USP - São Carlos, SP, menegatt@icmc.usp.br.

every open nonempty subset of X has positive measure and every $x \in X$ belongs to an open subset of X having finite measure.

In particular, for some choices of X and under smoothness hypotheses of Lipschitz type on K, it is shown there that the eigenvalues of $\mathcal{K}$ satisfy

$$\lambda_n(\mathcal{K}) = O(n^{-1-\gamma/q}), \quad \text{as } n \to \infty,$$

where γ is a constant depending on X, the Lipschitz constants and the behavior of K at the diagonal of $X \times X$. This result generalizes many others in the literature.

In this note we present two independent results connecting both concepts of positive definiteness. They indicate contexts under which both concepts can be equivalent or at least what is the most convenient assumption one needs to use on K in order to obtains relevant results in connection with the questions listed in the introduction. For further discussion we refer the reader to the first half of Section 2 in [6].

We will write $C(X)$ to denote the set of continuous functions on X.

Theorem 0.1. *If X is a measurable subset of $\mathbb{R}^m$ endowed with the usual Lebesgue measure μ then*

$$PD(X) \cap C(X \times X) \cap L^2(X \times X, \mu \times \mu) \subset L^2PD(X, \mu).$$

In a similar manner one can prove.

Corollary 0.1. *If X is a locally compact Hausdorff space endowed with a Radon measure ν that is finite on compact subsets then*

$$PD(X) \cap C(X \times X) \cap L^2(X \times X, \nu \times \nu) \subset L^2PD(X, \nu).$$

The converse can be stated and proved in a more general context.

Theorem 0.2. *If a topological space X is endowed with a strictly-positive measure ν then*

$$L^2PD(X, \nu) \cap C(X \times X) \subset PD(X).$$

References

[1] Buescu, J. - *Positive integral operators in unbounded domains*, J. Math. Anal. Appl., 296 (2004), no. 1, 244–255.

[2] Buescu, J.; Paixão, A. C. - *Eigenvalues of positive definite integral operators on unbounded intervals*, Positivity, 10 (2006), no. 4, 627–646.

[3] Buescu, J.; Paixão, A. C. - *Eigenvalue distribution of positive definite kernels on unbounded domains*, Integral Equations Operator Theory, 57 (2007), no. 1, 19–41.

[4] Buescu, J.; Paixão, A. C. - *Eigenvalue distribution of Mercer-like kernels*, Math. Nachr., 280 (2007), no. 9-10, 984–995.

[5] Ferreira, J. C.; Menegatto, V. A.; Oliveira, C. P. - *On the nuclearity of integral operators*, Positivity, to appear.

[6] Ferreira, J. C.; Menegatto, V. A. - *Eigenvalues of integral operators defined by smoot positive definite kernels*, submitted for publication.

[7] Ferreira, J. C.; Menegatto, V. A.; Peron, A. P. - *Integral operators on the sphere generated by positive definite smooth kernels*, J. Complexity, to appear.

[8] Sun, Hongwei - *Mercer theorem for RKHS on noncompact sets*, J. Complexity, 21 (2005), no. 3, 337–349.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

A FIBERING MAP APPROACH TO A NONCOPERATIVE ELLIPTIC SYSTEM

FRANCISCO JULIO S.A. CORRÊA * †

In this work we use the the Nehari manifold and the fibering maps associated with the Euler functional for the problem

$$-\Delta u = \lambda a(x)u^q + b(x)u^p - v, \quad -\Delta v = \delta u - \gamma v \text{ in } \Omega, \; u = v = 0 \text{ on } \partial\Omega,$$

where Ω is a bounded smooth domain of $I\!R^N, N \geq 3, 0 < q < 1 < p < \frac{N+2}{N-2}, \lambda > 0$, δ and γ are positive constants and $a, b : \Omega \to I\!R$ are smooth functions which are somewhere positive but which may change sign on Ω.

Motivated by Brown-Zhang [1], Drabek-Pohozaev [2] and Brown-Wu [3] we have the following result

Theorem 0.1. *Under the above assumptions and $\gamma \geq 2\sqrt{\delta}$, there is $\lambda_1 > 0$ such that the above problem possesses at least two positive solutions whenever $0 < \lambda < \lambda_1$.*

In a paper in progress the author and G.M. Figueiredo have obtained a similar result for the problem

$$-\Delta u = \lambda a(x)u^q + b(x)u^p - v, \quad -\Delta v = \delta u - \gamma v + g(v) \text{ in } \Omega, \; u = v = 0 \text{ on } \partial\Omega,$$

where g is a given function satisfying some suitable conditions.

References

[1] K.J. BROWN & T.F. WU - *The Nehari manifold for a semilinear elliptic problem with a sign changing weight function,* J. Differential equations, 193, 2003, 481-499.

[2] P. DRABEK & S.I. POHOZAEV - *Positive solutions for the p-Laplacian: application of the fibering method,* Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect A, 127, 1997, 703-726.

[3] K.J. BROWN & T.F. WU - *A fibering map approach to a semilnear elliptic boundary value problem,* Eletronic Jornal of Differential Equations, Vo. 2007 (2007), No. 69, 1-9.

*Universidade Federal de Campina Grande UAME, Campina Grande, PB, Brasil, julio@dme.ufcg.edu.br
† Partially supported by CNPq, Proc. 301603/2007-3.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{0}}$ 2 November 2008

A NEW PROOF OF THE PIETSCH DOMINATION THEOREM FOR SUBHOMOGENEOUS MAPPINGS

J. BARBOSA * A. T. BERNARDINO † A. NUNES ‡ D. PELLEGRINO § J. SANTOS ¶

In this note we present a new proof for the Pietsch Domination Theorem for subhomogeneous mappings obtained by Botelho, Pellegrino and Rueda in [2]. Our proof avoids the use of Ky-Fan's Lemma and simplifies the original proof. The notation and terminology of this note follows [2].

Theorem 0.1. *Let $1 \leq p < \infty$ and $\alpha > 0$. Then an α-subhomogeneous mapping $f : E \to F$ is absolutely $(\frac{p}{\alpha}, p)$-summing if, and only if, there exist a Borel probability μ on B_{E^*} and a constant $C \geq 0$ such that*

$$\|f(x)\| \leq C \left(\int_{B_{E^*}} |\varphi(x)|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{\alpha}{p}}$$

for all $x \in E$.

Proof. One of the implications is straightforward.

Assume that f is $(\frac{p}{\alpha}, p)$-summing. Then, from [2, Theorem 2.3], there exists a constant $c_{\mathrm{b}} \geq 0$ such that

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \|f(x_j)\|^{\frac{p}{\alpha}} \right)^{\frac{\alpha}{p}} \leq c_{\mathrm{b}} \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{\alpha}{p}} \tag{0.1}$$

for all $x_1, \ldots, x_m \in E$ and $m = 1, 2, \ldots$. In particular, note that $f(0) = 0$.

Let $C(B_{E^*})$ be the real Banach space of all continuous real functions on the closed unit ball B_{E^*} with the weak star topology. For every finite set $M \subset E$, let

$$\Psi_M(\varphi) = \sum_{x \in M} \left(\|f(x)\|^{\frac{p}{\alpha}} - c_{\mathrm{b}}^{\frac{p}{\alpha}} |\varphi(x)|^p \right).$$

Note that $\Psi_M \in C(B_{E^*})$. Let $\mathcal{G}$ be the set of all Ψ_M and $\mathcal{F}$ be the convex hull of $\mathcal{G}$.

Let us show that if $\Psi \in \mathcal{F}$, then there is $\varphi_\Psi \in B_{E^*}$ so that $\Psi(\varphi_\Psi) \leq 0$. Let $0 \leq \lambda_j \leq 1$, $j = 1, ..., s$, with

$$\sum_{j=1}^{s} \lambda_j = 1$$

and $\Psi_{M_j} \in \mathcal{G}$, $j = 1, ..., s$, be so that

$$\Psi = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \Psi_{M_j}.$$

Then, using the subhomogeneity of f, we have

$$\Psi \leq \Psi_{M_0}$$

with

$$M_0 = \bigcup_{j=1}^{s} \left\{ \lambda_j^{\frac{1}{p}} x; x \in M_j \right\}.$$

*UAME, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, PB, Brasil, jaime@dme.ufcg.edu.br
†Depto. de Matemática, PGmat, Universidade Federal da Paraíba, PB, Brasil, ihttaty@yahoo.com.br
‡Depto. de Matemática, PGmat, Universidade Federal da Paraíba, PB, Brasil, nunesag@gmail.com
§Depto. de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, PB, Brasil, dmpellegrino@gmail.com
¶Depto. de Matemática, PGmat, Universidade Federal da Paraíba, PB, Brasil, joedsonsr@yahoo.com.br

Note that, since B_{E^*} is compact, we have

$$\sup_{\varphi\in B_{E^*}}\left(\sum_{x\in M_0}|\varphi(x)|^p\right)^{\frac{\alpha}{p}}=\left(\sum_{x\in M_0}|\varphi_{M_0}(x)|^p\right)^{\frac{\alpha}{p}}$$

for some $\varphi_{M_0}\in B_{E^*}$. So, using (0.1) we get

$$\Psi_{M_0}(\varphi_{M_0})\leq 0. \tag{0.2}$$

Hence

$$\Psi(\varphi_{M_0})\leq 0. \tag{0.3}$$

Let

$$\mathcal{P}=\{w\in C(B_{E^*});w(\varphi)>0\text{ for all }\varphi\in B_{E^*}\}.$$

Note that $\mathcal{P}$ is open, convex and non-void (every positive constant function belongs to $\mathcal{P}$). From the definition of $\mathcal{P}$ and from (0.3) it follows that $\mathcal{P}\cap\ \mathcal{F}=\phi$. So, the Hahn-Banach Separation Theorem gives us $h\in C(B_{E^*})^*$ so that, for some $c\in\mathbb{R}$,

$$h(g)\leq c<h(w)$$

for every $g\in\mathcal{F}$ and $w\in\mathcal{P}$. Since $f(0)=0$, we have

$$0=\Psi_{\{0\}}\in\mathcal{F}.$$

So

$$0=h(0)\leq c.$$

Hence

$$h(w)>c\geq 0 \tag{0.4}$$

for all $w\in\mathcal{P}$. Using the continuity we conclude that $h(w)\geq 0$ whenever $w\geq 0$. We also conclude that $c=0$.

Let $h_1\in C(B_{E^*})^*$ be given by $h_1(w)=\frac{h(w)}{h(1)}$. Note that in view of (0.4) we know that $h(1)>0$.

So $h_1(1)=1$ and $h_1(w)\geq 0$ whenever $w\geq 0$. From ([1, Theorem 4.3.10]) we can find a regular (positive) probability measure on the Borel sigma algebra of B_{E^*} so that

$$h_1(w)=\int_{B_{E^*}}w(\varphi)d\mu(\varphi).$$

Hence

$$\int_{B_{E^*}}g(\varphi)d\mu(\varphi)=h_1(g)\leq 0$$

for every $g\in\mathcal{F}$.

For every $x\in E$ we have $\Psi_{\{x\}}\in\mathcal{F}$; so we get

$$\int_{B_{E^*}}\Psi_{\{x\}}(\varphi)d\mu(\varphi)\leq 0$$

and the result follows.□

References

[1] R. Ash - *Measure, Integration and Functional Analysis,* Academic Press, (1972).

[2] G. Botelho, D. Pellegrino and P. Rueda - *A nonlinear Pietsch Domination Theorem,* to appear in Monatsh. Math.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

A NONLINEAR EQUATION FOR HEAT CONDUCTION

M. A. RINCON [1], I. S. LIU [2] & J. LÍMACO [3]

Resumo

Let Ω be a bounded open set of $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2$, with regular boundary. We represent by $Q = \Omega \times (0, T)$ for $T > 0$, a cylindrical domain, whose lateral boundary we represent by $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. We shall consider the following nonlinear partial differential equation:

$$\begin{cases} u' - \operatorname{div}\Big(a(x,u)\nabla u\Big) + b(x,u)\,|\nabla u|^2 = 0 \quad \text{in } Q, \\ u = 0 \quad \text{on } \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{0.1}$$

where

$$a(u) = \frac{\alpha(u)}{\rho(u)} = \frac{\alpha(u)c(u)}{\rho(u)c(u)} = \frac{k(u)}{\rho(u)c(u)} > 0 \tag{0.2}$$

and

$$b(u) = -\frac{\alpha(u)}{c\,\rho(u)^2}\,\frac{d\rho}{d\theta} > 0. \tag{0.3}$$

The positiveness of $a(u)$ and $b(u)$ is the consequence of thermodynamic considerations, see [5], and reasonable physical experiences: the specific heat $c > 0$, the thermal conductivity $\kappa > 0$, the mass density $\rho > 0$, and the thermal expansion $d\rho/d\theta < 0$. In this work we shall formulate the problem based on the nonlinear heat equation (0.1), using $a(x,u)$ and $b(x,u)$ functions more general in stead of the $a(u)$ and $b(u)$, which arises from the heat conduction problems with strong temperature-dependent material parameters, such as mass density, specific heat and heat conductivity. Existence, uniqueness and asymptotic behavior of initial boundary value problems under appropriate assumptions on the material parameters are established. Both one-dimensional and two-dimensional cases are considered. Mathematical models of semi-linear and nonlinear parabolic equations under Dirichlet or Neumann boundary conditions has been considered in several papers, among them, let us mention ([1] and [2]) and [3], [6], [7]), respectively.

Feireisl, Petzeltová and Simondon in [4] prove that with non-negative initial data, the function $a(x,u) \equiv 1$ and $g(u, \nabla u) \le h(u)(1 + |\nabla u|^2)$, instead of the non-linear term $b(x,u)\,|\nabla u|^2$ in $(0.1)_1$, there exists an admissible solution positive in some maximal interval $[0, T_{\max})$ and if $T_{\max} < +\infty$ then

$$\lim_{t \to T_{\max}} \|u(t,.)\|_\infty = \infty.$$

Referências

[1] Alaa, N., Iguername,M., *Weak periodic solution of some quasilinear parabolic equations with data measures*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, $3, 1-14, (2002)$.

[2] Boccardo, L., Murat, F.,Puel, J.P. *Existence results for some quasilinear parabolic equations*, Nonlinear Analysis, $13, 373-392, (1989)$.

[1] Corresponding author: rincon@dcc.ufrj.br
[2] Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM, RJ, Brasil
[3] Universidade Federal Fluminense, IM, RJ, Brasil, jlimaco@vm.uff.br

[3] Chipot,M., Weissler, F.B. *Some blow up results for a nonlinear parabolic equation with a gradient term*, SIAM J. Math. Anal., $20, 886-907, (1989)$.

[4] Feireisl, E, Petzeltová H., Simondon F., *Admissible solutions for a class of nonlinear parabolic problems with non-negative data*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A - Mathematics, 131 [5] 857-883 (2001).

[5] Liu, I-Shih, *Continuum Mechanics*, Spring-Verlag, (2002).

[6] Nakao,M. *On boundedness periodicity and almost periodicity of solutions of some nonlinear parabolic equations*, J. Differential Equations, $19, 371-385, (1975)$.

[7] Souplet,Ph., *Finite Time Blow-up for a Non-linear Parabolic Equation with a Gradient Term and Applications*, Math. Meth. Apl. Sc. $19, 1317-1333$, (1996).

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

A note on a class of nilpotent O.D.E.

Márcio José Horta Dantas* & José Manoel Balthazar†

1 Introduction

The knowledge of the dynamic properties of current engineering systems is an important step in systems design and control. In the design of structures it is necessary to investigate the relevant dynamics in order to predict the structural response due to excitation. In the selection of rotating machines for applications in structures, often little thought is given to the effect that the structure has on the machine, i.e., the excitation is considered independent of the system response.

Mathematical models of real systems are usually idealized by prescribing the forcing term as a known function. In reality, for a great number of structures this is not the case, and such structures are called non-ideal. In general, it is possible that an energy source fixed to a structure may be affected by the structural response. Systems having dynamic coupling between structure and the energy source often exhibit peculiar behavior, especially systems with limited power supply. Non-ideal systems operating in the neighborhood of resonant frequencies are often more expensive and perform poorly as compared with ideal counterparts. In this work, motivated by non-ideal mechanical systems, we investigate the following O.D.E.

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x,t) + O\left(\varepsilon^2\right), \tag{1.1}$$

where $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, g is a T periodic function of t and there is $a_0 \in \Omega$ such that $f(a_0) = 0$ and $f'(a_0)$ is a nilpotent matrix. When $n = 3$ and $f(x) = (0, q(x_3), 0)$ we get results on existence and stability of periodic orbits.

It is interesting to note that for several non ideal problems the linearisation in the equilibrium point gives a nilpotent matrix, see [1], [2]. However basic questions, like existence and stability of periodic orbits, have not been investigated rigorously yet. Our results are the first steps in this direction. The case of the centrifugal vibrator, see [3], was our main motivation to get the next results.

2 An Existence Result

Our first result is the following existence theorem. We write

$$\overline{g}(x) = \frac{1}{T}\int_0^T g(x,s)\,ds. \tag{2.2}$$

Theorem 2.1. *Suppose that $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ is given by $f(x_1, x_2, x_3) = (0, q(x_3), 0)$, there is x_3^0 such that $q\left(x_3^0\right) = 0$ and $q'\left(x_3^0\right) \neq 0$. Besides, assume that there exists $a_0^0 = \left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right) \in \Omega$ such that*

$$\begin{cases} \overline{g}_1\left(a_0^0\right) = 0, \\ \overline{g}_3\left(a_0^0\right) = 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

and

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial \overline{g}_1}{\partial x_1}\left(a_0^0\right) & \frac{\partial \overline{g}_1}{\partial x_2}\left(a_0^0\right) \\ \frac{\partial \overline{g}_3}{\partial x_1}\left(a_0^0\right) & \frac{\partial \overline{g}_3}{\partial x_2}\left(a_0^0\right) \end{bmatrix} \neq 0. \tag{2.4}$$

*Faculdade de Matemática, UFU , 38400-902 Uberlândia M.G. , Brasil, marcio@ufu.br
†Dapartamento de Estatística, Matemática Aplicada e Computação, UNESP, 13500-230 Rio Claro, SP, Brasil, jmbaltha@rc.unesp.br

Then, there is a differentiable mapping $c_0 : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^3$ such that the solution of

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x,t) + O(\varepsilon^2), \\ x(0) = a_0^0 + \varepsilon c_0(\varepsilon), \end{cases} \tag{2.5}$$

is a T-periodic orbit for each $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$.

3 Computation of the derivative of Poincaré Mapping

In order to approach the stability issue in the earlier case, we compute de derivative of the Poincaré map. This map is defined as $P(x,\varepsilon) = \Phi(x,T,\varepsilon)$, where Φ is the flow of (1.1).

Theorem 3.1. *Consider C^r mappings, $r \geq 3$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ where Ω is an open subset of $\mathbb{R}^n$, g is a T-periodic function in the variable t Let $a_0 \in \Omega$ and $c : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^n$ be such that $f(a_0) = 0$ and for each $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, the solution of the following initial value problem*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x,t) + O(\varepsilon^2), \\ x(0) = a_0 + \varepsilon c(\varepsilon). \end{cases}$$

is a T-periodic orbit. Then

$$P'(a_0 + \varepsilon c(\varepsilon), \varepsilon) = e^{Tf'(a_0)} \left(I + \varepsilon \int_0^T e^{-sf'(a_0)} \tfrac{\partial q}{\partial x}(a_0, s)\, e^{sf'(a_0)} ds \right) + O(\varepsilon^2). \tag{3.6}$$

where $q(x,s) = f'(x) A_1(s) + g(x,s)$ and $A_1(\cdot)$ is given by

$$A_1(t) = e^{tf'(a_0)} c(0) + \int_0^t e^{(t-s)f'(a_0)} g(a_0, s)\, ds.$$

4 Acknowledgements

The first author acknowledges the support given by FAPEMIG - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais.
The second author acknowledges financial support by FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo and CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico, both Brazilian research funding agencies.

References

[1] Balthazar, J.M., Mook, D.T., Brasil, R.M.L.R.F., Weber.H.I., Fenili, A., Belato, D. and Felix, J.L.P., 'Recent results on vibrating problems with limited power supply', in: Awrejcewicz, J., Brabski, J. and Nowakowski, J (eds), *Sixth Conference on Dynamical Systems Theory and Applications*, Lodz, Poland, December 10-12, 2001.

[2] Balthazar, J.M., Mook, D.T., Brasil, R.M.L.R.F., Weber.H.I., Fenili, A., Belato, D. and Felix, J.L.P.,'An overview on Non-Ideal Vibrations', *Meccanica* **38**, 2003, 613-621.

[3] Dantas, M.J.H. and Balthazar, J.M. , 'On the appearence of a Hopf bifurcation in a non-ideal mechanical problem', *Mechanics Research Communications* **30**, 2003, 493-503.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{o}}$ 2 Novembro 2008

A perturbation theory for the Discrete Harmonic Oscillator Equation

Claudio Cuevas *† & Julio César de Souza ‡

Resumo

This work deals with the existence, uniqueness and stability of solutions for the semilinear discrete harmonic oscillator equation on Banach spaces by using recent characterization of maximal regularity for a best difference approximation of the discrete harmonic oscillator equation.

1 Introduction

We are concerned with the study of existence of solutions and stability for the semilinear problem

$$\Delta^2 x_n + Ax_{n+1} = f(n, x_n, \Delta x_n),\ n \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.1}$$

by using recent characterization of maximal regularity for a best difference approximation of the discrete harmonic oscillator equation.

We remark that in the continuous case, it is well known that the study of maximal regularity is very useful for treating semilinear and quasilinear problems. Many concrete applications to semilinear partial differential equations have been found and many more under development (see, e.g., [3] and the bibliography therein). Beside its theoretical interest, the study of abstract discrete evolution equation together with discrete maximal regularity has great importance in applications. For these reasons the theory of discrete maximal regularity has drawn the attention of several authors (see [1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9]).

2 Preliminaries

Let X be a Banach space. Let $\mathbb{Z}_+$ denote the set of nonnegative integer numbers, let Δ be the forward difference operator of the first order, that is, for each $x : \mathbb{Z}_+ \to X$, and $n \in \mathbb{Z}_+$, $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$. In what follows we denote $T := A + I$. We consider the following evolution equation:

$$\begin{cases} \Delta^2 x_n - (I - T)x_{n+1} = f_n,\ n \in \mathbb{Z}_+, \\ \qquad x_0 = x_1 = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Let $1 < p < +\infty$. One says that equation (2.2) has discrete maximal regularity if $\mathcal{K}f = (I - T)B * f$ defines a bounded operator $\mathcal{K} \in \mathcal{B}(l_p(\mathbb{Z}_+; X))$ (see [3]).

3 Semilinear discrete harmonic oscillator

In this section, our aim is to investigate the existence and uniqueness of solutions, whose second discrete derivative is in ℓ_p, for the following evolution equations.

*Instituição, DMAT-UFPE, PE, Brasil, e-mail cch@dmat.ufpe.br
†The first author is partially supported by CNPQ/Brazil
‡Instituição DMAT-UFPE, PE, Brasil, e-mail jcmath.es@hotmail.com

$$\Delta^2 x_n - (I-T)x_{n+1} = f(n, x_n, \Delta x_n), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x_0 = x_1 = 0, \tag{3.3}$$

To establish the next result, we need to introduce the following condition.

Condition (A): Let $\alpha = (\alpha_n)$ be a positive sequence such that $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 2^{2n} < +\infty$. Suppose that the following conditions hold:

(i) The function $f : \mathbb{Z}_+ \times X \times X \longrightarrow X$ satisfy a Lipschitz condition on $X \times X$, that is for all $z, w \in X \times X$ and $n \in \mathbb{Z}_+$, one has $||f(n,z) - f(n,w)||_X \leq \alpha_n ||z - w||_{X\times X}$.

(ii) $f(\bullet, 0, 0) \in l_1(\mathbb{Z}_+; X)$.

Teorema 3.1. *([3]) Assume that Condition (A) holds. In addition suppose that equation (2.2) has discrete maximal regularity. Then, there is an unique solution $x = (x_n)$ of (3.3) such that $(\Delta^2 x_n) \in l_p(\mathbb{Z}_+; X)$. Moreover, one has the following a priori estimates for the solution:*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \Big[\frac{1}{2^{2n}}(||x_n||_X + ||\Delta x_n||_X)\Big] \leq (1 + ||\mathcal{K}||)||f(\bullet,0,0)||_1 e^{(1+||\mathcal{K}||)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k 2^{2k}}, \tag{3.4}$$

$$||\Delta^2 x||_p \leq (2 + ||\mathcal{K}||)||f(\bullet,0,0)||_1 e^{2(1+||\mathcal{K}||)\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k 2^{2k}}, \quad 1 < p < +\infty, \tag{3.5}$$

and

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} ||((I-T)x_n, (I-T)\Delta x_n)||_{X\times X} \leq (3 + ||\mathcal{K}||)^3 ||f(\bullet,0,0)||_1 e^{5[||T||+||\mathcal{K}||]\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k 2^{2k}}. \tag{3.6}$$

We obtain the following result valid on UMD spaces.

Teorema 3.2. *([3]) Let X be a UMD space. Assume that Condition (A) holds and suppose T is an analytic operator such that the set*

$$\left\{\frac{(z-1)^2}{z} R\left(\frac{(z-1)^2}{z}, I-T\right) \Big/ |z| = 1, z \neq 1\right\} \tag{3.7}$$

is R-bounded. Then, there is an unique solution $x = (x_n)$ of equation (3.3) such that $(\Delta^2 x_n) \in l_p(\mathbb{Z}_+; X)$. Moreover, the a priori estimates (3.4),(3.5) and (3.6) hold.

Referências

[1] Blunck, S. *Maximal regularity of discrete and continuous time evolution equations*, Studia Math. **146**(2) (2001), 157-176.

[2] Blunck, S.*Analyticity and discrete maximal regularity of L_p-spaces,* J. Funct. Anal., **183** (1) (2001), 211-230.

[3] Cuevas, C., de Souza, J. C. *A pertubation theory for the discrete harmonic oscillator equation ,* Submitted.

[4] Cuevas, C., Lizama, C. *Maximal regularity of discrete second order Cauchy problems in Banach spaces,* J. Differ. Equ. Appl., **13** (12) (2007), 1129-1138.

[5] Geissert, M. *Maximal L^p regularity for parabolic difference equations,* Math. Nach., (16) **279** (2006), 1787-1796.

[6] Guidetti, D. and Piskarev, S. *Stability of the Crank-Nicolson scheme and maximal regularity for parabolic equations in $C^\theta(\overline{\Omega})$ spaces,* Numer. Funct. Anal. Optim., **20** $(3-4)$ (1999), 251-277.

[7] Kalton N., Portal, P. *Remarks on l^1 and l^∞ maximal regularity for power bounded operators,* Preprint 2007.

[8] Portal, P. *Discrete time analytic semigroups and the geometry of Banach spaces,* Semigroup Forum, **67** (2003), 125-144.

[9] Portal, P. *Maximal regularity of evolution equations on discrete time scales,* J. Math. Anal. Appl., **304** (2005), 1-12.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

A posteriori ERROR ESTIMATOR FOR THE STOKES EQUATIONS IN STREAM FUNCTION AND VORTICITY FORMULATION

TOMÁS P. BARRIOS * & J. MANUEL CASCÓN † & GALINA C. GARCÍA ‡

This paper deals with *a posteriori* estimates for the finite element solution of the Stokes problem in stream function and vorticity formulation.

Let us fix a bounded and connected domain Ω of $\mathbb{R}^2$ with a polygonal boundary Γ. In this domain, we consider the the following Stokes problem: Given a vector function $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$, find a stream function ψ and the vorticity ω such that

$$\nu(\mathbf{curl}\,\omega, \mathbf{curl}\,\phi)_{[L^2(\Omega)]^2} = (\mathbf{f}, \mathbf{curl}\,\phi)_{[L^2(\Omega)]^2} \qquad \forall\, \phi \in \Phi, \tag{0.1}$$

$$(\omega, \mu)_{L^2(\Omega)} - (\mathbf{curl}\,\psi, \mathbf{curl}\,\mu)_{[L^2(\Omega)]^2} = 0 \qquad \forall\, \mu \in H^1(\Omega), \tag{0.2}$$

where $\nu > 0$ is the viscosity of the fluid. If Ω is a convex polygon or its boundary Γ is of class $\mathcal{C}^2$ then this problem has a unique weak solution $(\omega, \psi) \in H^1(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$ (see [3]).

For the finite element scheme, let $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ be a regular family of triangulations of $\bar{\Omega}$ by triangles T of diameter h_T and define, as usual, $h := \max\{\, h_T : \ T \in \mathcal{T}_h \,\}$. We define the space of continuous piecewise functions

$$M_h := \{\mathbf{v}_h \in [C(\overline{\Omega})] : \quad \mathbf{v}_h|_T \in [\mathcal{P}_l(T)] \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}\,,$$

and

$$\Phi_h := M_h \cap H^1_0(\Omega)\,.$$

The Galerkin scheme then reads: *Find* $(\omega_h, \psi_h) \in M_h \times \Phi_h$ *satisfying:*

$$\nu(\mathbf{curl}\,\omega_h, \mathbf{curl}\,\phi_h)_{[L^2(\Omega)]^2} = (\mathbf{f}, \mathbf{curl}\,\phi_h)_{[L^2(\Omega)]^2} \qquad \forall\, \phi_h \in \Phi_h, \tag{0.3}$$

$$(\omega_h, \mu_h)_{L^2(\Omega)} - (\mathbf{curl}\,\psi_h, \mathbf{curl}\,\mu_h)_{[L^2(\Omega)]^2} = 0 \quad \forall\, \mu_h \in M_h. \tag{0.4}$$

In the following theorem, we present the main result of this paper, we derive a reliable and efficient *a posteriori* error estimator.

Theorem 0.1. *Let* $(\omega, \psi) \in H^1(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$ *and* $(\omega_h, \psi_h) \in M_h \times \Phi_h$ *be the unique solution of continuous and discrete formulation (0.1)-(0.2) and (0.3)-(0.4), respectively. Assume that the data* $\mathbf{f} \in [H^1(\Omega)]^2$. *Then there exist* $C_{\texttt{eff}}$, $C_{\texttt{rel}} > 0$, *independent of* h, *such that*

$$\|(\omega - \omega_h, \psi - \psi_h)\|^2_{L^2(\Omega)\times H^1_0(\Omega)} \le C_{\texttt{rel}} \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \eta_T^2\,,$$

and

$$C_{\texttt{eff}} \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \eta_T^2 \le \|(\omega - \omega_h, \psi - \psi_h)\|^2_{L^2(\Omega)\times H^1_0(\Omega)} + \text{h.o.t},$$

*Departamento de Matemática y Física Aplicadas, Universidad Católica de la Santísima Concepción, Casilla 297, Concepción, Chile, tomas@ucsc.cl

†Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Salamanca, 37008, Salamanca, Spain, casbar@usal.es

‡Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Universidad de Santiago, Casilla 307, Correo 2, Santiago, Chile, galina@fermat.usach.cl

where h.o.t. denotes one or several terms of higher order, and for any $T \in \mathcal{T}_h$ we define

$$\eta_T^2 := h_T^4 \, \|\nu\Delta\omega_h + \operatorname{curl}\mathbf{f}\|^2_{L^2(T)} \, + \, h_T^2 \, \|\omega_h + \Delta\psi_h\|^2_{L^2(T)}$$

$$+ \sum_{e\in E(T)\cap E_h} h_e \|J[\nabla(\psi_h)\cdot\boldsymbol{\nu}_T]\|^2_{L^2(e)} \, + \sum_{e\in E(T)\cap E_h(\Omega)} h_e^3 \|J[\nabla(\omega_h)\cdot\boldsymbol{\nu}_T]\|^2_{L^2(e)}, \tag{0.5}$$

where $E(T)$ is the set of edges e of $T \in \mathcal{T}_h$, and E_h is the set of all edges of the triangulation $\mathcal{T}_h$, i.e., $E_h = E_h(\Omega) \cup E_h(\Gamma)$, where $E_h(\Omega) := \{e \in E_h : \ e \subseteq \Omega\}$, $E_h(\Gamma) := \{e \in E_h : \ e \subseteq \Gamma\}$. We denote by $J[\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nu}_T]$ the corresponding jump across e, that is $J[\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nu}_T] := (\boldsymbol{\tau}_T - \boldsymbol{\tau}_{T'})|_e \cdot \boldsymbol{\nu}_T$, where T' is the other triangle of $\mathcal{T}_h$ having e as edge.

Our approach is based on the introduction of dual problem technique, we deduce practically the same error indicator that developed in [1] for the Stokes system, only defers in appropriate factors of meshsize, which, under appropriate assumptions, allows us to prove efficiency in natural norms. In this sense, it can be seen as an extension of the applicability of the error indicator developed in [1] to the standard stream function and vorticity formulation.

In addition, several numerical experiments confirming the theoretical properties of the estimator, and illustrating the capability of the corresponding adaptive algorithm to localize the singularities and the large stress regions of the solution, are also reported.

References

[1] M. Amara, M. Ben Younes and Bernardi, C., *Error indicators for the Navier-Stokes equations in stream function and vorticity formulation.* Numerische Mathematik, 80 (1998), pp. 181-206.

[2] P.G. Ciarlet and P.-A. Raviart. A mixed finite element method for the biharmonic equation. In *Mathematical aspects of finite elements in partial diferential equations (Proc. Sympos. Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 1974),* Academic Press: New york, 1974; 125–145.

[3] V. Giroult and P.-A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier Stokes Equations: Theory and Algorithms.* Springer-Verlang, Berlin, 1986.

[4] A. Schmidt and K. G. Siebert. *Design of Adaptive Finite Element Software: The Finite Element Toolboox ALBERTA*, LNCSE 42, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2005.

[5] R. Verfürth, A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques. Wiley-Teubner (Chichester), 1996.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{o}}$ 2 Novembro 2008

Analytic And Fourier/Chebychev Spectrum of the Uzawa Pressure Operator

A. Garba *

We consider on the domain $\Omega = (0, 2\pi) \times (-1, 1)$ the system of partial differential equations

$$-\Delta\mathbf{u} + \sigma\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad (x, y) \in \Omega \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (x, y) \in \Omega \tag{2}$$

where $\mathbf{u} = (u, v)$ is the velocity field, p is the pressure field, $\mathbf{f}$ is a forcing term and $\sigma \geq 0$. We assume that the problem is periodic in the x direction with period length 2π and in y we consider the boundary conditions

$$\mathbf{u} = 0 \text{ on } \; y = -1 \; \text{ and } y = 1 \tag{3}$$

The case $\sigma = 0$ corresponds to the classical Stokes problem which describes the motion of fluid with very small Reynold number. When $\sigma > 0$, the problem is often referred to as the Generalized Stokes Problem (GSP). The GSP plays a fundamental role in the numerical resolution of the Navier-Stokes Equations(NSE)[1].

We analyse the conditioning of the Uzawa algorithm for solving problem 1–**??**.

Uzawa algorithm and pressure operator

Let $(\Delta - \sigma\mathcal{I})_b$ be the Helmholtz operator equipped with the boundary conditions. Then the classical Uzawa algorithm applied to (1)–(**??**) can be described as follows: Start from arbitrary initial guess $p_0 \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ and for $m \geq 0$ repeat until convergence Step1 and Step2:

- Step1: Solve $(-\Delta + \sigma\mathcal{I})_b\mathbf{u}^{m+1} = \mathbf{f} - \nabla p^m$
- Step2: Update $p^{m+1} = p^m - \varrho\nabla \cdot \mathbf{u}^{m+1}$

where ϱ is a relaxation parameter. The Uzawa algorithm can be interpreted as Richardson method applied to the equation

$$\mathcal{A}p = -\nabla \cdot (-\Delta + \mathcal{I})_0^{-1}\mathbf{f} \tag{4}$$

where operator $\mathcal{A}$(hereafter referred to as pressure operator) is defined by

$$\mathcal{A} \equiv \nabla \cdot (-\Delta + \sigma)_0^{-1}\nabla \tag{5}$$

perator $\mathcal{A} : L^2(\Omega)/\mathbb{R} \to L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ is symmetric, positive definite and elliptic(cf. [3] for instance). Thus the convergence of the Uzawa algorithm is guaranteed for sufficiently small parameter of relaxation ϱ.

We give a precise characterization of the condition of the algorithm. We compute explicitly the eigenvalues first in the continuous case, then in the case of the spectral Fourier/Chebychev discretisation[4]. In particular we show that the spectral condition number of the pressure operator behaves asymtotically as $\kappa \sim \sigma + \sqrt{\sigma} + 7/3$ for large σ.

*Universidade Federal do Ceará, Campus do Pici, 60455–760 Fortaleza, Ce, Brasil, garba@ufc.mat.br

References

[1] R. Teman, *Navier–Stokes Equations*, North–Holland, Amsterdam, 1977

[2] K. Arrow, L. Hurwicz and H. Uzawa, *Studies in Nonlinear Programming*, Stanford University Press, Stanford, CA, 1958.

[3] R. Glowinski, *Ensuring Well-Posedness by Analogy: Stokes Problem and Boundary Control for Heat Equation*, J. Comp. Phys. Vol.103, pp. 189–201, 1992

[4] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quateroni and T. A. Zang, Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer–Verlag, New York, 1988.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{0}}$ 2 November 2008

APPROXIMATED CONTROL FOR SEMILINEAR HEAT EQUATION WITH THE MEMORY TERM

M. R. Clark * and A. O. Marinho †

Let Ω be a bounded open set of $\mathbb{R}^n$ with C^2 boundary Γ. With Q we represent the cylinder $\Omega \times (0,T)$, $T>0$ of $\mathbb{R}^{n+1}$ with lateral boundary $\sum = \Gamma \times (0,T)$. Our purpose is to investigate the approximated controllability for the system

$$\left| \begin{array}{l} u' - \Delta u - \displaystyle\int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma) d\sigma + f(u, \nabla u) = v\chi_{\mathcal{O}} \text{ in } Q \\ u = 0 \text{ on } \Sigma \\ u(0,x) = u_0(x) \text{ in } \Omega. \end{array} \right. \tag{0.1}$$

where $u = u(x,t)$ is the state and $v = v(x,t)$ is the function control distributed in $\mathcal{O}$ and χ denotes the characteristic function of open non-empty subset $\mathcal{O}$ of Ω.

The function $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is assumed to be globally Lipschitz all along the work, that is,

$$\exists\, L > 0 : \ |f(y,\xi) - f(z,\eta)|_{\mathbb{R}} \leq L \left\{ |y-z|_{\mathbb{R}} + |\xi - \eta|_{\mathbb{R}^n} \right\}, \ \forall\, y, z \in \mathbb{R}; \ \xi, \eta \in \mathbb{R}^n. \tag{0.2}$$

The function $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ satisfy

$$g \in W^{1,1}(0,\infty) \quad \text{and} \quad \alpha = \frac{1}{2} - 2\int_0^\infty g(s)ds > 0. \tag{0.3}$$

The presence of the memory term in equation (0.1) is related to the viscoelastic properties of the material.

The great difficulty to find the approximated controllability of the system (0.1) is term memory, because he impedes that the unique continuation theorem of C. Fabre[1] is applied directly. But, by means of Volterra Integral Theory, we show that the unique continuation theorem can be applied.

The system (0.1) with g = 0 was studied by E. Zuazua [9], motivated by thermic diffusivity equations involving the gradients terms. Inspired by the above mentioned work we study, in a natural way, the approximated controllability of system (0.1) when the kernel g satisfy (0.3), which is the goal of this paper. We mention that, the convolution term $g * \Delta u$ brought up some technical difficulties which are bypassed transforming the problem (0.1) into an equivalent one using the standard Volterra equations theory.

We can find in the literature several works in connection with memory terms. The reader is referred to the works of J. U. Kim [3], G. Leugering [7], I. Lasiecka [5] and the classical book of J. Lagnese and J. L. Lions [8], while the problems without memory have been the object of intensive research in the past few years. Fabre et all [2] adapted the fixed point method of [10] to prove the approximate controllability of (0.1), without memory, in the particular case $f = f(y)$, f being globally Lipschitz. Note that the nonlinearity was not allowed to depend on the gradient of the state in this result. The complete case where $f(y, \nabla y)$ was analized by L.A. Fernández and Zuazua in [3] by means of the optimal control approach introduced by J.L. Lions [8].

Following the ideas of Zuazua [9] we show how the fixed point may be adapted to these controllability problems for complete system (0.1) in which the nonlinearity is allowed to depend both in the state and its gradient. Approximate controllability of the system will be proved. None of these results is new since, as we said above, they were

*Universidade Federal do Piauí ... , DM, Brasil, mclark@ufpi.br
†Supported by CNPq, alexmaiver@hotmail.com,

proved previously in [3] and [9]. However, the innovation here is the term memory and the difficulties in applying the unique continuation result of C. Fabre directly.

For clear limitation in the application of this fixed point method see for example [4] and [9].

References

[1] C. Fabre-Uniqueness result for Stokes equations and their consequences in linear and nonlinear control problems, ESAIM:COCV, 1(1996), 267-302.

[2] C. Fabre, J.P. Puel and E. Zuazua-Approximate controllability of the semilinear heat equations, IMA Volumes, Vol. 70, 1995, Control and Optimal Design of Distributed Parameter Systems, pp. 73-92.

[3] L.A. Fernández and E. Zuazua - Approximate controllabillity for the semilinear heat equation involving gradiente terms, Prepint 2-1997, Departament of Mathematics, University of Cantabria, Spain.

[4] J. Henry -Contrôle d'un réacteur enzymatique á l'aide de modéles á parametres distribués. Quelques problémes de contrôlabilité de sytémes paraboliques, PhD Thesis, Université Paris VI, 1978.

[5] I. Lasiecka, Controllability of a viscoelastic Kirchhoff plate, Intermat. Ser. Numer. Math. 91, (1989), 237-247.

[6] J.E. Lagnese and J.L. Lions,Modelling, Analysis and Control of Thin Plates, Maason, Paris, 1988.

[7] G. Leugering, Exact Boundary Controllability of an Integrodiferential Equation, Appl. Math. Optim.15, (1987), 223-250.

[8] J.L.Lions- Remarques sur le contrôlabilité approchée, in Jornadas Hispano-Francesas sobre Control de Sistemas Distribuidos, University of Málaga, Spain, 1991, pp. 77-87.

[9] E. Zuazua - Approximate controllabillity for the semilinear heat equation with globally Lipschitz nonlinearities, Prepint 2-1997, Departament of Mathematics, University of Cantabria, Spain.

[10] E. Zuazua -Exact boundary controllabillity for the semilinear heat equation, in Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications, Vol. X, H. Brezis and J.L. Lions eds., Pitman, 1991, 357-594.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

APPROXIMATE CONTROLLABILITY FOR THE EQUATION OF MODERATE MOTION OF OLDROYD FLUID

Alexandro O. Marinho *

The objective of this paper is to discuss on the approximate controllability for the system

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \mu\Delta u + a(x,t)u + \overrightarrow{b}(x,t).\nabla u - \displaystyle\int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)d\sigma + \nabla p = v\chi_{\mathcal{O}} \quad \text{in} \quad Q \\ div(u) = 0 \quad \text{in} \quad Q, \\ u = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \end{array}\right. \tag{0.1}$$

where $u(x,t) = (u_1(x,t), ..., u_n(x,t))$ is the vector velocity(also state of the system) of moderate fluid evaluated at the point (x,t), $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $p = p(x,t)$ is the pressure of the fluid evaluated at the point (x,t), μ represent a constant, $u_0(x)$ is the initial velocity, $a, \vec{b}$ are potentials in $L^\infty(Q)$ and $\{L^\infty(Q)\}^n$ respectively and $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ is a function $L^1(0,\infty)$ satisfying

$$\alpha = \frac{\mu}{2} - 2\int_0^\infty g(s)ds > 0. \tag{0.2}$$

The function $v = v(x,t)$ is the control distributed in $\mathcal{O}$ and χ denotes the characteristic function of open non-empty subset $\mathcal{O}$ of Ω.

In the present article we follow the ideas of the concept of approximate controllability for heat equation as in Lions [10], that is, the problem of the approximate controllability of (0.1) can be formulated as follows: Given $T > 0$, $u_0 \in H$, the ideal state $u^T \in H$ and $\varepsilon > 0$, to find a control $v \in \left(L^2(\mathcal{O} \times (0,T))\right)^n$ such that the correspondent solution u of (0.1) satisfies

$$\left|u(T) - u^T\right|_H \leq \varepsilon. \tag{0.3}$$

In other words, the problem of the approximate controllability of (0.1) consists on studying the range of solutions of (0.1) at time T,

$$R(u_0,T) = \left\{u(.,T) : u \text{ solution of (0.1) with } v \in \left(L^2(\mathcal{O} \times (0,T))\right)^n\right\} \tag{0.4}$$

is dense in H, where H is the space

$$H = \{u \in \mathbf{L}^2(\Omega),\ div(u) = 0,\quad u.\eta|_\Gamma = 0\}$$

The key point in this method is the theorem unique continuation for the adjoint system that depends of the coefficients of operator. When the coefficients are bounded measurable functions the approximate controllability is investigated, among others, by Fabre [1] where he proved a property of unique continuation for this general case(Navier-Stokes). Other results of unique continuation can found in Saut [5] and Fusikov Ymanuvilov [13]. In the present article we employ Fabre result with a suitable adaptation.

Approximate controllability was extend for certain model of non linear heat equations, for example, among others Lebeau [2] linear case, Fernandez-Zuazua [12], Fabre-Puel-Zuazua [4] and Límaco-Medeiros [9] case nonlinear with

*Universidade Federal do Piauí ... , DM, Brasil, Supported by CNPq, alexmaiver@hotmail.com

moving boundary. See also a survey of results in Puel [3]. However, the investigation on approximate controllability for model of Oldroyd we did not find in the literature, therefore this paper gives an initial contribution for model.

Our paper is organized as follows. First, we study on existence of strong and weak solutions for the system (0.1). After, we show that the unique continuation result by C. Fabre [1] cannot directly be applied, being necessary one adjust for apply to the Oldroyd model. Finally, we prove the approximate controllability for the problem (0.1).

References

[1] C. Fabre - Uniqueness results for Stokes equations and their consequences in linear and nonlinear control problems, ESAIM:COCV, 1(1996), 267-302.

[2] C. Fabre, G. Lebeau- Prolongemente unique des solutions de l'equation de stokes, Communications in Partial Differential Equations, 21(3&4), 573-596(1996).

[3] C. Fabre, J.P. Puel, E. Zuazua - Controlabilite approcée de l'equation de la chaleur, C.R. Acad. Sci. Paris, t.315, Serie 1, 807-812, 1992.

[4] C. Fabre, J.P. Puel, E. Zuazua - Approximated controllability of the semilinear heat equations, Proc. Roy. Soc. Edimburg, Set. A., 125, 31-61, 1995.

[5] J.C. Saut and B. Scheurer - Unique continuation for some Evolution Equations, J. Differential Equations 66(1987) 118-139.

[6] J.G. Oldroyd- Non-Newtonisn flow of liquids and solids, Rheology: Theory and Applications. Vol. 1(F.R. Eirich Editor), Academic Press, 1959, pp. 653-682.

[7] J.G. Oldroyd- On the formulation of rheological equations of state, Proc. Roy. Soc. London Ser. A200(1950), 253-541.

[8] J.G. Oldroyd- Non-linear stress, rate of strain relations at finite rates of shear in so-called linear elastico-viscous liquids, Second-order Effects in Elasticity, Plasticity and Fluid Dynamics (Internat. Sympos., Haifa, 1962; M. Reiner and D. Abir Editors), Jerusalem Academic Press, Jerusalem, and Pergamon Press, Oxford, 1964, pp. 520-529.

[9] J. Límaco and L.A. Medeiros, Remarks on approximate controllability in noncylindrical domains, prepint, 1998.

[10] J.L.Lions- Remarques sur la controlabilite approchee. Jornadas Hispnao-Francesas sobre Control de Sistemas Distribuidos, Octubre 1990.

[11] J.L.Lions- Some Methods in the Mathematical Analysis of System and their Control, Science Press and Gordon and Breach, 1981.

[12] L.A. Fernández and E. Zuazua - Approximate controllabillity for the semilinear heat equation involving gradiente terms, Prepint 2-1997, Departament of Mathematics, University of Cantabria, Spain.

[13] O.Y. Imanuvilov, M. Yamamoto- On carlemam inequalities for parabolic equations in Sobolev spaces of negative order and exact controllability for semilinear parabolic equations, University of Tokyo, Komaba, Tokyo, Japan, November(1998).

[14] R.Temam - Navier-Stokes Equations vol 2, North-Holland 1979.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{0}}$ 2 November 2008

A posteriori ERROR ESTIMATOR FOR THE STOKES EQUATIONS IN STREAM FUNCTION AND VORTICITY FORMULATION

TOMÁS P. BARRIOS * & J. MANUEL CASCÓN † & GALINA C. GARCÍA ‡

This paper deals with *a posteriori* estimates for the finite element solution of the Stokes problem in stream function and vorticity formulation.

Let us fix a bounded and connected domain Ω of $\mathbb{R}^2$ with a polygonal boundary Γ. In this domain, we consider the the following Stokes problem: Given a vector function $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$, find a stream function ψ and the vorticity ω such that

$$\begin{aligned} \nu(\mathbf{curl}\,\omega, \mathbf{curl}\,\phi)_{[L^2(\Omega)]^2} &= (\mathbf{f}, \mathbf{curl}\,\phi)_{[L^2(\Omega)]^2} \qquad \forall\,\phi \in \Phi, & (0.1)\\ (\omega, \mu)_{L^2(\Omega)} - (\mathbf{curl}\,\psi, \mathbf{curl}\,\mu)_{[L^2(\Omega)]^2} &= 0 \qquad \forall\,\mu \in H^1(\Omega), & (0.2)\end{aligned}$$

where $\nu > 0$ is the viscosity of the fluid. If Ω is a convex polygon or its boundary Γ is of class $\mathcal{C}^2$ then this problem has a unique weak solution $(\omega, \psi) \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ (see [3]).

For the finite element scheme, let $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ be a regular family of triangulations of $\bar{\Omega}$ by triangles T of diameter h_T and define, as usual, $h := \max\{\, h_T : \; T \in \mathcal{T}_h \,\}$. We define the space of continuous piecewise functions

$$M_h := \{\mathbf{v}_h \in [C(\overline{\Omega})] : \quad \mathbf{v}_h|_T \in [\mathcal{P}_l(T)] \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}\,,$$

and

$$\Phi_h := M_h \cap H_0^1(\Omega)\,.$$

The Galerkin scheme then reads: *Find* $(\omega_h, \psi_h) \in M_h \times \Phi_h$ *satisfying:*

$$\begin{aligned} \nu(\mathbf{curl}\,\omega_h, \mathbf{curl}\,\phi_h)_{[L^2(\Omega)]^2} &= (\mathbf{f}, \mathbf{curl}\,\phi_h)_{[L^2(\Omega)]^2} \qquad \forall\,\phi_h \in \Phi_h, & (0.3)\\ (\omega_h, \mu_h)_{L^2(\Omega)} - (\mathbf{curl}\,\psi_h, \mathbf{curl}\,\mu_h)_{[L^2(\Omega)]^2} &= 0 \quad \forall\,\mu_h \in M_h. & (0.4)\end{aligned}$$

In the following theorem, we present the main result of this paper, we derive a reliable and efficient *a posteriori* error estimator.

Theorem 0.1. *Let* $(\omega, \psi) \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ *and* $(\omega_h, \psi_h) \in M_h \times \Phi_h$ *be the unique solution of continuous and discrete formulation (0.1)-(0.2) and (0.3)-(0.4), respectively. Assume that the data* $\mathbf{f} \in [H^1(\Omega)]^2$. *Then there exist* $C_{\mathtt{eff}}$, $C_{\mathtt{rel}} > 0$, *independent of* h, *such that*

$$\|(\omega - \omega_h, \psi - \psi_h)\|^2_{L^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \leq C_{\mathtt{rel}} \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \eta_T^2\,,$$

and

$$C_{\mathtt{eff}} \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \eta_T^2 \leq \|(\omega - \omega_h, \psi - \psi_h)\|^2_{L^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} + \text{h.o.t},$$

*Departamento de Matemática y Física Aplicadas, Universidad Católica de la Santísima Concepción, Casilla 297, Concepción, Chile, tomas@ucsc.cl
†Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Salamanca, 37008, Salamanca, Spain, casbar@usal.es
‡Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Universidad de Santiago, Casilla 307, Correo 2, Santiago, Chile, galina@fermat.usach.cl

where h.o.t. denotes one or several terms of higher order, and for any $T \in \mathcal{T}_h$ we define

$$\eta_T^2 := h_T^4 \,\|\nu\Delta\omega_h + \operatorname{curl}\mathbf{f}\|_{L^2(T)}^2 \,+\, h_T^2 \,\|\omega_h + \Delta\psi_h\|_{L^2(T)}^2$$
$$+ \sum_{e\in E(T)\cap E_h} h_e \|J[\nabla(\psi_h)\cdot\boldsymbol{\nu}_T]\|_{L^2(e)}^2 \,+ \sum_{e\in E(T)\cap E_h(\Omega)} h_e^3 \|J[\nabla(\omega_h)\cdot\boldsymbol{\nu}_T]\|_{L^2(e)}^2, \tag{0.5}$$

where $E(T)$ is the set of edges e of $T \in \mathcal{T}_h$, and E_h is the set of all edges of the triangulation $\mathcal{T}_h$, i.e., $E_h = E_h(\Omega) \cup E_h(\Gamma)$, where $E_h(\Omega) := \{e \in E_h :\ e \subseteq \Omega\}$, $E_h(\Gamma) := \{e \in E_h :\ e \subseteq \Gamma\}$. We denote by $J[\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nu}_T]$ the corresponding jump across e, that is $J[\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nu}_T] := (\boldsymbol{\tau}_T - \boldsymbol{\tau}_{T'})|_e \cdot \boldsymbol{\nu}_T$, where T' is the other triangle of $\mathcal{T}_h$ having e as edge.

Our approach is based on the introduction of dual problem technique, we deduce practically the same error indicator that developed in [1] for the Stokes system, only defers in appropriate factors of meshsize, which, under appropriate assumptions, allows us to prove efficiency in natural norms. In this sense, it can be seen as an extension of the applicability of the error indicator developed in [1] to the standard stream function and vorticity formulation.

In addition, several numerical experiments confirming the theoretical properties of the estimator, and illustrating the capability of the corresponding adaptive algorithm to localize the singularities and the large stress regions of the solution, are also reported.

References

[1] M. Amara, M. Ben Younes and Bernardi, C., *Error indicators for the Navier-Stokes equations in stream function and vorticity formulation.* Numerische Mathematik, 80 (1998), pp. 181-206.

[2] P.G. Ciarlet and P.-A. Raviart. A mixed finite element method for the biharmonic equation. In *Mathematical aspects of finite elements in partial diferential equations (Proc. Sympos. Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 1974),* Academic Press: New york, 1974; 125–145.

[3] V. Giroult and P.-A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier Stokes Equations: Theory and Algorithms.* Springer-Verlang, Berlin, 1986.

[4] A. Schmidt and K. G. Siebert. *Design of Adaptive Finite Element Software: The Finite Element Toolboox ALBERTA*, LNCSE 42, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2005.

[5] R. Verfürth, A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques. Wiley-Teubner (Chichester), 1996.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

BOUNDED SOLUTIONS OF A NONLINEAR BEAM EQUATION IN BANACH SPACE *

V. F. da Silva†

This paper is concerned with the existence of bounded solutions of the mixed problem for the equation

$$u''(t) + M(\|u(t)\|_W^\beta)Au(t) + \sigma M_1(\|A^{1/2}u(t)\|_H^2)Au(t) + A^2u(t) = 0, \quad t > 0, \tag{0.1}$$

where $M(\xi)$ is the function $M(\xi) = m_0 + m_1\xi$ defined on $[0, \infty[$, $m_0 > 0$, $m_1 \geq 0$ (m_0, m_1 constants), M_1 is the function $M_1(\xi) = m_2 + m_3\xi$ defined on $[0, \infty[$, $m_2 \geq 0, m_3 \geq 0$ (m_0, m_1 constants) and $\sigma \geq 0$ is a constant; A an unbounded self-adjoint operator of a separable Hilbert space H such that $(Au, u)_H \geq \gamma\, |u|_H^2$, $\forall u \in D(A)$ (γ positive constant), A^{-1} compact operator of H; W a Banach space with dual W' strictly convex such that the space $D(A)$ is continuosly embedding in W, and β a real number.

In a recent work, applying the Galerkin method, we have obtained only local solutions for equation (0.1). The difficulty in this approach is that we obtain only one estimate for the approximate solutions of (0.1), which does not allow us to obtain global solution. To overcome the difficulty we introduce the damping term

$$\alpha(t)\left(||Au(t)||_H^{2\beta} + ||Au(t)||_H^4\right) Au'(t)$$

in the equation.

Under the above considerations, we have the following result:

Theorem 0.1. *Consider $\beta \in \mathbb{R}$ with $\beta > 1$, $\alpha \in L^\infty_{loc}(0, \infty)$, $\alpha(t) > 0$ a.e. $t \in]0, \infty[$, $1/\alpha \in L^1(0, \infty)$ and*

$$u^0 \in D(A^2), \quad u^1 \in D(A),$$

then there exists only one function u in the class

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty_{loc}\left(0, \infty; D(A^2)\right), \\ u' &\in L^\infty_{loc}\left(0, \infty; D(A)\right), \\ u'' &\in L^\infty_{loc}\left(0, \infty; H\right), \end{aligned}$$

such that

$$\begin{aligned} & u''(t) + M(\|u(t)\|_W^\beta)Au(t) + \sigma M_1(\|A^{1/2}u(t)\|_H^2)Au(t) + \\ & A^2u(t) + \alpha(t)\left(||Au(t)||_H^{2\beta} + ||Au(t)||_H^4\right) Au'(t) = 0 \ \text{ in } \ L^\infty_{loc}(0, \infty; H), \\ & u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \end{aligned}$$

To show the existence of solutions ofthe theorem we use the Faedo- Galerkin 's method with a basis (w_j) of the space $D(A^{1/2})$ constituted by the eigen functions of the operator A, a characterization of the derivative of the term $M(||u||_W^\beta)$ and the Arzela- Ascoli theorem. The uniqueness follows by the energy method.

The exponential decay of solutions of the equation of the theorem will be published later.

---

* *Mathematics Subject Classifications:* 35L70, 35B35
Key words: Wave equation, stabilization asymptotic
† Universidade Federal da Paraíba, DM, PB, Brasil, nilza@mat.ufpb.br

References

[1] FEITOSA, A.J.R.- *Perturbações para uma equação hiperbólica: existência, unicidade e decaimento de soluções*, Tese de Doutorado, IM-UFRJ, 1997.

[2] IZAGUIRRE, R., FUENTES, R. AND MILLA MIRANDA, M.- *Existence of local solutions of the Kirchhoff-Carrier equation in Banach spaces*, Non linear Analysis TMA 68 (2008), 3565-3580.

[3] LIONS, J.L. - *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Lineaires*, Dunod, Paris,1969 (Nouvelle Presentation, Dunod 2002).

[4] MATIAS, F.O. - *Existência e comportamento assimtótico de soluções de um problema misto, com condição de neumann, para uma equação de ondas*, Tese de Doutorado, IM-UFRJ, 1999.

[5] MATOS, M.P. - *Mathematical analysis of the nonlinear model for the vibrations of the string*, Nonlinear Analysis TMA 17(1991),1125-1137.

[6] MEDEIROS, L.A.- *On a new class of non-linear wave equation*, J. Appl. Analysis 10(1980),179-185

[7] MEDEIROS. L.A.-*Tópicos em Equações Diferenciais Parciais-Parte 1*, IM-UFRJ,Rio de Janeiro, RJ, 2006

[8] MEDEIROS, L.A., LIMACO, J. AND MENEZES, S.B.-*Vibrations of elastic strings: mathematical aspects, part one*, J. Comp. Analysis Appl. 4(2002),91-127.

[9] PEREIRA. D.C. - *Existence, uniqueness and symptotic behavior for solutions of the nonlinear beam equation*, Nonlinear Analysis TMA 14(1990),613-623.

[10] SOUZA, S. AND MILLA MIRANDA, M, - *Existence and decay of solutions of a damped Kirchhoff equation*, Int. J. Pure Appl. Math. 32(2006),483-508.

[11] ZEIDLER. E. - *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications*, Vol. III, Springer-Verlag, New York, 1985.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

Coincidences for multiple summing mappings

G. Botelho * D. Pellegrino †

Let $\Pi_p(E;F)$ denote the space of all absolutely p-summing operators from E to F. It is well known that when E has cotype 2, then $\Pi_s(E;F) = \Pi_r(E;F)$ for every $1 \leq s \leq r \leq 2$, and when E has cotype $q > 2$, then

$$\Pi_s(E;F) = \Pi_r(E;F)$$

for every $1 \leq s \leq r < \frac{q}{q-1} := q'$ (see [1, Corollary 11.16]). In this note we show that multiple summing multulinear mappings present a very close behavior. Our results complements results due to David Pérez-García [4]. From now on $\Pi_p^n(E_1, \ldots, E_n; F)$ denotes the space of all multiple p-summing n-linear mappings from $E_1 \times \cdots \times E_n$ to F.

The next lemma is simple and will be used several times.

Lemma 0.1. *Let $(a_j^{(1)})_j, ..., (a_j^{(k)})_j \in l_p$, $1 \leq p < \infty$. Then $(a_{j_1}^{(1)} ... a_{j_k}^{(k)})_{j_1,\ldots,j_k} \in l_p$.*

Proposition 0.1. *If $E_1, ..., E_n$ have cotype 2, then*

$$\Pi_2^n(E_1, \ldots, E_n; F) \subset \Pi_1^n(E_1, \ldots, E_n; F).$$

Proof. Suppose that $A \in \Pi_2^n(E_1, \ldots, E_n; F)$. Let $(x_j^{(k)})_j \in l_1^w(E_k)$, $k = 1, ..., n$. Since E_k has cotype 2, from [2, Proposition 6],

$$l_1^w(E_k) = l_2 l_2^w(E_k).$$

So,

$$(x_j^{(k)})_j = (a_j^{(k)} y_j^{(k)})_j \in l_2 l_2^w(E_k).$$

Then, using the lemma and Hölder Inequality,

$$\left(A\left((x_{j_1}^{(1)})_{j_1}, ..., (x_{j_n}^{(n)})_{j_n}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n} = \left(A\left((a_{j_1}^{(1)} y_{j_1}^{(1)})_{j_1}, ..., (a_{j_n}^{(n)} y_{j_n}^{(n)})_{j_n}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n}$$
$$= \left(a_{j_1}^{(1)} ... a_{j_n}^{(n)} A\left((y_{j_1}^{(1)})_{j_1}, ..., (y_{j_n}^{(n)})_{j_n}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n} \in l_1.$$

□

Theorem 0.1. *If $E_1, ..., E_n$ have cotype 2, then*

$$\Pi_p^n(E_1, \ldots, E_n; F) = \Pi_r^n(E_1, \ldots, E_n; F)$$

for every $1 \leq p \leq r < 2$.

Proof. The inclusion $\subset$ is due to David-Pérez-García [4]. Suppose that $A \in \Pi_r^n(E_1, \ldots, E_n; F)$. Let $(x_j^{(k)})_j \in l_1^w(E_k)$, $k = 1, ..., n$. Since E_k has cotype 2, E_k has also cotype q with $r' > q > 2$.

From [2, Proposition 6],

$$l_1^w(E_k) = l_{r'} l_r^w(E_k).$$

So,

$$(x_j^{(k)})_j = (a_j^{(k)} y_j^{(k)})_j \in l_{r'} l_r^w(E_k).$$

Then, using the lemma and Hölder Inequality,

$$\left(A\left((x_{j_1}^{(1)})_{j_1}, ..., (x_{j_n}^{(n)})_{j_n}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n} = \left(A\left((a_{j_1}^{(1)} y_{j_1}^{(1)})_{j_1}, ..., (a_{j_n}^{(n)} y_{j_n}^{(n)})_{j_n}\right)\right)_{j_1,\ldots,j_n}$$

*Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlandia, Uberlandia, MG, Brazil, botelho@ufu.br
†Depto. de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, PB, Brasil, pellegrino.math@gmail.com

$$= \left(a_{j_1}^{(1)} ... a_{j_n}^{(n)} A \left((y_{j_1}^{(1)})_{j_1}, ..., (y_{j_n}^{(n)})_{j_n} \right) \right)_{j_1,...,j_n} \in l_1.$$

Hence $A \in \Pi_1^n(E_1, \ldots, E_n; F)$ and, from [4], we have $A \in \Pi_p^n(E_1, \ldots, E_n; F)$.□

The next corollary is an extension of [3, Teorema 4.31]:

Corollary 0.1. *If $E_1, ..., E_n$ have cotype 2, then*

$$\Pi_2^n(E_1, \ldots, E_n; F) \subset \Pi_p^n(E_1, \ldots, E_n; F), 1 \le p \le 2.$$

$$\Pi_p^n(E_1, \ldots, E_n; F) = \Pi_r^n(E_1, \ldots, E_n; F), 1 \le p \le r < 2.$$

In [4] it is shown that if $1 \le p < q \le 2$ and F has cotype 2, then

$$\Pi_p^n(E_1, \ldots, E_n; F) \subset \Pi_q^n(E_1, \ldots, E_n; F).$$

Using this result and Corollary 0.1, we have:

Theorem 0.2. *If $E_1, ..., E_n$ and F have cotype 2, then*

$$\Pi_p^n(E_1, \ldots, E_n; F) = \Pi_r^n(E_1, \ldots, E_n; F)$$

for every $1 \le p \le r \le 2$.

Theorem 0.3. *If $E_1, ..., E_n$ have cotype $q > 2$, then*

$$\Pi_s^n(E_1, \ldots, E_n; F) \subset \Pi_1^n(E_1, \ldots, E_n; F)$$

for every $1 \le s < \frac{q}{q-1}$.

Proof. Since $s < \frac{q}{q-1}$, we have $s' > q$. Suppose that $A \in \Pi_s^n(E_1, \ldots, E_n; F)$. Let $(x_j^{(k)})_j \in l_1^w(E_k)$, $k = 1, ..., n$. Since E_k has cotype $q > 2$, from [2, Proposition 6],

$$(x_j^{(k)})_j = (a_j^{(k)} y_j^{(k)})_j \in l_{s'} l_s^w(E_k).$$

The result is obtained by using Lemma 0.1 and Hölder Inequality. □

From the previous theorem and from the inclusion theorem in [4], it follows:

Corollary 0.2. *If $E_1, ..., E_n$ have cotype $q > 2$, then*

$$\Pi_s^n(E_1, \ldots, E_n; F) = \Pi_p^n(E_1, \ldots, E_n; F)$$

for every $1 \le s \le p < \frac{q}{q-1}$.

References

[1] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, Absolutely summing operators, Cambridge University Press 1995.

[2] J.L. Arregui and O. Blasco, (p, q)-summing sequences, J. Math. Anal. Appl. **274** (2002), 812-827.

[3] D. Pérez-García, Operadores multilineales absolutamente sumantes, Doctoral Thesis, Universidad Complutense de Madrid, 2003.

[4] D. Pérez-García, The inclusion theorem for multiple summing operators, Studia Math. **165** (2004), 275-290.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{o}}$ 2 Novembro 2008

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DO TEMPO DE EXISTÊNCIA DE UM SISTEMA PARABÓLICO SEMILINEAR ACOPLADO

F. DICKSTEIN * & M. LOAYZA †

Introdução. Consideramos soluções positivas do sistema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= u^a v^b \text{ in } (0,T)\times\mathbb{R}^N \\ v_t - \Delta v &= u^c v^d \text{ in } (0,T)\times\mathbb{R}^N \end{cases} \tag{0.1}$$

com dados iniciais $u(0) = u_0, v(0) = v_0$ in $\mathbb{R}^N$ onde $u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, $u_0, v_0 \geq 0$ e $a, b, c, d \geq 1$ satisfazem a seguinte condição

$$(b + 1 - d)(c + 1 - a) > 0. \tag{0.2}$$

É conhecido que o sistema (0.1) possui uma única solução clássica definida num intervalo maximal $[0, T)$ com $T \in (0, \infty)$. No caso que $T < \infty$ dizemos que a solução explode no tempo finito T. Este fenômeno tem sido estudado por vários autores [1], [2], [4], [6]. Em particular, Escobedo e Levine [6] provaram que se $N = 1$ com

$$a > 1 \text{ se } a + b \leq c + d,\; d > 1 \text{ se } a + b > c + d \text{ e } \min\{a + b, c + d\} \leq 3. \tag{0.3}$$

Então, para $(u_0, v_0) \neq (0, 0)$ temos que a solução de (0.1) (u, v) explode.

Estamos interessados em analisar o comportamento do tempo de existência da solução $w_\lambda = (u_\lambda, v_\lambda)(\lambda > 0)$ do sistema (0.1) com dados iniciais

$$u(0) = \lambda^{b+1-d}\psi_1, v(0) = \lambda^{c+1-a}\psi_2 \text{ in } \mathbb{R}^N \tag{0.4}$$

onde $\psi_i \in C_0(\mathbb{R}^N)(i = 1, 2)$ são funções não negativas tais que $\psi_i \in L^1(\mathbb{R}^N)$ ou $\psi_i \in J(\sigma)$ com $J(\sigma) = \{\psi \in C_0(\mathbb{R}^N); \psi \geq 0,$ existe $C > 0$ tal que $\liminf_{x\to\infty} |x|^\sigma \psi(x) \geq C\}$.

Analisamos o crescimento do tempo de existência de w_λ quando $\lambda \to 0$. Definimos $I(\sigma, l)] = \{\varphi \in C_0(\mathbb{R}), \varphi \geq 0, \lim_{x\to\infty} |x|^\sigma \varphi(x) = l\}$.

Teorema 1. *Suponha (0.2), (0.3) e sejam* $D = bc - (a - 1)(d - 1)$, $\beta_1 = 2\frac{b+1-d}{D}$ *e* $\gamma = \frac{c-a+1}{b-d+1}$. *Considere* $\varphi_1 \in I(\sigma_1, l_1), \varphi_2 \in I(\sigma_2, l_2)$ *com* $l_1, l_2 > 0$, $\sigma_1 < 1$ *e* $\sigma_2 = \gamma\sigma_1 < 1$. *Então* $\rho_1 = \beta_1 - \sigma_1 > 0$ *e* $\lim\limits_{\lambda\to 0} \lambda^{\frac{2(b+1-d)}{\rho_1}} T_\lambda = T(\sigma_1, l\sigma_2)$, *onde* $T(\sigma_1, l\sigma_2)$ *é o tempo de exlosão da solução de (0.1) com dados iniciais* $(|\cdot|^{-\sigma_1}, |\cdot|^{-\sigma_2})$.

Teorema 2. *Suponha (0.2), (0.3) e* $\varphi_1 \in I(\sigma_1, l)$ *com* $\sigma_1 < 1$, $\gamma\sigma_1 = 1$, $l > 0$ *e* $\varphi_2 \in L^1$, $\varphi_2 \geq 0$. *Suponha que* $M = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_2 > 0$. *Então* $\lim\limits_{\lambda\to 0} \lambda^{\frac{2(b+1-d)}{\rho_1}} T_\lambda = T(\sigma_1, M\delta_0)$, *onde* $T(\sigma_1, M\delta_0)$ *é o tempo de explosão da solução de (0.1) com dados iniciais* $(|\cdot|^{-\sigma_1}, M\delta_0)$.

Teorema 3. *Suponha (0.2), (0.3) e* $a + b = c + d < 3$. *Sejam* $\varphi_1, \varphi_2 \in L^1$, $\varphi_1, \varphi_2 \geq 0$ *tal que* $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_1 > 0$, $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_2 > 0$. *Então* $\lim\limits_{\lambda\to 0} \lambda^{\frac{2(b+1-d)}{\rho_1}} T_\lambda = T(\delta_0, \delta_0)$, *onde* $T(\delta_0, \delta_0)$ *é o tempo de explosão da solução de (0.1) com dados iniciais* $(\delta_0, M\delta_0)$.

Teorema 4. *Suponha (0.2), (0.3) e* $a + b = c + d$, $\varphi_1 \in I(1, l_1), \varphi_2 \in I(1, l_2)$ *para* $l_1, l_2 > 0$. *Então* w_λ *explode num tempo finito e* $\lim\limits_{\lambda\to 0}(h(\lambda^{-(b+1-d)})^{-2} T_\lambda = T(\delta_0, l\delta_0)$, *onde* $T(\delta_0, l\delta_0)$ *é o tempo de explosão da solução de (0.1) com dados iniciais* $(\delta_0, l\delta_0)$.

*Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM, RJ, Brasil, flavio@labma.ufrj.br
†Universidade Federal de Pernambuco, DM, PE, Brasil, e-mail miguel@dmat.ufpe.br

O problema não linear com dados iniciais não regulares. Analisamos a existência de soluções do problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= |u|^{a-1}|v|^{b-1}v \text{ in } (0,T)\times\mathbb{R}^N \\ v_t - \Delta v &= |u|^{c-1}u|v|^{d-1}v \text{ in } (0,T)\times\mathbb{R}^N \end{cases} \tag{0.5}$$

com dados iniciais $u(0) = u_0 \in E^{r_1,s_1}$ e $v(0) = v_0 \in E^{r_2,s_2}$. Denotamos $E^{r,s} = L^r + L^s (r \leq s)$ o espaço de Banach com a norma $\|u\|_{r,s} = \inf\limits_{u=u_1+u_2} \{\|u_1\|_r + \|u_2\|_s\}$. Usando argumentos similares aos usados em [1] e [3] é possível mostrar o seguinte resultado.

Proposição 1. *Sejam $a, b, c, d > 1$, $r_1, r_2 \geq 1$ tal que $bc - (a-1)(d-1) > 0$ e $\frac{a-1}{r_1} + \frac{b}{r_2} < \frac{2}{N}$, $\frac{c}{r_1} + \frac{d-1}{r_2} < \frac{2}{N}$. Então, existem $\eta \geq r_1, \xi \geq r_2$ tal que para $w_0 \in E^{r_1,s_1} \times E^{r_2,s_2}$ com $s_1 \leq \eta, s_2 \leq \xi$ existe $T > 0$ e uma única função $u \in C([0,T], E^{r_1,s_1} \times E^{r_2,s_2})$ a qual é a solução de (0.5) em $[0,T]$. Mais ainda, se $w_{0,n} \to w_0$ em $E^{r_1,s_1} \times E^{r_2,s_2}$, então para t pequeno $w_n(t) \to w(t)$ uniformemente quando $n \to \infty$.*

Observação. *Seja $\mathcal{M}$ o espaço das medidas finitas sobre $\mathbb{R}^N$. Com as hipôteses do resultado anterior (para $r_2 = s_2 = 1$). Se $w_0 \in E^{r,s} \times \mathcal{M}$ o problema (0.5) possui uma única solução $u \in C((0,T], E^{r_1,s_1} \times L^1)$ clássica tal que $u(t) \to u_0$ em $E^{r,s}$ e $v(t) \rightharpoonup v_0$ weak$-*$ em $\mathcal{M}$ quando $t \to 0$.*

Demonstração dos resultados. De (0.2) temos que $D = bc-(a-1)(d-1) > 0$. Definimos $\beta_1 = \frac{2(b+1-d)}{D}$, $\beta_2 = \frac{2(c+1-a)}{D}$, $\gamma = \frac{c-a+1}{b-d+1}$ e portanto, $\max\{\beta_1, \beta_2\} > 1$. Em particular, se $\sigma \leq 1$ satisfaz $\gamma\sigma_1 \leq 1$ então $\rho_1 = \beta_1 - \sigma_1 > 0$.

Para a demonstração dos resultados usamos o seguinte argumento de dilatação. Dada $w_\lambda = (u_\lambda, v_\lambda)$ solução de (0.1)-(0.4) e $\mu > 1$ a função $\tilde{w}_\mu = (\tilde{u}_\mu, \tilde{v}_\mu)$ definida por $\tilde{u}_\mu(x,t) = \mu^{\beta_1} u_\lambda(\mu x, \mu^2 t)$, $\tilde{v}_\mu(x,t) = \mu^{\beta_2} v_\lambda(\mu x, \mu^2 t)$ é também uma solução de (0.1) com dados iniciais $\tilde{w}_{0,\mu} = (\tilde{u}_{0,\mu}, \tilde{v}_{0,\mu})$ onde $\tilde{u}_{0,\mu}(x) = \mu^{\beta_1}\lambda^{b-d+1}\varphi_1(\mu x)$, $\tilde{v}_{0,\mu}(x) = \mu^{\beta_2}\lambda^{c-a+1}\varphi_2(\mu x)$.

Claramente, se w_λ explode em T_λ então $\tilde{w}_\mu$ explode em $\tilde{T}_\mu$ onde $T_\lambda = \mu^2\tilde{T}_\mu$.

Mostraremos somente o teorema 1. Um argumento similar pode ser usado para mostrar os outros teoremas. Consider μ tal que $\lambda^{b+1-d}\mu^{\beta_1-\sigma_1} = 1$ and $\tilde{w}_\mu = (\tilde{u}_\mu, \tilde{v}_\mu)$. Então $\tilde{u}_{0,\mu}(x) = \mu^{\sigma_1}\varphi_1(\mu x), \tilde{v}_{0,\mu}(x) = \mu^{\sigma_2}\varphi_2(\mu x)$. Como $\lambda \to 0$ temos que $\mu \to \infty$. Por outro lado, quando $\mu \to \infty$ temos que $\tilde{u}_{0,\mu} \to |\cdot|^{-\sigma_1}$ em E^{r_1,s_1} e $\tilde{v}_{0,\mu} \to l|\cdot|^{-\sigma_2}$ em E^{r_2,s_2} com r_1, s_2, r_2, s_2 satisfazendo as condições da Proposição 1. Portanto, existe uma solução $w(\sigma_1, l\sigma_2)$ definida num intervalo $[0, T(\sigma_1, l\sigma_2))$. De (0.3) temos que $T(\sigma_1, l\sigma_2) < \infty$. Usando a continuidade do tempo de existência(veja [2]) concluímos que $\tilde{T}_\mu = \mu^{-2}T_\lambda \to T(\sigma_1, l\sigma_2)$ quando $\mu \to \infty$.

Referências

[1] BREZIS, H.; CAZENAVE, T. *A nonlinear heat equation with singular initial data*, J. Anal. Math 68, (1996), 277-304.

[2] CHLEBÍK, M.; FILA, M. *From critical exponents to blow-up rates for parabolic problems*, Rend. Mat. Appl. Ser VII 19, (1999), 449-470.

[3] DICKSTEIN, F. *Stability of the blowup profile for radial solutions of the nonlinear heat equation*, J. Diff. Eq. 223 (2006), 303-328.

[4] DICKSTEIN, F.; LOAYZA, M. *Life span of solution of the weakly coupled parabolic system*, Z. Angew. Math. Phys. 59 (2008), 1-23.

[5] ESCOBEDO, M.; HERRERO, M. A. *Boundedness and blow-up for a semiliner reaction-diffusion system*, J. Diff. Eq. 89(1991), 176-202.

[6] ESCOBEDO, M.; LEVINE, H. A. *Critical blowup and global existence numbers for a weakly coupled system of a rection-diffusion equations*, Arch. Rat. Mech. Anal. 129 (1995), 47-100.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{0}}$ 2 Novembro 2008

CONJUNTO DE PONTOS ω-SEQUENCIALMENTE CONTÍNUOS

N. N. TOCHA *

Resumo

Dados E, F espaços de Banach, $N \in \mathbb{N}$ e $P : E \longrightarrow F$ um polinômio N-homogêneo contínuo, neste trabalho temos por objetivo estudar o conjunto dos pontos $x \in E$ tais que P é ω-sequencialmente contínuo em x. Tal conjunto será denotado por $C(P)$. Aqui, vamos apresentar algumas propriedades básicas do conjunto $C(P)$ e alguns exemplos de espaços de Banach E e F tais que cada polinômio N-homogêneo contínuo $P : E \longrightarrow F$ é tal que $C(P) = E$.

Este trabalho é parte da Tese de Doutorado [7] escrita sob a orientação da profa. Mary Lilian Lourenço, Instituto de Matemática e Estatística, IME-USP - São Paulo. Este trabalho se originou do estudo do artigo científico [2]. Como referências para as definições e resultados envolvendo polinômios sugerimos [3,6] e para a teoria de espaços de Banach [4].

O conjunto $C(P)$ têm as seguintes propriedades básicas:

Proposição 0.1. *Seja $P \in \mathcal{P}(^N E; F)$. As seguintes afirmações valem:*

1. *$C(P)$ é um subconjunto fechado de E.*
2. *Se $x \in C(P)$ então $\lambda x \in C(P)$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Em particular, se $C(P) \neq \emptyset$ então $0 \in C(P)$.*
3. *$C(P) = \cap_{j=0}^{N-1} \{x \in E : \Phi_j(x) \in \mathcal{P}_{wsc(0)}(^{N-j}E; F)\}$ com $\Phi_j(x)(y) = A(x^j, y^{N-j})$.*

Dado $r \in]1, \infty[$, vamos denotar por $\Big\lfloor r \Big\rfloor :=$ o menor inteiro maior ou igual a r. Pela proposição 0.1, segue o seguinte exemplo:

Exemplo 0.1. *Sejam $p, q \in\ ]1, \infty[$ com $q < p$ e consideremos $N = \Big\lfloor \frac{p}{q} \Big\rfloor$. Então*

1. *Para cada $1 \leq j \leq (N-1)$ e cada $P \in \mathcal{P}(^j l_p; l_q)$ tem-se que $C(P) = l_p$.*
2. *Para cada $P \in \mathcal{P}(^N l_p; l_q)$ ou $C(P) = \emptyset$ ou $C(P) = l_p$.*
3. *Para cada $P \in \mathcal{P}(^{N+1} l_p; l_q)$ ou $C(P) = \emptyset$ ou $C(P)$ é um subespaço.*

A próxima proposição nos auxiliará a exibir mais alguns exemplos.

Proposição 0.2. *Sejam E, F espaços de Banach e $N \in \mathbb{N}$. Se $\mathcal{P}(^N E; F) = \mathcal{P}_{wsc}(^N E; F)$ então $\mathcal{P}(^N E) = \mathcal{P}_{wsc}(^N E)$. Reciprocamente, se F é de Schur, a igualdade $\mathcal{P}(^N E) = \mathcal{P}_{wsc}(^N E)$ implica que $\mathcal{P}(^N E; F) = \mathcal{P}_{wsc}(^N E; F)$.*

Exemplo 0.2. *Dado $p \in\ ]1, \infty[$ tomemos $N = \lfloor p \rfloor$. Para cada $r \leq N-1$, temos que $\mathcal{P}(^r l_p; l_1) = \mathcal{P}_{wsc}(^r l_p; l_1)$. Em particular, $\mathcal{P}(^r l_q; l_1) = \mathcal{P}_{wsc}(^r l_q; l_1)$ para todo $q \geq p$ e cada $r \leq N-1$. Também, temos que $\mathcal{P}_{wsc}(^N l_p; l_1) = \mathcal{P}_{wsc(0)}(^N l_p; l_1)$.*

Agora, suponhamos que F é uma álgebra de Banach. Então, dados polinômios $P \in \mathcal{P}(^N E; F)$ e $Q \in \mathcal{P}(^M E; F)$, temos que $P \cdot Q \in \mathcal{P}(^{N+M} E; F)$ onde $(P \cdot Q)(x) := P(x) \cdot Q(x)$ para cada $x \in E$. E neste caso, vale:

$$\Big[C(P) \cap C(Q)\Big] \cup \Big[C(P) \cap P^{-1}(0)\Big] \cup \Big[C(Q) \cap Q^{-1}(0)\Big] \subset C(P \cdot Q). \tag{0.1}$$

Em geral, não temos a igualdade, como mostra o seguinte exemplo:

*Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil, neusatocha@yahoo.com.br

Exemplo 0.3. *Sejam* $p, q \in]1, \infty[$ *com* $p > q$ *consideremos* $N = \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor$. *Dados* $(\lambda_i)_i \in l_\infty \setminus c_0$ *e* $(\xi_i)_i \in l_1$ *sejam* $P, Q : l_p \longrightarrow l_q$ *os polinômios* N*-homogêneos definidos por* $P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i x_i^N e_i$ *e* $Q(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i^N e_i$ *para cada* $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \in l_p$. *Então* $C(P) = l_p$, $C(Q) = \emptyset$ *e* $C(P \cdot Q) = l_p$.

Com o auxílio da fórmula 0.1, temos a seguinte proposição:

Proposição 0.3. *Sejam* E, F *espaços de Banach. Suponhamos que existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $\mathcal{P}(^r E; F) = \mathcal{P}_{wsc}(^r E; F)$ $\forall r < N$ *e* $\mathcal{P}(^N E; F) \neq \mathcal{P}_{wsc}(^N E; F)$. *Então:*

1. *Para cada* $M \in \mathbb{N}$ *e cada* $Q \in \mathcal{P}_{wsc}(^M E)$ *existe* $R \in \mathcal{P}(^{M+N} E; F)$ *tal que* $C(R) = Q^{-1}(0)$.
2. *Dado um hiperplano* H, *para cada* $M \in \mathbb{N}$ *existe* $Q \in \mathcal{P}(^{N+M} E; F)$ *tal que* $C(Q) = H$.
3. *Dados* $H_1, \ldots, H_M$ *hiperplanos de* E *existe* $Q \in \mathcal{P}(^{N+M} E; F)$ *tal que* $C(Q) = H_1 \cup \ldots \cup H_M$.
4. *Se* $N = 1$, *então dados* $H_1, \ldots, H_N$ *hiperplanos de* E *existe* $P \in \mathcal{P}(^{N+1} E; F)$ *tal que* $C(Q) = H_1 \cup \ldots \cup H_N$.

Exemplo 0.4.
1. *Sejam* $p \in]1, \infty[$, $M \in \mathbb{N}$ *e* $P \in \mathcal{P}_{wsc}(^M l_p)$. *Dado* $Q_1 \in \mathcal{P}(^{\lfloor p \rfloor} l_p; l_1)$, *para o polinômio* $R_1 = P \cdot Q_1$ *temos que ou* $C(R_1) = l_p$ *ou* $C(R_1) = P^{-1}(0)$. *Se* $p > q$, *dado* $Q_2 \in \mathcal{P}\left(^{\lfloor \frac{p}{q} \rfloor} l_p; l_q\right)$, *para o polinômio* $R_2 = P \cdot Q_2$ *temos que ou* $C(R_2) = l_p$ *ou* $C(R_2) = P^{-1}(0)$.
2. *Dado um subespaço fechado* $S \subset l_p$, $p \in]q, \infty[$, *para cada* $M \in \mathbb{N}$ *existe uma seqüência* $(Q_i)_i \subset \mathcal{P}(^{\lfloor p \rfloor + M} l_p; l_q)$ *tal que* $S = \cap_{i=1}^{\infty} C(Q_i)$.

Exemplo 0.5. *Sejam* $p \in]1, \infty[$, $(\lambda_k)_k \in l_\infty$ *e* $N \in \mathbb{N}$.

1. *Para o polinômio* $P : l_p \longrightarrow l_p$ *definido por* $P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i^N e_i$ *para cada* $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \in l_p$, *temos que* $C(P) = \emptyset$ *se* $(\lambda_k)_k \in l_\infty \setminus c_0$ *e se* $(\lambda_k)_k \in l_p$ *então* $C(P) = l_p$.
2. *Se* $N \geq p$, *para o polinômio* $P : l_p \longrightarrow l_1$ *definido por* $P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i^N e_i$ *para cada* $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \in l_p$ *temos que* $C(P) = \emptyset$ *se* $(\lambda_k)_k \in l_\infty \setminus c_0$ *e se* $(\lambda_k)_k \in l_1$ *então* $C(P) = l_p$.

Observamos que em um espaço de Banach E com uma base de Schauder incondicional e normalizada $(x_n)_n$, dados $(\lambda_k)_k \in l_1 \setminus c_{00}$ e $N \in \mathbb{N}$, para o polinômio $P : E \longrightarrow E$ definido por $P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \alpha_k^N x_k$ para cada $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \in E$ temos que $C(P) = E$.

Referências

[1] ALENCAR, R.; FLORET, K. - *Weak-strong continuity of multilinear mapping and the Pelczyński-Pitt theorem*, J. Math. A. Appl. 206, $n^{\underline{o}}$ 2, 532-546, 1997.

[2] ARON, R. M.; DIMANT, V.R. - *Sets of weak sequential continuity for polynomials*, Indag. Math. 13, $n^{\underline{o}}$ 3, 287-299, 2002.

[3] DINEEN, S. - *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Springer-Verlag, 1999.

[4] LINDENSTRAUSS, J.; TZAFIRI, L. - *Classical Banach Spaces I and II*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, London, 1996.

[5] LOURENÇO, M. L.; MORAES, L. A. - *A class of polynomials from Banach spaces into Banach algebras,* Publ. Res. Inst. Math. Sci. 37, $n^{\underline{o}}$ 4, 521-529, 2001.

[6] MUJICA, J. - *Complex Analysis in Banach Spaces*, North-Holland Math. Studies, vol. 120, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[7] TOCHA, N. N. - *Zeros de Polinômios e Propriedades Polinomiais em Espaços de Banach*, Tese de Doutorado, IME-USP, 2006.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

CONSIDERAÇÕES SOBRE A ANÁLISE DE SENSIBILIDADE TOPOLÓGICA EM DOMÍNIOS PERTURBADOS POR FUROS COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE DIRICHLET

J. ROCHA DE FARIA * & A. A. NOVOTNY †

A Análise de Sensibilidade Topológica fornece uma expansão assintótica, denominada expansão assintótica topológica para uma função custo associada a uma equação de estado definida sobre um domínio que sofre uma perturbação singular infinitesimal, como a introdução de furos, por exemplo. Para fixar a notação, seja um aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com fronteira suave $\partial\Omega$, e considere a criação de um furo $\mathcal{H}_\varepsilon$ de raio ε e centro no ponto $\widehat{\mathbf{x}} \in \Omega$. Tem-se, portanto, o domínio perturbado $\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash \overline{\mathcal{H}_\varepsilon}$, cuja fronteira é denotada por $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial\mathcal{H}_\varepsilon$. Admitindo-se que a função custo ψ admite a expansão assintótica

$$\psi(\Omega_\varepsilon) = \psi(\Omega) + f_1(\varepsilon) D_T\psi + o(f_1(\varepsilon)) \; , \tag{0.1}$$

onde $f_1(\varepsilon)$ é uma função suave, tal que $f_1(\varepsilon) \to 0$, quando $\varepsilon \to 0^+$, o termo $D_T\psi$ é definido como a derivada topológica de ψ, e fornece a sensibilidade para a criação da perturbação em cada ponto em que está definido. A principal propriedade desejável da derivada topológica é que ela possa ser definida *a priori,* através da solução da equação de estado (e, possivelmente, da solução de uma equação auxiliar), considerada apenas sobre o domínio original (não perturbado) de definição do problema. Tal propriedade, é de fundamental importância do ponto de vista do custo computacional e credencia a derivada topológica como uma poderosa ferramenta a ser aplicada em Otimização Topológica [7], Problemas Inversos [1] e Processamento de Imagens [5], por exemplo. Historicamente, o conceito de derivada topológica foi definido pela primeira vez em Sokolowski & Zochowski [7], considerando a criação de furos com condição de contorno de Neumann homogênea em sua fronteira (caso de Neumann). No trabalho de Céa et al. [2], esse conceito foi generalizado para furos com condição de contorno de Dirichlet (caso de Dirichlet) e foi proposta uma técnica, *domain truncation method,* para o seu cálculo. No entanto, esta metodologia introduz um parâmetro artificial R na derivada topológica no caso de Dirichlet, cuja influência tem sido desconsiderada na literatura, causando uma discrepância na expansão assintótica topológica. O objetivo principal desse trabalho é analisar as consequências da aproximação adotada. Em particular, utiliza-se a metodologia proposta em Novotny et al. [6], *topological-shape sensitivity method,* e calcula-se a derivada topológica para a energia potencial total associada ao Problema de Laplace bidimensional, para o caso de Dirichlet, considerando-se um furo circular e uma expansão assintótica alternativa para a solução da equação de estado. Assim, a função custo é dada por

$$\psi(\Omega_\varepsilon) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\varepsilon} \|\nabla u_\varepsilon\|^2 - \int_{\Gamma_N} q u_\varepsilon \; , \tag{0.2}$$

onde u_ε é a solução do seguinte problema variacional associada ao domínio perturbado Ω_ε: encontre $u_\varepsilon \in \mathcal{U}_\varepsilon$, tal que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla\eta + \int_{\Gamma_N} q\eta = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{V}_\varepsilon \; . \tag{0.3}$$

Em particular, o conjunto das funções admissíveis $\mathcal{U}_\varepsilon$ e o espaço das variações admissíveis $\mathcal{V}_\varepsilon$ são definidos, como

$$\mathcal{U}_\varepsilon = \{u_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon) : u_\varepsilon|_{\Gamma_D} = \varphi, \; u_\varepsilon|_{\partial\mathcal{H}_\varepsilon} = 0\}, \; \mathcal{V}_\varepsilon = \{\eta \in H^1(\Omega_\varepsilon) : \eta|_{\Gamma_D} = 0, \; \eta|_{\partial\mathcal{H}_\varepsilon} = 0\}, \tag{0.4}$$

onde Γ_D e Γ_N são as fronteiras de Dirichlet e Neumann, tais que $\partial\Omega = \overline{\Gamma_D \cup \Gamma_N}$, com $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \varnothing$. Além disso, φ e q são a temperatura e o fluxo de calor prescritos sobre Γ_D e Γ_N, respectivamente. Com estes elementos, tem-se:

*DE UFPB, PB, Brasil, jairo@de.ufpb.br
†LNCC MCT, RJ, Brasil, novotny@lncc.br

- a expansão assintótica topológica encontrada na literatura corrente:

$$\psi(\Omega_\varepsilon) = \psi(\Omega) + \frac{\pi}{\log(R/\varepsilon)} u\left(\widehat{\mathbf{x}}\right)^2 + o(\varepsilon) \ , \tag{0.5}$$

onde é adotada a aproximação $\frac{1}{\log(R/\varepsilon)} \approx -\frac{1}{\log \varepsilon}$ (veja, por exemplo, P. Guillaume & K. Sid Idris [3]).

- a expansão proposta no presente trabalho:

$$\psi(\Omega_\varepsilon) = \psi(\Omega) - \frac{\pi}{\log \varepsilon + 2\pi \mathcal{G}(\widehat{\mathbf{x}})} u\left(\widehat{\mathbf{x}}\right)^2 + o(\varepsilon) \ , \tag{0.6}$$

onde foi adotada a expansão assintótica (Kozlov & Maz'ya [4])

$$u_\varepsilon\left(\mathbf{x}\right) = u\left(\mathbf{x}\right) - u\left(\widehat{\mathbf{x}}\right) \left(\frac{1}{2\pi} \log \varepsilon + \mathcal{G}(\widehat{\mathbf{x}})\right)^{-1} \left(12\pi \log \|\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}\| + \mathcal{G}\left(\mathbf{x}\right)\right) + \widetilde{u}_\varepsilon \ , \tag{0.7}$$

sendo u a solução de (0.3) para $\varepsilon = 0$ (sem furo) e $\mathcal{G}\left(\mathbf{x}\right)$ a solução do seguinte problema variacional auxiliar: encontre $\mathcal{G} \in \mathcal{V}$, tal que

$$\int_\Omega \nabla \mathcal{G} \cdot \nabla \eta + \int_{\Gamma_N} h\eta = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{W} \ , \tag{0.8}$$

onde o conjunto das funções admissíveis $\mathcal{V}$ e o espaço das variações admissíveis $\mathcal{W}$ são definidos como

$$\mathcal{V} = \{\mathcal{G} \in H^1(\Omega) : \mathcal{G}|_{\Gamma_D} = g\} \quad e \quad \mathcal{W} = \{\eta \in H^1(\Omega) : \eta|_{\Gamma_D} = 0\} \ . \tag{0.9}$$

As funções g e h são dadas por

$$g(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \log \|\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}\| \qquad e \qquad h(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}}{\|\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}\|^2} \cdot \mathbf{n} \ , \tag{0.10}$$

e $\widetilde{u}_\varepsilon$ satisfaz a estimativa $|\widetilde{u}_\varepsilon|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon$, com C independente de ε.

Como resultado, obtém-se uma expressão mais geral da derivada topológica e demonstra-se sua dependência implícita, através da solução $\mathcal{G}(\widehat{\mathbf{x}})$ de um problema-auxiliar, com a posição $\widehat{\mathbf{x}}$ onde a perturbação é introduzida (i.e., a derivada topológica não pode ser obtida *a priori*, neste caso). A presente metodologia tem a anterior como caso particular, quando o domínio é um disco de raio R com centro no furo $B_R\left(\widehat{\mathbf{x}}\right)$.

References

[1] S. Amstutz. *Aspects théoriques et numériques en optimisation de forme topologique.* PhD. thesis, Institut National des Sciences Appliqués de Toulouse, France, 2003.

[2] J. Céa, S. Garreau, Ph. Guillaume & M. Masmoudi. The Shape and Topological Optimizations Connection. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 188:713-726, 2000.

[3] P. Guillaume & K. Sid Idris. The topological asymptotic expansion for the Dirichlet problem. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 41(4):1042–1072, 2002.

[4] V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya and A.B. Movchan. *Asymptotic Analysis of Fields in Multi-Structures.* Clarendon Press, Oxford, 1999.

[5] I. Larrabide. *Processamento de imagens via derivada topológica e suas aplicações na modelagem e simulação computacional do sistema cardiovascular humano.* Tese de Doutorado, LNCC - MCT, Petrópolis, Brasil, 2007.

[6] A.A. Novotny, R.A. Feijóo, C. Padra & E. Taroco. Topological Sensitivity Analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 192:803-829, 2003.

[7] J. Sokolowski & A. Żochowski. On the Topological Derivative in Shape Optimization. *SIAM J. Control Optim.* 37(4):1251-1272, 1999.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{o}}$ 2 Novembro 2008

COTAS PARA O PRIMEIRO AUTOVALOR DO p-LAPLACIANO

H. BUENO * & G. ERCOLE † & A. ZUMPANO ‡

Aplicando o teorema do ponto fixo de Schauder, obtemos soluções radiais positivas para o problema de Dirichlet $-\Delta_p u = \mathrm{w}(x)f(u)$, em que $\Delta_p = \mathrm{div}\big(|\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\big)$ $(p > 1)$ é o p-Laplaciano em um domínio limitado e suave $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$, w é uma função peso e f é uma não-linearidade.

Condições assintóticas sobre f são substituidas por cotas locais que devem ser satisfeitas pela não-linearidade contínua f. Desse modo, estendemos resultados anteriores obtidos para domínios radiais [1, 2]. Mais precisamente, f satisfaz as condições locais

$$\begin{cases} 0 & \leq f(u) \leq k_1 M^{p-1} \quad \text{para} \quad 0 \leq u \leq M; \\ k_2\delta^{p-1} & \leq f(u) \qquad\qquad\quad \text{para} \quad \delta \leq u \leq M, \end{cases} \tag{0.1}$$

em que $0 < \delta < M$ e $k_1(\Omega, \mathrm{w}) = k_1 < k_2 = k_2(x_0, R)$ são constantes positivas (que dependem apenas de w e Ω) e serão definidas no decorrer da apresentação. Uma escolha ótima para a constante k_2 é obtida ao se tomar uma bola com centro no ponto arbitrário $x_0 \in \Omega$ e raio R, o maior raio possível, de modo que $B_R(x_0) \subset \Omega$.

Geometricamente, as condições sobre f significam que, no plano u-v, o gráfico de $v = f(u)$ permanece abaixo da reta horizontal $v = k_1 M^{p-1}$ para $u \in [0, M]$ e passa através do "túnel" Γ definido por

$$\Gamma = \big\{(u, v)\,:\, \delta \leq u \leq M, \quad k_2\delta^{p-1} \leq v \leq k_1 M^{p-1}\big\}. \tag{0.2}$$

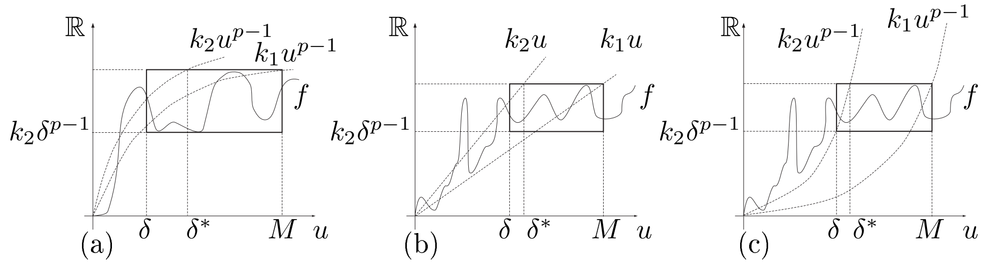

Figura 1: A função f passa através do"túnel" Γ. O gráfico (a) ilustra o caso $p < 2$, (b) o caso $p = 2$ e (c) o caso $p > 2$.

Para $B_R(x_0) \subset \Omega$ é arbitrário, provamos

$$k_1(\Omega, \mathrm{w}) < \lambda_p(\Omega, \mathrm{w}) < k_2(x_0, R), \tag{0.3}$$

em que $\lambda_p(\Omega, \mathrm{w})$ é o primeiro autovalor do p-Laplaciano.

No caso especial em que $\mathrm{w} \equiv 1$ e $\Omega = B_S$ (bola de raio $S > 0$), comparamos nossa cota inferior k_1 com a cota fornecida pela constante de Cheeger $h_1(B_S)$ (veja [4]); resulta que k_1 oferece uma cota inferior mais acurada do que $h_1(B_S)$ para uma larga gama de valores de p.

Também estudamos o comportamento assintótico de k_1 e k_2 quando $p \to 1$ e $p \to \infty$.

A apresentação é baseada em artigo aceito para publicação na revista "Advanced Nonlinear Studies".

*Departamento de Matemática da UFMG, Brasil, hamilton@mat.ufmg.br
†Departamento de Matemática da UFMG, Brasil, grey@mat.ufmg.br
‡Departamento de Matemática da UFMG, Brasil, zumpano@mat.ufmg.br

Referências

[1] G. Ercole e A. Zumpano – Existence of positive radial solutions for the n-dimensional p-Laplacian. *Nonlinear Analysis* **44** (2001), 355-360.

[2] G. Ercole e A. Zumpano – Positive solutions for the p-Laplacian in annuli. *Proc. Roy. Soc. Edin.* **132A** (2002), 595-610.

[3] H. Bueno, G. Ercole e A. Zumpano – Positive solutions for the p-Laplacian and bounds for its first eigenvalue, aceito para publicação em "Advanced Nonlinear Studies".

[4] B. Kawohl e V. Fridman – Isoperimetric estimates for the first eigenvalue of the p-Laplace operator and the Cheeger constant. *Comm. Math. Univ. Carol.* **44** (2003), 659-667.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{0}}$ 2 Novembro 2008

DECOMPOSIÇÃO DA EQUAÇÃO DE BELLMAN

O. S. JESUS [*] & L. BARBANTI [†]

A equação diferencial parcial, básica da Programação Dinâmica, conhecida como equação de Bellman, associada a equação diferencial $\dot{x} = f(x, u, t)$, com a variável de estado x e variável de controle u, é dada por

$$0 = \frac{\partial S}{\partial t}(t)x + \min_{u \in \mathcal{U}} \{G[x, u, t] + grad\,(S(t)x) \cdot f(x, u, t)\} \tag{0.1}$$

A complexidade de (0.1) é considerada como um dos fatores de maior dificuldade para a própria aplicação da Programação Dinâmica.

Neste trabalho decompomos a equação de Bellman através de um esquema convergente de equações diferenciais e deste esquema transferimos os problemas de (0.1) para as equações diferenciais ordinárias. Como a variável de controle u é em geral regrada (isto é, com descontinuidades apenas de primeira espécie) [ver Princpio Bang-Bang] o ambiente que usaremos para sintetizar tal esquema é o das Equações Integrais de Volterra-Stieltjes (com variável regrada) considerando a integral de Dushnik e o conceito associado de semivariação limitada.

O contexto em que colocamos o problema permite que liberemos o seu estudo em espaços de Banach em geral.

O Teorema a seguir, conhecido como processo de linearização de Carlemann é essencial para decompor a equação de Bellman (0.1) numa sequência de equações cujas soluções constituem uma sequência que converge para uma solução de (0.1).

Teorema 0.1. *((1.7) de [1]) Seja y, satisfazendo*

$$y(c, s + t) = y(y(c, s), t), \tag{0.2}$$

solução da equação diferencial ordinária não-linear

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = g(y(t)) \\ y(0) = c, \end{cases} \tag{0.3}$$

onde x, c e g são vetores em $\mathbb{R}^n$. Então localmente as soluções de (0.3) são as soluções da equação diferencial parcial linear

$$\frac{\partial y}{\partial t}(t) = \sum_{i=1}^{n} g_i(c) \frac{\partial y}{\partial c_i}, \tag{0.4}$$

onde g_i e c_i são, respectivamente, as i-ésimas componentes de g e c.

Teorema 0.2. *(Corolário 1.4.2 de [2]) A equação*

$$\frac{dU}{dt} = AU(v)(t)x + F(v)(t)x, \qquad 0 \leq t \leq T,$$

onde

$$A : D(A) \subset G^-([0, c_1], G^-([0, T], Y)) \to G^-([0, c_1], G^-([0, T], Y)),$$

para algum espaço de Banach Y e $U, F \in G^-([0, c_1], G^-([0, T], Y))$, é equivalente a uma equação integral de Volterra-Stieltjes

$$U(v)(t)x - U(v)(0)x = \int_0^t \cdot d_s K(t, s) \cdot U(v)(s)x + G(v)(t)x,$$

[*]Universidade Federal Rural do Semi-rido , DCA, RN, Brasil, odirlei@ufersa.edu.br
[†]Universidade de São Paulo, IME-USP, SP, Brasil, barbanti@ime.usp.br

onde

$$K(t,s) = \begin{cases} (s-t)A, & se \quad 0 \le s \le t \le T \\ 0, & se \quad 0 \le t \le s \le T \end{cases}$$

e $G(v)(s)x = \int_0^s F(v)(\tau)x d\tau$.

O teorema a seguir é o principal resultado deste trabalho.

Teorema 0.3. *Consideremos a equação de Bellman*

$$-\frac{\partial S}{\partial t}(t)x = \min_{u \in \mathcal{U}} \left\{ G(x,u,t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_i}(t)x \cdot f_i(x,u,t) \right\} \tag{0.5}$$

associada ao problema de minimizar o custo funcional $Q = v_T + \int_0^T G(x,u,t)dt$ *para um sistema com variável de estado* $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ *e controle* $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))$ *sujeitos as restrições*

$$x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n,$$
$$u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$$

e dinâmica $\dot{x} = f(x,u,t)$. *Se* $S \in G^-([0,c_1], G^-([0,T],Y))$ *e satisfaz (0.3) então (0.5) é equivalente a equação integral de Volterra-Stieltjes homogênea*

$$S(v)(t)x - v_T = \int_0^t \cdot d_s K_n(t,s) \cdot S(v)(s)x$$

onde

$$[K_n(t,s)U](v)(s)x = (t-s)\left[\frac{n^2}{\theta}\int_0^v U(\psi)(t)xe^{\frac{n}{\theta}(v-\psi)}d\psi + nU(v)(t)x\right],$$

com $U \in G^-([0,c_1], G^-([0,T],Y))$, $t \in [0,T]$, $x \in \mathcal{X}$, *e* $v \in [0,c_1]$.

Prova: Segue do Teorema 0.1 que (0.5) pode ser escrita como

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = AS(v)(t)x \\ S(0)x = S(v_T)(0)x \end{cases}$$

onde $A = \theta\frac{\partial}{\partial v} : D(A) \subset G^-([0,c_1], G^-([0,T],Y)) \to G^-([0,c_1], G^-([0,T],Y))$ com $\theta = f(S(v_T)(0))$.

Considerando $A_n := A\left[I - \frac{1}{n}A\right]^{-1} \in L(G^-([0,c_1], G^-([0,T],Y)))$, $\quad n \in \mathbb{N}$, temos, pelo Teorema 0.2, que a equação

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A_n Sx(v)(t)x, & 0 \le t \le T, \quad x \in \mathcal{X}, \\ S(0)x = v_T, & v_T \in [0,c_1] \end{cases}$$

é equivalente a equação integral de Volterra-Stieltjes homogênea

$$S(v)(t)x - v_T = \int_0^t \cdot d_s K_n(t,s) \cdot S(v)(s)x,$$

onde

$$[K_n(t,s)U](v)(s)x = (t-s)\left[\frac{n^2}{\theta}\int_0^v U(\psi)(t)xe^{\frac{n}{\theta}(v-\psi)}d\psi + nU(v)(t)x\right],$$

com $U \in G^-([0,c_1], G^-([0,T],Y))$, $t \in [0,T]$, $x \in \mathcal{X}$ e $v \in [0,c_1]$. ■

Referências

[1] LARSON, R. E, CASTI, J. L. - *Principles of dynamic programming.*, Part I. Basic analytic and computational methods. Hardcover, 1981.

[2] JESUS, O. S. - *Decomposição da equação de Bellman.*, PhD Thesis, Thesis, Universidade de São Paulo, 2007.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

DIVERGENCE THEOREM VERSUS FUBINI'S THEOREM FOR A GENERAL INTEGRATION PROCESS

P. L. KAUFMANN *, Š. SCHWABIK †& R. BIANCONI ‡

The problem of defining an integration process which recovers any derivable function defined on a compact one-dimensional interval from it's derivative can be interpreted, for more dimentions, as defining an integration process which is able to integrate, on a compact multi-dimentional interval, the divergence of all differentiable functions. For the one-dimensional case, we have the Denjoy-Perron-Kurzweil-Henstock integral (or shortly, the generalized Riemann integral, using Bartle's notation) satisfying this property. Several attempts were made in order to extend the definition for more dimensions, see for example [1], [2], [4] and [5].

In [2], Jarník, Kurzweil and Schwabik have presented a differentiable function defined in $\mathbb{R}^2$ which has on $[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ an integrable partial derivative in a certain sense, but cannot fulfill Fubini's Theorem when we consider on $[a_1, b_1]$ and $[a_2, b_2]$ the generalized Riemann integral. We shall show that this example can be used to prove a more general result, Proposition 0.1 below. The notation *reasonable integral* will be used; we omit from this abstract the formal definition since it is quite delicate and long, and ask the reader to have in mind only that a reasonable integral in $[a, b]$ maps some set of real-valued functions defined in $[a, b]$ into real numbers, satisfies additivity with respect to intervals, is linear, generates continuous primitives for each integrable function, and integrates all Riemann integrable functions with coinciding values. Riemann, Lebesgue and generalized Riemann integrals are all reasonable.

Proposition 0.1. *Let $I = [a, b] \subset \mathbb{R}^2$ be an interval, and let T, S_1 and S_2 be reasonable integrals in $[a, b]$, $[a_1, b_1]$ and $[a_2, b_2]$, respectively. If for each differentiable function $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ we have that $divG$ is T-integrable in $[a, b]$ and*

$$(T)\int_I divG = (L)\int_{\partial I} G \cdot N,$$

then there exists a T-integrable function $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ with $(T)\int_I F = 0$ and $(S_1)\int_{a_1}^{b_1} F(x, y)\, dx = 0$ for each $y \in [a_2, b_2]$, but such that $(S_2)\int_{a_2}^{b_2} F(x, y)\, dy$ does not exist for almost every $x \in [a_1, b_1]$.

In particular, each reasonable integral defined in $[a, b] \subset \mathbb{R}^2$ which satisfies the Divergence Theorem for every differentiable function $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fails to satisfy Fubini's Theorem, at least in it's most general form, when in $[a_1, b_1]$ and $[a_2, b_2]$ the generalized Riemann integral is considered.

Pfeffer discussed the incompatibility of having an integral that satisfies both Divergence and Fubini's Theorems when searching for extensions of the generalized Riemann integral to more than one dimension, for example in [6]. Here we present an independent approach, using the notation of Schwabik [8].

*Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brazil, plkaufmann@yahoo.com.br
†Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague, Czech Republic, schwabik@math.cas.cz
‡Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brazil, bianconi@ime.usp.br

Bibliography

[1] Jarník, J., Kurzweil, J. - *A nonabsolutely convergent integral which admits C^1-transformations*, Časopis Pěst. Mat., 109:157–167, 1984.

[2] Jarník, J., Kurzweil, J., Schwabik, Š. - *On Mawhin's approach to multiple nonabsolutely convergent integral,*, Časopis Pěst. Mat., 108:356–380, 1983.

[3] Karták, K. - *K teorii vícerozměrného integrálu*, Časopis Pěst. Mat., 80:400–414, 1955.

[4] Kaufmann, P. L., Kreiči, P., Schwabik, Š., Bianconi, R. - *Non-absolute two-dimensional integration with triangle-based partitions*, preprint.

[5] Mawhin, J. - *Generalized multiple Perron integrals and the Green-Goursat theorem for differentiable vector fields*, Czechoslovak Math. J. *31 (106)* (1981), no. 4, 614–632.

[6] Pfeffer, W. F. - *Derivation and Integration*, Cambridge Univ. Press (2001)

[7] Saks, S. - *Theory of the Integral*, Dover Publ., Inc. (1964)

[8] Schwabik, Š. - *General integration and extensions*, Preprint

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{0}}$ 2 Novembro 2008

DUALIDADE DE ESPAÇOS DE HARDY COM VALORES VETORIAIS

F. J. BERTOLOTO *

1 Introdução

Apresentamos inicialmente algumas definições. Para isto, introduzimos os símbolos $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ e $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ nomeados disco aberto e circunferência unitária do plano complexo, respectivamente. Consideramos F um espaço de Banach com dual topológico F'. A expressão $\mathcal{H}(\Delta; F)$ representa o espaço das funções $f : \Delta \longrightarrow F$ que são holomorfas.

Definição 1.1. *Seja $1 \le p \le \infty$. Denotamos por $L^p(T; F)$ o espaço de Banach das (classes de) funções $\tilde{f} : T \longrightarrow F$ que são mensuráveis com respeito à medida de Lebesgue em T satisfazendo $\|\tilde{f}\|_p < \infty$, onde*

$$\|\tilde{f}\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f(e^{i\theta})\|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \le p < \infty)$$

$$\|\tilde{f}\|_\infty = \text{ess sup} \, \|\tilde{f}(e^{i\theta})\|$$

sendo que esta última expressão, denominada supremo essencial, representa o valor

$$\inf\{ \sup_{0 \le \theta \le 2\pi} \|\tilde{g}(e^{i\theta})\|; \tilde{g} \in C_{\tilde{f}} \}$$

onde $C_{\tilde{f}}$ é o conjunto das funções $\tilde{g}$ mensuráveis com valores em F que coincidem com $\tilde{f}$ quase-sempre.

Definição 1.2. *Para cada $f \in \mathcal{H}(\Delta; F)$, definimos*

$$M_p[f; r] = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f(re^{i\theta})\|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}}$$

onde $0 \le r < 1$ e $1 \le p < \infty$.

Definição 1.3. *Denotamos por $H^p(\Delta; F)$, $1 \le p < \infty$, o espaço de todas as funções $f \in \mathcal{H}(\Delta; F)$ tais que $\{M_p[f; r]\}_{0 \le r < 1}$ é um conjunto limitado como função de r. Escrevemos*

$$\|f\|_p = \sup_{0 \le r < 1} M_p[f; r]$$

Definição 1.4. *Usamos o símbolo $H^\infty(\Delta; F)$ para denotar o espaço das funções $f \in \mathcal{H}(\Delta; F)$ onde*

$$\sup_{|z| < 1} \|f(z)\| < \infty$$

Os espaços $H^p(\Delta; F)$, $1 \le p \le \infty$, são espaços de Banach denominados espaços de Hardy.

Definição 1.5. *Para $1 \le p \le \infty$, denotamos os espaços*

$$H^p_w(\Delta; F) = \{f \in \mathcal{H}(\Delta; F); \varphi \circ f \in H^p(\Delta; \mathbb{C}), \forall \varphi \in F'\}$$

$$H^p(T; F) = \{f \in L^p(T; F); \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt = 0, n = -1, -2, \ldots\}$$

*IMECC, UNICAMP, SP, Brasil, fjbertoloto@yahoo.com.br

É fácil ver que $H^p(\Delta; F) \subset H^p_w(\Delta; F)$ para $1 \leq p \leq \infty$.

Analisemos agora um teorema:

Teorema 1.1. (**Ryan [2] e [3]**) *Seja F um espaço de Banach reflexivo e separável. Para $1 \leq p \leq \infty$, o espaço $H^p(\Delta; F)$ é isometricamente isomorfo ao espaço $H^p(T; F)$.*

Definição 1.6. *Um espaço de Banach tem a propriedade de Radon-Nikodym analítica (ARNP) se para todo $1 \leq p \leq \infty$ e toda função $f \in H^p(\Delta; F)$ existirem os limites radiais $\lim_{r \to 1} f(re^{i\theta})$ θ-quase sempre.*

Teorema 1.2. (**Bukhvalov [1]**) *Para $1 \leq p \leq \infty$, o espaço $H^p(\Delta; F)$ é isometricamente isomorfo ao espaço $H^p(T; F)$ se, e somente se, F tem a propriedade ARNP.*

Atualmente, já podemos encontrar várias caracterizações equivalentes da propriedade ARNP. Esta que damos foi a inicial.

Teorema 1.3. (Taylor [4] e [5]) *Se $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então $H^p(\Delta; \mathbb{C})'$ e $H^q(\Delta; \mathbb{C})$ são topologicamente isomorfos.*

2 Resultado Obtido

Dando continuidade, a partir da generalização de muitos dos resultados destes artigos de Taylor [4] e [5], obtemos o seguinte teorema:

Teorema 2.1. *Seja F um espaço de Banach com a propriedade ARNP. Se $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $H^p_w(\Delta; F) = H^p(\Delta; F)$, então $(H^p(\Delta; F))'$ e $H^q(\Delta; F')$ são topologicamente isomorfos.*

Diferentemente do que ocorre no caso do espaço de funções holomorfas, onde temos que o espaço das funções fracamente holomorfas coincide sempre com o das holomorfas, nem sempre o espaço das fracamente Hardy, $H^p_w(\Delta; F)$, coincide com o corresponde espaço de Hardy, $H^p(\Delta; F)$, pois nem sempre $H^p(\Delta; F)'$ é topologicamente isomorfo ao espaço $H^q(\Delta; F')$, fato que podemos afirmar por um exemplo dado em Bukhvalov [1].

Referências

[1] BUKHVALOV, A.V. - *Hardy spaces of vector-valued functions*, Journal of Soviet Mathematics, Vol. 16, N. 3, 1981, 1051-1059

[2] RYAN, R. - *Boundary values of analytic functions*, Indag. Math. 65, 1962, 558-572.

[3] RYAN, R. - *The F. and M. Riesz theorem for vector measures*, Indag. Math. 66, 1963, 558-572.

[4] TAYLOR, A. E. - *Banach spaces of functions analytic in the unit circle I*, Studia Math. 11, 1950, 145-170.

[5] TAYLOR, A. E. - *Banach spaces of functions analytic in the unit circle II*, Studia Math. 12, 1951, 25-50.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{o}}$ 2 Novembro 2008

Espaços de Banach de dimensão infinita par

V. Ferenczi * & E. M. Galego †

É uma questão clássica na teoria de classificação isomorfa dos espaços de Banach de determinar a qual ponto as propriedades dos espaços de dimensão infinita são diferentes das propriedades dos espaços de dimensão finita, em comparação com o caso dos conjuntos de cardinalidade finita ou infinita na teoria dos conjuntos.

Por exemplo sabemos que se um conjunto F é de cardinalidade finita, não existe bijeção entre F e um subconjunto próprio; mas que se F é de cardinalidade infinita, então sempre existe uma tal bijeção. No campo dos espaços de Banach, é claro que um espaço de dimensão finita não pode ser linearmente isomorfo a um subespaço próprio, mas a questão permaneceu aberta até recentemente no caso dos espaços de dimensão infinita, já que todos os espaços clássicos são naturalmente isomorfos aos hiperplanos.

Questão 1 (Problema do hiperplano de Banach, 1932)**.** *Existe um espaço de Banach de dimensão infinita que não é isomorfo aos hiperplanos? que não é isomorfo a nenhum subespaço próprio?*

Essa pergunta foi resolvida por W.T. Gowers em 1994 [G].

Teorema 2 (Gowers)**.** *Existe um espaço de Banach G de dimensão infinita e não isomorfo a nenhum subespaço próprio.*

Portanto existem espaços de Banach de dimensão infinita que não são isomorfos a "sua dimensão menos um".

Podemos fazer perguntas similares no caso da paridade da dimensão de um espaço de Banach, procurando desenvolver uma noção de paridade para espaços de Banach de dimensão infinita que generalizaria o caso de dimensão finita e determinar se existem tais exemplos. Definimos assim uma noção de *dimensão par* para espaços de Banach reais que podem ser de dimensão infinita, usando a noção de *estrutura complexa.* Um espaço de Banach real X tem estrutura complexa quando a estrutura $\mathbb{R}$-linear de X pode ser vista como induzida, a menos de isomorfismo, por uma estrutura $\mathbb{C}$-linear, o que equivale à existência de um operador $\mathbb{R}$-linear J em X tal que $J^2 = -Id$. Obviamente espaços reais de dimensão finita par têm estrutura complexa enquanto espaços reais de dimensão finita impar não têm estrutura complexa.

Definição 3. *Um espaço de Banach é* par (ou de dimensão par) *quando ele admite estrutura complexa, mas os seus hiperplanos não admitem estrutura complexa.*

Um espaço de Banach é impar (ou de dimensão impar) *quando ele não admite estrutura complexa, mas os seus hiperplanos admitem estrutura complexa.*

Observamos que essa teoria pode ser vista como uma extensão do problema do hiperplano de Banach:

Observação 4. *Espaços pares ou impares não são isomorfos aos hiperplanos.*

A partir dessas perguntas, desenvolvemos uma teoria para determinar se um dado espaço é ou não par ou impar, usando operadores "inessenciais" [Gz] e teoria espectral. Extendendo trabalhos iniciados em [F], provamos que dado

*Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, SP, Brasil, ferenczi@ime.usp.br
†Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, SP, Brasil, eloi@ime.usp.br

um espaço X, a estrutura do conjunto dos operadores em X de quadrado $-Id$, a menos de operadores inessenciais, caracteriza o conjunto das estruturas complexas sobre X e sobre os hiperplanos de X, e portanto caracteriza em particular se X é ou não par ou impar.

Deduzimos que vários exemplos de espaços com poucos operadores, como alguns similares aos espaços construidos por Gowers e Maurey [GM], ou espaços $C(K)$ construidos por Koszmider [K], são pares ou impares.

Teorema 5. *Existem espaços pares e impares:*

- *com base incondicional,*
- *ou do tipo do espaço de Gowers-Maurey,*
- *ou do tipo $C(K)$.*

Referências

[1] FERENCZI, V. - *Uniqueness of complex structure and real hereditary indecomposable Banach spaces.*, Advances in Mathematics 213, 1 (2007), 462-488.
[2] FERENCZI, V. - GALEGO, E. M. - *Even infinite dimensional Banach spaces*, J. Funct. Anal 253, 2 (2007), 534-549.
[3] GOWERS, W. T. - *A solution to Banach's hyperplane problem*, Bull. London Math. Soc. 26 (1994), 523-530.
[4] GONZÁLEZ, M. - *On essentially incomparable Banach spaces*, Math. Z. 215, 4 (1994), 621-629.
[5] GOWERS, W. T. - MAUREY, B. - *The unconditional basic sequence problem*, J. Amer. Math. Soc 6, 4 (1993), 851-874.
[6] KOSZMIDER, P. - *Banach spaces of continuous functions with few operators*, Math. Ann. 330, 1 (2004), 151-183.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{0}}$ 2 Novembro 2008

Estimativas do tipo Aleksandrov-Bakelman-Pucci para Operadores Singulares Completamente Não Lineares.

T. Junges Miotto *

O objetivo deste trabalho é obter estimativas do tipo Aleksandrov-Bakelman-Pucci (estimativas ABP) para soluções viscosas de equações envolvendo operadores singulares completamente não lineares em domínios limitados, mais precisamente, para equações da forma $F(D^2u, Du) = f(x)$ onde $F : S(n) \times \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}$ é contínua e satisfaz:

(H1) $F(\mu M, tp) = |t|^\alpha \mu F(M, p),\ \forall\, t \in \mathbb{R},\ \ \mu \in \mathbb{R}^+,\ \ \alpha > -1.$

(H2) $a|p|^\alpha tr(N) \leq F(M + N, p) - F(M, p) \leq A|p|^\alpha tr(N),\ \ 0 < a \leq A,\ \ \alpha > -1,\ \ N \in S(n),\ \ N \geq 0,$

sendo $S(n)$ o espaço das matrizes simétricas $n \times n$. Tais operadores são estudados por Birindelli e Demengel nos artigos [2], [3] entre outros. A classe de operadores que satisfaz essas condições inclui $F(p, M) = |p|^\alpha \mathcal{M}^{\pm}_{a,A}(M)$, onde $\alpha > -1$ e $\mathcal{M}^{\pm}_{a,A}$ são os operadores de Pucci, os quais são definidos por

$$\mathcal{M}^+_{a,A}(M) = Atr(M^+) - atr(M^-), \qquad \mathcal{M}^-_{a,A}(M) = atr(M^+) - Atr(M^-),$$

e o $p-$Laplaciano com $p > 1$, onde $\Delta_p(u) = |Du|^{p-2}tr(D^2u) + (p-2)|Du|^{p-4} < D^2uDu, Du >$.

Por uma estimativa ABP, entende-se uma limitação para o supremo de uma subsolução u em Ω em termos do supremo de u em $\partial\Omega$ e da norma L^n de f. No caso de soluções clássicas e soluções fracas, as estimativas ABP podem ser encontradas para domínios limitados em [5, 9] e em [4, 12] para domínios ilimitados.

Caffarelli [6] foi o primeiro a obter estimativas ABP para soluções viscosas, com o estudo de equações do tipo $\mathcal{M}^+_{a,A}(D^2u) = f(x)$. Posteriormente, Caffarelli et al [7] obtiveram estimativas ABP para soluções L^p-viscosas de

$$-\mathcal{M}^+_{a,A}(D^2u) - \gamma|Du| \leq f(x) \text{ sobre } \{u > 0\} \quad \text{e} \quad -\mathcal{M}^-_{a,A}(D^2u) + \gamma|Du| \geq f(x) \text{ sobre } \{u < 0\}.$$

Recentemente foram obtidas estimativas ABP para equações da forma

$$F(D^2u, Du, u, x) = f(x), \quad x \in \Omega. \tag{0.1}$$

Os autores Quaas e Sirakov [11] estudaram a equação (0.1) supondo Ω um domínio limitado e

$$\mathcal{M}^-_{a,A}(X) - \gamma|p| - \delta|r| \leq F(X, p, r, x) \leq \mathcal{M}^+_{a,A}(X) + \gamma|p| + \delta|r|, \quad x \in \Omega.$$

Em [8] analisa-se (0.1) supondo $F(X, p, r, x) \leq \mathcal{M}^+_{a,A}(X) + b(x)|p|,\ x \in \Omega$, onde Ω é um domínio aberto de $\mathbb{R}^n$ satisfazendo certas condições e b é uma função contínua, não negativa e limitada. Koike e Swiech [10] estenderam o resultado obtido por [8] para funções $b \in L^q_+(\Omega)$. Temos ainda o trabalho de Amendola et al [1] que obtiveram estimativas ABP para (0.1) sob a hipótese $F(X, p, r, x) \leq \mathcal{M}^+_{a,A}(X) + b(x)|p|^q$, onde $q \in [1, 2]$, Ω satisfaz as condições de [8] e b é uma função contínua.

Motivados pelos resultados de [7] e [9], obteve-se estimativas ABP para as equações da forma

$$F(D^2u, Du) = f(x) \text{ em } \{u > 0\} \quad \text{e} \quad F(D^2u, Du) + \gamma|Du|^\beta = f(x) \text{ em } \{u > 0\},$$

com F satisfazendo as condições (H1)-(H2). Um ponto importante nesse trabalho é que esse tipo de estimativa para o caso $\alpha \neq 0$ inclui operadores como o $p-$Laplaciano e operadores singulares completamente não lineares que ainda não haviam sido tratados. Os resultados obtidos foram os seguintes:

*UNICAMP, IMECC, SP, Brasil, taisajunges@yahoo.com.br

Teorema 0.1. *Seja* $u \in C(\bar{\Omega})$ *e* $f \in L^n(\Omega) \cap C(\Omega)$*. Se* u *for subsolução viscosa de* $F(D^2u, Du) = f(x)$ *em* $\{u > 0\}$*, então existe* $C = C(n, a, \alpha) > 0$ *tal que,*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C diam(\Omega) \|f^-\|_{L^n(\Gamma^+(u^+))}^{\frac{1}{\alpha+1}}.$$

Se u *é uma supersolução viscosa de* $F(D^2u, Du) = f(x)$ *em* $\{u < 0\}$*, então existe* $C = C(n, a, \alpha) > 0$ *tal que*

$$-\inf_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^- + C diam(\Omega) \|f^+\|_{L^n(\Gamma^+(u^-))}^{\frac{1}{\alpha+1}}.$$

Teorema 0.2. *Seja* $u \in C(\bar{\Omega})$ *e* $f \in L^n(\Omega) \cap C(\Omega)$*. Se* $\|f^-\|_{L^n(\Gamma^+(u^+))} \geq 1$ *e* u *é uma subsolução viscosa de*

$$F(D^2u, Du) + \gamma |Du|^\beta = f(x) \text{ em } \{u > 0\},$$

onde $0 < \beta \leq \alpha + 1$*, então existe* $C = C(n, a, \alpha, \beta, \gamma) > 0$ *tal que*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C diam(\Omega) \|f^-\|_{L^n(\Gamma^+(u^+))}^{\frac{1}{\beta}}.$$

If $\|f^+\|_{L^n(\Gamma^+(u^+))} \geq 1$ *e se* u *é uma supersolução viscosa de* $F(D^2u, Du) + \gamma|Du|^\beta = f(x)$ *em* $\{u < 0\}$*, onde* $0 < \beta \leq \alpha + 1$*, então existe* $C = C(n, a, \alpha, \beta, \gamma) > 0$ *tal que*

$$-\inf_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^- + C diam(\Omega) \|f^+\|_{L^n(\Gamma^+(u^-))}^{\frac{1}{\beta}},$$

onde $\Gamma^+(w)$ *é o conjunto de contato superior de* w*.*

Referências

[1] Amendola, m. e., Rossi, l., Vitolo, a. *Harnack inequalities and ABP estimates for nonlinear second order elliptic equations in unbounded domains*, Abstract and Applies Analisys 2008 (2008) 1-19.

[2] Birindelli, i., Demengel, f. *Comparison principle and Liouville type results for singular fully nonlinear operators*, Ann. Fac. Sci Toulouse Math., 13 (2004), n.2., 261-287.

[3] Birindelli, i., Demengel, f. *Eigenvalue, maximum principle and regularity for fully non linear homogeneous operators*, Comm. Pure and Appl. Anal., 6 (2007) 335-366.

[4] Cabré, x. *On the Alexandroff-Bakelman-Pucci estimate and the reversed Holder inequality for solutions of elliptic and parabolic equations*, Comm. Pure and Appl. Math. 48 (1995) 539-570.

[5] Cabré, x. *Nondivergent elliptic equations on manifolds with nonnegative curvature*, Comm. Pure and Appl. Math. Vol L (1997) 623-665.

[6] Caffarelli, l. a. *Interior a priori estimates for solutions of fully nonlinear equations*, Annals of Mathematics, 130 (1989) 189-213.

[7] Caffarelli, l. a., Crandall, m. g., Kocan, m., Swiech, a. *On viscosity solutions of fully nonlinear equations with measurable ingredients*, Comm. Pure and Appl. Math 49 (1996) 365-397.

[8] Capuzzo Dolcetta, i., Leoni, f., Vitolo, a. *The Aleksandrov-Bakelman-Pucci weak maximum principle for fully nonlinear equations in unbounded domains*, Comm. Partial differential Equations, 30 (2005) 1863-1881.

[9] Gilbarg, d., Trudinger, n. s. *Elliptic partial differential equations of second order*, 2nd edition, Revised third printing, Springer-Verlag, New York, 1998.

[10] Koike, s.,Swiech, a. *Weak Harnack inequality for fully nonlinear uniformly elliptic PDE with unbounded ingredients unbounded ingredients*, preprint (2008).

[11] Quaas, a., Sirakov, b. *On the principal eigenvalues and the Dirichlet problem for fully nonlinear operators*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 342 no 2 (2006) 115-118.

[12] Vitolo, a. *On the maximum principle for complete second-order elliptic operators in general domains*, J. Differential Equations, 194 (2003) 166-184.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicacões
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edicão N$^{\underline{0}}$ 2 Novembro 2008

Existence of Asymptotically Almost Automorphic Solutions to Neutral Integro-Differential Equations

J. P. C. dos Santos *

Let $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ be a Banach space. We proof the existence and uniqueness of an asymptotically almost automorphic mild solution to the abstract partial neutral integro-differential equations with unbounded delay

$$\frac{d}{dt}D(t,u_t) \quad = \quad AD(t,u_t) + \int_0^t B(t-s)D(s,u_s)ds + g(t,u_t),\ t \in [\sigma, \sigma + a), \quad u_\sigma = \varphi \in \mathcal{B}, \tag{0.1}$$

where $D(t,\varphi) = \varphi(0) + f(t,\varphi)$, the linear operators $A, B(t) : D(A) \subset \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ are densely defined and closed with a common domain $D(A)$, which is independent of t, the history $u_t : (-\infty, 0] \to \mathbb{X}$, defined by $u_t(\theta) = u(t+\theta)$, belongs to an abstract phase space $\mathcal{B}$ defined axiomatically, and f, g are functions subject to some additional conditions. The talk includes results of work togethers with Eduardo Hernandez, ICMC-USP, Brasil and Toka Diagana Department of Mathematics, Howard University, USA.

1 My results

Let $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$, $(\mathbb{Z}, \|\cdot\|_{\mathbb{Z}})$, $(\mathbb{W}, \|\cdot\|_{\mathbb{W}})$ be Banach spaces. In this paper, the notation $\mathcal{L}(\mathbb{Z}, \mathbb{W})$ stands for the collection of bounded linear operators from $\mathbb{Z}$ into $\mathbb{W}$ endowed with the operator topology denoted by $\|\cdot\|$; we write $\mathcal{L}(\mathbb{Z})$ when $\mathbb{Z} = \mathbb{W}$. The notations $C(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$, $BC(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$, and $C_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{Z})$ stand for the collection of all strongly continuous functions, bounded continuous functions from $\mathbb{R}$ into $\mathbb{Z}$, and the space of all bounded continuous functions φ from $\mathbb{R}^+$ into $\mathbb{Z}$, which vanish at infinity, endowed with the sup norm $\|\cdot\|_\infty$ on $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}^+$ respectively. Similarly, $C(\mathbb{R}\times\mathbb{Z}, \mathbb{W})$ and $BC(\mathbb{R}\times\mathbb{Z}, \mathbb{W})$ stand, respectively, for the class of all jointly continuous functions and the collection of all jointly bounded continuous functions from $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$ into $\mathbb{W}$ respectively. By, $C_0(\mathbb{R}^+\times\mathbb{Z}, \mathbb{W})$ stands for the space of the continuous functions $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{Z} \to \mathbb{W}$ such that $\lim_{t\to\infty} f(t,z) = 0$ uniformly for $z \in C$ where $C \subset \mathbb{Z}$ is any compact subset.

Throughout the rest of the paper we always assume that the abstract Cauchy problem

$$x'(t) \quad = \quad Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)ds, \qquad t \geq 0, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{X}, \tag{1.2}$$

has an associated resolvent operator. For more details, we refer the reader to [1, 2, 3, 4, 5].

In this work we will using ideas and notations developed in [7] for the phase space $\mathcal{B}$. In addition we introduction of the concept of compact almost automorphy, see [6] for details.

Definition 1.1. *A function $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$ is said to be compact almost automorphic if for every sequence of real numbers $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ there exists a subsequence $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ such that*

$$g(t) := \lim_{n\to\infty} f(t+s_n) \text{ and } f(t) = \lim_{n\to\infty} g(t-s_n)$$

uniformly on compact subsets of $\mathbb{R}$. The collection of those functions will be denoted by $AA_c(\mathbb{Z})$.

Definition 1.2. *A function $f \in C(\mathbb{R}\times\mathbb{Z}, \mathbb{W})$ is said to be compact almost automorphic in $t \in \mathbb{R}$, if for every sequence of real numbers $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ there exists a subsequence $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ such that*

$$g(t,z) := \lim_{n\mapsto\infty} f(t+s_n, z), \text{ and } f(t,z) = \lim_{n\mapsto\infty} g(t-s_n, z) \text{ in } \mathbb{W},$$

*Universidade Federal de Alfenas, MG, Brasil, zepaulo@unifal-mg.edu.br

where the limits are uniform on compact subset of $\mathbb{R}$*, for each* $z \in \mathbb{Z}$*. The space of such functions will be denoted by* $AA_c(\mathbb{Z}, \mathbb{W})$*.*

Definition 1.3. *A continuous function* $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{Z})$ *is said to be compact asymptotically almost automorphic if it can be written as* $f = g + h$ *where* $g \in AA_c(\mathbb{Z})$ *and* $h \in C_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{Z})$*. Denote by* $AAA_c(\mathbb{Z})$ *the set of all such functions.*

Definition 1.4. *A function* $F \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{Z}, \mathbb{W})$ *is said to be compact asymptotically almost automorphic if it can be written as* $F = G + H$*, where* $G \in AA_c(\mathbb{Z}, \mathbb{W})$ *and* $H \in C_0([0, \infty) \times \mathbb{Z}, \mathbb{W})$*. Denote by* $AAA_c(\mathbb{Z}, \mathbb{W})$ *the set of all such functions.*

The rest of this section is devoted to the existence of asymptotically almost automorphic solutions to the partial neutral system (0.1). For that, we require the following assumption:

($\mathbf{H_1}$) The functions $f, g \in AAA_c(\mathbb{R}^+ \times \mathcal{B}, \mathbb{X})$ and there exist continuous and nondecreasing functions $L_g, L_f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ such that for $r \geq 0$ and for all $\|x\|_{\mathcal{B}} \leq r$, $\|y\|_{\mathcal{B}} \leq r$,

$$\begin{aligned} \| f(t,x) - f(t,y) \| &\leq L_f(r)\|x - y\|_{\mathcal{B}}, \\ \|g(t,x) - g(t,y)\| &\leq L_g(r)\|x - y\|_{\mathcal{B}}, \end{aligned}$$

for all $t \in \mathbb{R}$.

We adopt the notion of mild solutions for (0.1) from the one given in [4].

Definition 1.5. *A function* $u : (-\infty, \sigma + a) \mapsto \mathbb{X}$ *for* $a > 0$*, is a mild solution of the neutral integrodifferential system (0.1) on* $[\sigma, \sigma + a)$*, if* $u_\sigma \in \mathcal{B}$*, the restriction of* u *to the interval* $[\sigma, \sigma + a)$ *is continuous and*

$$u(t) = R(t)(\varphi(0) + f(\sigma, \varphi)) - f(t, u_t) + \int_\sigma^t R(t-s)g(s, u_s)ds, \text{ for every } t \in [\sigma, \sigma + a).$$

By using a fixed point criterion for contraction, we establish the following result.

Theorem 1.1. *Assume that the phase space* $\mathcal{B}$ *is a fading memory space and that* $f(\cdot)$ *and* $g(\cdot)$ *satisfy* ($\mathbf{H_1}$)*. If* $L_f(0) = L_g(0) = 0$ *and* $f(t, 0) = g(t, 0) = 0$ *for every* $t \in \mathbb{R}$*, then there exists* $\gamma_0 > 0$ *such that for each* φ *satisfying* $\|\varphi\|_{\mathcal{B}} \leq \gamma_0$ *there exists a mild solution* $u(\cdot, \varphi)$ *to (0.1) on* $[0, \infty)$ *such that* $u(\cdot, \varphi) \in AAA_c(\mathbb{X})$ *and* $u_0(\cdot, \varphi) = \varphi$*.*

References

[1] H. S. Ding, T. Xiao and J. Liang, Asymptotically almost automorphic solutions for some integrodifferential equations with nonlocal initial conditions. J. Math. Anal. Appl. 338 (1) (2008) 141-151.

[2] R. Grimmer, Resolvent operators for integral equations in a Banach space. Trans. Amer. Math. Soc. 273 (1) (1982) 333-349.

[3] R. Grimmer and J. Prüss, On linear Volterra equations in Banach spaces. Hyperbolic partial differential equations II. Comput. Math. Appl. 11 (1985) 189-205.

[4] H. R. Henríquez, E. Hernández and J. P. C. dos Santos, Asymptotically almost periodic and almost periodic solutions for partial neutral integrodifferential equations. Z. Anal. Anwend. 26 (3) (2007) 261-375.

[5] E. Hernández and J. P. C. dos Santos, Existence results for partial neutral integro differential equations with unbounded delay. Applicable Anal. 86 (2) (2007) 223-237.

[6] Y. Hino and S. Murakami, Almost automorphic solutions for abstract functional differential equations. J. Math. Anal. Appl 286 (2003) 741–752.

[7] Y. Hino, S. Murakami and T. Naito, Functional-differential equations with infinite delay. Lecture Notes in Mathematics vol. 1473, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

EXISTENCE OF GLOBAL ATTRACTORS FOR NEURAL FIELDS IN AN UNBOUNDED DOMAIN

S. H. Silva *

We consider in this paper the non local evolution equation

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u(x,t) + J * (f \circ u)(x,t) + h, \ \ h \geq 0, \tag{0.1}$$

where $u(x,t)$ is a real function on $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $h \in \mathbb{R}_+$, $J \in C^1(\mathbb{R})$ is a non negative even function supported in the interval $[-1,1]$, and, f is a increasing non linear function. The $*$ above denotes convolution product on $\mathbb{R}$.

Equation (0.1) was derived in [11], to model a single layer of neurons. The function $u(x,t)$ denotes the average membrane potential of neurons located at position $x \in (-\infty, \infty)$ at time $t \geq 0$. The connection function $J(x)$ determines the coupling between the elements at position x with the element at position y. The function $f(u)$ gives the neural firing rate, or averages rate at which spikes are generated, corresponding to an activity level u. The parameter h denotes a constant external stimulus applied uniformly to the entire neural field. When $f(u(x,t)) > 0$ the neurons at a point x are said to be active , (see [1], [2], [4], [6], [7] and [10]).

We joined here the additional conditions on f which are used as hypotheses in our results when necessary:
(H1) $|f(x) - f(y)| \leq k_1|x-y|$, $\forall\, x,y \in \mathbb{R}$ for some $k_1 > 0$;
(H2) There exists $k_2 > 0$ such that $|f(x)| \leq k_2$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

Under the hypotheses (H1) and (H2), we prove that, in some space with weight, the flow generated by (0.1) is dissipative in the sense of [5] and [12], that is, it has a global compact attractor. For this, we uses some ideas from [8] and [9], where is considered a similar evolution equation.

We consider the flow generated by (0.1) in the space

$$L^2(\mathbb{R}, \rho) = \{u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \,:\, \int_{\mathbb{R}} u^2(x)\rho(x)dx < +\infty\},$$

with norm $\|u\|_{L^2}(\mathbb{R},\rho) = \left(\int_{\mathbb{R}} u^2(x)\rho(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$, where ρ is an integrable positive even function on $\mathbb{R}$ with $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)dx = 1$. One important property of this space is that it contain the constant functions. Note that in this space the constant function equal to 1 has norm 1.

The following result has been proved in [8].

Lemma 0.1. *Suppose that* $\sup_{x\in\mathbb{R}}\{\rho(x) \,:\, y-1 \leq x \leq y+1\} \leq K\rho(y)$, *for some constant* K *and all* $y \in \mathbb{R}$. *Then* $\|J * u\|_{L^2(\mathbb{R},\rho)} \leq \sqrt{K}\|J\|_{L^1}\|u\|_{L^2(\mathbb{R},\rho)}$.

The hypothesis (H1) and Lemma 0.1 are sufficient for the function $F(u) = -u + J*(f\circ u) + h$ to be globally Lipschitz in $L^2(\mathbb{R},\rho)$, hence the Cauchy problem for (0.1) is well posed in this space with a unique global solution, (see [3]).

In the that follows, we denote by $T(t)$ the flow generated by (0.1), given by $[T(t)u](x) = u(x,t)$, where $u(x,t)$ is, by variation constant formula, given by

$$u(x,t) = e^{-t}u(x,0) + \int_0^t e^{s-t}[J*(f\circ u)(x,s) + h]ds.$$

We recall that a set $\mathcal{B} \subset L^2(\mathbb{R},\rho)$ is an absorbing set for the flow $T(t)$ if, for any bounded set $C \subset L^2(\mathbb{R},\rho)$, there is a $t_1 > 0$ such that $T(t)C \subset \mathcal{B}$ for any $t \geq t_1$ (see [12]).

Proceeding as in [9], we proof the following lemma:

*Universidade Federal de Campina Grande , UACEN, PB, Brasil, horacio@cfp.ufcg.edu.br

Lemma 0.2. *Assume that* $\sup_{x\in\mathbb{R}}\{\rho(x) : y-1 \le x \le y+1\} \le K\rho(y)$*, for some constant* K *and all* $y \in \mathbb{R}$ *and that the hypotheses (H1) and (H2) hold. Then, calling* $R = k_2\sqrt{K}\|J\|_{L^1} + h$*, the ball of center in the origin of* $L^2(\mathbb{R}, \rho)$ *and radius* $R + \varepsilon$ *is an absorbing set for the flow* $T(t)$ *for any* $\varepsilon > 0$*.*

We recall that a set $\mathcal{A} \subset L^2(\mathbb{R}, \rho)$ is a global attractor if $\mathcal{A}$ is global maximal invariant compact set which attract each bounded set of $L^2(\mathbb{R}, \rho)$ under the flow $T(t)$ (see [5] or [12]).

Then we proof the theorems bellow which are main results this paper.

Theorem 0.1. *Assume the same hypotheses from Lemma 0.2. Then, for any* $\eta > 0$*, there exists* t_η *such that* $T(t_\eta)B_{\varepsilon+R}$ *has a finite covering by balls of* $L^2(\mathbb{R}, \rho)$ *with radius smaller than* η*.*

Theorem 0.2. *Assume the same hypotheses from Lemma 0.2. Then the omega-limit set of* $B_{R+\varepsilon}$*,* $\mathcal{A} = \omega(B_{R+\varepsilon})$*, is a global attractor for the flow* $T(t)$ *generated by (0.1) in* $L^2(\mathbb{R}, \rho)$ *which is contained in the ball of radius* R*.*

Remark 0.1. *It hold similar results in the space*

$$C_\rho(\mathbb{R}) \equiv \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ continuous with the norm } \|\cdot\|_\rho\},$$

where $\|u\|_\rho = \sup_{x\in\mathbb{R}}\{|u(x)|\rho(x)\} < \infty$*, being* ρ *an positive continuous function on* $\mathbb{R}$*.*

References

[1] AMARI, S. - *Dynamics of pattern formation in lateral-inhibition type neural fields.* Biol. Cybernetics , 27 (1977), pp. 77-87.

[2] CHEN, F. - *Travelling waves for a neural network.* Electronic J. Diff. Equations, 13 (2003), pp. 1-14.

[3] DALECKII, J.L., KREIN, M.G. - *Stability of solutions of differential equations in Banch space.* American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1974.

[4] ERMENTROUT, G.B., MCLEOD, J.B. - *Existence and uniqueness of traveliing waves for a neural network.* Procedings of the Royal Society of Edinburgh, 123 A (1993), pp. 461-478.

[5] HALE, J.K. - *Asymptotic behavior of dissipative Systems.* American Surveys and Monographs, N. 25, Pitman, Boston, 1988.

[6] KISHIMOTO, K., AMARI, S. - *Existence and stability of local excitations in homogeneous neural fields.* J. Math. Biology, 07 (1979), pp. 303-1979.

[7] LAING, C.R., TROY, W.C., GUTKIN, B., ERMENTROUT, G.B. - *Multiple bumps in a neural model of working memory.* SIAM J. Appl. Math., 63, N.1 (2002), pp. 62-97.

[8] PEREIRA, A.L. - *Global attractor and nonhomogeneous equilibria for a non local evolution equation in an unbounded domain.* J. Diff. Equations, 226 (2006) pp. 352-372.

[9] PEREIRA, A.L., SILVA, S.H. - *Existence of global attractor and gradient property for a class of non local evolution equation.* Sao Paulo Journal Mathematical Science, (to a paper).

[10] RUBIN, J.E, TROY, W.C. - *Sustained spatial patterns of activity in neural populations without recurrent excitation.* SIAM J. Appl. Math., 64 (2004), pp. 1609-1635.

[11] WILSON, H.R, COWAN, J.D. - *Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons.* Biophys. J. 12 (1972), pp. 1-24.

[12] TEMAN, R. - *Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics.* Springer, New York, 1988.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{0}}$ 2 November 2008

EXISTENCE OF SOLUTIONS AND BLOW UP RESULT FOR A THERMAL-KIRCHHOFF SYSTEM

F. D. ARARUNA*, M. L. DE OLIVEIRA † & A. J. R. FEITOSA ‡

1 Introduction and existence of solutions

Let Ω be a bounded open set of $\mathbb{R}^n$ with regular boundary Γ. For $T>0$ a real number, we consider the cylinder $Q=\Omega\times]0,T[$ with lateral boundary $\Sigma=\Gamma\times]0,T[$. Let us consider the coupled nonlinear system

$$\left|\begin{array}{ll} u''-M(\|u\|^2)\Delta u+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}=|u|^{\rho}u & \text{in} \quad Q,\\ \theta'-\Delta\theta+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u'}{\partial x_i}=0 & \text{in} \quad Q,\\ \theta=\dfrac{\partial u}{\partial\nu}=0 & \text{on} \quad \Sigma,\\ u(0)=u_0, \quad u'(0)=u_1, \quad \theta(0)=\theta_0 & \text{in} \quad \Omega,\end{array}\right. \tag{1.1}$$

where M is a $C^1([0,+\infty))$ real function such that

$$M(\lambda)\geq m_0>0, \quad \forall\lambda\geq 0. \tag{1.2}$$

Let the Hilbert space $H_0^1(\Omega)$ be equipped with the inner product and norm given respectively by

$$((u,v))=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial v}{\partial x_i}\right), \qquad \|u\|^2=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2,$$

where $(\cdot,\cdot)$ and $|\cdot|$ are, respectively, the inner product and norm in $L^2(\Omega)$. The purpose of this section is to obtain existence and uniqueness of solution for the problem (1.1). We introduce the following vectorial spaces

$$V=\{u\in H^2(\Omega):\frac{\partial u}{\partial\nu}=0 \quad \text{on} \quad \Gamma\},$$

and

$$S=\{u\in L^2(\Omega):\int_{\Omega}u=0\}.$$

The main result that give us the existence of local solutions for the system (1.1) is given by the following theorem.

Theorem 1.1. *Let us consider the initial data* $(u_0,u_1,\theta_0)\in V\cap S\times H_0^1(\Omega)\cap S\times H_0^1(\Omega)$, $M\in C^1([0,+\infty))$ *satisfying* (1.2). *Suppose that* $\rho\leq\dfrac{n}{2(n-2)}$. *Then there exists a unique local pair of solution* (u,θ) *of (1.1) belonging to*

$$\begin{array}{rl}(u,\theta)\in & C_w^0([0,T];V\cap S)\times L^2([0,T],H^2(\Omega))\cap C_w^1([0,T],H^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega))\\ & \cap C^0([0,T];H^1(\Omega))\times H_0^1(\Omega))\cap C^1([0,T];L^2(\Omega))\times C^0([0,T],L^2(\Omega)).\end{array} \tag{1.3}$$

We used the point fixed theorem to prove the existence of solutions for the system (1.1).

*Universidade Federal da Paraiba, CCEN-DM, PB, Brasil, fagner@mat.ufpb.br
†Universidade Federal da Paraiba, CCEN-DM, PB, Brasil, milton@mat.ufpb.br
‡Universidade Federal da Paraiba, CCEN-DM, PB, Brasil, joaquim@mat.ufpb.br

2 Blow up result

Suppose the function $g(s) = |s|^{\rho} s$ satisfy the following hypothesis

$$g(s)s \geq \beta G\left(s\right), \ \forall s \in \mathbb{R}, \text{ for some } \beta > 0, \tag{2.4}$$

where $G(s) = \int^s g(\tau) d\tau$. We define the energy of the system as

$$E(t) = |u'|^2 + \widehat{M}\left(\|u\|^2\right) + |\theta|^2 - 2\int_\Omega G(u)dx, \tag{2.5}$$

The blow up result is given by following result.

Theorem 2.1. *Suppose* (u_0, u_1, θ_0) *and* M *in the conditions of Theorem 1.1 and* g *satisfying* (2.4)*. Then there exists a constant* $\lambda > 0$ *such that if*

$$E(0) < -\lambda,$$

and β *is large enough, the solution* (u, θ) *of* (1.1) *blows up in a time* $t^* \leq T^*$.

References

[1] S. A. Messaudi, A Blowup Result in a Multidimensional Semilinear Thermoelastic System, EJDE, vol. 2001, N^o 30, 1-9.

[2] K. Ono, Global solutions and Blow-up solutions of Nonlinear Kirchhoff Strings with Nonlinear Dissipation, J. Math. Anal. Appl., 216, N^o 1, 321-342, 1997.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{0}}$ 2 Novembro 2008

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO FRACA GLOBAL PARA FLUIDOS ASSIMÉTRICOS E INCOMPRESSÍVEIS COM DENSIDADE VARIÁVEL

PABLO BRAZ E SILVA * & EDUARDO G. SANTOS †

Resumo

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e limitado. Neste trabalho, estabelecemos a existência de solução fraca global no tempo para o sistema que descreve o fluxo de um fluido assimétrico incompressível com densidade variável em Ω. Para isso, consideramos um tempo $T > 0$ e as equações

$$\begin{cases} \rho\left(\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}\right) - (\mu+\mu_r)\,\Delta\mathbf{u} + \nabla p = 2\mu_r \operatorname{curl}\mathbf{w} + \rho\mathbf{f}, \\ \rho\left(\mathbf{w}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{w}\right) - (c_a+c_d)\,\Delta\mathbf{w} - (c_0+c_d-c_a)\,\nabla(\operatorname{div}\mathbf{w}) + 4\mu_r\mathbf{w} \\ \qquad\qquad = 2\mu_r\operatorname{curl}\mathbf{u} + \rho\mathbf{g}, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \qquad \rho_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho = 0, \end{cases} \tag{0.1}$$

em $\Omega \times (0,T)$, com as condições iniciais e de fronteira

$$\mathbf{u}\,(x,t) = \mathbf{w}\,(x,t) = 0, \qquad \forall\,(x,t) \in \partial\Omega\times(0,T)\,, \tag{0.2}$$

$$\mathbf{u}\,(x,0) = \mathbf{u}_0\,(x)\,, \quad \mathbf{w}\,(x,0) = \mathbf{w}_0\,(x)\,, \quad \rho\,(x,0) = \rho_0(x), \quad \forall x \in \Omega. \tag{0.3}$$

As incógnitas $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$, ρ, e p são, respectivamente, a velocidade linear, a velocidade angular de rotação das partículas do fluido, a densidade de massa e a distribuição de pressão do fluido. As funções $\mathbf{f}$ and $\mathbf{g}$ são forças externas dadas. As constantes positivas μ, μ_r, c_0, c_a, c_d são relacionadas com propriedades de viscosidade do fluido e satisfazem $c_0 + c_d > c_a$. Em Boldrini-Fernández-Cara-Rojas-Medar [1], alguns resultados de existência e unicidade de soluções fortes são dados no caso de densidade inicial estritamente positiva. Em Lukaszewicz [2], a existência de solução fraca local no tempo foi estabelecida (veja também [3]). Para esse resultado, entretanto, a densidade inicial precisa satisfazer a condição de integrabilidade $\|\rho_0^{-1}\|_{L^3} < \infty$. Aqui, nós estabelecemos a existência de solução fraca global no tempo, exigindo que a densidade inicial seja apenas não-negativa, isto é, $\rho_0 \geq 0$. Nossos resultados proporcionam um conhecimento acerca das soluções fracas do sistema (0.1) no mesmo nível de conhecimento acerca das soluções fracas da equação de Navier-Stokes com densidade variável Navier-Stokes [4,5]. O resultado aqui exposto foi comunicado em Braz e Silva-Santos [6].

Resultado Principal

Teorema 0.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e limitado com fronteira Lipschitziana. Dado $T > 0$, se $\mathbf{u}_0 \in H$, $\mathbf{w}_0 \in (L^2(\Omega))^3$, $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$, $\rho_0 \geq 0$, e $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^1\left(0,T;(L^2(\Omega))^3\right)$, então existem*

$$\mathbf{u} \in L^2\,(0,T;V)\,,\ \mathbf{w} \in L^2\left(0,T;(H_0^1\,(\Omega))^3\right),\ p \in W^{-1,\infty}\left(0,T;L^2\,(\Omega)\right),\ \rho \in L^\infty\,(0,T;L^\infty\,(\Omega))\,,$$

tais que

$$\rho\mathbf{u},\ \rho\mathbf{w} \in L^\infty\left(0,T;(L^2\,(\Omega))^3\right) \cap N^{\frac{1}{4},2}\left(0,T;(W^{-1,3}(\Omega))^3\right),$$

$$\inf_\Omega \rho_0 \leq \rho\,(x,t) \leq \sup_\Omega \rho_0,$$

*Departamento de Matemática-Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, Brasil, pablo@dmat.ufpe.br
†Departamento de Matemática-Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, Brasil, eduardo@mat.ufpb.br

satisfazendo as equações:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}\mathbf{u}) - (\mu + \mu_r)\,\Delta \mathbf{u} + \nabla p = 2\mu_r \operatorname{curl}\mathbf{w} + \rho \mathbf{f},$$
$$\frac{\partial \rho \mathbf{w}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}\mathbf{w}) - (c_a + c_d)\,\Delta \mathbf{w} - (c_0 + c_d - c_a)\,\nabla \operatorname{div}\mathbf{w} + 4\mu_r \mathbf{w} = 2\mu_r \operatorname{curl}\mathbf{u} + \rho \mathbf{g},$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0,$$

em $\Omega \times (0,T)$*, as condições de fronteira (0.2), e as condições iniciais fracas*

$$\rho|_{t=0} = \rho_0,$$
$$\left(\int_\Omega \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx\right)(0) = \int_\Omega \rho_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v}, \ \ \forall\, \mathbf{v} \in V,$$
$$\left(\int_\Omega \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} dx\right)(0) = \int_\Omega \rho_0 \mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{z}, \ \ \forall\, \mathbf{z} \in (H_0^1(\Omega))^3.$$

Prova: A prova é baseada em método do tipo semi-Galerkin, adaptando técnicas usadas em Simon [4] para a equação de Navier-Stokes com densidade variável. Em primeiro lugar, consideramos um problema aproximado e obtemos uma formulação do tipo semi-Galerkin. Em seguida, mostramos que este problema aproximado possui solução local. Feito isso, obtemos estimativas sobre as soluções do problema aproximado e em suas derivadas com respeito às variáveis espaciais e sobre suas "derivadas fracionárias no tempo", sendo que, estas últimas, são obtidas no contexto dos espaços de Nikolskii. Posteriormente, efetuamos a passagem ao limite para as equações aproximadas. No decorrer deste processo, recupera-se a incógnita p, perdida durante a formulação variacional, através do Lema de De Rham. ■

Referências

[1] J. L. Boldrini, M. A. Rojas-Medar and E. Fernández-Cara - *Semi-Galerkin approximation and strong solutions to the equations of the nonhomogeneous asymmetric fluids.*, J. Math. Pures Appl., **82** (11)(2003), 1499 – 1525.

[2] G. Lukaszewicz - *On nonstationary flows of incompressible asymmetric fluids*, Math. Methods Appl. Sci., **13** (3)(1990), 219 – 232.

[3] G. Lukaszewicz - *Micropolar fluids. Theory and applications*, Modelling and Simulation in Science, Engineering & Technology, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (1999).

[4] J. Simon - *Existencia de solución del problema de Navier-Stokes con densidad variable. (Spanish) [Existence of solution for the variable density Navier-Stokes problem]*, lecture notes at the University of Sevilla, Spain.

[5] J. Simon - *Nonhomogeneous viscous incompressible fluids: existence of velocity, density, and pressure*, SIAM J. Math. Anal., **21** (5)(1990), 1093 – 1117.

[6] P. Braz e Silva and E. G. Santos - *Global weak solutions for asymmetric incompressible fluids with variable density*, Comptes Rendus. Mathématique, **346**, (2008), 575 – 578.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{0}}$ 2 Novembro 2008

EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO PARABÓLICA DEGENERADA COM EXPOENTE VARIÁVEL DA NÃO LINEARIDADE

F. P. M. LOPES * & M. J. DOS SANTOS †

1 Introdução

Neste trabalho, estudamos o problema de Dirichlet para uma equação parabólica degenerada com expoente variável da não linearidade. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave e seja T um número real positivo. Consideremos o seguinte problema:

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) &= f \quad \text{em} \quad Q = \Omega \times (0,T) \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma = \partial\Omega \times [0,T] \\ u(x,0) &= u_0 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{cases}$$

onde $p \in C(\overline{\Omega})$ e as funções u_0 e $f(x,t)$ são dadas.

Existe uma literatura abundante sobre as questões de existência e unicidade de soluções para equações parabólicas degeneradas com expoente constante da não linearidade por exemplo veja [14]). Problemas de equações elípticas e parabólicas não lineares, com respeito ao gradiente da solução, com expoente variável da não linearidade, aparecem em vários modelos matemáticos como por exemplo na descrição matemática do processo de filtração em meios porosos não homogêneos (veja [5,7]) e em fluidos electrorheológicos (veja [1,4,6,9,16]).

Para estudarmos o problema em questão, consideramos os seguintes espaços funcionais:

- $X = W_o^{1,p(x)}(\Omega)$ o espaço generalizado de Sobolev com $2 < p^- < p < p^+ < +\infty$, onde $p^- = \min_{\overline{\Omega}} p$ e $p^+ = \max_{\overline{\Omega}} p$. Para mais informações sobre esses espaços, veja [10,11,12,13]
- $L^r(0,T;X)$, $1 \leq r \leq +\infty$, o espaço de funções definidas em $(0,T)$ com valores no espaço de Banach X e com integral no sentido de Bochner. Para mais informações sobre esses espaços, veja [8]

Definição 1.1. *Uma função mensurável $u(x,t)$ é chamada de solução fraca do problema (P) se:*
(i) $u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^{p^-}(0,T;X)$; $u_t \in L^2(0,T;X^*)$;
(ii) $u = 0$ sobre Σ no sentido do traço;
(iii) Para toda função teste $v(x,t)$ satisfazendo as condições $v \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^{p^-}(0,T;X)$; $v_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, temos

$$\int_0^T \int_\Omega u_t v \, dxdt + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v \, dxdt = \int_0^T \int_\Omega f v \, dxdt.$$

O objetivo do presente trabalho é provar a existencia e unicidade de solução fraca para o problema (P). Para isso, consideramos as seguintes hipóteses:
(H1) f é uma função mensurável satisfazendo

$$f \in L^2(0,T;L^{q(x)}(\Omega)), \text{ com } \frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1,$$

(H2) $u_0 \in L^2(\Omega)$.

*ICEN, UFPA, Brasil, fpmlopes@ufpa.br
†PPGM, UFPA, Brasil, e-mail manoeljeremias@yahoo.com.br

Teorema 1.1. *Sob as hipóteses (H1) e (H2) o problema (P) possui uma solução fraca no sentido da definição 1.1.*

Prova:
◇ Fazemos uma semi-deiscretização no espaço, usando o método de Faedo-Galerkin;
◇ Para resolvermos o sistema de EDO's oriundo do problema aproximado, usamos o teorema de caratheodory;
◇ A principal estimativa

$$\|u_m(t)\|_2^2 + \int_{J_m} \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^-}\, dt + \int_{I_m} \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^+}\, dt \leqslant C_0$$

Teorema 1.2. *Sob as hipóteses (H1) e (H2) a solução fraca do problema (P) é única.*

Prova: Usamos técnica padrão, que consiste em considerar duas soluções fracas diferentes u_1 e u_2 e introduzir a função $u = u_1 - u_2$ para, em seguida, mostrar que $u \equiv 0$.

Referências

[1] ACERBI, E. MINGIONE, G. - *Regularity results for electorheological Fluids: stationary case*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 334, 817-822, 2002.
[2] ADAMS, R. A. - *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
[4] ANTONTSEV, S. N., RODRIGUES, J. F. - *On Stationary Termo-rheological Viscous flows*, Ann. Univ. Ferrara, Sez., VII Sc. Mat., 52, 19-36, 2006.
[3] ANTONTSEV, S. N., CHIPOT, M. - *Uniqueness results for equation of the p(x)-Laplacian type*, Adv. Math. Sc. and Appl., 17, 287-304, 2007.
[5] ANTONTSEV, S. N., SHMAREV, S. I. - *A model porous medium equation with variable exponentes of nonlinearity: Existence uniqueness and localization properties of solutions*, Nonlinear Analysis, Theory Metholds Appl., 60, No.3 (A), 515-545, 2005.
[6] ANTONTSEV, S. N., SHMAREV, S. I. - *Existence and Uniqueness of Solutions of Degenerate Parabolic Equations with Variable Exponentes of nonlinearity*, Journal of Mathematical Sciences, 150, No.5, 2008.
[7] ARONSO, D. G. - *The Porous Medium Equation*, in: Nonlinear Diffusion Problems, Lect. 2nd 1985, sess. C.I.M.E., Montecatini Terme/Italy 1985, lect. Notes Math., Vol.1224, Springer, Berlin, 1-46, 1986.
[8] DAUTRAY, R., LIONS, J. L. - *Mathematical Analysis and Numerical Metholds for Science and Tecnology*, Spriger-Verlag, New-York, vol. 5, 2000.
[9] DIENING, L. - *Theoretical and Numerical Results for Electrorheological Fluids*, Ph.D thesis, University of Freiburg, Germany, 2002.
[10] FAN, X. L., ZHAO, D. - *Existence of Solutions for p(x)-Laplacian Dirichlet Problem*, Nonlinear Analysis, 52, 1843-1852, 2003.
[11] FAN, X. L., ZHAO, D. - *On the Spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ e $W^{m,p(x)}(\Omega)$*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 263, 424- 446, 2001.
[12] FAN, X. L., SHEN, J. S., ZHAO, D. - *Sobolev Embedding Theorems for Spaces $W^{m,p(x)}(\Omega)$*, J. Math. Anal. Appl. 262, 749-760, 2001.
[13] GUIMARÃES, C. J. - *Sobre os Espaços de Lebesgue e Sobolev Generalizados e Aplicações envolvendo o p(x)-Laplaciano*, Dissertação de Mestrado, PPGM, UFCG, 2006.
[14] LIONS, J. L. - *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéares.*, Dunod-Gauthier Villars, Paris, First edition, 1969.
[15] MEDEIROS, L. A., MILLA, M. A. - *Espaços de Sobolev Spaces (Iniciação aos Problemas Elípticos Nao Homogêneos)*, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.
[16] RUZICKA, M. - *Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory*, Springer-Verlage, Berlin, 2000.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{0}}$ 2 Novembro 2008

EXPLOSÃO DE SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DO CALOR NÃO-LINEAR

FLÁVIO DICKSTEIN *

Consideramos o problema de Cauchy para a equação do calor não-linear

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = |u|^\alpha u & \text{em } (0,T) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{em } \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{0.1}$$

onde $\alpha > 0$. Dizemos que u é solução (clássica) global de (0.1) se ela pode ser definida para todo $t > 0$. Caso contrário, dizemos que u explode em tempo finito. Defina o conjunto $\mathcal{G} = \{u_0 \in C_0(\mathbb{R}^n),\ u(t) \text{ é global }\}$. Os seguintes fatos são bem conhecidos.

1. Para todo $\alpha > 0$, $\mathcal{G} \neq \{0\}$, isto é, (0.1) admite soluções globais não-triviais.
2. Para todo $\alpha > 0$, $\mathcal{G} \neq C_0(\mathbb{R}^n)$. isto é, (0.1) admite soluções que explodem em tempo finito.
3. Se $\alpha \leq 2/N$ toda solução positiva explode em tempo finito.
4. Se $\alpha > 2/N$ (0.1) admite soluções globais positivas.
5. Se $\alpha > 2/N$, $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \neq 0$ então $\lambda\varphi \in \mathcal{G}$ se λ é pequeno e $\lambda\varphi \notin \mathcal{G}$ se λ é grande.

Nesta apresentação discutiremos o porquê destes fatos. Apresentaremos ainda alguns resultados recentes que procuram melhor caracterizar $\mathcal{G}$. Em particular, mostraremos que $\mathcal{G}$ não é estrelado (star-shaped) em torno de zero no caso subcrítico. Mais especificamente, mostraremos o seguinte.

Teorema 0.1. *Se $\alpha < 2/N$ existe $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda < 1$ tais que $\varphi \in \mathcal{G}$ e $\lambda\varphi \notin \mathcal{G}$.*

*Universidade Federal do Rio de Janeiro , IM, RJ, Brasil, flavio@labma.ufrj.br

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraba, Joo Pessoa
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

FAST BOUNDARY STABILIZATION OF THE WAVE EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENT *

R. FUENTES,† R. IZAGUIRRE ‡ & M. MILLA MIRANDA §

Abstract

In this paper is obtained the decay of solutions of the wave equation

$$(*) \quad y''(x,t) - \mu(t)\,\Delta y(x,t) = 0,\ x \in \Omega, t > 0$$

where the damping acts on a part of the boundary Γ of the Ω, Ω a bounded set of $\mathbb{R}^n$. The decay rates is arbitrarily prescribed.

Introduction

We motivate our study. Let Ω be a bounded set of $\mathbb{R}^n$ with smooth boundary Γ. Consider $x^0 \in \mathbb{R}^n$ and the sets

$$\Gamma(x^0) = \left\{x \in \Gamma; (x - x^0).\nu(x) \geq 0\right\}, \quad \Gamma_*(x^0) = \Gamma \backslash \Gamma(x^0)$$

where $\nu(x)$ is the outward unit normal vector at $x \in \Gamma$. We have the following mixed problem:

$$(P) \quad \left| \begin{array}{l} y''(x,t) - \Delta y(x,t) = 0,\ (x,t) \in \Omega \times]0,\infty[\\ y = \left| \begin{array}{l} 0\ , \ \text{ on } \Gamma_*(x^0)\times]0,\infty[\\ v\ , \ \text{ on } \Gamma(x^0)\times]0,\infty[\end{array} \right. \\ y(x,0) = y^0(x) \in L^2(\Omega), \quad y'(x,0) = y^1(x) \in H^{-1}(\Omega), \end{array} \right.$$

Consider the functional

$$J(v) = \int_0^\infty \|y(v)\|^2_{L^2(\Omega)}\ dt\ + N \int_{\Sigma(x^0)} v^2 d\Gamma dt, \quad \big(\Sigma(x^0) = \Gamma(x^0)\times]0,\infty[\big)$$

where $N > 0$ is a given real number and y(v) is the solution of (P). J. L. Lions [4] showed that with the solution u of the problem

$$J(u) = \min J(v)$$

it is possible to construct a damping on $\Sigma(x^0)$ such that the corresponding solution y(u) = y, $u = F(y, y')$ of (P) verifying

$$E(t) \leq Ce^{-2w(x^0)t},\ \forall\ t \geq 0$$

for some constant $C > 0$ and real number $w(x^0) > 0$. Here

---

* *Mathematics Subject Classifications:* 35L70, 35B35
Key words: wave equation, stabilization, rapid decay
†Universidade Federal Fluminense, IM, SP, Brasil, ricardof16@yahoo.com.br
‡Universidad Nacional Mayor de San Marcos, FCM, Lima, Per, raul_izaguirre2222@yahoo.es
§Universidade Federal do Rio de janeiro, IM, RJ, Brasil, milla@im.ufrj.br

$$E(t) = \frac{1}{2} \|y'(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \frac{1}{2} \|y(t)\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad t \geq 0.$$

Let $w > 0$ be an arbitrary real number. By a modification of the damping introduced by J. L. Lions [4], V. Komornik [5] proved that there exists a constant $C > 0$ such that

$$E(t) \leq Ce^{-wt}, \; \forall \, t \geq 0.$$

Other results related to our study can be see in [1], [2], [3], [6] and [7].

Main Result

Theorem 0.1. *Let $\mu(t)$ be a function satisfying*

$$\mu \in W^{1,\infty}\left(]0,\infty[\right), \; \mu(t) \geq \mu_0 > 0, \;\; \mu'(t) \leq 0.$$

Let $w > 0$ be a given real number. Then the solution y of (P) with equation (*) and appropriate damping on $\Sigma(x^0)$ verifies

$$E(t) \leq Ce^{-wt}, \; \forall \, t \geq 0 \,, \; (C > 0 \textit{ constant})$$

where

$$E(t) = \frac{1}{2} \|y'(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \frac{1}{2} \left[\mu(t) \|y(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right], \; t \geq 0.$$

To prove the theorem we follows the ideas of V. Komornik [5].

References

[1] BENABDALLAH, A., LENCZNER M., -*Stabilisation de lequationdes ondes par un contrle optimal distribu: Estimation du tous de dcroissance* C. R. Acad. Sci. Sr. I Math., 319(1994), pp. 691-696.

[2] BOURQUIN F., BRANCHET B., COLLET M. - *Computational methods for the fast boundary stabilization of flexible structures* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg 196 (2007), pp. 988-1005.

[3] LASIECKA I., TRIGGIANI R. - *Ricatti equations for the hyperbolic partial differential equations with $L_2(0,T;L^2(\Omega))$-Dirichlet boundary terms*, SIAM J. Control Optim., 24(1986), pp. 884-925.

[4] LIONS, J.L. - *Exact controllability, stability and perturbations for distributed systems*, SIAM Rev, 30 (1988), pp. 1-68.

[5] KOMORNIK V.-*Rapid boundary stabilization of linear distributed systems*, SIAM J. Control Optim., Vol. 35, No. 5 (1997), pp. 1591-1613.

[6] KOMORNIK V., LORETI P.-*Fourier Series in Control Theory*, Springer, (2000), New York.

[7] ZUAZUA E.-*Sur loptimalit des feedbacks de stabilization*, C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math., 309(1989), pp. 547-552.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{0}}$ 2 Novembro 2008

FATORAÇÃO DE FUNÇÕES INTEIRAS NUCLEARES DE TIPO LIMITADO

A. M. JATOBÁ *

Neste trabalho estudamos as relações entre o espaço $\mathcal{H}_b(E;F)$ das funções inteiras de tipo limitado, o espaço $\mathcal{H}_{Nb}(E;F)$ das funções inteiras nucleares de tipo limitado, o espaço $\mathcal{H}_{PIb}(E;F)$ das funções inteiras Pietsch-integrais de tipo limitado, e o espaço $\mathcal{H}_{GIb}(E;F)$ das funções inteiras Grothendieck-integrais de tipo limitado. Estendemos para o caso de funções inteiras resultados de Alencar [1] e Cilia e Gutiérrez [2] obtidos para polinômios m-homogêneos.

No principal resultado deste trabalho, mostramos que se uma função $f \in \mathcal{H}_{Nb}(E;F)$, então existem um espaço de Banach separável e reflexivo R, um operador compacto $T \in \mathcal{L}(E;R)$ e uma função $g \in \mathcal{H}_{Nb}(R;F)$ tais que $f = g \circ T$. Reciprocamente mostramos que dado um espaço de Banach Z, um operador fracamente compacto $T \in \mathcal{L}(E;Z)$ e uma função $g \in \mathcal{H}_{PIb}(Z;F)$, então a função $f = g \circ T \in \mathcal{H}_{Nb}(E;F)$. Este é o conteúdo do Teorema 0.1, o qual estende um resultado de Cilia e Gutiérrez [2] para polinômios m-homogêneos.

Um polinômio $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$ é *nuclear* se pode ser escrito na forma

$$P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} [x'_j(x)]^m y_j \text{ para todo } x \in E,$$

onde $(x'_j) \subset E'$ e $(y_j) \subset F$ são sequências limitadas tais que $\sum_{j=1}^{\infty} \|x'_j\|^m \|y_j\| < \infty$. O espaço de todos os polinômios m-homogêneos nucleares de E em F é denotado por $\mathcal{P}_N(^mE;F)$, o qual torna-se um espaço de Banach com a norma

$$\|P\|_N := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \|x'_j\|^m \|y_j\| \right\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as sequências $(x'_j) \subset E'$ e $(y_j) \subset F$ as quais satisfazem a definição.

Um polinômio $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$ é dito *Pietsch-integral* se P pode ser escrito na forma

$$P(x) = \int_{B_{E'}} [x'(x)]^m \, dG(x')$$

para todo $x \in E$, onde G é uma medida vetorial de Borel regular a valores em F, de variação limitada, definida na $B_{E'}$ com a topologia fraca-estrela. O espaço de todos os polinômios m-homogêneos Pietsch-integrais de E em F é denotado por $\mathcal{P}_{PI}(^mE;F)$, o qual torna-se um espaço de Banach com a norma

$$\|P\|_{PI} := \inf |G|(B_{E'}),$$

onde $|G|$ é a variação de G, e o ínfimo é tomado sobre todas as medidas satisfazendo a definição. A definição de polinômio *Grothendieck-integral* é análogo, mas tomando a medida G com valores em F''. O espaço de todos todos os polinômios m-homogêneos Grothendieck-integrais é denotado por $\mathcal{P}_{GI}(^mE;F)$.

$\mathcal{H}(E;F)$ denota o espaço vetorial de todas as funções inteiras de E em F. Para cada $f \in \mathcal{H}(E;F)$, temos a série de Taylor em $a \in E$,

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(a)(x),$$

para cada $x \in E$ e $\hat{d}^m f(a) \in \mathcal{P}(^mE;F)$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$. Uma função $f \in \mathcal{H}(E;F)$ é dita *nuclear de tipo limitado*, se $\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(0) \in \mathcal{P}_N(^mE;F)$, para todo $m \in \mathbb{N}_0$ e $\lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(0)\|_N\right)^{\frac{1}{m}} = 0$. Denotamos por $\mathcal{H}_{Nb}(E;F)$ o espaço de todas as funções inteiras nucleares de tipo limitado o qual foi introduzido em Gupta [3].

*IMECC-UNICAMP, Campinas, SP, Brasil, marques@ime.unicamp.br, pesquisa financiada pelo CNPq

Definição 0.1. *Uma função* $f \in \mathcal{H}(E;F)$ *é dito* Pietsch-integral de tipo limitado *se*

(i) $\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(0) \in \mathcal{P}_{PI}(^m E;F)$*, para todo* $m \in \mathbb{N}_0$.

(ii) $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(0)\|_{PI}\right)^{\frac{1}{m}} = 0.$

Denotamos por $\mathcal{H}_{PIb}(E;F)$ *o espaço vetorial de todas as funções inteiras Pietsch-integrais de tipo limitado de* E *em* F.

Analogamente denotamos por $\mathcal{H}_{GIb}(E;F)$ o espaço vetorial de todas as funções inteiras Grothendieck-integrais de tipo limitado de E em F.

Lema 0.1. *Se* $P \in \mathcal{P}_{PI}(^m E;F)$, $k = 1,\ldots,m$ *e* $a \in E$*, então* $\hat{d}^k P(a) \in \mathcal{P}_{PI}(^k E;F)$ *e*

$$\|\tfrac{1}{k!}\hat{d}^k P(a)\|_{PI} \leq 2^m \|P\|_{PI}\|a\|^{m-k}.$$

Lema 0.2. *Seja* $f \in \mathcal{H}_{PIb}(E;F)$*. Então, para todo* $a \in E$,

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(a)\|_{PI}\right)^{\frac{1}{m}} = 0.$$

Portanto, a função $\tau_a(f) = f(a+\cdot)$ *pertence* $\mathcal{H}_{PIb}(E;F)$.

Resultados similares são verdadeiros, com a simples modificação, para $\mathcal{P}_{GIb}(E;F)$ e $\mathcal{H}_{GIb}(E;F)$.

Proposição 0.1. Seja $f \in \mathcal{H}_{GIb}(E;F)$, e sejam $S \in \mathcal{L}(F;Y)$ e $T \in \mathcal{L}(X;E)$ operadores fracamente compactos. Então:

(a) $S \circ f \in \mathcal{H}_{PIb}(E;Y)$.

(b) $J_F \circ f \circ T \in \mathcal{H}_{Nb}(X;F'')$, onde $J_F\colon F \to F''$ é mergulho natural.

Teorema 0.1. Dado $f \in \mathcal{H}(E;F)$, as seguintes condições são equivalentes:

(i) $f \in \mathcal{H}_{Nb}(E;F)$.

(ii) Existem um espaço de Banach Z, um operador compacto $T \in \mathcal{L}(E;Z)$ e uma função $g \in \mathcal{H}_{Nb}(Z;F)$ tais que $f = g \circ T$.

(iii) Existem um espaço de Banach separável e reflexivo R, um operador compacto $T \in \mathcal{L}(E;R)$ e uma função $g \in \mathcal{H}_{Nb}(R;F)$ tais que $f = g \circ T$.

(iv) Existem um espaço de Banach Z, um operador fracamente compacto $T \in \mathcal{L}(E;Z)$ e uma função $g \in \mathcal{H}_{PIb}(Z;F)$ tais que $f = g \circ T$.

Referências

[1] R. ALENCAR, *On Reflexivity and basis for* $\mathcal{P}(^m E)$, Proc. Roy. Irish Acad. **85A** (1985), 131-138.
[2] R. CILIA AND J. M. GUTIÉRREZ, *Nuclear and integral polynomials*, J. Aust. Math. Soc **76** (2004), 269-280.
[3] C. P. GUPTA, *Convolution Operators and Holomorphic Mappings on a Banach Space*, Département de Mathématiques, Université de Sherbrooke 1969.
[4] J. MUJICA, *Complex Analysis in Banach Spaces*, *Math. Studies*, Vol. 120, North-Holland, Amsterdam, 1986.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{o}}$ 2 Novembro 2008

FORMULAÇÃO MÍNIMOS QUADRADOS COM ELEMENTOS FINITOS EM FLUIDOS NÃO NEWTONIANOS

J.A.J. AVILA *

As equações de Navier-Stokes governam o compotamento de uma vasta classe de fluidos. A suposição fundamental referente ao modelo constitutivo, estabelece uma conexão linear entre os esforços e a taxa de deformação, para fluidos de viscosidade constante. A cada dia, o estudo dos fluidos que não obedecem esta conexão linear cresce em importância. Muitos líquidos tais como polímeros, óleos de diversas qualidades e plásticos são usados atualmente em processos industriais, mostrando características não lineares, porém, em outros líquidos isto ocorre naturalmente como no sangue e o fluido sinovial. O processamento e o transporte de tais fluidos são problemas centrais nas industrias químicas, de alimentos, de plásticos, de petróleo e de polímeros.
Resolveremos numericamente o problema de uma cavidade quadrada (veja em Fig. 1 as condições de contorno para o campo de velocidades) usando o método: Formulação Mínimos Quadrados com Elementos Finitos (FMQEF) para um escoamento estacionário e isotérmico de um fluido incompressível não Newtoniano 2D, modelo Lei de Potência. O sistema de equações que governa esse escoamento, são: a equação de continuidade e a equação da quantidade de movimento com viscosidade não Newtoniana, isto é,

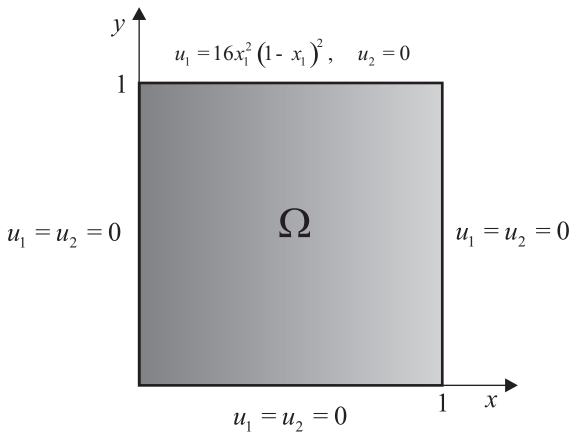

Figura 1: Condições de contorno numa cavidade quadrada bidimensional.

$$
\begin{aligned}
&\nabla \cdot u = 0 \\
&(u \cdot \nabla)u + \frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{1}{\rho}\nabla \cdot (2\eta D) = f \\
&\eta = k\, I^{\frac{n-1}{2}}, \quad I = 2II_D, \quad k, n > 0
\end{aligned}
$$

u: vetor velocidade do fluido	f: vetor força de corpo	k: índice de consistência
ρ: densidade do fluido	η: viscosidade não Newtoniana	II_D: segunda invariante de D
p: pressão	D: tensor taxa de deformação	n: índice lei de potência

As incógnitas são as variavéis: $u = (u_1, u_2)$ e p. Para mais detalhes veja Avila [1]. A seguir mostraremos a FMQEF, Avila [1], Bose and Carey [2]. A função resíduo num elemento e é definida por:

$$R_i^e = A_{ij}\, \tilde{u}_j^e - F_i\,, \quad i, j = \overline{1, M}\,,$$

onde $\tilde{u}^e$ é a função interpolante definida como:

$$\tilde{u}^e = \sum_{i=1}^{Nn_l} \delta_i^e\, \omega_i\,,$$

tal que $\tilde{u}^e(n_i) = \delta_i^e$ é o i-ésimo valor nodal de $\tilde{u}^e$, ω_i são as funções bases locais e Nn_l número de nós locais. Num sistema de M- equações o *erro funcional mínimos quadrados*, I^e, para um elemento e, é definido como:

$$I^e = \sum_{i=1}^{M} \left|\left| R_i^e \right|\right|_0^2 = \sum_{i=1}^{M} \int_e \left(R_i^e \right)^2 dx$$

*Colegiado de Matemática, Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, UESC, BA, Brasil, jorge.avila@poli.usp.br

Para uma malha consistindo de Ne-elementos, o ***erro funcional total mínimos quadrados***, I, é definido por:

$$I : \mathbb{R}^{Nn} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \qquad\qquad \delta \longmapsto I(\delta) = \sum_{e=1}^{Ne} I^e(\delta^e)\,.$$

Uma condição necessária para que δ seja o mínimo é:

$$\frac{\partial I(\delta)}{\partial \delta} = 0\,.$$

Agora, denote-se :

$$g^g = \frac{\partial I(\delta)}{\partial \delta}\,, \qquad g^e = \frac{\partial I^e(\delta^e)}{\partial \delta^e} = 2\sum_{i=1}^{M}\int_e R_i^e\,\frac{\partial R_i^e}{\partial \delta^e}\,dx\,,$$

Então, temos:

$$g^g = \frac{\partial I(\delta)}{\partial \delta} = 0\,.$$

Derivando com respeito a δ a função I, e subtituindo na última equação temos:

$$g^g = \sum_{e=1}^{Ne}\frac{\partial I^e(\delta^e)}{\partial \delta^e} = \sum_{e=1}^{Ne} g^e = 0 \qquad \Rightarrow \qquad g^g = \sum_{e=1}^{Ne} g^e = 0\,,$$

Portanto, esta última equação representa a verdadeira expressão da FMQEF.

Resultados numéricos foram testados numa cavidade quadrada 2D, para o caso de $n = 1,9$, veja Fig. 2. A pressão foi adimensionalizada, isto é:

$$\mathrm{P} = \frac{p}{\rho_0 U_0^2}$$

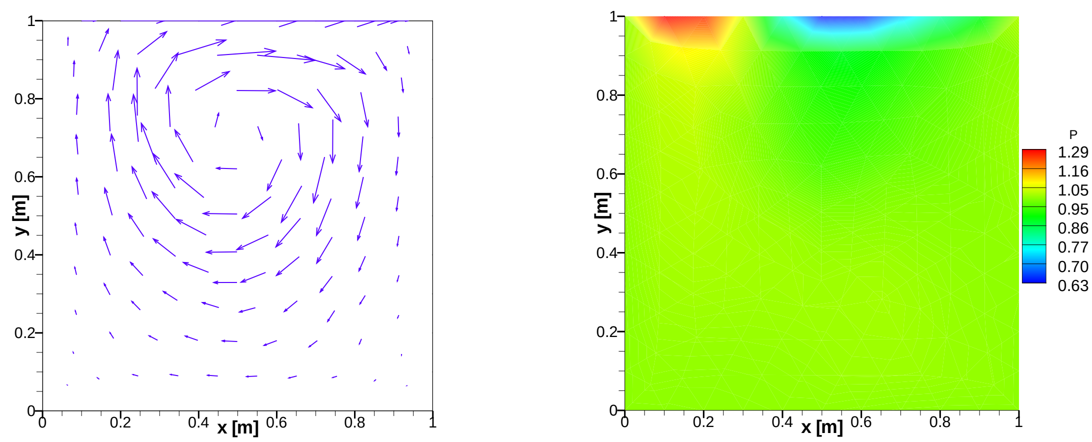

Figura 2. Solução numérica numa cavidade quadrada para um fluido não Newtoniano, $n = 1,9$. Esquerda: campo de velocidade. Direita: contornos de pressão.

Referências

[1] AVILA, J.A.J. - *Formulação Mínimos Quadrados com Elementos Finitos na resolução numérica do escoamento de um fluido não Newtoniano*, 130 p. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

[2] A. BOSE, AND G. F. CAREY - *Least-squares $p-r$ finite element methods for incompressible non-Newtonian flows*, Comput. Meth. appl. Mech. Engrg, **180**, 431-458, 1999.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{o}}$ 2 Novembro 2008

FUNÇÕES HÍBRIDAS NA ÁLGEBRA DE FUNÇÕES GENERALIZADAS

M. R. SOARES *

25 de agosto de 2008

Desde a apresentação das Funções Generalizadas de Colombeau nos anos 80 houve um grande e rápido crescimento desse novo ramo da análise não linear, tanto no aspecto teórico como no aplicado, ver [1] e [2]. Nosso interesse é investigar o comportamento das funções de várias variáveis complexas nesse novo contexto das Funções Generalizadas, isto é, estudar as Funções Holomorfas Generalizadas. Para isso fazemos uma abordagem utilizando os elementos estritíssimos, que estão contidos no conjunto dos elementos estritos, sendo tais elementos estritos os que compõem o complementar das funções holomorfas clássicas na álgebra das Funções Holomorfas Generalizadas, ver [5]. Nesse contexto surgem os elementos híbridos que são aqueles que combinam comportamentos $\mathcal{C}^\infty$ e estrito em partes não vazias de um mesmo aberto; discutimos a existência de tais elementos em $\mathcal{G}(\Omega)$. Para obtenção de elementos híbridos interessantes, construímos um novo tipo de função de corte, a saber, a "função de corte de Heaviside", que tem existência na álgebra diferencial $\mathcal{G}(\Omega)$ e queda "instantânea"de 1 para 0, o que é impossível em $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Exibimos então, a partir dessa função de corte de Heaviside, um elemento $G \in \mathcal{G}(\Omega)$ cujo comportamento, holomorfo clássico e estrito, estão separados apenas pela fronteira de um aberto.

No que segue Ω denotará um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$; $\mathbb{K}$ denotará $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $I :=]0,1] \subset \mathbb{R}$. Se $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}$ é uma função e $\emptyset \neq S \subset \Omega$ então $\| \varphi \|_S := \sup_{x\in S} | \varphi(x) |$.

A álgebra de Colombeau das funções generalizadas simplificadas sobre Ω é definida por: $\mathcal{G}(\Omega,\mathbb{K}) = \dfrac{\mathcal{E}_M[\Omega,\mathbb{K}]}{\mathcal{N}[\Omega,\mathbb{K}]}$ onde $\mathcal{E}_M[\Omega,\mathbb{K}]$ é a $\mathbb{K}$-algebra de funções $\hat{u} : I \times \Omega \to \mathbb{K}$ tais que $\hat{u}(\varepsilon,.) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $\forall \varepsilon \in I$ e satisfazem as seguintes condições de moderação: (M) $\forall K \subset\subset \Omega,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \exists \sigma \in \mathbb{R}$, tal que $\| \partial^\alpha \hat{u}(\varepsilon,.) \|_K = o(\varepsilon^\sigma)$ quando $\varepsilon \to 0^+$, isto é, $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \dfrac{\| \partial^\alpha \hat{u}(\varepsilon,.) \|}{\varepsilon^\sigma} = 0$; o ideal $\mathcal{N}[\Omega,\mathbb{K}]$ de $\mathcal{E}_M[\Omega,\mathbb{K}]$ é definido como o conjunto dos elementos que verificam a condição de nulidade: (N) $\forall K \subset\subset \Omega,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \forall \sigma \in \mathbb{R}$, nós temos $\| \partial^\alpha \hat{u}(\varepsilon,.) \|_K = o(\varepsilon^\sigma)$ quando $\varepsilon \to 0^+$.
Escreveremos: $\mathcal{E}_M[\Omega]$; $\mathcal{N}[\Omega]$; $\mathcal{G}(\Omega)$ no lugar de $\mathcal{E}_M[\Omega,\mathbb{K}]$; $\mathcal{N}[\Omega,\mathbb{K}]$; e $\mathcal{G}(\Omega,\mathbb{K})$ respectivamente.
Se $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ é um aberto não vazio e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ então as funções holomorfas generalizadas sobre Ω são os elementos $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ tais que $\overline{\partial} f := \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j = 0$.
Nós denotamos $\mathcal{HG}(\Omega)$ a $\mathbb{C}$-algebra de todas as funções holomorfas generalizadas, já a $\mathbb{C}$-algebra das funções holomorfas clássicas sobre $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ serão denotadas por $\mathcal{H}(\Omega)$; $\mathcal{HG}_e(\Omega)$ indicará o conjunto das funções holomorfas generalizadas estritas e $\mathcal{HG}_{ee}(\Omega)$ o conjunto dos elementos estritíssimos.

Proposição 0.1. *Seja (V,Ω) um par de abertos não vazios de $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, tal que $\overline{V} \subset\subset \Omega$; então existe $g \in \mathcal{G}(\Omega)\backslash\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tal que $g_{|V} \in \mathcal{H}(V)$ e $g_{|V} \neq 0$.*

Proposição 0.2. *Dado $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, aberto não vazio, existem abertos A e B não vazios, contidos em Ω com $A \cup B \neq \Omega$, $A \cap B = \emptyset$ e $g \in \mathcal{G}(\Omega)$ tais que $g_{|A} \in \mathcal{HG}_e(A)$ e $g_{|B} \in \mathcal{H}(B)$*

É interessante notar que na última proposição obtemos um elemento de $\mathcal{G}(\Omega)$ cujo comportamento holomorfo clássico e estrito é separado por um subconjunto não vazio de Ω podemos otimizar o comportamento com um procedimento que resultará na existência de um elemento de $\mathcal{G}(\Omega)$ que será holomorfo generalizado estrito em $\Omega\backslash\overline{B}$ e holomorfo clássico em B, para abertos Ω e B convenientes. O processo de construção do elemento, acima mencionado, ilustrará a dificuldade na obtenção de elementos híbridos com certos comportamentos iniciais pré-estabelecidos e passará pela construção de uma função de corte só possível de ser obtida em $\mathcal{G}(\Omega)$.

*Instituição ... , UNESP, SP, Brasil, reicher@feis.unesp.br

Lema 0.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Definindo $F_\alpha := \{x \in \Omega \mid f(x) \leq \alpha\}$ e $A_\alpha := \{x \in \Omega \mid f(x) < \alpha\}$ então F_α é fechado em Ω, A_α é aberto e além disso A_α está contido no interior de F_α e o fecho de A_α em Ω está contido em F_α. Em geral tais inclusões são estritas e é indiferente o resultado se substituimos os sinais $\leq$ e $<$ por $\geq$ e $>$ respectivamente.*

Proposição 0.3. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ tal que: $A := \{x \in \Omega \mid f(x) > 0\} \neq \emptyset$; $\partial A := \{x \in \Omega \mid f(x) = 0\}$ e $\Omega \setminus \overline{A} \neq \emptyset$. Então existe $H \in \mathcal{G}(\Omega)$ tal que $H_{|A} = 1$ e $H_{|\Omega \setminus \overline{A}} = 0$*

Idéia da Demonstação: a) Para cada $\varepsilon \in I = (0,1]$ é possível exiber uma função crescente $g_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que $0 \leq g_\varepsilon(t) \leq 1$, $\forall (\varepsilon, t) \in I \times \mathbb{R}$; $g_\varepsilon(t) > 0$, $\forall \varepsilon \in I$ e $t > -\varepsilon$ verificando $g_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq -\varepsilon \\ 1, & \text{se } t \geq \varepsilon \end{cases}$ e tal que a função $\hat{h} : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\hat{h}(\varepsilon, t) = g_\varepsilon(t)$, $\forall (\varepsilon, t) \in I \times \mathbb{R}$, seja moderada, ver [1]. A função $h = \hat{h} + \mathcal{N}[\mathbb{R}] \in \mathcal{G}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é uma função de Heaviside, isto é, tem a função de Heaviside como aspecto macroscópico, ver [3]. Consideramos a seguir a função moderada $\hat{H} : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall (\varepsilon, x) \in I \times \Omega$, $\hat{H}(\varepsilon, x) = \hat{h}(\varepsilon, f(x)) = g_\varepsilon(f(x))$. Claramente a função $\hat{H}(\varepsilon, .) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ para todo $\varepsilon \in I$ arbitrário fixo. Como $\hat{H} \in \mathcal{E}_M[\Omega]$ segue que $H = \hat{H} + \mathcal{N}[\Omega] \in \mathcal{G}(\Omega)$; b) verifica-se então que $(\hat{H}_{|I \times A} - 1) \in \mathcal{N}[\mathcal{A}]$, isto é, mostra-se que $H_{|A} = 1$; c) Para mostrar que $H_{|\Omega \setminus \overline{A}} = 0$ verifica-se que $H_{|\Omega \setminus \overline{A}} \in \mathcal{N}[\Omega \setminus \overline{A}]$. ■

Definição 0.1. *Nas condições da proposição acima chamaremos a função H de "Função de corte de Heaviside" para A(e denotaremos fch para A).*

Observação 0.1. *Se Ω é um domínio $\mathcal{C}^\infty$-estritamente pseudoconvexo em $\mathbb{C}^n$, ver* [4], *temos que existe $H \in \mathcal{G}(\tilde{\Omega})$ (onde $\tilde{\Omega}$ é um aberto de $\mathbb{C}^n$, conexo, tal que $\overline{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$) para o qual $H_{|\Omega} = 1$ e $H_{|\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}} = 0$. É claro também que podemos considerar $H \in \mathcal{G}(\mathbb{C}^n)$.*

Exibimos, na proposição 0.2, um elemento híbrido cujos comportamentos, clássico e estrito, estavam separados por um aberto. Exibiremos agora um elemento de $\mathcal{G}(\Omega)$ cujos comportamentos, clássico e estrito estão separados apenas pela fronteira de uma aberto.

Proposição 0.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ um conjunto $\mathcal{C}^\infty$-estritamente pseudoconvexo e $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{C}^n$ um aberto tal que $\overline{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$. Então existe $g \in \mathcal{G}(\tilde{\Omega})$ tal que $g_{|\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}} \in \mathcal{HG}_e(\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega})$ e $g_{|\Omega} \in \mathcal{H}(\Omega)$*

Para a demonstração tome $H \in \mathcal{G}(\tilde{\Omega})$ uma fch para Ω e $h \in \mathcal{HG}_{ee}(\tilde{\Omega})$. Definimos $g := (1 - H)h \in \mathcal{G}(\tilde{\Omega})$ e teremos que $g_{|\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}} = (1 - H)_{|\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}} \cdot h_{|\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}} = h_{|\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}} \in \mathcal{HG}_e(\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega})$ e que $g_{|\Omega} = (1 - H)_{|\Omega} \cdot h_{|\Omega} = 0 \in \mathcal{H}(\Omega)$. ■

Observação 0.2. *Se $\tilde{\Omega}$ for conexo a função g da Proposição* 0.4. *é tal que $g \notin \mathcal{HG}(\tilde{\Omega})$.*

De fato: se $g \in \mathcal{HG}(\tilde{\Omega})$, como $g_{|\Omega} = 0$ segue do Princípio do prolongamento analítico generalizado, ver [1], que $g = 0$ donde viria que $0 = g_{|\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}} = h_{|\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}} \in \mathcal{HG}_e(\tilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega})$ o que é um absurdo.

Referências

[1] Aragona, J. - *Introdução à Teoria das Funções Generalizadas de Colombeau.*, IME-USP, São Paulo, Notas de Aulas MAT-829, 1989.

[2] Aragona, J. & Biagioni, H. - *A Intrinsic definition of the Colombeau algebra of generalized functions.*, Anal. Math., 17(1991), 75-132.

[3] Aragona, J. & Villarreal, F. - *Colombeau's Theory and Shock Waves in a Problem of Hydrodynamics.*, J. d'Analyse Math., 61(1993), 113-143.

[4] Hörmander, L. - *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables.*, Amsterdam, 1972.

[5] Soares, M. R. - *Sobre alguns problemas da teoria das funções holomorfas generalizadas.*, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{0}}$ 2 Novembro 2008

Funções s-assintoticamente ω-periódicas e aplicações a equações diferenciais neutras

HERNÁN R. HENRÍQUEZ *, MICHELLE PIERRI † & PLÁCIDO TÁBOAS ‡

Nesta palestra apresentaremos alguns dos resultados em nossos recentes artigos

1. Hernán R. Henríquez; Michelle Pierri; Plácido Táboas, On S-Asymptotically ω-periodic functions on Banach spaces and applications. *J. Math. Anal. Appl. 343 (2008), no. 2, 1119–1130.*

2. Hernán R. Henríquez; Michelle Pierri; Plácido Táboas, Existence of S-asymptotically ω-periodic solutions for abstract neutral equations. To appear in *Bulletin of the Australian Mathematical Society.*

Seja X um espaço de Banach. Dizemos que uma função contínua e limitada $f : [0, \infty) \to X$ é S-assintoticamente ω-periódica se

$$\lim_{t\to\infty} [f(t + \omega) - f(t)] = 0.$$

A literatura sobre este tipo de funções é muito restrita e limitada essencialmete ao estudo de existência de soluções S-assintoticamente ω-periódicas para equações diferenciais ordinárias descritas em espaços de dimensão finita, veja entre alguns trabalhos [3,4,5,6,7]. Assim, os trabalhos [1,2] têm como motivação básica dar uma contribuição inicial no desenvolvimento de uma teoria independente de funções S-assintoticamente ω-periódicas. Nesses trabalhos temos como interesse particular o estudo das relações entre este tipo de funções e a classe de funções assintoticamente periódicas, bem como o estudo da existência de soluções fracas S-assintoticamente ω-periódicas para equações diferenciais abstratas.

Nesta palestra apresentaremos diversos resultados que relacionam os conceitos de funções S-assintoticamente ω-periódicas e assintoticamente ω-periódicas e alguns resultados sobre a existência de soluções fracas S-assintoticamente ω-periódicas para sistemas diferenciais abstratos. Neste último caso, apresentaremos resultados sobre existência de soluções fracas S-assintoticamente ω-periódicas para sistemas neutros descritos na forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(u(t) - f(t, u_t)\right) &= Au(t) + g(t, u_t), \quad t \geq 0, \\ \frac{d}{dt} D(t, u_t) &= AD(t, u_t) + g(t, u_t), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

com condição inicial

$$u_0 = \varphi \in \mathcal{B}.$$

onde A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo uniformemente estável $(T(t))_{t\geq 0}$ em X, $u(t) \in X$, a história $u_t : (-\infty, 0] \to X$ definida por $u_t(\theta) = u(t+\theta)$, pertence a algum espaço de fase abstrato $\mathcal{B}$ definido axiomaticamente, $D(t, \psi) = \psi(0) - f(t, \psi)$ e $f, g : \mathbb{R} \times \mathcal{B} \to X$ são funções apropriadas.

*Departamento de Matemática, Universidad de Santiago, USACH, Chile, hhenriqu@lauca.usach.cl
†Departamento de Matemática, I.C.M.C. Universidade de São Paulo, Brasil, michelle@icmc.usp.br
‡Departamento de Matemática, I.C.M.C. Universidade de São Paulo, Brasil, pztaboas@imc.usp.br

Referências

[1] Hernán R. Henríquez, Michelle Pierri and Plácido Táboas - *On S-Asymptotically Periodic On S-Asymptotically ω-Periodic functions on Banach spaces and applications.* J. Math. Anal. Appl. 343 (2008), no. 2, 1119–1130.

[2] Hernán R. Henríquez, Michelle Pierri and Plácido Táboas - *Existence of S-asymptotically ω-periodic solutions for Abstract Neutral Equations.* To appear in Bulletin of the Australian Mathematical Society, (2008).

[3] Liang, Zhong Chao - *Asymptotically periodic solutions of a class of second order nonlinear differential equations.* Proc. Amer. Math. Soc., 99 (4) (1987), 693-699.

[4] Grimmer, R. C. - *Asymptotically almost periodic solutions of differential equations.* SIAM J. Appl. Math., 17 (1969) 109-115.

[5] Utz, W. R. and Waltman, P. - *Asymptotic almost periodicity of solutions of a system of differential equations.* Proc. Amer. Math. Soc., 18 (1967), 597-601.

[6] Wong, J. S. W. and Burton, T. A. - *Some properties of solutions of $u''(t)+a(t)f(u)g(u')=0$. II.* Monatsh. Math., 69 (1965), 368-374.

[7] Gao Haiyin, Wang Ke, Wei Fengying and Ding Xiaohua - *Massera-type theorem and asymptotically periodic Logistic equations.* Nonlinear Analysis: Real World Applications, 7 (2006), 1268-1283.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{0}}$ 2 November 2008

HOPF BIFURCATION FOR A CLASS OF COMPETITION REACTION-DIFFUSION SYSTEM WITH DELAY

K.A.G. AZEVEDO *

Summary: In this work we have studied a class of competition reaction-diffusion system with Dirichlet boundary condition and distributed delay. We have shown that Hopf bifurcation occurs when the delay and the parameter k vary. The main techniques used here are usual, the analysis of the characteristic equation of the linearized problem, the Liapunov-Schmidt method and the Implicit Function Theorem.

In many mathematical models of biological systems and population dynamic when the information of past states must been considered we include a negative delayed feedback control in the systems, for more details see [1] and [2]. We are concerned in the following reaction-diffusion system with delay that is incorporated to the control and Dirichlet boundary condition with competition between different species:

$$\begin{aligned} U_t(t,x) &= U_{xx}(t,x) + kU(t,x) + \frac{k}{\delta}\int_{-\tau}^{-\tau+\delta} g_1(U(t,x),U(t+s,x))\,ds + \frac{k}{\delta}\int_{-\tau}^{-\tau+\delta} g_2(U(t,x),V(t+s,x))\,ds, \qquad (0.1)\\ V_t(t,x) &= V_{xx}(t,x) + kV(t,x) + \frac{k}{\delta}\int_{-\tau}^{-\tau+\delta} h_1(V(t,x),V(t+s,x))\,ds + \frac{k}{\delta}\int_{-\tau}^{-\tau+\delta} h_2(V(t,x),U(t+s,x))\,ds,\ \ t>0,\ 0<x<\pi, \end{aligned}$$

$$U(t,0) = U(t,\pi) = V(t,0) = V(t,\pi) = 0,\ \ t \geq 0$$

$$(U(t,x),V(t,x)) = (\psi_1(t,x),\psi_2(t,x)),\ \ (t,x) \in [-\tau,0]\times[0,\pi]$$

$(\psi_1,\psi_2) \in C([-\tau,0],H_0^1 \times H_0^1)$, with k, τ e δ positive constants , $0 < \delta \leq \tau$.

This system describes the dynamics of different species population interacting with each other in environment surrounded by a totally unfavorable region where the population densities cannot attain positive values. Here $U(t,x)$ and $V(t,x)$, represents the size of the population on the instant t and on the localization x, for $x \in [0,\pi]$ and $t \geq -\tau$. We look for periodic solutions arising by Hopf bifurcation. It is the purpose of this paper to prove the existence of a sequence of Hopf bifurcations which arise from positive equilibrium (spatially nonconstant) to some values of k as the delay τ varies. In [3]-[6], the periodic phenomenon by Hopf bifurcation is studied for a delayed reaction-diffusion equation of a single species population and in [7] for a delayed competition reaction-diffusion system. In [8], the authors investigate the effects of time delay and diffusion rate on the stability of the steady state for the competition diffusion system with infinite delay and Dirichelet boundary conditions at the boundaries of the domain. We have generalized [7], in the sense that we consider distributed delay and if consider $g_1(a,b) = -b_1ab$, $g_2(a,b) = -c_1ab$, $h_1(a,b) = -c_2ab$ e $h_2(a,b) = -b_2ab$ and take $\delta \to 0$, we have the system in [7]. This kind of control is motivated by [9] and [10] .

The main hypotheses on the functions g_1, g_2, h_1 and h_2 in the system (0.1) are: $g_1, g_2, h_1, h_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ are functions of (a,b) continuously differentiable with $g_1(0,0) = g_2(0,0) = h_1(0,0) = h_2(0,0) = 0$, $b_1c_2 - b_2c_1 \neq 0$ and

$$\lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{g_1(a,b)}{ab} = -b_1, \quad \lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{g_2(a,b)}{ab} = -c_1,$$
$$\lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{h_1(a,b)}{ab} = -c_2, \quad \lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{h_2(a,b)}{ab} = -b_2;$$

*FFCLRP-USP , Ribeirão Preto, SP, Brasil, kandreia@ffclrp.usp.br, supported by FAPESP, proc. no. 04/13739-5

$$\lim_{b\to 0}\frac{\dfrac{\partial g_1(a,b)}{\partial a}}{b}=\lim_{a\to 0}\frac{\dfrac{\partial g_1(a,b)}{\partial b}}{a}=-b_1,\quad \lim_{b\to 0}\frac{\dfrac{\partial g_2(a,b)}{\partial a}}{b}=\lim_{a\to 0}\frac{\dfrac{\partial g_2(a,b)}{\partial b}}{a}=-c_1,$$
$$\lim_{b\to 0}\frac{\dfrac{\partial h_1(a,b)}{\partial a}}{b}=\lim_{a\to 0}\frac{\dfrac{\partial h_1(a,b)}{\partial b}}{a}=-c_2,\quad \lim_{b\to 0}\frac{\dfrac{\partial h_2(a,b)}{\partial a}}{b}=\lim_{a\to 0}\frac{\dfrac{\partial h_2(a,b)}{\partial b}}{a}=-b_2.$$

Because the Dirichlet condition, the unique spatially constant steady state solution is the null solution and we are concerned in positive solutions on $(0,\pi)$ due to the biological motivation of this problem. So, first of all, we guarantee the existence of the spatially nonconstant steady state solution or equilibrium point of (0.1) and study the stability of these solutions. When parameters vary and the steady state solutions are destabilize, it can occur periodic solutions, see [1]. We show the existence of a sequence of values $\{\tau_{k_n}\}_{n=0,1,2,...}$ of the parameter τ for k in some neighborhood of 1, so that Hopf bifurcation occurs when the delay passes through each value $\{\tau_{k_n}\}$. The main Theorem is:

Theorem 0.1. *For each fixed k, $k \in (1,k^*)$, a Hopf bifurcation will occur as delay τ passes through each of the points τ_{k_n}, $n = 0,1,2,\ldots$, arising a periodic solution $(U_{k_n,\tau}, V_{k_n,\tau})$ near (U_k, V_k) with period $T(\tau_{k_n}) \approx \frac{2\pi}{\omega_k}$.*

References

[1] HALE, J.K. & LUNEL, S.M.V. - *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, (1993).

[2] WU, J., *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*, Appl. Math. Sci., 119, Springer, (1996).

[3] BUSENBERG, S. ; HUANG, W. - *Stability and Hopf Bifurcation for a Population Delay Model with Diffusion Effects*, Journal of Differential Equations, 124, (1996), pp. 80-107.

[4] SANTOS,J.S. ; BENÁ,M.A. - *Hopf bifurcation for a class of delay reaction-diffusion equations with negative feedback*, Rev. Mat. Estatst. 22, no. 2, (2004), pp. 93-09.

[5] SANTOS, J.S. ; BENÁ,M.A. - *Hopf Bifurcation For a Delay Reaction- Diffusion Equation With Negative Feedback*, Applicable Analysis, vol. 83, nº 8,(2004) pp. 807-824.

[6] AZEVEDO, K.A.G ; LADEIRA, L.A.C. - *Hopf Bifurcation for a class of partial differential equation with delay*, Funkcialaj Ekvacioj, 47, (2004), pp. 395-422.

[7] TANG, Y. ; HUSSEIN, S. ; ZHOU, L. - *Stability and Hopf bifurcation for a delay competition diffusion system*, Chaos, Solutions and Fractals, 14, (2002), pp. 1201-1225.

[8] TANG, Y. & ZHOU, L. - *Hopf Bifurcation and Stability of a Competition Diffusion System with Distributed Delay*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 41, no. 3, (2005), pp. 579-597.

[9] NICOLA, S.H.J.; LADEIRA, L.A.C.; TÁBOAS, P.Z. - *Periodic solutions of an impulsive differential system with delay: an L^p approach*, Fields Institute Communications, ,(2001), pp. 201-215 .

[10] NUSSBAUM, R.D. - *Periodic Solutions of Nonlinear Autonomous Functional Differential Equations*, Lecture Notes in Math., 730, Springer, Berlin, (1979), pp. 283-325.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

Hyperbolic Conservation Laws on Manifolds: An error estimate for finite volume schemes

LeFloch, P., Okutmustur, B. * & Neves, W. †

The mathematical theory of hyperbolic conservation laws posed on curved manifolds M was initiated by Ben-Artzi and LeFloch [1], and developed together with collaborators [2, 3, 4, 5, 6, 7]. For these equations, a suitable generalization of Kruzkov's theory has now been established and provides the existence and uniqueness of an entropy solution to the initial and boundary value problem for a large class of hyperbolic conservation laws and manifolds.

Here, we show that the error estimate for finite volume methods, due to Cockburn, Coquel, and LeFloch [8, 9] in the Euclidian setting carries over to curved manifolds. To this end, we will need to revisit Kuznetzov's approximation theory [10, 11] and adapt the technique developed in [9]. One technical difficulty addressed here is the adaption of the standard "doubling of variables" technique to curved manifolds. We recover that the rate of error in the L^1 norm is of order $h^{1/4}$, where h is the maximal diameter of an element of the triangulation of the manifold, as discovered in [9].

Recall that the well-posedness theory for hyperbolic conservation laws posed on a compact manifold was established in [1], while the convergence of monotone finite volume schemes was proved in [2]. In both papers, DiPerna's measure-valued solutions [12] were used and can be viewed as a generalization of Kruzkov's theory [13]. In contrast, in the present paper we rely on Kuznetsov's theory, which allows us to bypass DiPerna's notion of measure-valued solutions. Indeed, our main result in this paper provides both an error estimate in the L^1 norm and, as a corollary, the actual convergence of the scheme to the entropy solution; this result can be used to establish the existence of this entropy solution.

For another approach to conservation laws on manifolds we refer to Panov [14]. Concerning the Euclidian case $M = \mathbb{R}^n$ we want to mention that the work by Cockburn, Coquel, and LeFloch [8, 9] (submitted and distributed in 1990 and 1991, respectively) was followed by important developments and applications by Kröner [15] and Eymard, Gallouet, and Herbin [16] to various hyperbolic problems including also elliptic equations. In [8], the technique of convergence using measure-valued solutions goes back to pioneering works by Szepessy [17, 18] and Coquel and LeFloch [19, 20, 21].

References

[1] Ben-Artzi M. and LeFloch P.G., *The well-posedness theory for geometry compatible hyperbolic conservation laws on manifolds*, Ann. Inst. H. Poincaré: Nonlin. Anal. 24 (2007), 989–1008.

[2] Amorim P., Ben-Artzi M., and LeFloch P.G., *Hyperbolic conservation laws on manifolds. Total variation estimates and the finite volume method*, Meth. Appl. Anal. 12 (2005), 291–324.

[3] Amorim P., LeFloch P.G., and Okutmustur B., *Finite volume schemes on Lorentzian manifolds*, preprint, 2007.

[4] Ben-Artzi M., Falcovitz J, and LeFloch P.G., *Hyperbolic conservation laws on the sphere. A geometry-compatible finite volume scheme*, preprint, 2008.

*Laboratoire Jacques-Louis Lions, Centre National de la Recherche Scientifique, Université de Paris 6, 4 Place Jussieu, 75252 Paris, France. E-mail : *LeFloch@ann.jussieu.fr, Okutmustur@ann.jussieu.fr*.

†Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, C.P. 68530, Cidade Universitária 21945-970, Rio de Janeiro, Brazil. E-mail: *wladimir@im.ufrj.br*.

[5] LeFloch P.G., *Hyperbolic conservation laws and spacetimes with limited regularity,* Proc. 11th Inter. Confer. on "Hyper. Problems: theory, numerics, and applications", ENS Lyon, July 17–21, 2006, S. Benzoni and D. Serre ed., Springer Verlag, pp. 679–686.

[6] LeFloch P.G. and Okutmustur B., *Conservation laws on manifolds with limited regularity,* C.R. Acad. Sc. Paris, Ser. I 346 (2008), 539–543.

[7] LeFloch P.G. and Okutmustur B., *Hyperbolic conservation laws on Lipschitz continuous spacetimes,* in preparation.

[8] Cockburn B., Coquel F., and LeFloch P.G., *Convergence of finite volume methods for multidimensional conservation laws,* SIAM J. Numer. Anal. 32 (1995), 687–705.

[9] Cockburn B., Coquel F., and LeFloch P.G., *An error estimate for finite volume methods for multidimensional conservation laws,* Math. of Comp. 63 (1994), 77–103.

[10] Kuznetzov N.N., *Accuracy of some approximate methods for computing the weak solutions of a first-order quasi-linear equations,* USSR Comput. Math. Math. Phys. 16 (1976), 105–119.

[11] Kuznetzov N.N., *On stable methods for solving nonlinear first-order partial differential equations in the class of discontinuous solutions,* Topics in Numerical Analysis III (Proc. Roy. Irish Acad. Conf.), Trinity College, Dublin (1976), pp. 183–192.

[12] DiPerna R.J., *Measure-valued solutions to conservation laws,* Arch. Rational Mech. Anal. 88 (1985), 223–270.

[13] Kruzkov S., *First-order quasilinear equations with several space variables,* Math. USSR Sb. 10 (1970), 217–243.

[14] Panov E.Y., *On the Cauchy problem for a first-order quasilinear equation on a manifold,* Differential Equations 33 (1997), 257–266.

[15] Kröner D., *Finite volume schemes in multidimensions,* in "Numerical analysis" 1997 (Dundee), Pitman Res. Notes Math. Ser., 380, Longman, Harlow, 1998, pp. 179–192.

[16] Eymard R., Gallouët T., and Herbin R., *The finite volume method,* to appear in Handbook of Numerical Analysis, Vol. VII, Handb. Numer. Anal., VII, North-Holland, Amsterdam, 2000, pp. 713–1020.

[17] Szepessy A., *Convergence of a shock-capturing streamline diffusion finite element method for a scalar conservation law in two space dimensions,* Math. Comp. 53 (1989), 527–545.

[18] Szepessy A., *Convergence of a streamline diffusion finite element method for scalar conservation laws with boundary conditions,* RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. 25 (1991), 749–782.

[19] Coquel F. and LeFloch P.G., *Convergence of finite difference schemes for conservation laws in several space dimensions,* C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I 310 (1990), 455–460.

[20] Coquel F. and LeFloch P.G., *Convergence of finite difference schemes for conservation laws in several space dimensions: a general theory,* SIAM J. Numer. Anal. 30 (1993), 675–700.

[21] Coquel F. and LeFloch P.G., *Convergence of finite difference schemes for conservation laws in several space dimensions: the corrected antidiffusive flux approach,* Math. Comp. 57 (1991), 169–210.

[22] Evans L.C. and Gariepy R.F., *Lecture Notes on Measure Theory and Fine Properties of Functions,* CRC Press, Boca Raton, Florida, 1992.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

Hypersurfaces with prescribed mean curvature in Riemannian manifolds

Jorge H. S. de Lira *

We intend here to survey some recent results concerning existence of hypersurfaces with prescribed mean curvature in Riemannian spaces endowed with infinitesimal isometries. More precisely, let $\bar{M}$ be a Riemannian manifold and let Y be a Killing vector field on $\bar{M}$. Let $\pi : \bar{M} \to M$ be a Riemannian submersion whose fibers are the flow lines of Y. Fixed a bounded domain with regular boundary $\Omega \subset M$, one considers the Killing cylinder $K = \pi^{-1}(\Omega)$. We suppose that K is mean convex, that is, that its mean curvature H_K is non-negative. When the distribution $\mathcal{D} = Y^\perp$ is integrable, we may consider M as an integral leaf of $\mathcal{D}$ and then we are able to prove

Theorem 1 (Dajczer, Hinojosa, -, [2]). *Let H and ϕ be functions defined respectively in Ω and $\Gamma = \partial\Omega$. Suppose that*

$$Ric_{\bar{M}} \geq -n \inf_\Gamma H_K^2, \tag{1}$$

where $Ric_{\bar{M}}$ is the ambient Ricci curvature. If

$$\sup_\Omega |H| \leq \inf_\Gamma H_K, \tag{2}$$

then there exists an unique Killing graph with prescribed mean curvature H and boundary data given by the graph of ϕ in K.

This theorem is in analytical terms an existence result to a quasilinear elliptic PDE of the form

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) - \frac{\varrho}{W}\langle \nabla u, \bar{\nabla}_Y Y\rangle = nH, \tag{3}$$

where the differential operators are computed in the Riemannian manifold M. The function ϱ is the squared norm of the vector field Y and the term $\bar{\nabla}_Y Y$ measures the flow lines acceleration. The classical Euclidean case corresponds to flat metric in M and non-accelerated flow lines.

A real improvement of this in geometrical terms consists in ruling out the integrability hypothesis what encompasses a multitude of geometrically relevant particular cases, as Heisenberg spaces. In this setting, one proves

Theorem 2 (Dajczer, -, [3]). *Let H and ϕ be functions defined respectively in Ω and $\Gamma = \partial\Omega$. Suppose that*

$$Ric_{\bar{M}} \geq -n \inf_\Gamma H_K^2, \tag{4}$$

where $Ric_{\bar{M}}$ is the ambient Ricci curvature. Assume that there exists an immersion $\iota : M \to \bar{M}$ transverse to the flow lines of Y. If

$$\sup_\Omega |H| \leq \inf_\Gamma H_K, \tag{5}$$

then there exists an unique Killing graph with prescribed mean curvature H and boundary data given by the graph of ϕ in K.

For proving these theorems using the standard continuity method for quasilinear elliptic PDEs, we deduce *a priori* estimates through a geometric comparison with Killing cylinders. The hypothesis on Ricci tensor combined

*Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará , Ceará, Brazil, jorge.lira@pq.cnpq.br

with a kind of Ricatti equation for the mean curvature of parallel cylinders provide height estimates which are used in turn to estimate the gradient at the boundary. A strategy due to N. Korevaar (v. [5]) based on normal perturbations of the graph and the construction of geometric supersolutions of the linearized operator - called stability or Jacobi operator - give the final interior estimate for the gradient. The initial step for the method is obtaining a minimal graph by direct method of calculus of variations.

Finally, with respect to a generalization of the notion of radial graphs with prescribed higher-order mean curvatures, we prove in the spirit of the classical work of Caffarelli, Nirenberg and Spruck the following result

Theorem 3 (Andrade, Barbosa, -, [1]). *Let $(M, d\sigma^2)$ be a compact Riemannian manifold. Consider the product manifold $\bar{M} = I \times M$ endowed with the warped metric*

$$dt^2 + h^2(t)d\sigma^2, \tag{6}$$

where $h : I \to \mathbb{R}^+$ is a differentiable function. Given t_-, t_+ in I, denote $M_{t_-,t_+} = \{(t,p) : t_- \le t \le t_+,\, p \in M\}$. Suppose that the leaves $M_t = \{(t,p) : p \in M\}$ have positive mean curvature $\kappa(t)$, for $t_- \le t \le t_+$. Then, given a function $\psi : \bar{M} \to \mathbb{R}^+$ satisfying

- $\psi(t,p) > \kappa(t), \quad t \le t_-,$
- $\psi(t,p) < \kappa(t), \quad t \ge t_+,$
- $\partial_t(h\psi) \le 0, \quad t_- \le t \le t_+,$

there exists a differentiable function $z : M \to I$ solving

$$H_r(z(u),u) = \psi^r(z(u),u), \quad u \in M, \tag{7}$$

whose graph is contained in the interior of M_{t_-,t_+}.

This theorem is a particular case of a result about general symmetric functions of the eigenvalues of a Hessian matrix. At this time, the equation we should deal with is a fully nonlinear elliptic one of the form

$$\sum_{1\le i_1<\ldots<i_r\le n} \begin{vmatrix} (z^{i_1}/W)_{;i_1} & \ldots & (z^{i_1}/W)_{;i_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (z^{i_r}/W)_{;i_1} & \ldots & (z^{i_r}/W)_{;i_r} \end{vmatrix} = \psi^r(z(u),u), \tag{8}$$

where z^i are the components of the gradient of z, $W = \sqrt{h + z^i z_i}$ and ; denotes covariant derivatives. The estimates then are established up to second order. Here, the continuity method is replaced by some degree theoretical techniques presented originally by Yan Yan Li in [4]

References

[1] Andrade, F., Barbosa, J. L., de Lira, J. H., - *Closed Weingarten hypersurfaces in warped product manifolds,* to appear in Indiana University Math. J.

[2] Dajczer, M., Hinojosa, P., de Lira, J. H., - *Killing graphs with prescribed mean curvature,* Calc. Var. Partial Differential Equations, 33 (2008), pp. 231-248.

[3] Dajczer, M., de Lira, J. H., - *Killing graphs with prescribed mean curvature and Riemannian submsersions,* to appear in Annales Henri Poincaré - Anal. Non-Linéaire.

[4] Li, Y.-Y., - *Degree theory for second order nonlinear elliptic operators and its applications,* Comm. in PDEs, 14, 11 (1989), pp. 1541-1578.

[5] Korevaar, N., - *An easy proof of the interior gradient bound for solutions of the prescribed mean curvature equation,* Proc. of Symp. in Pure Math., 45 (1986), AMS.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

IDENTIFICATION OF THE COEFFICIENTS IN THE LINEAR BOLTZMANN EQUATION BY A FINITE NUMBER OF BOUNDARY MEASUREMENTS

R. Cipolatti [*]

August 24, 2008

In this work we consider an inverse problem for the linear Boltzmann equation

$$\partial_t u + \omega \cdot \nabla_x u + qu = qK_\kappa[u] \ \text{ in } \ (0,T) \times S \times \Omega, \tag{0.1}$$

where $T > 0$, Ω is a smooth bounded convex domain of $I\!R^N$, $N \geq 2$, S denotes the unit sphere of $I\!R^N$, $q \in L^\infty(\Omega)$ and K_κ is the integral operator with kernel $\kappa(x, \omega', \omega)$ defined by

$$K_\kappa[u](t,\omega,x) = \int_S \kappa(x,\omega',\omega) u(t,\omega',x)\, d\omega'.$$

In applications, the Eq. (0.1) describes the dynamics of a monokinetic flow of particles in a body Ω under the assumption that the interaction between them is negligible. For instance, in the case of a low-density flux of neutrons (see [4], [5]), $q \geq 0$ is the total extinction coefficient (the inverse mean free path) and the collision kernel κ is given by

$$\kappa(x,\omega',\omega) = c(x) h(x, \omega' \cdot \omega),$$

where c corresponds to the within-group scattering probability and h describes the anisotropy of the scattering process. In this model, $q(x)u(t,\omega,x)$ describes the loss of particles at x in the direction ω at time t due to absorption or scattering and $q(x)K_\kappa[u](t,\omega,x)$ represents the production of particles at x in the direction ω from those coming from directions ω'.

Our focus here is the inverse problem of recovery the coefficients in Eq. (0.1) via boundary measurements. More precisely, we are interested to recover q and κ by giving the incoming flux of particles on the boundary and measuring the outgoing one. Since these operations are described mathematically by the *albedo* operator $\mathcal{A}_{q,\kappa}$, a first general mathematical question concerning this inverse problem is to know if the knowledge of $\mathcal{A}_{q,\kappa}$ uniquely determines q, κ, i.e., if the map $(q,\kappa) \mapsto \mathcal{A}_{q,\kappa}$ is invertible.

We may precise this question. A first one is to know if the knowledge for $\mathcal{A}_{q,\kappa}(f)$ for all f determines (q,κ) (*infinitely many measuremententes*); a second one is to know if the knowledge of $\mathcal{A}_{q,\kappa}(f_j)$, for $j = 1, 2, \ldots, k$, determines (q,κ) (*finite number of measurements*).

The first question was considered in [3]. In this work we focus on the second question, concerning the identification by a finite number of measurements. Under certain hypothesis and assuming that $\kappa(t,\omega',\omega) = c(x)h(\omega',\omega)$, we prove that q and c can be uniquely determined by at most k measurements, provided that q and c belongs to a finite k-dimensional vector subspace of $C(\overline{\Omega})$. To be more precise, we consider the initial-boundary value problem

$$\begin{cases} \partial_t u(t,\omega,x) + \omega \cdot \nabla u(t,\omega,x) + q(x)u(t,\omega,x) = q(x)K_\kappa[u](t,\omega,x), \\ u(0,\omega,x) = 0, \quad (\omega,x) \in S \times \Omega, \\ u(t,\omega,\sigma) = f(t,\omega,\sigma), \quad (\omega,\sigma) \in \Sigma^-, \ \ t \in (0,T), \end{cases} \tag{0.2}$$

[*]Instituto de Matemática - UFRJ, RJ, Brasil, cipolatti@im.ufrj.br

where Σ^- is the incoming boundary and is defined as follows. For every $\sigma \in \partial\Omega$, we denote $\nu(\sigma)$ the unit outward normal at $\sigma \in \partial\Omega$ and we consider the sets (respectively, the incoming and outgoing boundaries)

$$\Sigma^{\pm} := \{(\omega, \sigma) \in S \times \partial\Omega\,;\ \pm\,\omega \cdot \nu(\sigma) > 0\}.$$

The existence and uniqueness of solutions of (0.2) is well known (a proof via semigroup is given in [3]). So, we define the albedo operator as the trace of u on the outgoing boundary, i.e.,

$$\mathcal{A}_{q,\kappa}(f)(t, \omega, \sigma) = u(t, \omega, \sigma), \quad (\omega, \sigma) \in \Sigma^+.$$

Our main result is the following:

Theorem 0.1. *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ be a bounded convex domain of class C^1, $M > 0$, $T > \dim(\Omega)$. Let $\{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k\}$ be a linearly independent subset of $C(\overline{\Omega})$ and $\mathcal{X} := \operatorname{span}\{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k\}$. We assume that $q \in L^\infty(\Omega)$, $\|q\|_\infty \le M$ and $\kappa \in L^\infty\big(\Omega; C(S \times S)\big)$.*

(a) *If $q \in \mathcal{X}$, then there exist $\widetilde{\omega}_1, \ldots, \widetilde{\omega}_k \in S$ and $f_1, \ldots, f_k \in C_0\big((0, T) \times \Sigma^-\big)$ that determine q uniquely.*

(b) *If $\kappa(x, \omega', \omega) = c(x)h(\omega', \omega)$, where $c \in \mathcal{X}$ and $h \in C(S \times S)$ satisfies $h(\omega, \omega) \neq 0$ for every $\omega \in S$, then there exist $\widetilde{\omega}_1, \ldots, \widetilde{\omega}_k \in S$ and $f_1, \ldots, f_k \in C_0\big((0, T) \times \Sigma^-\big)$ that determine c uniquely.*

Remark: The functions f_j, $j = 1, \ldots, k$, have the form

$$f_j(t, \omega, \sigma) := \begin{cases} \phi_j(\sigma - t\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\lambda(t - \omega\cdot\sigma)} & \text{in the case (a),} \\ \delta_{\tilde{\omega}_j}(\sigma)\phi_j(\sigma - t\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\lambda(t - \omega\cdot\sigma)} & \text{in the case } (b), \end{cases}$$

where $\lambda > 0$, $t \in (0, T)$, $(\omega, \sigma) \in \Sigma^-$, $\phi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)$ and $\delta_{\tilde{\omega}_j}$ is the spherical atomic measure concentrated on $\widetilde{\omega}_j$. The coefficients are identified by measuring the corresponding solutions on the outgoing part of the boundary, only in the directions $\widetilde{\omega}_1, \ldots, \widetilde{\omega}_k$.

The proof of Theorem (0.1) is based on the construction of highly oscillatory solutions introduced in [3] and some arguments already used by the author in [2].

References

[1] CIPOLATTI, R. - *Identification of the collision kernel in the linear Boltzmann equation by a finite number of measurements on the boundary*. Comp. Appl. Math., Vol. 25, No. 2-3, (2006), pp. 331–351.

[2] CIPOLATTI, R. & LOPEZ, I.F. - *Determination of coefficients for a dissipative wave equation via boundary measurements*. J. Math. Anal. Appl., Vol. 306, (2005), pp. 317–329.

[3] CIPOLATTI, R., MOTTA, C.M. & ROBERTY, N.C. - *Stability Estimates for an Inverse Problem for the Linear Boltzmann Equation*. Revista Matemática Complutense, Vol. 19, No. 1, (2006), pp. 113–132.

[4] DAUTRAY, R., LIONS, J.-L. - *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*. Vol. 6, Springer-Verlag, 1993.

[5] REED, R., SIMON, B. - *Methods of Modern Physics*. Vol. 3, Springer-Verlag, 1993.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{0}}$ 2 November 2008

Ill-posedness results for the nonlocal nonlinear Schrödinger equation

R. P. Moura * & D. Pilod †

In this paper we consider the initial value problem (IVP) associated to the nonlocal nonlinear Schrödinger equation (NLNLS)

$$\begin{cases} \partial_t u + i\partial_x^2 u = u\,(1+i\mathcal{H})\,\partial_x(|u|^2) + i\gamma|u|^2 u, \quad x\,,\,t\,\in\mathbb{R}, \\ u(x,0)=\phi(x), \end{cases} \tag{0.1}$$

where $u=u(x,t)$ is a complex-valued function, γ is a real nonnegative parameter, and $\mathcal{H}$ is the Hilbert transform defined via Fourier transform by

$$(\mathcal{H}f)^\wedge(\xi) = -i\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi), \quad \forall \xi\in\mathbb{R}, \quad \forall f\in H^s(\mathbb{R}).$$

The equation in (0.1) was proposed by D. Pelinovsky and R. Grimshaw [4, 5, 6] to model the evolution of quasi-harmonic wave packets at the interface of a two-layer system, one being infinitely deep. The function u represents the envelope of the waves and the coefficient γ is expressed in function of the fluid stratification parameter (see Appendix A in [5]).

We prove a sharp ill-posedness result for the IVP (0.1), in the sense that the flow map data-solution cannot be C^3 in $H^s(\mathbb{R})$ whenever $s<\frac{1}{2}$.

Theorem 0.1. *Let $s<\frac{1}{2}$. Then, if the Cauchy problem (0.1) is locally well-posed in $H^s(\mathbb{R})$, the flow map data-solution*

$$S(t): H^s(\mathbb{R}) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}), \quad u_0 \longmapsto u(t) \tag{0.2}$$

is not C^3 at zero.

This improves a former result by Angulo and Moura for $s<0$ in [1]. To prove Theorem 0.1 we use a technique introduced by Bourgain (cf. [2]), which consists in to locate certain plane waves whose interaction behave badly in low regularity. To reach this, we prove the following theorem which states that it is not possible to solve the IVP (0.1) in $H^s(\mathbb{R})$ using a fixed point theorem provided that $s<\frac{1}{2}$.

Theorem 0.2. *Let $s<\frac{1}{2}$ and $T>0$. Then, there does not exist any space Z_T^s such that Z_T^s is continuously embedded in $C([-T,T];H^s(\mathbb{R}))$, i.e.*

$$\|u\|_{C([-T,T];H^s)} \lesssim \|u\|_{Z_T^s}, \quad \forall\ u\in Z_T^s, \tag{0.3}$$

and such that

$$\|U(t)\phi\|_{Z_T^s} \lesssim \|\phi\|_{H^s}, \quad \forall\ \phi\in H^s(\mathbb{R}), \tag{0.4}$$

and,

$$\|\int_0^t U(t-\tau)\left(u(\tau)P_+\partial_x(v(\tau)\overline{w(\tau)})\right)d\tau\|_{Z_T^s} \lesssim \|u\|_{Z_T^s}\|v\|_{Z_T^s}\|w\|_{Z_T^s}, \tag{0.5}$$

for all u, v, $w\in Z_T^s$.

The proof of theorem 0.2 follows basically from the following lemma.

*Universidade Federal do Piauí, Dep. de Matemática, PI, Brasil, mourapr@impa.br
†Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM, RJ, Brasil, pilod@impa.br

Lemma 0.1. *Fix* $\frac{3}{2} < \xi < 2$ *and define*

$$\Omega(\xi) = \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \xi_1 \in I_1, \ \xi_2 \in I_2, \ \xi_1 + \xi_2 - \xi \in I_1 \ \textit{and} \ \xi - \xi_1 > 0\},$$

where

$$I_1 = [-N - \alpha, -N + \alpha], \quad I_2 = [1, 2], \quad N \gg 1, \quad \textit{and} \quad 0 < \alpha \ll 1.$$

Then

$$|\Omega(\xi)| \gtrsim \alpha, \tag{0.6}$$

where the implicit constant does not depend on ξ.

With theorem 0.1 we have that our well-posedness result established in [3] is almost sharp, remaining only the case $s = \frac{1}{2}$ to be treated.

References

[1] Angulo, J. and Moura, R. - *Ill-posedness and the nonexistence of standing-waves solutions for the nonlocal nonlinear Schrödinger equation*, Diff. Int. Eq., **20** (2007), 1107-1130.

[2] Bourgain, J. - *Periodic Korteweg-de Vries equation with measures as initial data*, Selecta Math. (N.S.) 3 (1997), no. 2, 115–159.

[3] Moura, R. and Pilod, D. - *Local Well-Posedness for the nonlocal nonlinear Schrödinger Equation below the energy space*, preprint.

[4] Pelinovsky, D. - *Intermediate nonlinear Schrödinger equation for internal waves in a fluid of finite depth*, Phys. Lett. A, **197** (1995), 401-406.

[5] Pelinovsky, D. and Grimshaw, R. - *Nonlocal Models for Envelope Waves in a Stratified Fluid, Stud. Appl. Math.*, **97** (1996), 369-391.

[6] Pelinovsky, D. and Grimshaw, R. - *A spectral transform for the intermediate nonlinear Schrödinger equation*, J. Math. Phys., **36** (1995), 4203-4219.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

INFINITE MULTIPLICITY OF POSITIVE SOLUTIONS FOR SINGULAR NONLINEAR ELLIPTIC EQUATIONS WITH CONVECTION TERM AND RELATED SUPERCRITICAL PROBLEMS

C. C. ARANDA,* & J. HERNÁNDEZ †

Abstract

In 1869, J. H. Lane [9] introduced the equation

$$-\Delta u = u^p \tag{0.1}$$

for p a nonnegative real number and $u > 0$ in a Ball of radius R in $\mathbb{R}^3$, with Dirichlet boundary conditions. Lane was interested in computing both the temperature and the density of mass on the surface of the sun. Today the problem (0.1) is named Lane-Emden-Fowler equation [3, 4]. Singular Lane-Emden-Fowler equations ($p < 0$) has been considered in a remarkable pionering paper by Fulks and Maybe [5]. Nonlinear singular elliptic equations arise in applications, for example in glacial advance [11], ecology [6], in transport of coal slurries down conveyor belts [1], micro-electromechanical system device [2] etc.

Nonlinear singular elliptic equations have been studied intensively during the last 15 years, for a detailed review out of our scope in this summary, see Hernández and Mancebo [10]. Existence and nonexistence results for singular nonlinear elliptic equations have been stated by Zhang [12], Zhang and Yu [13], Ghergu and Rădulescu [7, 8]. Multiplicity for singular Lane-Emden-Fowler equation with convection term is a topic essentially open. We prove

Theorem 0.1. *Let Ω be a smooth bounded domain in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. Suppose the following conditions hold:*
(1°) $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$ is non increasing locally Hölder continuous function (that may be singular at the origin);
(2°) f is continuous, nonnegative and non decreasing function with $f(0) = 0$;
(3°) $f(\xi_i) \geq \beta\xi_i$, $f(\eta_i) \leq \alpha\eta_i$ with

$$\xi_1 < \eta_2 < \xi_i < \eta_i < \xi_{i+1} < ... < \xi_m, \quad m \leq \infty$$

(4°) h is a locally Hölder continuous function on $\mathbb{R}^N$ and $0 \leq h(\nabla u) \leq b_1 |\nabla u|^s + b_0$, $0 < s < 1$;
(5°) $\beta C(\Omega) \left(\int_K \varphi_1\right) \varphi_1 \geq 1$, on $K \subset \Omega$ compact;
(6°) $\eta_i \geq b_1 \left(\eta_i \parallel \nabla e \parallel_{L^\infty(\Omega)}\right)^s + b_0 + g(\epsilon) + \alpha\eta_i$ for all i, where

$$\begin{aligned} -\Delta e &= 1 && \text{in } \Omega, \\ e &= \epsilon && \text{on } \partial\Omega. \end{aligned}$$

(7°) $\epsilon + exp(d(\Omega)) \leq 2$ where $d(\Omega)$ is the distance between two parallel planes containing Ω.
Then the problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= g(u) + h(\nabla u) + f(u) && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{on } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{0.2}$$

has $m \leq \infty$ nonnegative classical solutions.

Moreover there are a relation with supercritical nonlinear elliptic problems. We state

Theorem 0.2. *Let Ω be a smooth bounded domain in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. Suppose the following conditions hold:*
(1°) $f(s) = \frac{1}{s^2}\tilde{f}(\frac{1}{s})$ satisfies (2°), (3°) and (4°) of Theorem 0.1;

*Universidad Nacional de Formosa, Formosa, Argentina, carloscesar.aranda@gmail.com
†Departamento de Matemáticas, Universidad Autonoma de Madrid, Madrid, Spain, e-mail jesus.hernandez@uam.es

(2°) $2 < q < p$;
(3°) $0 < \epsilon \le \left(\frac{q-2}{p-2}\right)^{\frac{1}{p-q}}$;
(4°) $v + \alpha\eta_i e \le \eta_i$, *where*

$$\begin{aligned} -\Delta e &= 1 \qquad \text{in } \Omega, \\ e &= \tfrac{1}{\epsilon} \quad \text{on } \partial\Omega, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} -\Delta v &= v^{2-q} - v^{2-p} \qquad \text{in } \Omega, \\ v &= \tfrac{1}{\epsilon} \qquad\qquad\quad \text{on } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Then the problem

$$\begin{aligned} -\Delta z + \tfrac{2}{z} \mid \nabla z \mid^2 + \tilde{f}(z) + z^q &= z^p \qquad \text{in } \Omega, \\ z &= \epsilon \qquad \text{on } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{0.3}$$

has $2m - 1 \le \infty$ *nonnegative classical solutions.*

References

[1] T. Carelman. *"Problèmes mathématiques dans la théorie cinétique des gaz. "*Almquist-Wiksells, Uppsala, 1957.

[2] P. Esposito, N. Ghoussoub and Y. Guo. *"Compactness along the branch of semi-stable and unstable solutions for an elliptic problem with a singular nonlinearity."* Comm. on Pure and Appl. Math. Volume 60 Issue 12, (2007) 1731 - 1768.

[3] V. R. Emden. *"Gaskugeln"*. Teubner, Leipzig, 1907.

[4] R. H. Fowler. *"Further studies of Emden's and similar differential equations"*. Q. J. Math. (Oxford Series) 2 (1931), 259-288.

[5] W. Fulks and J. S. Maybe. *"A singular nonlinear equation."* Osaka J. Math. 12 (1960), 1-19.

[6] S. Gaucel and M. Langlais. *"Some mathematical problems arising in heterogeneous insular ecological modes."* RACSAM 96 (2002), 389-400.

[7] M. Ghergu and V. Rădulescu. *Multiparameter bifurcation and asymptotics for the singular Lane-Emden-Fowler equation with a convection term*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 135 (2005), no. 1, 61–83.

[8] M. Ghergu and V. Rădulescu. *" On a class of sublinear singular elliptic problems with convection term."* J. Math. Anal. Appl. 311 (2005), 635-646.

[9] J. Homer Lane. *"On the Theoretical Temperature of the Sun under the Hypothesis of a gaseous mass Maintining Its Volume by Its Internal Heat and Depending on the Law of Gases Known to Terrestrial Experiment"*. Amer. J. Sci, 2d ser. 50 (1869), 57-74.

[10] J. Hérnandez and F. J. Mancebo. *"Singular elliptic and parabolic equations."* In *Handbook of differential equations* (ed. M. Chipot and P. Quittner), vol 3 (Elsevier 2006).

[11] G.B. Whitman. *"Linear and Nonlinear Waves."* WileyInterscience, New York, 1973.

[12] Z. Zhang. *" Nonexistence of positive classical solutions of a singular nonlinear Dirichlet problems with a convection term."* Nonlinear Anal. 27 (1996), 957-961.

[13] Z. Zhang and J. Yu. *"On a singular nonlinear Dirichlet problem with a convection term."* SIAM J. Math. Anal.4 (2000), 916-927.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{0}}$ 2 November 2008

INVESTIGATION OF PARTIAL STABILITY IN MEASURE FOR FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

M.A. BENÁ * & S.M.S. GODOY †

Summary: Partial stability has been studied for many years for differential equations, as may be seen in [3,4,7,8]. The concept of stability in terms of two measures has been proven to be very useful to unify a variety of stability concepts. It has also generated renewed interest among many researches [1,2,5,6]. The aim of this work is to extend the concept of partial stability to partial stability in measure for delay differential equations by employing Liapunov theory.

Let $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, y_2, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$, with norms $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ and $|y| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + ... + y_m^2}$, respectively. Let $z = (x, y) = (z_1, z_2, ..., z_{n+m}) \in \mathbb{R}^{n+m}$.
For $r \geq 0$, let $C = C([-r, 0], \mathbb{R}^{n+m})$ be Banach space of continuous functions taking $[-r, 0]$ into $\mathbb{R}^{n+m}$. For a given $\psi = (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n)$ and $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$, let $\phi = (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_{n+m}) = (\psi, \lambda) \in C$.

For the sake of convenience, we introduce the following definitions and classes of functions:
$\Gamma = \{h \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}_+) : \inf_{(t,w)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^k} h(t, w) = 0\}$,
$\Gamma_0 = \{h_0 \in C(\mathbb{R}_+ \times C, \mathbb{R}_+) : \inf_{(t,\,\phi)\in\mathbb{R}_+\times C} h_0(t, \phi) = 0\}$,
$K = \{a \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) : a\,\text{is strictly increasing and}\,a(0) = 0\}$,
$B_H = \{\phi \in C : h_0(t_0, \phi) \leq H\}$,
$C_H = \{\phi \in C : h_0(t_0, \psi) \leq H,\, h_0(t_0, \lambda) < \infty\}$.

Let X be a Banach space. A function $h \in C(\mathbb{R}_+ \times X, \mathbb{R}_+)$ is called a measure in X (denoted by $h \in \Gamma$) if $\inf_{(t,x)\in\mathbb{R}_+\times X} h(t, x) = 0$.

Consider the delay differential equation

$$z'(t) = f(t, z_t), \qquad z_{t_0} = \phi, \tag{0.1}$$

where $f \in C(\mathbb{R}_+ \times C_H, \mathbb{R}^{n+m})$, $f(t, 0) = 0$, f takes bounded sets into bounded sets; then for each (t_0, ϕ), there exists a unique solution $z(t) = z(t, t_0, \phi) = (x(t), y(t)) = (x(t, t_0, \phi), y(t, t_0, \phi))$ of (0.1) which can be continued for all $t \geq t_0$, such that $h_0(t_0, x_t) < H$.

If $z \in C([t_0 - r, \infty), \mathbb{R}^n)$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$, we define $z_t = ((z_1)_t, (z_2)_t, ..., (z_{n+m})_t) = (x_t, y_t)$ by $z_t(\theta) = z(t + \theta)$, $-r \leq \theta \leq 0$.

Let $h_0 \in \Gamma_0$, $h \in \Gamma$ and $z(t, t_0, \phi)$ be a solution of (0.1).

Definition 0.1. *Equation (0.1) is said to be*
(I) (h_0, h)-partially stable with respect to x (or $(h_0, h) - x\,stable$) if for each $\epsilon > 0$ and $t_0 \in \mathbb{R}_+$, there exists a $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ such that if $h_0(t_0, \phi) < \delta$ then $h(t, x(t, t_0, \phi)) < \epsilon$, $t \geq t_0$.
If $\delta = \delta(\epsilon)$, i.e., δ does not depend on t_0, then Equation (0.1) is called (h_0, h)- partially uniformly stable with respect to x (or (h_0, h)- uniformly x stable).
(II) (h_0, h)-partially attractive with respect to x (or $(h_0, h) - x$ attractive) if for every $t_0 \in \mathbb{R}_+$, there exists a $\eta = \eta(t_0) > 0$ and for every $\epsilon > 0$ and ϕ with $h_0(t_0, \phi) < \eta$ there exists $\sigma = \sigma(\epsilon, t_0, \phi) > 0$ such that $h(t, x(t, t_0, \phi)) < \epsilon$,

*FFCLRP-USP , Ribeirão Preto, SP, Brasil, mabena@ffclrp.usp.br
†ICMC-USP, São Carlos, SP, Brasil, smsgodoy@icmc.usp.br

for any $t \geq t_0 + \sigma$.
(III) (h_0, h)- equiattractive with respect to x (or $(h_0, h) - x$ equiattractive) if σ in (II) is independent of ϕ.
(IV) (h_0, h)-asymptotically x stable if it is $(h_0, h) - x$ stable and $(h_0, h) - x$ attractive.
(V) (h_0, h)-equiasymptotically x stable if it is $(h_0, h) - x$ stable and $(h_0, h) - x$ equiattractive.

Remark 0.1. *By suitably choosing h_0 and h, we can unify a variety of stability notions for system (0.1) found in the literature, such as partial stability, stability of trivial solution and stability of invariants sets.*

For more details see [5].

Definition 0.2. *Consider a functional $V \in C(\mathbb{R}_+ \times C, \mathbb{R}_+)$ and $h \in \Gamma$, $h_0 \in \Gamma_0$. V is said to be*

(i) $h - x$ positive definite if $V(t, 0) = 0$ and there exist a $\rho > 0$ and a function $a \in K$ such that if $h(t, \psi(0)) < \rho$ then $V(t, \phi) \geq a(h(t, \psi(0)))$;

(ii) h_0- decrescent if there exist a $\lambda > 0$ and a function $b \in K$ such that if $h_0(t, \phi) < \lambda$ then $V(t, \phi) \leq b(h_0(t, \phi))$.

Definition 0.3. *Equation (0.1) is called $(h_0, h) - y$ bounded if $h(t, x) < \xi < H$ for $t \geq t_0$ implies that there exists a number N_ξ such that $h(t, y) < N_\xi$ for $t \geq t_0$.*

Theorem 0.1. *Suppose that there exists a functional $V = V(t, \phi)$ such that V is $h - x$ positive definite, h_0- decrescent and $\frac{dV}{dt}(t, z_t(t_0, \phi)) \leq 0$. Then Equation (0.1) is $(h_0, h)-$ x stable.*

Theorem 0.2. *Assume that*
(i) the function f of (0.1) is a bounded function on $\mathbb{R}_+ \times C_H$ and Equation (0.1) is $(h_0, h) - y$ bounded;
(ii) V is $h - x$ positive definite and h_0- decrescent;
(iii) for every $t_0 \geq 0$ there exists $q(t_0) > 0$ such that if $h_0(t_0, \phi) < q(t_0)$ then $\frac{dV}{dt}(t, z_t(t_0, \phi)) \leq 0$ and $V(t, z_t(t_0, \phi))$ tends to zero as $t \to \infty$.

Then Equation (0.1) is $(h_0, h)-$ equiasymptotically x stable.

References

[1] BENÁ, M .A.; GODOY, S. M. S. - *On the stability in terms of two measures of perturbed neutral functional differential equations,* Nonlinear Anal.,Vol 47, 7 (2001), pp. 4567-4578.

[2] GODOY, S. M. S.; BENÁ, M .A. - *Stability criteria in terms of two measures of functional differential equations,* Appl. Math. Lett.,Vol 18, 6 (2005), pp. 701-706.

[3] HATVANI, L. - *On the partial asymptotic stability by the method of limiting equation,* Ann. Mat. Pura Appl.,Vol 4, 139 (1985), pp. 65-82.

[4] IGNATYEV, A. O. - *On the partial equiasymptotic stability in functional differential equations,* J. Math. Anal. Appl.,Vol 268, (2002), pp. 615-628.

[5] LAKSHMIKANTHAM, V.; LEELA, S.; MARTYNYUK, A. A. - *Stability analysis of nonlinear systems,* Marcel Dekker, New York, 1989.

[6] LIU, X. - *Stability in terms of two measures for functional differential equations,* Differential and Integral Equations,Vol 2, 1 (1989), pp. 13-20.

[7] RUMYANTSEV, V. V. - *On the stability with respect to a part of the variables,* Symp. Math.,Vol 6, (1971), pp. 243-265.

[8] VOROTNIKOV, V. I. - *Partial stability and control: The state-of-the-art and development prospects (Reviews),* Automation and Remote Control,Vol 66, 4 (2005), pp. 511-561.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal de João Pessõa
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

Kawahara equation posed on a finite interval

Gleb G. Doronin *† & Nikolai A. Larkin ‡

This work is concerned with the existence and uniqueness of global-in-time regular solutions for the Kawahara equation posed on a bounded interval. Our study is motivated by physics and numerics: the nonlinear relation, called Kawahara equation [4], is the fifth-order dispersive-type partial differential equation describing one-dimensional propagation of small-amplitude long waves in various problems of fluid dynamics and plasma physics [1, 5]. This equation is also known as a perturbed KdV, or as a special case of the Benney-Lin equation [2].

Dispersive models have been usually developed for unbounded regions of wave propagations; however, if one is interested in implementing a numerical scheme to calculate solutions in infinite regions, there arises the issue of cutting off the spatial domain. Once this is done, some boundary conditions are needed to specify the solution. Therefore, precise mathematical analysis of boundary value problems in bounded domains for the Kawahara-type equations is welcome.

The main goal here is the existence and uniqueness of a global regular solution to the initial-boundary value problem posed on an interval $x \in (0,1)$ for the nonlinear Kawahara equation. To prove existence results we propose the transparent and constructive method of semi-discretization with respect to t which can be used for numerical simulations. In addition we prove the exponential decay of solutions as $t \to \infty$ and its asymptotics while the coefficient of the higher derivative approaches zero.

Note that boundary conditions imposed below are reasonable, at least from the mathematical viewpoint. Indeed, to understand what kind of boundary conditions leads to well- or ill-posedness of an initial-boundary value problem for the evolution odd-order PDE, one has to know what boundary value problems for the corresponding stationary equation are well- or ill-posed. Stationary equation can be derived from an evolution one by making use of the Laplace transformation or discretization with respect to time. In the case of dispersive-type equations (such as KdV or Kawahara equation) formulation of a problem usually comes from a real physical situation when "well-chosen" boundary conditions assure its well-posedness. However, it was not clear what happens if the boundary conditions are "wrongly chosen". Observe that this choice is certainly very important for numerical simulations. A brief analysis of odd-order equation

$$au + (-1)^{l+1} D^{2l+1} u = 0, \quad (x \in (0,1) \subset \mathbb{R},\ t > 0)$$

with $a > 0$, $l = 0, 1, 2$ and $D^k u = d^k u/dx^k$ shows (see [3]) that the well-posed problem is those that has l boundary conditions on the left boundary ($x = 0$) and $l + 1$ conditions at the right-hand endpoint ($x = 1$.) Otherwise, either existence or uniqueness is failed. This brings theoretical reasons for our results.

For real $T > 0$ denote $Q_T = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in (0,1) \subset \mathbb{R},\ t \in (0,T)\}$. In Q_T we study one-dimensional nonlinear Kawahara equation

$$u_t - D^5 u + uDu + D^3 u = 0 \tag{0.1}$$

subject to initial and boundary conditions

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,1); \tag{0.2}$$

$$D^i u(0,t) = D^i u(1,t) = D^2 u(1,t) = 0, \quad i = 0,1; \quad t \in (0,T). \tag{0.3}$$

*Supported by Fundação Araucária
†Universidade Estadual de Maringá, 87020-900, Maringá, PR, Brazil. E-mail: ggdoronin@uem.br
‡Universidade Estadual de Maringá, 87020-900, Maringá, PR, Brazil. E-mail: nlarkine@uem.br

Here $u_0 : (0,1) \to \mathbb{R}$ is the given function satisfying

$$D^i u_0(0) = D^i u_0(1) = D^2 u_0(1) = 0, \quad i = 0,1. \tag{0.4}$$

Theorem 1. *Let $u_0 \in H^5(0,1)$ satisfy (0.4). Then for all finite $T > 0$ problem (0.1)-(0.3) has a unique regular solution $u(x,t)$:*

$$u \in L^\infty(0,T; H^5(0,1)) \cap L^2(0,T; H^7(0,1)),$$
$$u_t \in L^\infty(0,T; L^2(0,1) \cap L^2(0,T; H^2(0,1)).$$

Theorem 2. *Let $u_0 \in H^5(0,1)$ satisfy (0.4) and $11 - \frac{2}{3}\|u_0\|_{L^2(0,1)} = \kappa > 0$. Then for all $t > 0$ the regular solution given by Theorem 1 satisfies the following inequality*

$$\|u\|^2(t)_{L^2(0,1)} \leq 4\|u_0\|^2_{L^2(0,1)} e^{-\kappa t}. \tag{0.5}$$

To formulate the next theorem, for real $\mu > 0$ and for fixed $m \in \mathbb{N}$, consider in Q_T two following problems:

$$u^\mu_t + u^\mu Du^\mu + D^3 u^\mu - \mu D^5 u^\mu = 0, \quad (x,t) \in Q_T; \tag{0.6}$$

$$D^i u^\mu(0,t) = D^i u^\mu(1,t) = D^2 u^\mu(1,t) = 0, \quad i = 0,1; \quad t \in (0,T); \tag{0.7}$$

$$u^\mu(x,0) = u^m_0(x), \quad m \in \mathbb{N}; \quad x \in (0,1) \tag{0.8}$$

and

$$u_t + uDu + D^3 u = 0, \quad (x,t) \in Q_T; \tag{0.9}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = Du(1,t) = 0, \quad t \in (0,T); \tag{0.10}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,1). \tag{0.11}$$

Theorem 3. *Let $u^m_0 \in H^5(0,1)$ and $u_0 \in H^3(0,1)$ satisfy the consistency conditions related to (0.7) and (0.10) correspondingly. Suppose*

$$\|u^m_0 - u_0\|_{H^3(0,1)} \to 0 \quad as \quad m \to \infty.$$

Then for all finite $T > 0$ there exists a unique solution $u(x,t)$ to (0.9)-(0.11) such that

$$u \in L^\infty(0,T; H^3(0,1)) \cap L^2(0,T; H^4(0,1)),$$
$$u_t \in L^\infty(0,T; L^2(0,1)) \cap L^2(0,T; H^1(0,1)).$$

Moreover, if $\mu \to 0$, and $m \to \infty$, then

$$u^\mu \to u \ \ *-weak \ in \ L^\infty(0,T; L^2(0,1)) \ and \ weakly \ in \ L^2(0,T; H^1(0,1)),$$
$$u^\mu_t \to u_t \ \ *-weak \ in \ L^\infty(0,T; L^2(0,1)) \ and \ weakly \ in \ L^2(0,T; H^1(0,1)).$$

References

[1] T.B. Benjamin, *Lectures on nonlinear wave motion,* Lecture notes in applied mathematics 15 (1974), 3–47.

[2] D.J. Benney, *Long waves on liquid films,* J. Math. and Phys. 45 (1966), 150–155.

[3] G.G. Doronin, N.A. Larkin, *Boundary value problems for the stationary Kawahara equation,* Nonlinear Analysis, 69 (2008), 1655–1665.

[4] T. Kawahara, *Oscillatory solitary waves in dispersive media,* J. Phys. Soc. Japan 33 (1972), 260–264.

[5] J. Topper, T. Kawahara, *Approximate equations for long nonlinear waves on a viscous fluid,* J. Phys. Soc. Japan 44 (1978), no. 2, 663–666.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{0}}$ 2 Novembro 2008

Método de Solução das EDPs : $F(u_x, u_y) = 0$; $F(f(x)u_x, u_y) = 0$; $F(u_x, h(y)u_y) = 0$

M. L. Espindola *

10/09/2008

Tanto no método de Charpit, como em outros métodos, aplicados a edps lineares ou não lineares dos tipos: $F(p,q) = 0$; $F(f(x)p, q) = 0$; $F(p, h(y)q) = 0$, onde $p = \partial u/\partial x$, $q = \partial u/\partial y$ e $u = u(x,y)$, fornecem uma solução integral[1, 2, 3]. No método proposto aqui obtém-se infinitas soluções integrais, i.e., a solução geral na forma implícita e em alguns casos a solução geral de forma explícita.

O procedimento desenvolvido tem como base uma transformação de Legendre.

Uma das aplicações para edps não lineares é a obtenção da solução geral da equação de Hamilton-Jacobi, cuja importância é muito grande em Mecânica Analítica[4, 6] e como uma ferramenta prática de solução de equação diferenciais[5].

Na extensão do método podemos obter soluções para edps de segunda ordem de um dos tipos

$$F(r,s) = 0 \quad e \quad F(s,t) = 0, \quad r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad e \quad t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

desde que estas podem ser transformadas nas edps acima.

Outra extensão possível é para edps de primeira ordem com diversas variáveis

$$F(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) = 0, \quad p_i = \partial u/\partial x_i, \quad q_i = \partial u/\partial y_i \quad e \quad u = u(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n).$$

1 Solução Geral para $F(p,q) = 0$

Considere a edp de primeira ordem $F(p,q) = 0$, onde $p = \partial u/\partial x$, $q = \partial u/\partial y$ e $u = u(x,y)$. A forma diferencial Pfaffiana para u é

$$du = p\,dx + q\,dy. \tag{1.1}$$

Aplicando uma transformação de Legendre obtemos

$$d(xp + yq) - du - xdp - ydq = 0.$$

Desde que $dF = F_p dp + F_q dq = 0$, logo $dp = -(F_q/F_q)dq$ então

$$d(xp + yq) - du + \left(x\frac{F_q}{F_p} - y\right) dq = 0\,. \tag{1.2}$$

Sendo esta uma forma diferencial Pfaffiana pode ser aplicado o teorema[7]:

Teorema 1.1. *A condição necessária e suficiente para que a forma diferencial Pfaffiana* $\vec{X} \cdot \vec{dr} = 0$ *seja integrável é que* $\vec{X} \cdot rot\,\vec{X} = 0$.

Que neste caso resulta em

$$\vec{X} \cdot rot\,\vec{X} = -\left(\frac{\partial}{\partial(xp+yq)} + \frac{\partial}{\partial u}\right)\left(x\frac{F_q}{F_p} - y\right) = 0,$$

*Universidade Federal da Paraíba, DM, PB, Brasil, mariia@mat.ufpb.br

que integrada fornece

$$u - xp - yq = \phi(q). \tag{1.3}$$

Substituindo na equação (1.2) obtém-se

$$x\left(\frac{F_q}{F_p} - y\right) = -\phi'(q). \tag{1.4}$$

A solução geral da equação diferencial é dada pela equação (1.3) na qual q é determinado a partir de (1.4). Esta é uma solução geral desde que ela possui uma função arbitrária $\phi(q)$, i.e., a cada forma arbitrária de $\phi(q)$ a equação (1.4) e a edp original formam um sistema de equações algébrico que determina $q = q(x, y)$ e $p = p(x, y)$, que uma vez substituídos em (1.3) fornecem uma solução da edp.

Em alguns casos podemos explicitar $p = f(q)$ (ou $q = g(p)$) e a solução geral da edp a partir de (1.3) fica

$$u = x\, f(q) + yq - \phi(q), \tag{1.5}$$

com a condição que é obtida de (1.4)

$$x f_q + y = \phi'(q) \tag{1.6}$$

.

2 Solução Geral para $F(f(x)p, q) = 0$ (ou $F(p, g(y)q) = 0$)

Utilizando um procedimento idêntico ao da seção anterior, explicitamos a partir da edp $p = G(q)/f(x)$ substituímos na forma diferencial e aplicamos uma transformação de Legendre obtendo

$$du = d[H(x)G(q) + yq] - [H(x)G'(q) + y]dq,$$

onde $H(x) = \int dx/f(x)$.

Esta é uma forma diferencial Pfaffiana e a sua condição de integrabilidade[7] é

$$H(x)G'(q) + yq = \phi'(q). \tag{2.7}$$

Portanto a solução geral da edp é

$$u = H(x)G'(q) + yq - \phi(q), \tag{2.8}$$

onde $\phi(q)$ é uma função arbitrária que uma vez escolhida irá determinar o valor de $q = q(x, y)$ a partir da equação (2.5).

Da maneira semelhante se obtém a solução de $F(p, g(y)q) = 0$.

Como uma observação final o procedimento acima descrito poderá ser aplicado a edps lineares ou não do tipo $u = f(p, q)$ (em estudo atualmente).

Referências

[1] I. Sneddon, Elements of Partial Differential Equations (McGraw-Hill, Kogakusha, 1957), Cap.2.

[2] A. R. Forsyth, A Treatise on Differential Equations (McMillan, London, 1903), cap. IX.

[3] R. Courant e D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics (Interscience, New York, 1962), cap. 2, 140.

[4] V. Arnold, Méthodes Mathématiques Classique (Mir, Moscou, 1976).

[5] A. Chodos e C. M. Sommerfield, J. Math. Phys., **24**, 271 (1983).

[6] L. D. Dureau, Am. J. Phys., **33**, 895 (1965).

[7] I. Sneddon, Elements of Partial Differential Equations (McGraw-Hill, Kogakusha, 1957), Cap.2, 21.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{o}}$ 2 Novembro 2008

MÉTODOS DE ALTA RESOLUÇÃO PARA ANÁLISE E RESSÍNTESE DE SINAIS MUSICAIS

L. H. BEZERRA * & S. CASTILHO †

Neste trabalho, introduzimos alguns métodos para análise e ressíntese de sinais musicais baseados no domínio do tempo, que correspondem ao estado atual dessa abordagem em processamento de sinais. Nossa contribuição a essa família de métodos foi nas suas implementações, especialmente os métodos de aproximação projetiva NP3 (Hua et al. [5]) e OPAST (Abed-Merain et al. [1]), em que foram introduzidos procedimentos diferentes dos contidos nos algoritmos originais para o cálculo de alguns dos parâmetros necessários para o desenvolvimento dos mesmos.

A desvantagem desses métodos é o número de operações necessárias para as estimativas dos parâmetros dos sinais, que demanda muito tempo de processamento em comparação aos algoritmos no domínio das freqüências. Esse fato inviabiliza sua utilização em tempo real com os computadores atuais. Apesar disso, os testes que realizamos mostram que os métodos de alta resolução dão bons resultados, com erros inferiores aos dos métodos no domínio das freqüências que também utilizam síntese aditiva.

Um método pioneiro baseado no domínio das freqüências para a ressíntese de sinais musicais foi o Phase Vocoder. Esse método não conta com uma etapa de análise. Para cada quadro, o espectro é obtido via STFT (Short-Time Fourier Transform), porém não é interpretado, é apenas utilizado para a ressíntese. Na síntese aditiva, cada bin do espectro é interpretado como uma faixa de freqüência fixa, o que torna esse método pouco flexível e com desempenho inferior para sons com oscilações de freqüências. A utilização desse algoritmo, aqui, foi restrita à modificação independente de duração e freqüências de um sinal musical.

Os métodos de alta resolução supõem o sinal musical modelado por somas de exponenciais complexas amortecidas:

$$s(t) = \sum_{k=1}^{M} \alpha_k z_k^t + \bar{\alpha}_k \bar{z}_k^t,$$

em que $\alpha_k = \frac{1}{2} A_k e^{i\theta_k}$ e $z_k = e^{d_k + i2\pi f_k}$ (para todo k, A_k é amplitude, f_k é freqüência e d_k é coeficiente de amortecimento). Nossa família de métodos de alta resolução inicia-se com o algoritmo ESPRIT (Roy and Kailath [6]). Em Badeau [2], sugere-se que o cálculo das amplitudes com o ESPRIT, isto é, a resolução do problema $W\alpha = H(:,1)$, em que a matriz W é de Vandermonde e a matriz de Hankel H é tal que $H = WAW^T$ (A é a matriz diagonal formada com as amplitudes do sinal), pode ser feita sem a necessidade de se explicitar a matriz de Vandermonde. Neste trabalho, deduzimos uma forma original para essa resolução.

Quando a matriz H é muito grande, dividimo-la em submatrizes H_i, que chamamos de janelas (não confundir com um tipo de filtros no domínio do tempo) e fazemos o cálculo dos parâmetros do sinal adaptativamente. Para isso, é fundamental calcular o subespaço associado aos autovalores dominantes da janela H_i. Usamos o método de janelas deslizantes, calculando Q_i para cada matriz de Hankel H_i formada com os sinais da janela i. Usaremos um método alternativo ao QR, que ortonormaliza as colunas de $C_i Q_{i-1}$ ($C_i = H_i^2$), computando

$$Q_i = C_i Q_{i-1} \left(Q_{i-1}^T C_i^2 Q_{i-1} \right)^{-1/2}$$

de dois modos, que estão sintetizados nos algoritmos NP3 e OPAST.

Uma vez calculada a matriz Q_i, que tem as colunas ortonormais, deve-se calcular a matriz espectral $\Phi_i = Q_i^\dagger Q_i$, em que $Q_i^\dagger$ é a pseudo-inversa de Q_i. Em Badeau [3], há um modo de se calcular adaptativamente a matriz espectral nos casos em que as matrizes Q_i têm uma atualização de posto 1, do tipo $Q_i = Q_{i-1} + eg^T$. Fizemos

*UFSC, Departamento de Matemática, SC, Brasil, licio@mtm.ufsc.br
†UFSC, Departamento de Matemática, SC, Brasil, e-mail sauloc@inf.ufsc.br

$$
\begin{array}{|c||ccc|c||cc|}
\hline
h_1 & h_2 & \cdots & h_L & h_{L+1} & \cdots & h_{N-L-1} \\
h_2 & h_3 & \cdots & h_{L+1} & h_{L+2} & \cdots & h_{N-L} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
h_L & h_{L+1} & \cdots & h_{2L-1} & h_{2L} & \cdots & h_N \\
\hline
\end{array}
$$

Figura 1: Janelas deslizantes

uma generalização do cálculo adaptativo da matriz espectral para o nosso caso, uma vez que, na nossa versão dos algoritmos adaptativos, os subespaços que queremos computar são atualizados por uma equação do tipo $Q_i = Q_{i-1} + EG^T$, em que E e G são matrizes de posto 2. Por sua vez, os algoritmos adaptativos que foram baseados nos algoritmos NP3 e OPAST tiveram que ser generalizados para os casos em que as matrizes têm atualizações de posto 2, em vez de posto 1, como pensado originalmente por seus autores. Esses algoritmos foram desenvolvidos originalmente para rastrear subespaços dominantes de matrizes de covariância, cuja atualização é de posto 1. Todas essas adaptações foram feitas com algum esforço matemático, uma combinação de problemas matemáticos de pequeno porte, que foram resolvidos nesse trabalho. As implementações utilizadas para os experimentos que realizamos foram feitas em MATLAB e, com exceção do algoritmo Phase Vocoder, os códigos são todos de nossa autoria. Para o algoritmo Phase Vocoder foi utilizada a implementação de Ellis [4].

Após realizarmos testes com métodos no domínio do tempo e comparar os resultados com resultados de testes feitos com métodos no domínio das freqüências, concluímos que ambas as abordagens possuem vantagens e desvantagens. Assim, não pudemos dizer que existe um melhor método para análise e ressíntese de sinais sonoros. A escolha do método adequado dependerá das características da aplicação para o qual este será utilizado. Para sons monofônicos, que se encaixem no modelo senoidal com amortecimento exponencial, os métodos de alta resolução apresentaram melhores resultados. Também recomendamos esses métodos para reconhecimento de locutor, por exemplo, no qual é necessária uma representação mais fiel, ou seja, um resultado numérico mais preciso. Por outro lado, os métodos baseados no domínio das freqüências apresentaram melhores resultados com sons mais complexos, nos quais as imperfeições da ressíntese passam desapercebidas pelos ouvidos humanos. Isso se deve à maior quantidade de informações a serem decodificadas pelo sistema auditivo. Além disso, esses métodos também são mais recomendados para a aplicação de transformações e efeitos na ressíntese de sinais, por oferecerem maior flexibilidade no domínio das freqüências.

Referências

[1] K. Abed-Meraim, A. Chkeif and Y. Hua - *Fast Orthonormal PAST Algorithm*, IEEE Signal Processing Letters 7(3), 60-62, 2000.

[2] R. Badeau, R. Boyer and B. David - *EDS parametric modeling and tracking of audio signals*, 5th Int. Conf. on Digital Audio Effects (DAFx-02), 139-144, Hamburg, 2002.

[3] R. Badeau, G. Richard and B. David - *Fast Adaptive Esprit Algorithm*, IEEE 13th Workshop on Statistical Signal Processing 5, 289-294, 2005.

[4] D. P. W. Ellis - *A Phase Vocoder in Matlab*, `http://www.ee.columbia.edu/~dpwe/resources/matlab/pvoc/`, 2002.

[5] Y. Hua, Y. Xiang, T. Chen, K. Abed-Meraim and Y. Miao - *A new look at the power method for fast subspace tracking*, Digital Signal Processing 9, 297-314, 1999.

[6] R. Roy and T. Kailath - *ESPRIT: estimation of signal parameters via rotational invariance techniques*, IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing 37, 984-995, 1989.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{o}}$ 2 Novembro 2008

MICROPOLAR FLUIDS WITH VANISHING VISCOSITY

M.A. Rojas-Medar * & E. Ortega-Torres † & E.J. Villamizar-Roa ‡

The objective of the present work is to analyze the convergence of the evolution equations for the motion of incompressible micropolar fluids, when the viscosities related with the physical properties of the fluid go to zero. The equations that describes the motion of a viscous incompressible micropolar fluid expresses the balance of momentum, mass and angular momentum. In a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ and in a time interval $(0, T]$, $0 < T < +\infty$, this model is given by

$$(\boldsymbol{u}_\nu)_t - \nu_1 \,\Delta \boldsymbol{u}_\nu + (\boldsymbol{u}_\nu \cdot \nabla) u_\nu + \nabla\, p_\nu = 2\,\mu_r \mathrm{rot}\, \boldsymbol{w}_\nu + \boldsymbol{f} \text{ in } Q, \tag{0.1}$$

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{u}_\nu = 0 \text{ in } Q, \tag{0.2}$$

$$(\boldsymbol{w}_\nu)_t - \nu_2 \,\Delta \boldsymbol{w}_\nu - \nu_3 \,\nabla \mathrm{div}\, \boldsymbol{w}_\nu + (\boldsymbol{u}_\nu \cdot \nabla)\, \boldsymbol{w}_\nu + 4\,\mu_r\, \boldsymbol{w}_\nu = 2\mu_r \,\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}_\nu + \boldsymbol{g} \text{ in } \; Q, \tag{0.3}$$

with $Q = \Omega \times (0, T]$, where the unknowns are $\boldsymbol{u}_\nu = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{w}_\nu = (w_1, w_2, w_3)$ and p_ν, which denote respectively, the velocity of the fluid, the micro-rotational velocity and the hydrostatic pressure of fluid, at a point $(\boldsymbol{x}, t)$. The constants positives $\nu_1 = \mu + \mu_r,\ \nu_2 = c_a + c_d,\ \nu_3 = c_0 + c_d - c_a$, with $c_0 + c_d > c_a$, where $\mu, \mu_r, c_0, c_a, c_d$ represent viscosity coefficients; in particular, μ is the usual Newtonian viscosity and μ_r is called the microrotation viscosity and c_0, c_a, c_d are new viscosities related to the asymmetry of the stress tensor. The fields $\boldsymbol{f}$ and $\boldsymbol{g}$ are given and denote external sources of linear and angular momentum, respectively.

Together with these equations we prescribe the following initial and boundary conditions

$$\boldsymbol{u}_\nu(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{w}_\nu(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{0} \quad \text{in } \Omega, \tag{0.4}$$

$$\boldsymbol{u}_\nu(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{w}_\nu(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{0} \quad \text{on } \partial\Omega \times [0, T], \tag{0.5}$$

where, for the sake of simplicity in this exposition, we have taken homogeneous boundary conditions, for both velocity and micropolar fields equals to zero. The initial data is also assumed equals to zero due the nature of the solutions of Euler-like system (0.7)-(0.10) below.

For the derivation and physical discussion of system (0.1)-(0.3) are found in [2]. Some mathematical results are founded in [3], [4].

In the present work, we are interested in the study of the flow of micropolar fluids, in a smooth enough bounded domain Ω, when the viscosities ν_1, ν_2, ν_3 tend to zero. We will prove that there exists a subspace of $(L^\infty(0, T; \mathbf{H}^3_0(\Omega)))^2$, such that for external forces $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g})$ in that subspace, the weak solution of the micropolar fluid system (0.1)-(0.3) converges in $\mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$, when the viscosities ν_1, ν_2, ν_3 in (0.1)-(0.3) tend to zero, to the solution $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$ of the system

$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u} \cdot \nabla\, \boldsymbol{u} + \nabla\, p \;\; = \;\; \boldsymbol{f}, \quad \text{in } \Omega \times [0, \tau], \tag{0.6}$$

*Dpto. de Ciencias Básicas, Facultad de Ciencias, Universidad del Bío-Bío, Campus Fernando May, Casilla 447, Chillán, Chile, M. Rojas-Medar is partially supported by project BFM2003-06446-CO-01, Spain and Fondecyt-Chile, Grant 1080628 marko@ueubiobio.cl

†Dpto. de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Católica del Norte, Antofagasta, Chile. eortega@ucn.cl.

‡Escuela de Matemáticas, Universidad de Santander, A.A. 678, Bucaramanga, Colombia. jvillami@uis.edu.co

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \boldsymbol{u} &= 0, \quad \text{in } \Omega \times [0,\tau], && (0.7)\\
\boldsymbol{w}_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla \boldsymbol{w} &= \boldsymbol{g}, \quad \text{in } \Omega \times [0,\tau], && (0.8)\\
\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0) = \mathbf{0},\ \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0) &= \mathbf{0}, \quad \text{in } \Omega, && (0.9)\\
\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \mathbf{0},\ \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t) &= \mathbf{0}, \quad \text{on } \partial\Omega \times [0,\tau], && (0.10)
\end{aligned}$$

with $0 < \tau < T$. As far as we know, the analysis of convergence of the evolution equations for the motion of incompressible micropolar fluids, in in an open set $\Omega \times (0,T)$, where Ω is a proper subdomain of $\mathbb{R}^3$, when the viscosities go to zero is still unknown. In case $\Omega = \mathbb{R}^3$, in [1] was consider a non-homogeneous, viscous, incompressible asymmetric fluid in $\mathbb{R}^3$ and was prove that there exists a small time interval where the fluid variables converge uniformly as the viscosities tend to zero. However, the results of [1] do not applicable in the case Ω a proper subdomain of $\mathbb{R}^3$; indeed the analysis of the our situation is still more difficult.

Ours main results are: let us consider the following functional space:

$$\mathcal{F}_0 = \{(\Phi + t^2 P(\Phi\cdot\nabla\Phi), \Psi + t^2\Phi\cdot\nabla\Psi) : \Phi \in \mathbf{V}\cap\mathbf{H}^3, \Psi \in \mathbf{H}_0^1 \cap \mathbf{H}^3\}$$

So, we have

Lemma 1. *Let $(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) \in \mathcal{F}_0 \subset (L^\infty(0,T;\mathbf{H}_0^3(\Omega)))^2$. Then, for some $0 < \tau < T$ there exists a unique solution $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,\tau;\mathbf{V}\cap\mathbf{H}^3)$, $\boldsymbol{w} \in L^\infty(0,\tau;\mathbf{H}_0^1\cap\mathbf{H}^3)$ of Problem (0.6)-(0.10).*

Theorem 2. *Consider $(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) \in \mathcal{F}_0$. Then,*

1. *(Existence). There exists a solution $\boldsymbol{u}_\nu \in L^\infty(0,T;\mathbf{H})\cap L^2(0,T;\mathbf{V})$, $\boldsymbol{w}_\nu \in L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2)\cap L^2(0,T;\mathbf{H}_0^1)$ of Problem (0.1)-(0.5) where $\boldsymbol{u}_\nu$ and $\boldsymbol{w}_\nu$ are dependent on ν_1,ν_2,ν_3.*

2. *(Convergence). If $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})$ is the unique solution of Problem (0.6)-(0.10) given by Lemma 1, then*

$$\|\boldsymbol{u}_\nu - \boldsymbol{u}\|_{L^2(0,\tau;H)} = O((\nu_1+\nu_2+\nu_3)^{1/2}), \tag{0.11}$$
$$\|\boldsymbol{w}_\nu - \boldsymbol{w}\|_{L^2(0,\tau;L^2)} = O((\nu_1+\nu_2+\nu_3)^{1/2}), \tag{0.12}$$

with $0 < \tau < T$ as in Lemma 1. Moreover, with the additional condition $\nu_3 < \nu_1 < \nu_2 < k\nu_1$ for some constant k, as $\nu_1,\nu_2,\nu_3 \to 0$ we have

$$\boldsymbol{u}_\nu \to \boldsymbol{u} \text{ weakly in } L^2(0,\tau;\mathbf{V}), \qquad \boldsymbol{w}_\nu \to \boldsymbol{w} \text{ weakly in } L^2(0,\tau;\mathbf{H}_0^1).$$

Referências

[1] Braz e Silva, P.; Fernández-Cara, E.; Rojas-Medar, M. A., Vanishing viscosity for non-homogeneous asymmetric fluids in $\mathbb{R}^3$, J. Math. Anal. Appl. 332 (2007), no. 2, 833–845.

[2] Lukaszewicz, G.: Micropolar fluids. Theory and applications, modeling and simulation in science, Engineering and Thecnology, Birkhauser, Boston (1999).

[3] Ortega-Torres, E.; Rojas-Medar, M.A., Magneto-micropolar fluid motion: global existence of strong solutions, Abstract Applied Analysis, 4 (2), (1999), 109-125.

[4] Rojas-Medar, M.A., Magneto-micropolar fluid motion: existence and uniqueness of strong solution, Math. Nachr., 188, (1997), 301-319.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{o}}$ 2 Novembro 2008

Multiplicidade de soluções positivas de um problema semilinear de Dirichlet com função peso mudando de sinal em um cilindro infinito.

M. L. Miotto * & O. H. Miyagaki †

Analisamos a existência e multiplicidade de soluções positivas do seguinte problema

$$(P_{\lambda,f,h}) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = \lambda f(x)u^{q-1} + h(x)u^{p-1}, & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\Omega = \Omega' \times \mathbb{R}$, sendo Ω' um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^{N-1}$ e $N \geq 2$. Consideremos ainda $1 < q < 2 < p < 2^*$, λ um parâmetro positivo, uma função f, que dentre outras condições, pode mudar de sinal em Ω, e a função h satisfaz condições adequadas. Esta analise é baseada na comparação dos níveis de energia sobre a Variedade de Nehari.

Problemas semilineares com não linearidades côncavo-convexa em domínio limitado são amplamente estudadas. Citamos o trabalho pioneiro de Ambrosetti, Brézis e Cerami [2], que dentre outros problemas analisou a existência e multiplicidade de soluções positivas de

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u^q + u^p, & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

onde $0 < q < 1 < p \leq 2^*$. Eles provaram a existência de $\lambda_0 > 0$, tal que o problema (P_λ), admite ao menos duas soluções positivas se $\lambda \in (0, \lambda_0)$, possui uma solução positiva para $\lambda = \lambda_0$ e não possui solução para $\lambda > \lambda_0$. Recentemente, para $\Omega = B_N(0,1)$, ou seja, se Ω é Sa bola unitária, Adimurthi, Pacella e Yadava [1], Damascelli, Grossi e Pacella [6] e Tang [7] provaram que existem exatamente duas soluções positivas para $\lambda \in (0, \lambda_0)$ e apenas uma solução positiva para $\lambda = \lambda_0$. Ainda no caso de Ω ser um domínio limitado, citamos o trabalho de Brown e Zhang [4], o qual analisa a existência de soluções positivas do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(x)u + h(x)u^p, & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

com $\lambda > 0$, $1 < p < 2^* - 1$ e as funções peso f, $h : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ são suaves e podem mudar de sinal.

Quando $\Omega = \mathbb{R}^N$ com $f \geq 0$ e $h > 0$, onde $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = f_\infty > 0$ e $\lim_{|x|\to\infty} h(x) = 0$, Cao em [5] garantiu a existência de $(\lambda_n) \subset (0, \infty)$ onde para cada $\lambda \in (0, \lambda_n)$ existem n pares de soluções de $(P_{\lambda,f,h})$.

Se Ω é um domínio exterior em $\mathbb{R}^N$, para $f \equiv 0$, $h \geq 0$ e $\lim_{|x|\to\infty} h(x) = h_\infty > 0$ com $h(x) \geq h_\infty - C_0|x|^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\delta|x|}$ se $|x| \geq R_0$, para algumas constantes R_0, C_0, $\delta > 0$, Bahri e Lions [3] mostraram, dentre outros resultados, que $(P_{1,0,h})$ possui ao menos uma solução positiva.

Wu em [8] estudou o problema $(P_{\lambda,f,h})$, sob as hipóteses que $0 \lneqq f \in L^{\frac{2}{2-q}}(\Omega)$, $h \in C(\Omega)$ satisfaz $h > 0$, $\lim_{|x_N|\to\infty} h(x) = 1$ em $\Omega = \Omega' \times \mathbb{R}$ e ainda existem $\delta > 0$ e $0 < C_0 < 1$ tais que $h(x', x_N) \geq 1 - C_0 e^{-2\sqrt{1+\theta_1+\delta}|x_N|}$, para todo $(x', x_N) \in \Omega$, onde θ_1 é o primeiro autovalor do problema de Dirichlet $-\Delta$ em Ω'. Ele obteve a existência de $\lambda_0 > 0$ tal que para $\lambda \in (0, \lambda_0)$, o problema $(P_{\lambda,f,h})$ possui ao menos duas soluções positivas.

Motivados pelos trabalhos de Wu [8], Brown e Zhang [4], analisamos o problema $(P_{\lambda,f,h})$ onde, dentre outras condições, a função peso f pode mudar de sinal e h é não negativa, mas que pode ser identicamente nula em um conjunto limitado de Ω. O seguinte teorema contém nosso resultado principal:

*UFSCar, DM, SP, Brasil, miotto@dm.ufscar.br
†UFV, DMA, MG, Brasil, olimpio@ufv.br

Teorema 0.1. *Se as funções* f, $h : \Omega \to \mathbb{R}$ *satisfazem*

i) $f \in L^{\frac{\gamma}{\gamma - q}}(\Omega)$, *onde* $q < \gamma \leq 2^*$, *com* $f^+ \not\equiv 0$ *e* f^- *é limitada e possui suporte compacto em* Ω.

ii) $0 \leq h \in L^\infty(\Omega)$, *com* $\lim\limits_{|x_N| \to \infty} h(x', x_N) = 1$ *e existe* $C_0 > 0$, *tal que*

$$h(x', x_N) \geq 1 - C_0 e^{-2\sqrt{1+\theta_1}|x_N|}$$

para todo $x = (x', x_N) \in \Omega$, *onde* θ_1 *é o primeiro autovalor do problema de Dirichlet* $-\Delta$ *em* Ω'.

Então existe uma constante positiva $\Lambda = \Lambda(q, p, \|h\|_{L^\infty}, \gamma)$, *tal que o problema* $(P_{\lambda, f, h})$ *possui ao menos duas soluções positivas, para cada* $\lambda \in (0, \Lambda \|f\|_{L_1}^{-1})$.

Ressaltamos que sobre nossas hipóteses, algumas estimativas para obter a convergência das sequências (PS) sobre a variedade de Nehari, bem como, outros argumentos utilizados por Brown e Zhang [4] e Wu [8] não podem mais ser utilizados. Para contornar tais dificuldades novas estimativas são estabelecidas. É interessante salientar que a constante Λ não depende das funções h e f, no sentido de que Λ depende apenas da norma de h e do espaço que contém f.

Referências

[1]ADIMURTHI, PACELLA, F., YADAVA, S.*On the number of positive solutions of some semilinear Dirichlet problems in a ball*, Differential and Integral Equations 10 (1997) 1157-1170.

[2]AMBROSETTI, A., BRÉZIS, H., CERAMI, G. *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. 122 (1994) 519-543.

[3]BAHRI, A., LIONS, P. L.*On the existence of a positive solution of semilinear elliptic equations in unbounded domains*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 14 (1997) 365-413.

[4]BROWN, K. J., ZHANG, Y.*The Nehari manifold for a semilinear elliptic equation with a sign-changing weight function*, J. Differential Equations 193 (2003) 481-499.

[5]CAO, D. M.*Multiple solutions of a semilinear elliptic equation in* $\mathbb{R}^N$, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 10 (1993) 593-604.

[6]DAMASCELLI, L., GROSSI, M., PACELLA, F.*Qualitative properties of positive solutions of semilinear elliptic equations in symmetric domains via the maximum principle*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 16 (1999) 631-652.

[7] TANG, M.*Exact multiplicity for semilinear Dirichlet problem involving concave and convex nonlinearities*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 133 (2003) 705-717.

[8]WU, T. F.*Multiple positive solutions for Dirichlet problems involving concave and convex nonlinearities*, doi:10.1016/j.na.2007.10.056

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

Multiscale radial basis approximations for the Black-Sholes problem

E. Larsson * & S. M. Gomes †

We are concerned with meshfree schemes for partial differential equations, where the approximating spaces are formed by linear combinations of radial basis functions (RBF). The motivation for using RBF approximations comes from the possibility of achieving high (spectral) accuracy with low complexity algorithms, for arbitrary choice of node locations, and, consequently, suitable for multi-dimensional irregular geometries. We refer to [1] for an overview on this matter.

Our purpose is to simulate high dimensional models in mathematical finance, focusing on the Black-Sholes model for European basket call option. Computational option pricing is an active area of research with different modern numerical techniques [3].

The new contributions of this work are two fold. Firstly, instead of collocation, which is a common formulation in the radial basis context, we adopt a least squares scheme. Secondly, since the solution features change in time, effort is directed to the study of a multi-level approach for radial basis functions.

1 The Black–Scholes model problem

The multi-dimensional Black–Scholes partial differential equation can be used for valuation of options based on several underlying assets. It is a linear, time-dependent, parabolic PDE that can be written as

$$\begin{aligned} u_t(\underline{x},t) &= \mathcal{L}u(\underline{x},t), && \underline{x}\in\Omega, \quad t>0, \\ u(\underline{x},t) &= g(\underline{x},t), && \underline{x}\in\Gamma, \quad t>0, \\ u(\underline{x},0) &= \Phi(\underline{x}), && \underline{x}\in\Omega, \end{aligned}$$

where $u(\underline{x},t)$ is the value of the option, $\underline{x}\in\mathbb{R}^d_+$ contains the scaled values of the d assets, t is the time left to the exercise time T of the option, and Ω is some subregion of $\mathbb{R}^d_+$. The spatial operator has the form

$$\mathcal{L}u(\underline{x},t) = r\sum_{i=1}^{d} x_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\left[\sigma\sigma^T\right]_{ij} x_i x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - ru,$$

where r is the risk free interest rate and σ is the volatility matrix. The function $\Phi(\underline{x})$ is called the contract function and depends on which type of option we are solving for. For our numerical examples, we use the European basket call option with contract function

$$\Phi(\underline{x}) = \max(0, \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} x_i - K),$$

where, in our present case, the exercise price K is always equal to 1 due to scaling. At the near-field boundary, consisting of the origin, we impose

$$u(\underline{x},t) = 0, \tag{1.1}$$

and at the far-field boundary, here defined as the part of the boundary where $\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} x_i \geq 4K$, we impose

$$u(\underline{x},t) = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} x_i - K\exp(-rt). \tag{1.2}$$

*University of Uppsala, Sweden bette@it.uu.se
†Universidade Estadual de Campinas, IMECC, SP, Brasil, soniag@ime.unicamp.br

2 Numerical Model

The numerical model has two parts: one for the time integration and another for the discretization of the spatial differential operator using RBF approximations.

2.1 Discretization in time

Let the time interval $[0, T]$ be divided into M steps of length $k^n = t^n - t^{n-1}$, $n = 1, \ldots, M$, and let the approximate solution at the discrete times t^n be denoted by $v(\underline{x}, t^n) \approx u(\underline{x}, t^n)$. The problem is integrated in time using the unconditionally stable, second-order accurate, implicit BDF-2 method [2].

2.2 RBF Approximation

Given scattered center points $\underline{x}_j^c$, $j = 1, \ldots, N$, we consider multiquadric RBF approximating spaces spanned by the basic functions $\phi(\|\underline{x} - \underline{x}_j^c\|)$, where $\phi = \phi_\varepsilon$ depends on a chosen shape parameter ε. Thus, we search for approximate solutions solving the Black-Scholes equation of the form

$$v(\underline{x}, t^n) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j(t^n)\phi(\|\underline{x} - \underline{x}_j^c\|) \equiv \sum_{j=1}^{N} \lambda_j(t^n)\phi_j(\underline{x}). \tag{2.3}$$

One of our purposes is to analyze the performance a least squares formulation for such kind of RBF approximation. Furthermore, we want to study the effect of introducing a multi-level approach for this scheme, where the solution is obtained from a hierarchy of RBF approximations on different levels. We associate a fixed shape parameter value with each level. Typically, a low level has a smaller shape parameter and fewer node points than a higher level. This means that the low level approximations capture the smoothest part of the solution. Higher frequency variations can be incorporated by introducing more levels. For comparison, we also consider single and multi-level RBF collocation schemes.

Typically, the least squares approach makes the error small in the interesting region, where the mean stock prices are close to the strike price, and the multi-level formulation reduces the boundary oscillations. Numerical results are shown for several 1D tests concerning efficiency of the simulations and the quality of the results in terms of the different parameters. When compared with the corresponding schemes using collocation, we see that the least squares methods are around twice as fast and use less than half the memory. We also present numerical results for 2D simulations.

References

[1] E. Larsson and B. Fornberg. A numerical study of some radial basis function based solution methods for elliptic PDEs. Computers and Mathematics with Applications 46 2003, pp. 891–902.

[2] E. Hairer, S. P. Norsett and G. Wanner. Solving ordinary differential equations I, vol. 8 of Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, second ed., 1993. Nonstiff problems

[3] Y. Achdou and O, Pironneau, Computational Methods for option pricing. SIAM Frontiers in Applied Mathematics, SIAM, 2005.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{0}}$ 2 Novembro 2008

NORMAL FAMILIES OF HOLOMORPHIC MAPPINGS ON INFINITE DIMENSIONAL SPACES

P. TAKATSUKA *

1 Introduction

Let E be a locally convex space, always assumed complex and Hausdorff, and let $\mathcal{H}(U)$ denote the vector space of all holomorphic functions on an open subset U of E. In the present work earlier results of [6] are extended. We give a complete characterizations of normal families in $\mathcal{H}(U)$ for the topologies τ_0, τ_π, τ_ω and τ_δ.

We also consider the space $\mathcal{H}(U, F')$ of holomorphic mappings on U with values in a dual Banach space F'. We introduce the locally convex topology τ^* on $\mathcal{H}(U, F')$ when τ is any locally convex topology on $\mathcal{H}(U)$ and give characterizations of normal families in $\mathcal{H}(U, F')$ for the topologies τ_0^*, τ_π^*, τ_ω^* and τ_δ^*.

I would like to express my gratitude to Jorge Mujica for his constant encouragement and for his valuable help with crucial suggestions and advices.

2 Normal Families in $\mathcal{H}(U)$

Theorem 2.1. *Let U be an open subset of a separable locally convex space E and let $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(U)$. Consider the following conditions:*

(a) *$\mathfrak{F}$ is locally bounded.*

(b) *$\mathfrak{F}$ is equicontinuous and pointwise bounded.*

(c) *$\mathfrak{F}$ is relatively compact in $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$.*

(d) *$\mathfrak{F}$ is normal.*

(e) *$\mathfrak{F}$ is bounded in $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$.*

Then (a) *and* (b) *are equivalent and each of the above condition implies the next condition. Moreover, if E is metrizable then all the conditions are equivalent.*

3 Normal Families in $(\mathcal{H}(U), \tau)$

Theorem 3.1. *Let U be an open subset of a Fréchet-Schwartz space E and let $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(U)$ be a family. Then the following conditions are equivalent:*

a) *$\mathfrak{F}$ is locally bounded.* a') *$\mathfrak{F}$ is equicontinuous and pointwise bounded.*

b) *$\mathfrak{F}$ is τ_0-normal.* b') *$\mathfrak{F}$ is relatively τ_0-compact.* b") *$\mathfrak{F}$ is τ_0-bounded.*

c) *$\mathfrak{F}$ is τ_π-normal.* c') *$\mathfrak{F}$ is relatively τ_π-compact.* c") *$\mathfrak{F}$ is τ_π-bounded.*

d) *$\mathfrak{F}$ is τ_ω-normal.* d') *$\mathfrak{F}$ is relatively τ_ω-compact.* d") *$\mathfrak{F}$ is τ_ω-bounded.*

e) *$\mathfrak{F}$ is τ_δ-normal.* e') *$\mathfrak{F}$ is relatively τ_δ-compact.* e") *$\mathfrak{F}$ is τ_δ-bounded.*

*Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, IM-DTL, RJ, Brasil, ptakatsuka@ufrrj.br

4 Normal Families in $(\mathcal{H}(U, F'), \tau_0^*)$

Let U be an open subset of a locally convex space E, and let F be a Banach space. Let τ be a locally convex topology on $\mathcal{H}(U)$, and let $cs(\mathcal{H}(U), \tau)$ denote the set of all continuous semi-norms on $(\mathcal{H}(U), \tau)$. Given $f \in \mathcal{H}(U, F')$ and $y \in F$, let $f_y \in \mathcal{H}(U)$ be defined by $f_y(x) = f(x)(y)$, for all $x \in U$. We denote by τ^* the locally convex topology on $\mathcal{H}(U, F')$ generated by the semi-norms of the form $p_y(f) := p(f_y)$, with $p \in cs(\mathcal{H}(U), \tau)$ and $y \in F$.

Theorem 4.1. *Let E be a separable locally convex space, F a separable Banach space and $U \subset E$ an open subset. Let $\mathfrak{F}$ be a family in $\mathcal{H}(U, F')$. Consider the following conditions:*

(a) *$\mathfrak{F}$ is locally bounded.*

(b) *$\mathfrak{F}$ is equicontinuous and pointwise bounded.*

(c) *$\mathfrak{F}$ is relatively compact in $(\mathcal{H}(U, F'), \tau_0^*)$.*

(d) *$\mathfrak{F}$ is τ_0^*-normal.*

(e) *$\mathfrak{F}$ is bounded in $(\mathcal{H}(U, F'), \tau_0^*)$.*

Then (a) *and* (b) *are equivalent and each of the above conditions implies the next condition. Moreover, if E is metrizable then all the conditions are equivalent.*

5 Normal Families in $(\mathcal{H}(U, F'), \tau^*)$

Theorem 5.1. *Let U be an open subset of a Fréchet-Schwartz space E and let F be a Banach space. Let $\mathfrak{F} \subset \mathcal{H}(U)$ be a family. Then the following conditions are equivalent:*

a) *$\mathfrak{F}$ is locally bounded.* a') *$\mathfrak{F}$ is equicontinuous and pointwise bounded.*

b) *$\mathfrak{F}$ is τ_0^*-normal.* b') *$\mathfrak{F}$ is relatively τ_0^*-compact.* b") *$\mathfrak{F}$ is τ_0^*-bounded.*

c) *$\mathfrak{F}$ is τ_π^*-normal.* c') *$\mathfrak{F}$ is relatively τ_π^*-compact.* c") *$\mathfrak{F}$ is τ_π^*-bounded.*

d) *$\mathfrak{F}$ is τ_ω^*-normal.* d') *$\mathfrak{F}$ is relatively τ_ω^*-compact.* d") *$\mathfrak{F}$ is τ_ω^*-bounded.*

e) *$\mathfrak{F}$ is τ_δ^*-normal.* e') *$\mathfrak{F}$ is relatively τ_δ^*-compact.* e") *$\mathfrak{F}$ is τ_δ^*-bounded.*

References

[1] Dineen, S., *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Springer, London, 1999.

[2] García, D. and Mujica, J., *Quasi-normable preduals of spaces of holomorphic functions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **208**, 171–180 (1997).

[3] Hu, C.-G. and Yue, T.-H., *Normal families of holomorphic mappings*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **171**, 436–447 (1992).

[4] Kim, T.-K. and Krantz, S. G., *Normal families of holomorphic functions and mappings on a Banach space*, Expositiones Mathematicae **21**, 193–218 (2003).

[5] Mujica, J., *Gérmenes Holomorfos y Funciones Holomorfas en Espacios de Fréchet*, Publicaciones del Departamento de Teoria de Funciones, Universidad de Santiago de Compostela **1**, 1978.

[6] Takatsuka, P., *Normal families of holomorphic functions on infinite dimensional spaces*, Portugaliae Mathematica, **63**, 351–362 (2006).

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{o}}$ 2 Novembro 2008

Novos avanços no estudo da transformação generalizada de Joukowski

R. P. Pazos *

O objetivo é estabelecer o marco de referência apropriado para o estudo de aerofólios adaptativos (aqueles que se adaptam a diferentes tipos de fluxos) gerados pela Transformação Generalizada de Joukowski, que pode se decompôr numa sequência de transformações conformes do tipo frações contínuas, iniciando com uma transformação de Möbius. Foram estabelecidos novos tipos de aerofólios, de caráter técnico e acadêmico, que são submetidos a fluxos de ar em torno de perfis que simulam espécies vivas em movimento, entre outros.

1 Noções básicas

Definição 1.1. *Seja* $a = \big[\, a_1\,,\, a_2\,,\, \ldots\,,\, a_n \,\big] \in \mathbb{C}^n$ *, a* transformação generalizada de Joukoswki *determinada por a se define como,* ver Kythe [2]

$$J\big(\, a\,,\, z\,\big) = z + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{z^k} \tag{1.1}$$

Observação 1.1. *Para que uma transformação (1.1) seja conforme é preciso estudar seus pontos críticos, pois desta maneira o domínio onde a transformação é analítica e bijetora fica bem determinado.*

Uma expressão como (1.1) pode se decompor como uma função em frações contínuas, ver Hensley [3]. Assim

$$J\big(\,[\, a_1\,,\, a_2\,]\,,\, z\,\big) = z + \cfrac{a_1}{z - \cfrac{a_2}{a_1} + \cfrac{a_2^2}{a_1^2\left(z + \cfrac{a_2}{a_1}\right)}} \tag{1.2}$$

Para realizar uma análise mais formal, se definem alguns conceitos. Seja $L_j : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ uma função afim, definida por

$$L_j(z) = \alpha_j\, z + \beta_j\,, \quad \text{onde} \quad \alpha_j\,,\, \beta_j \in \mathbb{C}\,. \tag{1.3}$$

Além disso, dados $a\,,\, b\,,\, c\,,\, d \in \mathbb{C}$, se define a transformação de Möbius

$$M\big(\, z\,\big) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d}\,, \quad \text{tal que} \quad z \neq -\,\frac{d}{c}\,. \tag{1.4}$$

Definição 1.2. *Se diz que* $\big\{\, J_k \,\big|\, k = 0\,,\, 1 \,\ldots\, k_{max} \,\big\}$ *é uma seqüência iterada de transformações aninhadas de Joukowski se*

$$\begin{aligned} J_0(z) &= \alpha_0\, z + \beta_0 + M(z)\,. \\ J_k(z) &= L_k(z) + \frac{\gamma_k}{J_{k-1}(z)}\,, \ \ \textit{para} \ \ k = 1 \,\ldots\, k_{max} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Proposição 1.1. *Dada uma transformação generalizada de Joukowski* $J\big(\, a\,,\, z\,\big)$ *definida por a, existe uma decomposição numa seqüência iterada de transformações aninhadas de Joukowski.*

A prova é eminentemente construtiva: os parâmetros que determinam cada função afim L_k, e os coeficientes da transformação inicial de Möbius são funções dos coeficientes a_k que representam as inversões da ordem k.

Para fornecer uma noção de proximidade dos aerofólios, se define o seguinte conceito, ver Rote [4].

* Universidade de Santa Cruz do Sul, Departamento de Matemática, Santa Cruz do Sul, RS, Brasil, rpazos@unisc.br

Definição 1.3. *Dadas duas curvas simples orientadas positivamente,* $\gamma_1 : \mathcal{I} = \big[\, l_{_I} \,,\, r_{_I} \,\big] \to \mathbb{C}$ *e* $\gamma_2 : \mathcal{K} = \big[\, l_{_K} \,,\, r_{_K} \,\big] \to \mathbb{C}\,,$ *e* $\|\cdot\|$ *denotando a norma euclidiana, se define* $\delta_{_F}\big(\gamma_1\,,\,\gamma_2\big)$ *como a* distância Fréchet *entre tais curvas ao número*

$$\delta_{_F}\big(\,\gamma_1\,,\,\gamma_2\,\big) = \inf_{\substack{\alpha:[0,1]\to\mathcal{I}\\ \beta:[0,1]\to\mathcal{K}}} \ \max_{t\in[0,1]} \|\,\gamma_1\big(\,\alpha(t)\,\big) - \gamma_2\big(\,\beta(t)\,\big)\,\|\,, \tag{1.6}$$

onde α *e* β *são reparametrizações contínuas e não decrescentes com* $\alpha(0) = l_{_I}\,,\ \alpha(1) = r_{_I}\,,\ \beta(0) = l_{_K}\,,\ \beta(1) = r_{_K}\,.$

Com isto se procura uma parametrização comum de γ_1 e γ_2 tal que a mínima distância em qualquer instante t seja a menor possível. A diferença de outras métricas tais como a distância de Hausdorff, a distância Fréchet respeita a estrutura unidimensional das curvas e não as considera como se fossem apenas conjuntos de pontos.

Denotá-se com $S^1 = \big\{\, e^{\,i\,t} \;\big|\; 0 \le t \le\ 2\,\pi \,\big\}$ a circunferência unitária centrada na origem do plano complexo; $S^r_{z_0}$ representa a circunferência com centro em $z_{_0} \in \mathbb{C}$ e raio $r > 0\,.$

2 Aerofólios gerados pela transformação generalizada de Joukowski

Nesta seção, a hipótese básica é que a origem do plano complexo está no interior de $S^r_{z_0}$.

Definição 2.1. *A imagem de* $S^r_{z_0}$ *mediante a transformação generalizada de Joukowski* $J\big(\,a\,,\,z\,\big)$ *se denomina um aerofólio gerado por essa transformação conforme.*

Isto quer dizer, que $J\big(\,a\,,\,S^r_{z_0}\,\big)$ é um aerofólio assim definido. Em particular, $J\big(\,[\,1\,]\,,\,S^r_{z_0}\,\big)$ é o aerofólico clássico de Joukowski, cuja forma e curvatura depende da localização de $z_{_0}$. Com Γ se denota o conjunto de aerofólios gerados desta forma:

$$\Gamma = \big\{\, J\big(\,a\,,\,S^r_{z_0}\,\big) \;\big|\; a \in \mathbb{C}^n\,,\ z_{_0} \in \mathbb{C} \ \text{ e } \ r > 0\,\big\} \tag{2.7}$$

Proposição 2.1. *Seja* $\mathcal{J} : S^r_{z_0} \times \mathbb{C}^n \to \Gamma$ *definida da maneira usual. Então,* $\mathcal{J}$ *é contínua com a topologia induzida pela métrica de* $\delta_{_F}$ *.*

Alguns resultados a seguir são conhecidos.

Lema 2.1. *As transformações afins (1.3) transformam círculos em outros círculos transladados (pelo fator* β_j *) e dilatados (ou contraidos, segundo seja o módulo do coeficiente* α_j *),*

Lema 2.2. *A transformação de Möbius (1.4), tal que* $a\,d - b\,c \neq 0$ *transforma retas e círculos em retas e/ou círculos,* ver Ávila [1].

A Proposição 1.1 serve para estabelecer uma seqüência da geração de aerofólios, praticamente uma decomposição numa seqüência iterada de transformações conformes. Isto do ponto de vista computacional é destacável. A Proposição 2.1 vai permitir analisar pequenas perturbações sobre um aerofólio dado, visando estudar a influência de fatores aerodinâmicos de forma tal que se produzam adaptações que satisfaçam solicitações técnicas de vôo. Este trabalho tenta não apenas estudar formas geométricas de novos tipos de aerofólios, mas também de estabelecer bases para estudar a dinâmica de escoamentos laminares em torno de alguns aerofólios.

Referências

[1] ÁVILA, G. - *Varivéis Complexas e aplicações*, Editora LTC, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2000.

[2] HENSLEY, D. - *Continued Fractions*, World Scientific Publishing Company, 2006.

[3] KYTHE, P. - *Computational Conformal Mapping.*, Birkhauser, Boston, USA, 1998.

[4] ROTE, G. - *Computing the Fréchet Distance between Piecewise Smooth Curves*, Computational Geometry, Theory and Applications, **37**, pp 162 - 174, 2007.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{o}}$ 2 Novembro 2008

NOVOS MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS ENRIQUECIDOS E ESTABILIZADOS APLICADOS A EQUAÇÃO DE REAÇÃO-DIFUSÃO

H. J. FERNANDO * & F. VALENTIN †

O problema elíptico de reação-difusão torna-se singularmente perturbado quando o parâmetro de difusão torna-se pequeno se comparado com o de reação [1,4]. Nesses casos, o método clássico de Galerkin apresenta soluções com oscilações espúrias. Dentre os diversos métodos propostos para contornar essa limitação, temos o método não-usual [2], e o método enriquecido de Petrov-Galerkin (PGEM) [1,3]. Entretanto, pequenas instabilidades numéricas ainda persistem. Com o objetivo de eliminar tais instabilidades, propomos neste trabalho dois novos métodos.

Consideremos Ω um domínio em $\mathbb{R}^2$ com contorno poligonal $\partial\Omega$. Seja u a solução do problema de reação-difusão

$$\mathcal{L}u := -\varepsilon\Delta u + \sigma u = f \quad \text{em} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \tag{0.1}$$

onde por simplicidade ε e σ são constantes positivas, e f é uma função linear por partes.

A formulação fraca associada ao problema (0.1) consiste em encontrar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(u,v)_\Omega = (f,v)_\Omega \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{0.2}$$

onde a forma bilinear $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ é dada por

$$a(u,v) = \varepsilon(\nabla u, \nabla v)_\Omega + \sigma(u,v)_\Omega, \tag{0.3}$$

com $(\cdot,\cdot)_D$ denotando o produto interno em $L^2(D)$.

Seja $\mathcal{T}_h$ uma partição regular do dominio Ω em elementos K (triangulares ou quadrangulares) de contorno ∂K e diâmetro h_K, tal que

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K\in\mathcal{T}_h} K,$$

e designamos por $h = \max_{K\in\mathcal{T}_h} h_K$.

Denotamos por $V_L \subset H_0^1(\Omega)$ o espaço das funções contínuas lineares ou bilineares por partes. Os espaços $H_0^1(\mathcal{T}_h)$ e $H^1(\mathcal{T}_h)$ são compostos por funções definidas sobre Ω cujas restrições a cada elemento K pertencem a $H_0^1(K)$ e $H^1(K)$, respectivamente.

Seja $w_E = \mathcal{B}_K(v_L)$ onde w_E é solução da equação diferencial ordinária

$$\mathcal{L}_{\partial K} w_E := -\varepsilon\partial_{ss} w_E + \overline{\sigma} w_E = w_L \quad \text{sobre } Z \in \partial K, \qquad \text{e} \quad w_E = 0 \quad \text{nos nós de } Z, \tag{0.4}$$

onde $\overline{\sigma}$ é uma constante positiva que depende σ e pode variar com as medidas de K e de Z, vide [1].

Em seguida, definimos $z_E = \mathcal{M}_K(z_L)$ solução do problema local

$$\mathcal{L}z_E = z_L \quad \text{em} \quad K \in \mathcal{T}_h, \qquad z_E = \mathcal{B}\big(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma} z_L\big) \quad \text{sobre} \quad \partial K. \tag{0.5}$$

Sejam os subespaços de enriquecimento U_E e V_E de $H^1(\mathcal{T}_h)$ definidos por

$$U_E = \{w_E \in H^1(\mathcal{T}_h) : w_E|_K = \mathcal{M}_K w_L, \quad \forall\, w_L \in V_L\}, \tag{0.6}$$

e

$$V_E = \{w_E \in H^1(\mathcal{T}_h) : w_E|_K = \mathcal{M}_K(-\mathcal{L}w_L), \quad \forall\, w_L \in V_L\}. \tag{0.7}$$

*Instituição : Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC, RJ, Brasil, e-mail: honorio@lncc.br
†Instituição : Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC, RJ, Brasil, e-mail: valentin@lncc.br

Nossa aproximação da solução exata no espaço enriquecido é definida pela solução do seguinte problema: Encontrar $u_h = u_L + u_E \in V_L \oplus U_E$ tal que

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h} a(u_h, v_h)_K = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (f, v_h)_K \quad \forall\, v_h \;\in\; V_L \oplus V_E \oplus H^1_0(\mathcal{T}_h). \tag{0.8}$$

Da equação (0.8) temos imediatamente que a solução correspondente $u_h = u_L + u_E \in V_L \oplus U_E$ satisfaz

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h} a(u_h, v_L + v_E)_K \;=\; \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (f, v_L + v_E)_K \qquad \forall\, v_L + v_E \in\; V_L \oplus V_E, \tag{0.9}$$

$$a(u_h, v_b^K)_K \;=\; (f, v_b^K)_K \quad \forall\, v_b^K \in H^1_0(K). \tag{0.10}$$

Integrando por partes a equação (0.10), temos que a parte enriquecida da solução u_h, denotada por $u_E \in U_E$, é solução do problema

$$\mathcal{L}u_E = f - \mathcal{L}u_L \qquad \text{em cada } K \;\in\; \mathcal{T}_h, \tag{0.11}$$

e satisfazemos a equação (0.9) univocamente impondo

$$u_E = \mathcal{M}_K(f - \mathcal{L}u_L). \tag{0.12}$$

Finalmente, o novo método de Galerkin enriquecido é dado por: Encontrar $u_L \in V_L$ tal que

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h} a\big(\Pi_K(u_L), \Pi_K(v_L)\big)_K = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \Big[\big(f, \Pi_K(v_L)\big) - a\big(\mathcal{M}_K(f), \Pi_K(v_L)\big)\Big] \qquad \forall\, v_L \in V_L, \tag{0.13}$$

onde $\Pi_K(w) = \big(\mathcal{I} - \mathcal{M}_K\mathcal{L}\big)(w)$, com $\mathcal{I}$ representando o operador identidade.

Partindo de (0.13), obtemos um novo método estabilizado equivalente a (0.13), dado por: Encontrar a função $u_L \in V_L$ tal que

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \Big[\mu^K_{max}\sigma(u_L, v_L)_K + \varepsilon(\nabla u_L, \nabla v_L)_K\Big] = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \mu^K_{max}(f, v_L)_K \quad \forall\, v_L \in V_L, \tag{0.14}$$

onde o parâmetro de estabilização μ^K_{max} é o maior autovalor generalizado da matriz $\big(\Pi_K(\psi_j), \Pi_K(\psi_i)\big)_K$ em relação a matriz $\big(\psi_j, \psi_i\big)_K$. Aqui, ψ_l são as funções de base de V_L.

Mostramos que os dois novos métodos apresentados são bem postos e convergem em relação a h com taxas ótimas nas normas naturais.

Referências

[1]FRANCA, L.P., MADUREIRA, L.A., and VALENTIN, F. - *Towards multiscale functions: enriching finite element method with local but not bubble-like functions*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. **194**, 3006-3021, (2005).

[2]FRANCA, L.P., VALENTIN, F. - *On an improved unsual stabilized finite element method for the advective-reaction-difusion equation*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., Vol. **190**, 1785-1800, (2000).

[3]FRANCA, L.P., MADUREIRA, A.L., TOBISKA, L., VALENTIN, F.G.C. - *Convergence analysis of a multiscale finite element method for singularly perturbed problems* , SIAM Multiscale Model. Simul., Vol. (4), (839-866), (2005).

[4]RAMALHO, J.V.A. - *Novos métodos de elementos finitos enriquecidos aplicados a modelos de reação-adveção-difusão* , Phd thesis, LNCC, BRASIL, (2005).

NUMERICAL APPROXIMATION TO A CONTACT PROBLEM FOR A THERMOVISCOELASTIC BEAM

M. I. M. COPETTI *

We consider a finite element approximation to the solution of the problem

$$\tilde{\theta}_t - \tilde{\theta}_{xx} = \alpha u_{xxt}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$
$$\tilde{\sigma}_x = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

where

$$\tilde{\sigma}(x,t) = -u_{xxx}(x,t) - \zeta u_{xxxt}(x,t) - \alpha \tilde{\theta}_x(x,t),$$

with initial conditions

$$\tilde{\theta}(x,0) = \tilde{\theta}_0(x), \quad u(x,0) = u_0(x), \quad 0 < x < 1,$$

and boundary conditions

$$u(0,t) = u_x(0,t) = 0, \quad g_1 \leq u(1,t) \leq g_2, \quad t > 0,$$

$$\tilde{\sigma}(1,t) = 0 \text{ if } g_1 < u(1,t) < g_2, \quad \tilde{\sigma}(1,t) \geq 0 \text{ if } u(1,t) = g_1, \quad \tilde{\sigma}(1,t) \leq 0 \text{ if } u(1,t) = g_2, \quad t > 0,$$

$$u_{xx}(1,t) + \zeta u_{xxt}(1,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$\tilde{\theta}(0,t) = \theta_A, \quad \tilde{\theta}(1,t) = 0, \quad t > 0,$$

where $\tilde{\theta}(x,t)$, $u(x,t)$ and $\tilde{\sigma}(x,t)$ are the temperature, the vertical displacement and the stress of a homogeneous, quasi-static, thermoviscoelastic beam, occupying in its reference configuration the interval $I = [0,1]$, that may be in contact with two rigid stops at temperature zero. Here, $\alpha > 0$ is the coefficient of thermal expansion, $\zeta > 0$ is a viscosity coefficient and $g_1 < 0 < g_2$ give the positions of the stops.

The beam is rigidly attached at the end $x = 0$ and at the free end $x = 1$ the displacement $u(1,t)$ is limited by the obstacles. If there is no contact with the stops, the stress is zero, otherwise is opposite to the displacement and there is no other possibility. Also, there are no moments acting on the free end. We assume that the temperature is prescribed at the boundary of I.

The existence and uniqueness of weak solutions to the dynamic contact problem of a elastic or viscoelastic beam constrained between two stops was obtained by Kuttler and Shillor [4] and some numerical simulations using finite difference methods were presented in [3] by Dumont. Arantes and Rivera [1] provided results on the decay of solutions to a dynamic contact problem for a thermoelastic beam.

We define the spaces

$$H^1_E(I) = \left\{\chi \in H^1(I) \mid \chi(1) = 0\right\}, \quad H^2_E(I) = \left\{\chi \in H^2(I) \mid \chi(0) = \chi_x(0) = 0\right\},$$

and assume that $\tilde{\theta}_0 \in H^1_E(I)$, $u_0 \in H^2_E(I)$, $\tilde{\theta}_0(0) = \theta_A$ and $g_1 \leq u_0(1) \leq g_2$.

*Universidade Federal de Santa Maria, Departamento de Matemática, RS, Brasil, mimcopetti@gmail.com

It is convenient to transform the problem into one with homogeneous boundary conditions for the temperature by letting $\theta(x,t) = \tilde{\theta}(x,t) + \theta_A(x-1)$. Our numerical approximation to the Signorini problem is based on the penalized problem

$$\theta^\epsilon_t - \theta^\epsilon_{xx} = \alpha u^\epsilon_{xxt}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$\sigma^\epsilon_x = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$\sigma^\epsilon(x,t) = -u^\epsilon_{xxx}(x,t) - \zeta u^\epsilon_{xxxt}(x,t) - \alpha\theta^\epsilon_x(x,t) \equiv \tilde{\sigma}^\epsilon(x,t) - \alpha\theta_A,$$

$$\theta^\epsilon(x,0) = \theta_0(x) = \theta(0,t), \quad u^\epsilon(x,0) = u_0(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$u^\epsilon(0,t) = u^\epsilon_x(0,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$\tilde{\sigma}^\epsilon(1,t) = -\frac{1}{\epsilon}\left([u^\epsilon(1,t) - g_2]_+ - [g_1 - u^\epsilon(1,t)]_+\right), \quad t > 0.$$

$$u^\epsilon_{xx}(1,t) + \zeta u^\epsilon_{xxt}(1,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$\theta^\epsilon(0,t) = \theta^\epsilon(1,t) = 0, \quad t > 0,$$

where $\epsilon > 0$ is a constant and the $[v]_+ = \max\{v, 0\}$.

For $T > 0$, N a given positive integer, we define the time step $\Delta t = T/N$ and the nodes $t_n = n\Delta t$, $n = 0, 1, \ldots, N$. We consider $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_s = 1$ a uniform partition of I into subintervals $I_j = (x_{j-1}, x_j)$, $j = 1, \ldots, s$, of lenght $h = 1/s$ and introduce the finite element spaces

$$S^h_0 = \{\chi \in H^1_0(I) \mid \chi \in C(\overline{I}),\ \chi|_{I_i} \text{ is a linear polynomial}\},$$
$$S^h_E = \{\chi \in H^2_E(I) \mid \chi \in C^1(\overline{I}),\ \chi|_{I_i} \text{ is a cubic polynomial}\}.$$

The numerical approximation we propose is to find $\Theta^n \in S^h_0$, $U^n \in S^h_E$, for $n = 1, \ldots, N$, such that, $\forall\ W \in S^h_0$ and $\forall\ V \in S^h_E$,

$$\frac{1}{\Delta t}(\Theta^n - \Theta^{n-1}, W) + (\Theta^n_x, W_x) + \frac{\alpha}{\Delta t}(U^n_x - U^{n-1}_x, W_x) = 0,$$

$$(U^n_{xx}, V_{xx}) + \frac{\zeta}{\Delta t}(U^n_{xx} - U^{n-1}_{xx}, V_{xx}) - \alpha(\Theta^n_x - \theta_A, V_x) + \beta_\epsilon(U^n)V(1) = 0$$

where $\beta_\epsilon(\eta) = \frac{1}{\epsilon}\left([\eta(1,t) - g_2]_+ - [g_1 - \eta(1,t)]_+\right)$ and $\Theta^0 \in S^h_0$, $U^0 \in S^h_E$ are given approximations of θ_0 and u_0, respectively.

The existence and uniqueness of the numerical solution is discussed, an error estimate is presented and some numerical experiments described. We refer to Copetti [2] for the details.

Referências

[1] ARANTES, S., RIVERA, J. - *Exponential decay for a thermoelastic beam between two stops*, Journal of Thermal Stresses, **31**, 537-556 (2008).

[2] COPETTI, M. I. M. - *A quasi-static Signorini contact problem for a thermoviscoelastic beam*, Numer. Math. **110**, 27-47 (2008).

[3] DUMONT, Y. - *Vibrations of a beam between stops: numerical simulations and comparison of several numerical schemes*, Math. Comput. in Simul. **60**, 45-83 (2002).

[4] KUTTLER, K. L., SHILLOR, M. - *Vibrations of a beam between two stops*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B: Appl. Algorithms **8**, 93-100 (2001).

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{0}}$ 2 Novembro 2008

O MÉTODO PRIMAL-DUAL PARA OTIMIZAÇÃO NÃO LINEAR-AMBIENTE MATLAB

LUIS TORRES GUARDIA *

Neste trabalho, apresentamos o problema de otimização não linear e separável, sujeito a restrições lineares, usando o algoritmo de pontos interiores. O método de pontos interiores iniciado por Karmarkar [1] na área de programação linear mostrou-se ser de grande sucesso e de impressionante desenvolvimento computacional, principalmente para problemas de grande porte. Entre os métodos de pontos interiores, o método primal-dual foi que atraiu maior atenção, por isso depois foi aplicado para problemas complexos como a programação não linear, o qual é apresentado seguir:

$$\begin{array}{rrcl} \text{minimizar} & f(x) & & \\ \text{sujeito a:} & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

A função f: $\mathrm{R}^n \longrightarrow \mathrm{R}$ é convexa separável e com segunda derivada continua, sendo A uma matriz, $A \in \mathbb{R}^{\mathrm{mxn}}$, m < n e de posto completo, $b \in \mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$ é a variável de decisão.
Seja a função Lagrangeana associada com o problema não linear definida por:

$$L(w) = f(x) + (Ax - b)^T y - z^t x,$$

onde $w = (x, y, z)^t$ e $y \in \mathbb{R}^m$ e $z \in \mathbb{R}^n$ são os vetores multiplicadores de Lagrange.
As condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) de otimalidade do problema não linear são dadas por:

$$\mathbf{F(w)} = \begin{pmatrix} \nabla_x L(x,y,z) \\ h(x) \\ XZe \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$x \geq 0, z \geq 0,$$

sendo:

$$\nabla_x L(x,y,z) = \nabla f(x) + A^T y - z, \quad X = diag(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$Z = diag(z_1, z_2, \ldots, z_n), \quad e = (1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^n,$$

e $\nabla_x L(x,y,z)$ é a gradiente de $L(x,y,z)$ e $\nabla f(x)$ é a gradiente de f, e X e Z são matrizes diagonais com diagonal (x_i) e (z_i).
Para resolver o problema não linear , aplica-se o método de Newton às condições perturbadas dadas por:

$$F_\mu(w) = \begin{pmatrix} \nabla_x L(x,y,z) \\ Ax - b \\ XZe - \mu e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$x > 0, z > 0,$$

onde $\mu > 0$ é o parâmetro de barreira.
Para determinar um ponto KKT de barreira aproximado para um μ dado, $\mu > 0$, usamos o ḿetodo de Newton. Seja a direção de Newton $\Delta w = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)^T$ determinada pela solução do sistema de equações:

$$F'_\mu(w)\Delta w = -F_\mu(w)$$

*Instituição: Universidade Federal Fluminense , UFF, RJ, Brasil, tepletg@vm.uff.br }

onde

$$\begin{pmatrix} \nabla^2 f(x) & A^t & -I \\ A & 0 & 0 \\ Z & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x L(x,y,z) \\ Ax - b \\ XZe - \mu e \end{pmatrix}$$

Seja

$$\xi_c = \nabla_x L(w) = \nabla f(x) + A^t y - z, \quad \xi_b = Ax - b, \quad \xi_\mu = XZe - \mu e.$$

A solução do sistema anterior, sendo H=$\nabla^2 f(x)$, é dada por:

$$\begin{aligned} \{A[H + X^{-1}Z]^{-1}A^T\}\Delta y &= -A[H + X^{-1}Z]^{-1}(\xi_c + X^{-1}\xi_\mu) + \xi_b, \\ \Delta x &= -[H + X^{-1}Z]^{-1}(A^t \Delta y + \xi_c + X^{-1}\xi_\mu), \\ \Delta z &= -X^{-1}(\xi_\mu + Z\Delta x). \end{aligned}$$

O sistema da primeira equação, denominado normal, pode ser resolvido usando alguma decomposição da matriz $[A(H + X^{-1}Z)^{-1}A^T] = AD^{-1}A^T$, digamos por exemplo de Cholesky, tal que $[AD^{-1}A^T] = U^T U$ sendo U uma matriz triangular superior.
Seja $\Delta w_k = (\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k)^T$ a solução do sistema anterior, então uma nova iteração é realizada da seguinte forma:

$$w_{k+1} = w_k + \alpha_k \Delta w_k$$

onde α_k é o tamanho de passo determinado por um procedimento de busca de linha.
Como aplicação, consideremos o problema não linear de fluxo em rede. Para cada arco $(i,j) \in \mathcal{A}$, uma função f_{ij} convexa, continua e diferenciável é dada, tal que $f_{ij} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Este problema não linear de fluxo em rede é dado por:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad f(x) &= \sum_{(i,j)\in A} f_{ij}(x_{ij}) \\ \text{sujeito a :} \sum_{\{j:(i,j)\in\mathcal{A}\}} x_{ij} &- \sum_{\{j:(j,i)\in\mathcal{A}\}} x_{ji} = s_i \\ x_{ij} &\geq 0, \quad (i,j) \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

Redes de diversas dimensões foram analisadas baseadas na rede básica do trabalho de Nagurney [3], p. 476. Essa rede consiste de 20 nós e 28 arcos, e é usada para determinar a solução do problema de equilíbrio de tráfego em rede de transporte quando formulado como um problema de inequações variacionais. Essa rede depois foi estendida para redes de gran porte. O método de pontos interiores foi implementado usando o ambiente MATLAB. O algoritmo de Cholesky (chol) do comando MATLAB foi usado para obter a solução do sistema normal. usamos a estratégia de Luksan et al. [2] de tal modo que o parâmetro de barreira μ_k consiga convergir a zero tão rápido como seja possível. A experiência computacional mostra a eficiência do método de pontos interiores primal-dual.

Referências

[1] KARMARKAR, N. - *A polynomial-time algorithm for linear programming.* , Combinatorica, 4, 373-395, 1984.
[2] LUKSAN, L., MATONOBA, C. E VLCEK, J. - *Interior point methods for large-scale nonlinear programming.*, Optimization Methods and Software, 20, 569-582, 2005.
[3] NAGURNEY, A. - *Comparative tests of multimodal traffic equilibrium methods.*, Transportation Research, 18B, 469-485, 1984.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{o}}$ 2 Novembro 2008

O PROBLEMA DE AMBROSETTI-PRODI PARA UM SISTEMA ELÍPTICO GRADIENTE COM CRESCIMENTO CRÍTICO UNILATERAL.

B. Ribeiro *

Neste trabalho estudamos o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u \;=\; au + bv + (\alpha/2^*)\, u_+^{\alpha-1} v_+^{\beta} + p\, u_+^{p-1} v_+^{q} + h_1(x) + te_1(x) & \text{em} \quad \Omega, \\ -\Delta v \;=\; bu + cv + (\beta/2^*)\, u_+^{\alpha} v_+^{\beta-1} + q\, u_+^{p} v_+^{q-1} + h_2(x) + se_1(x) & \text{em} \quad \Omega, \\ u \;=\; 0,\; v \;=\; 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

Onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, é limitado e suave, $N \geq 3$, $\alpha + \beta = 2^*$, $p + q < 2^*$, $w_+ = \max\{w, 0\}$ e $h_1, h_2 \in L^r(\Omega)$, $r > N$, $a, b, c, t, s \in \mathbb{R}$ e e_1 denota uma primeira autofunção positiva de $-\Delta$.

- Este sistema tem como motivação problemas escalares que foram pioneiramente estudados por Ambrosetti-Prodi em [2]. Lá, os autores estabelecem existência, não existência e multiplicidade de soluções para $-\Delta u = g(u) + f(x)$ em Ω, $u = 0$ sobre $\partial\Omega$ dependendo de f e da interação de g com o espectro de $-\Delta$. Depois, muitos autores estenderam o resultado em variadas formas. Enfatizamos o caso $g(u) = \lambda u + u_+^{2^*-1}$, $\lambda < \lambda_1$ onde λ_1 denota o primeiro autovalor de $-\Delta$. Este caso crítico unilateral foi considerado em [5] . Os autores provaram a existência de duas soluções apenas quando $N \geq 7$. Mais recentemente em [4], utilizando uma técnica introduzida em [7], o mesmo resultado é obtido para $N \geq 6$ e, acrescentando um termo subcrítico e superlinear positivo, pôde-se discutir os casos $N = 3, 4$ and 5. O objetivo deste trabalho é estender para um sistema elíptico gradiente os resultados de [4]. Referimo-nos também a [6] onde considera-se um sistema bastante similar estendendo [5].
- O nosso resultado consiste em encontrar uma solução negativa para o problema, fazer um pequeno "furo" no suporte da mesma, trazer o problema para em torno desta nova função e encontrar uma solução para o sistema modificado. Esta será obtida através do Teorema do Passo da Montanha estimando o nível mini-max do funcional associado abaixo dos níveis de não compacidade, determinados pelas conhecidas funções de Talenti. O intuito de fazer um "buraco" na solução negativa do problema original é de trazer as funções de Talenti para dentro deste a fim de separar o suporte das mesmas, fazendo assim as estimativas necessárias mais fáceis de serem obtidas até para dimensões menores. No entanto, para as dimensões 3, 4 e 5, precisamos considerar uma hipótese adicional em p e q com o objetivo de deixar o mini-max nos níveis desejados.

Segue então o teorema central deste trabalho.

Teorema 1. *Denote* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *e suponha*

(A_1) $det(\lambda_1 I - A) > 0$
(A_2) $det(\lambda_i I - A) \neq 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$
(A_3) $b, \lambda_1 - a, \lambda_1 - c > 0.$

Então existe $\tau, \theta < 0$ *tal que se* $t < \tau$ *e* $s < \theta$, (1) *possui uma solução negativa. Além disso, denotando* μ_1, μ_2 *os autovalores de* A, *suponha* $0 < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_1$ *e*

(G_1) *Se* $N = 3, 4$ *ou* 5, $(p + q)/2^* > 2/3(1 + 1/N)$.

então existe uma segunda solução para (1).

*UNICAMP , IMECC, SP, Brasil, brunohcr@gmail.com

Idéia da demonstração: A solução negativa deste problema é dada pela solução de $-\Delta U = AU + H(x) + TE_1(x)$ onde $H(x) = (h_1(x), h_2(x))$ e $TE_1(x) = (te_1(x), se_1(x))$, que é negativa se $t < \tau$ e $s < \theta$, para alguns τ e θ negativos. Fixemos então t e s.

Denotando $\Phi_{ts} = (\varphi_{ts}, \psi_{ts})$ tal solução, tomemos $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que exista $x_m \in \Omega$ suficientemente próximo de $\partial\Omega$ satisfazendo $B_{4/m}(x_m) \in \Omega$. Considere então $\eta_m \in C^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ de forma que: $0 \leq \eta_m \leq 1$, e $\eta_m(x) = 0$ se $x \in B_{1/m}(x_m)$ ou $\eta_m(x) = 1$ if $x \in \Omega \backslash B_{2/m}(x_m)$. Agora, defina $\Phi_{ts}^m := \eta_m \Phi_{ts}$ e $F^m = (f_1^m\ ,\ f_2^m)$ satisfazendo $-\Delta\Phi_{ts}^m\ =\ A\Phi_{ts}^m + F^m$ em Ω. Assim, temos o seguinte problema

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta U &=& AU + \nabla F^*\big((U + \Phi_{ts}^m)_+\big) + \nabla G\big(x, (U + \Phi_{ts}^m)_+\big) + F - F^m \quad \text{in} \quad \Omega, \\ U &=& 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{2}$$

onde $F^*(x) = (1/2^*)u^{\alpha}(x)v^{\beta}(x)$, $G(x) = u^p(x)v^q(x)$ e $F(x) = H(x) + TE_1(x)$. Note que $\Phi_{ts} - \Phi_{ts}^m$ resolve este problema e se $U \neq \Phi_{ts} - \Phi_{ts}^m$ é outra solução, então $V = U + \Phi_{ts}^m$ é uma segunda solução para (1).

A fim de encontrar tal U prova-se que o problema (2) possui a geometria do Passo da Montanha, onde a função W escolhida na qual o funcional J associado satisfaz $J(rW) \leq 0$ para algum r é dada pela função de Talenti na seguinte forma: tome $\zeta_m \in C_0^{\infty}(B_{1/m}(x_m), [0,1])$ uma função cut-off tal que $\zeta_m = 1$ em $B_{1/2m}(x_m)$ e defina $u_{\epsilon}^m(x) = \zeta_m(x)u_{\epsilon}(x - x_m)$. onde $u_{\epsilon}(x) = [\sqrt{N(N-2)}\epsilon/(\epsilon^2 + |x|^2)t]^{(N-2)/2}$. Daí tome $\gamma/\kappa := \sqrt{\alpha/\beta}$ e faça $W = (\gamma u_{\epsilon}^m, \kappa u_{\epsilon}^m)$. Este procedimento permite separar os suportes de W e Φ_{ts}^m. Uma vez provada a limitação da sequência PS (denotada por (U_n)) do nível mini-max $\overline{c}$ dado pelo Passo da Montanha, precisamos provar que o limite fraco U de tal sequência é diferente de $\Phi_{ts} - \Phi_{ts}^m$. Isto é feito mostrando que $\overline{c} < \widetilde{S}^{N/2}/N - K_1\epsilon^{k_1(N)}$ onde

$$\widetilde{S} = \inf_{(u,v)\in H\backslash\{0\}} \frac{\|(u,v)\|^2}{\left(\int_{\Omega} |u|^{\alpha}|v|^{\beta}\right)^{2/2^*}}.$$

Tomando $K = \lim_{n\to\infty} \|U_n - U\|^2$, teremos $J(U) + K/N = \overline{c}$. Supondo $K > 0$ (senão não haveria mais nada a ser feito), podemos provar que $K \geq \widetilde{S}^{N/2}$. Isto nos dá argumentos para supor por absurdo $U = \Phi_{ts} - \Phi_{ts}^m$ e, sabendo que podemos tomar m suficientemente grande para que $|J(\Phi_{ts} - \Phi_{ts}^m)| \leq K_2\epsilon^{k_2(N)}$, chegar em uma contradição ao ajustar k_1 e k_2, que dependerá de supor a condição adicional em p e q nas dimensões menores. ■

Referências

[1] C. O. Alves, D. C. de Morais Filho, M. A. S. Souto, *On systems of equations involving subcritical or critical Sobolev exponents*, Nonlinear Anal., 42 (2000), 771-787.

[2] A. Ambrosetti, G. Prodi, *On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces*, Ann. Math. Pura Appl., 93 (1972), 231-247.

[3] H. Brezis, L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure App. Math., 24 (1983), 437-477.

[4] M. Calanchi, B. Ruf, *Elliptic equations with one-sided critical growth*, Electronic Journal od Differential Equations, vol. 2002 n^o89 (2002), 1-21.

[5] D. G. de Figueiredo, Y. Jianfu, *Critical superlinear Ambrosetti-Prodi problems*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, 14 (1999), 59-80.

[6] D. C. de Morais Filho, F. R. Pereira, *Critical Ambrosetti-Prodi type problems for systems of elliptic equations*, Nonlinear Analysis, Theory, Meth. and App., 68 (2008), 194-207.

[7] F. Gazzola, B. Ruf, *Lower order pertubations of critical growth nonlinearities in semilinear elliptic equations*, Advances in Diff. Eqs., 2 n^o 4 (1997), 555-572.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{o}}$ 2 Novembro 2008

O PROBLEMA DE RIEMANN PARA UM ESCOAMENTO TRIFÁSICO NUM MEIO POROSO

A. V. AZEVEDO * & A. J. DE SOUZA † & F. FURTADO ‡ & D. MARCHESIN §

Neste trabalho apresentamos a solução de um problema de Riemann para um sistema 2×2 de leis de conservação proveniente da modelagem matemática de um escoamento unidimensional horizontal de um fluido trifásico ao longo de um cilindro constituído de rocha porosa. Supomos que este meio poroso esteja embebido inicialmente apenas da fase óleo, a qual deve ser deslocada ao longo do cilindro devido à injeção de água, ou de gás ou então de uma mistura água/gás. Como hipóteses simplificadoras do modelo, assumimos a porosidade constante, que não haja troca entre as fases e omitimos efeitos de compressibilidade e pressão capilar. As variáveis dependentes consideradas são as saturações das fases, as quais são representadas no chamado triângulo de saturações, e como parâmetros são considerados as razões entre as viscosidades destas fases. Consideraremos aqui um caso particular do modelo de Corey, no qual a permeabilidade de cada fase depende quadraticamente apenas da saturação da própria fase.

O sistema de leis de conservação obtido através da lei de conservação de massa de cada fase e da lei de Darcy (veja Azis&Settari [1]) tem a peculiaridade de possuir quatro pontos umbílicos isolados, onde as duas de suas velocidades características coincidem e a matriz jacobiana correspondente é múltipla da identidade. No caso, três destes pontos correspondem aos vértices e o último é um ponto interior do triângulo de saturações. Veja por exemplo Isaacson *et al* [3].

Em Isaacson *et al* [3] foi considerado o problema de Riemann para o caso das três fases possuirem viscosidades iguais, o chamado caso totalmente simétrico, o qual naturalmente não é realístico, mas é mais simples de ser resolvido. Em Souza [5] uma das três simetrias foi quebrada sendo considerado o caso da injeção de polímero na fase água e por isto uma das viscosidades foi considerada superior às outras duas, que foram mantidas iguais. O objetivo deste trabalho é descrever a solução do problema de Riemann para tal sistema de leis de conservação, mas agora para uma relação entre as viscosidades das fases mais compatíveis com a realidade física. Dois grupos principais de soluções são determinados de acordo com a proporção de água e gás presente na mistura injetada. Um dos grupos corresponde ao caso em que a sequência de ondas que define a solução do problema de Riemann é constituída por uma descontinuidade (onda de choque) através da qual a saturação do óleo decresce e é seguida de uma mistura água/óleo, enquanto no outro grupo a sequência de ondas também inicia-se por uma descontinuidade, mas é seguida de uma mistura gás/óleo. Uma solução corresponderá à um grupo ou ao outro dependendo se a mistura injetada possuir mais água ou mais gás quando comparada a uma determinada mistura crítica definida pela razão entre as viscosidades da água e do gás. Em ambos os grupos a onda que segue a primeira descontinuidade é uma onda composta, a qual consiste de uma segunda descontinuidade de velocidade inferior à primeira, adjacente à uma rarefação. Já se a mistura injetada for a crítica, então as velocidades dos dois choques coincidirão e o perfil da solução crítica correspondente passa ser semelhante ao perfil da clássica solução da equação escalar de Buckley-Leverett [2] para um escoamento bifásico.

Como é sabido da literatura de engenharia de petróleo, veja por exemplo Marchesin&Plohr [4], a injeção alternada de água e de gás propicia uma recuperação de óleo mais eficiente do que quando é injetado apenas água ou apenas gás. Este trabalho explica matematicamente este fenômeno e determina com precisão a proporção de cada fluido a ser injetado para se obter a recuperação ótima.

O trabalho é desenvolvido nas seguintes etapas. Inicialmente descrevemos o modelo matemático obtido através

*Departamento de Matemática, UnB, DF, Brasil, arthur@mat.unb.br
†Departamento de Matemática e Estatística, UFCG, PB, Brasil, cido@dme.ufcg.edu.br
‡Department of Mathematics, UW, WY, EUA, furtado@uwyo.edu
§Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, RJ, Brasil, marchesi@impa.br

das leis de conservação de massa das fases e da lei de Darcy. Em seguida relembramos alguns conceitos básicos sobre escoamentos bi e trifásicos inclusive a solução de Buckley-Leverett. Feito isto passamos a discutir a primeira onda a deslocar o óleo, determinando explicitamente a relação de Rankine-Hugoniot para o estado inicial. No caso mostramos que a curva de Hugoniot correspondente consiste de três segmentos de reta, duas delas coincidindo com dois dos lados do triângulo de saturações e a terceira contendo o ponto umbilico. Isto simplifica a construção das soluções do problema de Riemann uma vez que sobre estas retas o sistema reduz-se à equação de Buckley-Leverett e com isto mostramos também que a primeira onda a se desenvolver, independendentemente da mistura injetada, deve ser uma onda de choque. Determinada a primeira onda, passamos a variar as possíveis misturas água/gás a serem injetadas e determinamos aquela mistura crítica que divide os dois grupos de soluções do problema de Riemann. Daí concluimos nosso trabalho mostrando que esta mistura crítica é aquela que também determina a recuperação maximal do óleo, exibindo e comparando vários históricos de produção.

Agradecimentos. Ao CNPq através dos projetos sob números de processos: 620029/2004-8, 306609/2004-5, 620017/2004-0, 620025/2006-9, 472067/2006-0 e Instituto do Milênio em Matemática IM/AGIMB.

Referências

[1] AZIZ, K., SETTARI, A. - *Petroleum reservoir simulation*, Elsevier Applied Science, New York–London, 1990.

[2] BUCKLEY, S., LEVERETT, M. - *Mechanisms of fluid displacement in sands*, Trans. AIME, **146** (1942), 187–196.

[3] ISAACSON, E., MARCHESIN, D., PLOHR, B., TEMPLE, B. - *Multiphase flow models with singular Riemann problems*, Comp. Appl. Math., **11** (1992), 147–166.

[4] MARCHESIN, D., PLOHR, B. - *Wave structure in WAG recovery*, SPE J., **6** (2001), 209–219.

[5] SOUZA, A. J. - *Stability of singular fundamental solutions under perturbations for flow in porous media*, Comp. Appl. Math., **11** (1992), 73–115.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{0}}$ 2 Novembro 2008

Obtendo o primeiro autovalor do p-laplaciano

R. J. BIEZUNER,* G. ERCOLE† & E. M. MARTINS‡

Resumo

Introdução. Sejam Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N, N \geq 2$, e $\lambda_p(\Omega)$ o primeiro autovalor do operador p-Laplaciano $-\Delta_p u := \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right)$, $p > 1$, com condições de Dirichlet.

Algumas propriedades de $\lambda_p(\Omega)$ são bem conhecidas: existência, positividade, simplicidade e a caracterização variacional como o valor que minimiza o quociente de Rayleigh $\left(\|\nabla u\|_p / \|u\|_p\right)^p$ para $u \in W_0^{1,p}(\Omega) - \{0\}$.

Entretanto, se $p \neq 2$ e $N \geq 2$ o valor de $\lambda_p(\Omega)$ não é explicitamente conhecido, em geral. Nem mesmo para domínios Ω simples como uma bola ou um quadrado e os poucos métodos desenvolvidos para obtenção de $\lambda_p(\Omega)$ nesses domínios são essencialmente numéricos.

Para $p = 2$, caso em que o operador Δ_p se reduz ao Laplaciano Δ, o valor de $\lambda_p(\Omega)$ é bem conhecido para domínios de geometria simples e pode ser determinado por métodos diversos em domínios mais gerais.

Para $p > 1$ e $N = 1$ o valor de $\lambda_p(\Omega)$ também é conhecido: se $\Omega = (a, b)$, então $\lambda_p(\Omega) = (p-1)\left(\frac{\pi_p}{b-a}\right)^p$ em que $\pi_p := 2\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt[p]{1-s^p}} = 2\frac{\pi/p}{\operatorname{sen}(\pi/p)}$.

Na falta do valor exato - ou mesmo aproximado - de $\lambda_p(\Omega)$, cotas inferiores para este autovalor acabam assumindo um papel importante para a sua localização, sendo, portanto, de especial interesse na literatura (cotas superiores são facilmente encontradas a partir da caracterização variacional de $\lambda_p(\Omega)$).

Uma das cotas inferiores para $\lambda_p(\Omega)$ mais importantes (veja [4]) é exatamente $\lambda_p(B)$ em que B é uma bola que tem o mesmo volume que Ω.

Neste trabalho propomos um método para obtenção de $\lambda_p(\Omega)$ e provamos que este método funciona para o caso em que em $\Omega = B$, isto é, uma bola em $\mathbb{R}^N$ (escolhemos, sem perda de generalidade, a bola unitária B_1).

Esse resultado específico é, portanto, relevante e, certamente, contribuirá para as linhas de pesquisa voltadas para problemas em que a geometria esférica é importante, ou para as que necessitam de estimativas para $\lambda_p(\Omega)$.

Entretanto, os principais resultados (veja abaixo) que sustentam o método são válidos para domínios mais gerais e apontam para a conjectura de que o próprio método funciona para alguma classe importante de domínios. Com essa expectativa, implementamos numericamente o método no caso em que $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ é um quadrado bidimensional e obtivemos resultados bastante satisfatórios.

Principais Resultados. Seja $\{\phi_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\Omega)$ a sequência definida por: $\phi_0 \equiv 1$ e

$$\begin{cases} -\Delta_p \phi_{n+1} = \phi_n^{p-1} \ ; \ x \in \Omega \\ \phi_n = 0 \ ; \ x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{0.1}$$

A partir desta sequência definimos as seguintes sequências numéricas

$$\gamma_n := \inf_{\Omega}\left(\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}}\right)^{p-1}, \qquad \nu_n := \left(\frac{\|\phi_n\|_{L^p(\Omega)}}{\|\phi_{n+1}\|_{L^p(\Omega)}}\right)^{p-1} \qquad \text{e} \qquad \Gamma_n := \sup_{\Omega}\left(\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}}\right)^{p-1}.$$

Aplicando o princípio da comparação e a identidade de Picone (veja [1]), provamos que $\{\gamma_n\}$ é bem definida e que $0 < \gamma_1 \leq \gamma_n \leq \gamma_{n+1} \leq \lambda_p(\Omega)$ para $n = 1, 2, 3, ...$, o que nos garante a existência de $\lim \gamma_n := \gamma \geq \gamma_1 > 0$.

Com argumentos similares provamos que se $\Gamma_{n_0} < \infty$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, então Γ_n é bem definida para todo $n \geq n_0$, $\{\Gamma_n\}_{n \geq n_0}$ é uma sequência decrescente e $\lambda_p(\Omega) \leq \nu_n \leq \Gamma_n$ para todo $n \geq n_0$.

*UFMG, MG, Brasil, rodney@mat.ufmg.br
†UFMG, MG, Brasil, grey@mat.ufmg.br
‡UFOP, MG, Brasil, eder@iceb.ufop.br

Estes fatos, como observamos na introdução, nos levam a conjecturar que para alguma classe importante de domínios limitados Ω vale $\lim \gamma_n = \lambda_p(\Omega) = \lim \nu_n = \lim \Gamma_n$ e, na direção de verificar a primeira igualdade, provamos a seguinte proposição em que $\{u_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\Omega)$ é dada por $u_n := \dfrac{\phi_n}{a_n}$ em que $\{a_n\}$ é uma sequência numérica especialmente definida a partir de $\left\{\dfrac{\phi_n}{\phi_{n+1}}\right\}$.

Proposição 0.1. *$\{u_n\}$ é decrescente e converge (uniformemente e) em $W_0^{1,p}(\Omega)$ para uma função não negativa $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\Omega)$ satisfazendo $-\Delta_p u = \gamma u^p \quad em \quad \Omega$.*

Este resultado só não é a verificação de parte de nossa conjectura porque não podemos concluir que $u > 0$ em Ω. Sua prova segue da compacidade do operador $(-\Delta_p)^{-1} : C(\Omega) \to C(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ e das propriedades de a_n.

Um resultado análogo pode ser obtido tomando-se uma sequência numérica específica $\{b_n\}$. Porém, esbarramos na limitação da sequência $\left\{\frac{\phi_n}{b_n}\right\}$ para responder positivamente ao restante da questão colocada acima.

Entretanto, para a bola unitária $B_1 \subset \mathbb{R}^N$, com auxílio da estrutura radial do problema de autovalor, conseguimos demonstrar que $\inf\limits_{\Omega} \dfrac{\phi_n}{\phi_{n+1}} = \dfrac{\|\phi_n\|_\infty}{\|\phi_{n+1}\|_\infty}$ e que $\Gamma_1 < \infty$. Assim, para B_1 e, portanto, para qualquer bola, respondemos positivamente à questão que colocamos acima, conforme mostra o seguinte teorema.

Teorema 0.1. *A sequência $\left\{\dfrac{\phi_n}{\|\phi_n\|_\infty}\right\}$ converge (uniformemente e) em $W_0^{1,p}(\Omega)$ para uma autofunção positiva $u \in W_0^{1,p}(B_1) \cap C^{1,\alpha}(B_1)$ tal que $\|u\|_\infty = 1$. Além disso, $\lim \gamma_n = \lambda_p(B_1) = \lim \nu_n = \lim \Gamma_n$ e $\lim \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \equiv \lambda_p(B_1)$, sendo a convergência uniforme em cada bola $B_{1-\epsilon} \subset B_1$,*

Nota: Para $p = 2$ e para domínios limitados Ω bem gerais, este teorema admite uma demonstração inteiramente baseada no fato de que $L_2(\Omega)$ possui uma base formada de autofunções do Laplaciano. Tal demonstração (veja [2]) ainda indica uma maneira de se encontrar outros autovalores.

Em [2], além de demonstrarmos o teorema acima e os resultados que o precedem, apresentamos também os resultados numéricos da implementação de nosso método para o quadrado bidimensional $[0,1] \times [0,1]$. Para esta implementação discretizamos o funcional correspondente a cada iteração (0.1) e utilizamos um método desenvolvido em [3] para encontrar o mímimo deste funcional. Pudemos observar (numericamente) que as sequências $\{\gamma_n\}$, $\{\nu_n\}$ e $\{\Gamma_n\}$ convergiram para um mesmo valor λ, sendo mais rápida a convergência de $\{\nu_n\}$. De posse deste valor, testamos, também numericamente, a convergência de aproximações adequadas de autofunções. Os resultados numéricos que obtivemos são mais precisos que os apresentados em [5].

Referências

[1] Allegretto, W., Huang, Y. X.- *A Picone's identity for the p-Laplacian and applications.* Nonlinear Analysis **32** (1998), 819-830.

[2] Biezuner, R. J., Ercole, G., Martins, E. M. *Computing the first eigenvalue of the p-Laplacian via the inverse power method.* Submetido para publicação.

[3] Feng, X., He, Y.- *High order iterative methods without derivatives for solving nonlinear equations.* Appl. Math. Comput. **186**, 2007.

[4] Kawohl, B., Fridman, V, - *Isoperimetric estimates for the first eigenvalue of the p-Laplace operator and the Cheeger constant.* Comm. Math. Univ. Carol. **44** (2003), 659-667.

[5] Lefton, L. Wei, D. - *Numerical approximation of the first eigenpair of the p-Laplacian using finite elements and the penalty method.* Numer. Funct. Anal. Optim. **18** (1997), 389-399.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

ON A CLASS OF QUASILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS OF THE HENON-TYPE

P. C. CARRIÃO * D.G. DE FIGUEIREDO †‡ & O.H.MIYAGAKI §¶

Consider the following class of singular quasilinear elliptic problems of the Henon-type

$$(P) \qquad \begin{cases} -div\big[|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big] = |x|^{\beta}|u|^{q-2}u \text{ in } B \\ u > 0 \text{ in } B, \quad u = 0 \text{ on } \partial B, \end{cases}$$

where $B = \{x \in \mathbb{R}^N : \ |x| < 1\}$ $(N \geqslant 3)$ is a unit open ball centered at the origin, $-\infty < a < (N-p)/p$, $\beta > 0$ and $2 \leq p < q < \frac{Np+p\beta}{N-p(a+1)}$.

In the present paper we will prove some existence and multiplicity results of non radial solutions of (P), for some $q \in (p, q^*(N))$, where

$$q^*(N) = \begin{cases} \frac{(N+2)p}{N-2p+2} & \text{if} \quad N \text{ is even} \\ \frac{([N/2]+2)p}{[N/2]-p+2} & \text{if} \quad N \text{ is odd,} \end{cases}$$

and notice that $q^*(N) \geq \frac{(N-p)p+p}{N-2p+1}$.

Theorem 0.1. *Suppose $q \in (p, \frac{(N-p)p+p}{N-2p+1})$, $N \geq \max[2p, p(a+1)]$ and $p \geq 2$, then for all large β, problem (P) has at least $[N/2]-1$ different non radial solutions.*

Theorem 0.2. *Suppose $q \in (p, q^*(N))$, $N \geq \max[2p, p(a+1)]$ and $p \geq 2$, then for all large β, problem (P) has at least a non radial solution.*

Remark 0.1. *The results above are contained in [4]. We recall that this kind of operator was introduced in [2], and problem (P), in the regular case, is related to the Henon problem [5]. Still, in the regular case, this problem was studied by several researchers, see e.g. [1, 3, 6, 7] and [8].*

The sketch of the proof is as follows. First of all, let us define the Banach spaces $D_a^{1,p}(B)$ as the completion of the space $C_0^\infty(B)$ with respect to the norm given by $||u||^p = \int_B |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx$, and subspaces of $D_a^{1,p}(B)$

$$D_{a,l}^{1,p}(B) := \{u \in D_a^{1,p}(B) : u(y,z) = u(|y|,|z|), \ (y,z) = x \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{N-l}\},$$

and $D_{a,l,rad}^{1,p}(B)$, which is the subspace of radial functions in $D_{a,l}^{1,p}(B)$, where $2 \leq p \leq N-l \leq l$, $N \geq \max\{2p, p(a+1)\}$.

The main idea in the proofs of Theorems is to study the minimization problems

$$c_\beta := \inf_{u \in D_{a,l,rad}^{1,p}(B)\setminus\{0\}} \frac{\int_B |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx}{(\int_B |x|^{\beta}|u|^q dx)^{p/q}} \tag{0.1}$$

and

*Universidade Federal Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, carrion@mat.ufmg.br
†IMECC-UNICAMP,Campinas, SP, Brasil, djairo@ime.unicamp.br
‡Supported in part by CNPq-Brazil.
§Universidade Federal de Viçosa,Viçosa, MG, Brasil, olimpio@ufv.br, ohmiyagaki@gmail.com
¶Supported in part by CNPq-Brazil and Fapemig CEX APQ 0609-5.01/07.

$$m_{\beta,l} = \inf_{u \in D^{1,p}_{a,l}(B)-\{0\}} \frac{\int_B |x|^{-ap}|\nabla u|^p dx}{(\int_B |x|^{\beta}|u|^q dx)^{p/q}} \tag{0.2}$$

and find out conditions on the parameters p, a, β, q, which will imply that these infimums are actually achieved. Then the minimums obtained are, after a rescaling, a solution of (P).

In order to determine that the minimizers in (0.2) are not radial we need the following result:

$$m_{\beta,l} < c_\beta, \quad \text{for} \quad \beta \text{ sufficiently large.}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

References

[1] BADIALE, M. AND SERRA, E. - *Multiplicity results for the supercritical Henon equation,* Adv. Nonlinear Studies 4 (2004), pp. 453-467.

[2] CAFFARELLI, L., KOHN, R. AND NIRENBERG, L. *First order interpolation inequalities with weights* Compositio Math 53 (1984), pp. 259–275.

[3] CAO, D. AND PENG,S. *The asymptotic behaviour of the ground state solutions for Henon equation,* J. Math. Anal. Appl. 278(2003),pp. 1-17.

[4] CARRIÃO, P.C., DE FIGUEIREDO, D.G. AND MIYAGAKI, O.H., *Quasilinear elliptic equations of the Henon-type: existence of non radial solutions*, to appear in Comm. Contemporary Math.

[5] HENON, M. *Numerical experiments on the stability of spherical stellar systems* , Astronomy and Astrophysics 24 (1973), pp. 229–238.

[6] NI, W-N *A Nonlinear Dirichlet problem on the unit ball and its applications,* Indiana Univ. Math. J. 31 (1982), pp. 801–807.

[7] SERRA, E. *Non radial positive solutions for the Henon equations with critical growth,* Calc. Var. PDEs. 23(2005), pp. 301–326.

[8] SMETS, D., SU, J. AND WILLEN, M. *Non radial ground states for the Henon equation*, Comm. Contemp. Math. 4(2002), pp. 467–480.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

On a class of nonvariational elliptic systems with nonhomogenous boundary conditions

J. M. do O [*] & Sebastián Lorca [†] & Pedro Ubilla [‡]

Abstract

Using a fixed–point theorem of cone expansion/compression type, we show the existence of at least three positive radial solutions for a class of quasi–linear elliptic systems.

This work is devoted to the study of a class of systems involving quasi–linear elliptic equations subject to non–homogeneous Dirichlet boundary conditions in a ball of $\mathbb{R}^N$, with $N \geq 3$. More precisely, using a fixed–point theorem of cone expansion/compression type, we establish both existence and multiplicity of positive radial solutions for the class of quasi–linear elliptic systems

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda k_1(|x|) f(u,v) & \text{in} & \Omega, \\ -\Delta_q v &= \lambda k_2(|x|) g(u,v) & \text{in} & \Omega, \\ (u,v) &= (a,b) & \text{on} & \partial\Omega. \end{cases} \tag{0.1}$$

Here λ is a positive parameter, a and b are non–negative constants, Ω is the ball of $\mathbb{R}^N$, with $N \geq 3$, of radius R_0 centered at origin, and $\Delta_m u = div(|\nabla u|^{m-2}\nabla u)$ is the $m-$Laplacian operator where $1 < m \leq 2\,(< N)$. The main difficulties in dealing with these systems lie in the facts that the systems might be *non–variational*, and that they contain those *quasi–linear operators* for which $p \neq q$ might occur. We overcome these difficulties combining appropriate changes of variables with fixed–point techniques of Krasnosel'skii.

The study of System (0.1) was motivated in part by several recent works on elliptic problems involving radial symmetry. For results about a class of second–order elliptic problems of the form $-\Delta u = \lambda\, k(|x|) f(u)$ in Ω with non–homogeneous boundary condition $u = a$ on $\partial\Omega$, where Ω is the ball of radius R_0, see [5]. For elliptic problems involving $p-$Laplacian equations, see [4] and [1] and the references therein. Observe that in [4], the equation $-\Delta_p u = f(x,u)$ in Ω, with $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$ is studied using the Leray–Schauder continuation principle, the direct method of calculus of variations, and the Mountain Pass Theorem. We mention here the article [6], where the main focus is on systems involving the $p-$Laplacian in an exterior domain. In [1], systems involving the $p-$Laplacian operator and sublinear, non–linear terms at infinity are studied. For a survey on elliptic systems, see [2].

It is well known that problems involving the $p-$Laplacian operator appear in many contexts. Some of these problems come from different areas of applied mathematics and physics. For example, they may be found in the study of non–Newtonian fluids, non–linear elasticity, and reaction–diffusions. For discussions about problems modeled by these boundary value problems, see for example [3].

We will assume the following five hypotheses:

(K_0) The functions $k_1, k_2 : [0, R_0] \to [0, +\infty)$ are continuous, and are not identically zero in any subinterval of $[0, R_0]$.

(H_0) The nonlinearities $f, g \in C([0,+\infty)^2, [0,+\infty))$ are increasing, satisfying

$$f(s,t),\ g(s,t) > 0\,, \quad \text{if} \quad s+t > 0\,.$$

[*] Departamento de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, 58059-900, João Pessoa - PB - Brazil, jmbo@mat.ufpb.br
[†] Departamento de Matemática, Universidad de Tarapacá, Casilla 7-D, Arica, Chile, slorca@uta.cl
[‡] Universidad de Santiago de Chile, Casilla 307, Correo 2, Santiago, Chile, pubilla@fermat.usach.cl

(H_1) The non–linear terms $f(s,t)$ and $g(s,t)$ are, respectively, "$p-$superlinear" and "$q-$superlinear" at the origin, or in other words

$$\lim_{|(u,v)|\to 0} \frac{f(u,v)}{|(u,v)|^{p-1}} = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{|(u,v)|\to 0} \frac{g(u,v)}{|(u,v)|^{q-1}} = 0\,.$$

(H_2) The non–linear terms $f(s,t)$ and $g(s,t)$ are, respectively, "$p-$sublinear" and "$q-$sublinear" at infinity, or in other words

$$\lim_{|(u,v)|\to +\infty} \frac{f(u,v)}{|(u,v)|^{p-1}} = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{|(u,v)|\to +\infty} \frac{g(u,v)}{|(u,v)|^{q-1}} = 0\,.$$

Here we use the notation $|(u,v)| = |u| + |v|$.

$(H_3)_{a,b}$ Given $a, b > 0$, we suppose that there exist $\bar{\tau}, \bar{\theta}, M > 0$ such that, for all $\tau > \bar{\tau}$, we have

$$\frac{f(\alpha\tau + a,\ \beta\tau + b)}{f(\alpha + a,\ \beta + b)} \leq M\,\varphi_p(\tau)\,, \quad \text{for all } \alpha, \beta \geq \bar{\theta} \tag{0.2}$$

and

$$\frac{g(\alpha\tau + a,\ \beta\tau + b)}{g(\alpha + a,\ \beta + b)} \leq M\,\varphi_q(\tau)\,, \quad \text{for all } \alpha, \beta \geq \bar{\theta} \tag{0.3}$$

where, for $m = p$ or $m = q$, the function φ_m is continuous, satisfying the condition

$$\int_1^{+\infty} \tau^{\frac{N(1-m)}{N-m}}\,\varphi_m(\tau)\,d\tau \ < +\infty\,.$$

Our three main results are the following.

Theorem 0.1. *Suppose that hypotheses (K_0), (H_0), (H_2) and $(H_3)_{a,b}$ hold, with $a > 0$ or $b > 0$. Then System (0.1) has at least one positive solution.*

Theorem 0.2. *Suppose that hypotheses (K_0), (H_0), and (H_1) through $(H_3)_{a,b}$ hold, with $a > 0$ or $b > 0$. Then there exists $\tilde{\delta} > 0$ such that, for all $0 < a + b \leq \tilde{\delta}$, there exists a $\bar{\lambda} > 0$ with the following property: For every $\lambda > \bar{\lambda}$, System (0.1) has at least three positive solutions.*

Theorem 0.3. *Suppose that hypotheses (K_0), (H_0), and (H_1) through $(H_3)_{a,b}$ hold, with $a = b = 0$. Then there exists a $\bar{\lambda} > 0$ such that, for all $\lambda > \bar{\lambda}$, System (0.1) has at least two positive solutions.*

References

[1] M. Chhetri, D. D. Hai, R. Shivaji, *On positive solutions for classes of $p-$Laplacian semipositone systems*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **9** (2003), 1063–1071.

[2] D. de Figueiredo, *Nonlinear elliptic systems*, An. Acad. Brasil. Cinc. **72** (2000), 453–469.

[3] J. I. Díaz, *Nonlinear partial differential equations and free boundaries. Vol. I. Elliptic equations*, 323 pp. of "Research Notes in Mathematics ", edit. Pitman, **106**, Boston, MA (1985).

[4] G. Dinca, P. Jebelean and J. Mawhin, *Variational and topological methods for Dirichlet problems with $p-$Laplacian*, Portugal. Math. (N.S.) **58** (2001), 339–378.

[5] J. M. do Ó, S. Lorca, P. Ubilla, *Three positive radial solutions for elliptic equations in a ball*, Appl. Math. Lett. **18** (2005), 1163–1169.

[6] J. M. do , S. Lorca, P. Ubilla, *Positive radial solutions for some quasilinear elliptic systems in exterior domains*, Commun. Pure Appl. Anal. **5** (2006), 571–581.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{0}}$ 2 November 2008

ON A DAMPED KIRCHHOFF-CARRIER EQUATION IN BANACH SPACE

R.R.CARVALHO * & M.MILLA MIRANDA †

In this work we study the existence and uniqueness of solutions of the following: initial value problem

$$\left| \begin{array}{l} u''(t) + M(\|u\,(t)\|_W^\beta)Au\,(t) + (1+\alpha(t)\,\|u\,(t)\|^{2\beta})Au'\,(t) = 0\ ,\ t>0 \\ u(0) = u^0, u'(0) = u^1, \end{array} \right.$$

where A is the unbounded self-adjoint operator defined by the triplet $\{V, H, ((,))\}$ with V and H be two Hilbert space with scalar product and norm represented, respectively, by $((,))$, $\|.\|$ and $(,)$, $|.|$. Here W is a Banach space, M , α real functions and β a real number.

Assume that

$$\text{The injection } V \subset H \text{ is continuous, dense and compact} \tag{0.1}$$

and

$$V \text{ is continuously embedding in } W \text{ and that } W' \text{ is strictly convex } (W' \text{ dual of } W). \tag{0.2}$$

Consider the functions $M\,(\xi)$ and $\alpha\,(t)$ satisfying

$$M\,(\xi) = m_0 + m_1\xi\ ,\ m_0 > 0\ ,\ m_1 \geq 0 \tag{0.3}$$

and

$$\alpha \text{ measurable defined on }]0,\infty[\text{ with } \alpha\,(t) > 0 \text{ a.e. } t \in]0,\infty[\ ,\ \alpha \in L^\infty_{loc}(0,\infty) \text{ and } \frac{1}{\alpha} \in L^1\,(0,\infty)\,. \tag{0.4}$$

With the above considerations, we have the following result:

Theorem 0.1. *Assume hypotheses* $(0.1) - (0.4)$. *Consider* β *a real number with* $\beta > 1$ *and* $u^0 \in D\,(A)$, $u^1 \in D(A^{\frac{1}{2}})$. *Then, there exist a unique function* u *in the class*

$$\left| \begin{array}{l} u \in L^\infty(0,\infty;V) \cap L^\infty_{loc}(0,\infty;D(A)) \\ u' \in L^\infty(0,\infty;H) \cap L^2(0,\infty;V) \cap L^\infty_{loc}(0,\infty;V) \cap L^2_{loc}(0,\infty;D(A)) \end{array} \right.$$

such that u *is solution of the problem*

$$\left| \begin{array}{l} u'' + M(\|u\|_W^\beta)Au + (1+\alpha\,\|u\|^{2\beta})Au' = 0 \ \text{ in } \ L^2_{loc}(0,\infty;H) \\ u(0) = u^0\ ,\ u'(0) = u^1. \end{array} \right. \tag{0.5}$$

Furthermore,

$$E\,(t) \leq C\ ,\ t \geq 0,$$

where $C > 0$ *is a constant independent of* t *and*

$$E\,(t) = |u'\,(t)|^2 + M(\|u\,(t)\|_W^\beta)\left|A^{\frac{1}{2}}u'\,(t)\right|^2\ ,\ t \geq 0,$$

is the energy of the solution of (0.5).

In the proof of the existence of solutions we use the Galerkin approximations, a characterization of the derivative of the nonlinear term $M(\|u\,(t)\|_W^\beta)$ and the Arzela-Áscoli Theorem. The uniqueness follows by the energy method.

*URCA, DM,CE, Brasil, e-mail: rrcmatematica@yahoo.com.br
†IM-UFRJ, RJ, Brasil, e-mail: milla@im.ufrj.br

References

[1] CARVALHO, R.R. AND MILLA MIRANDA, M.-*Existence and decay of solutions of a damped Kirchhoff-Carrier equation in Banach space*, to appear.

[2] CLARK, H.R.-*Global classical solutions to the Cauchy problem for a nonlinear wave equation*, Internat. J. Math. & Math. Sci., 21 (1998), 533-548.

[3] CRIPPA, H.R- On local solutions of some mildly degenerate hyperbolic equation, Nonlinear Analysis TMA, 21 (1993), 565-574.

[4] EBIHARA, Y., MEDEIROS, L.A. AND MILLA MIRANDA, M.- Local solutions for a nonlinear degenerate hyperbolic equation, Nonlinear Analysis TMA, 10 (1986), 27-40.

[5] IZAGUIRRE, R., FUENTES, R. AND MILLA MIRANDA, M.-*Existence of local solutions of the Kirchhoff-Carrier equation in Banach spaces*, Nonlinear Analysis 68 (2008), 3565-3580.

[6] MATOS, M.P.-*Mathematical analysis of the nonlinear model of the vibrations of a string*, Nonlinear Analysis TMA, 17 (1991), 1125-1137.

[7] MEDEIROS, L.A.-*Tópicos em Equações Diferenciais Parciais-Parte 1*, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 2006.

[8] MEDEIROS, L.A. ,LIMACO, J. AND MENEZES, S.B.-*Vibrations of elastic string: mathematical aspects, part one*, J. Comp.Analysis and Appl. 2(2002),91-127.

[9] POHOZAEV, S.I.-*The Kirchhoff quasilinear hyperbolic equation*, Differential Equations, 21 (1985), 101-108.

[10] SOUZA, S. AND MILLA MIRANDA, M.-*Existence and decay of solutions of a damped Kirchhoff equation*, Int. J. Pure Appl. Math., 32(2006),483-508.

[11] YAMAZAKI, T.-*On local solutions of some quasilinear degenerate hyperbolic equations*, Funkcialaj Ekvcioj, 31 (1988), 439-457.

[12] ZEIDLER, E.-*Nonlinear Fuctional Analysis and Its Applications*,Vol III, Springer-Verlag, New York, 1985.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{0}}$ 2 November 2008

ON A MIXED PROBLEM FOR THE SEMILINEAR WAVE EQUATION WITH NONLINEAR BOUNDARY CONDITION

M.Milla Miranda *

This paper is concerned with the study of the existence of solutions of the following mixed problem:

$$\left|\begin{array}{l} u'' - \Delta u + f(x,u) = 0 \text{ in } \Omega\times]0,\infty[, \\ u = 0 \text{ on } \Gamma_0\times]0,\infty[, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \delta |u'|^{\sigma} u' = 0 \text{ on } \Gamma_1\times]0,\infty[, \\ u(0) = u^0 \ , \ u'(0) = u^1 \text{ in } \Omega. \end{array}\right.$$

where Ω is an open bounded set of $\mathbb{R}^n$ whose smooth boundary Γ is constituted by two disjoint closed sets Γ_0 and Γ_1 both with positive Lebesgue's measure, $f(x,s)$ is a measurable real function defined on $\Omega\times\mathbb{R}$, ν is the outward unit normal in Γ_1, δ a real function defined on Γ_1 and $\sigma \geq 0$ a real number.

In order to state our main result we introduce some spaces. We denote by $W^{m,p}_{\Gamma_1}(\Omega)$ the Banach space

$$W^{m,p}_{\Gamma_1}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega);\ u = 0 \text{ on } \Gamma_1\}$$

equipped with its usual norm of Sobolev space. In particular, $W^{1,2}_{\Gamma_1}$ will be represented by V. Also $\mathcal{H}^{3/2}_{\Gamma_1}(\Omega)$ represents the Hilbert space $\mathcal{H}^{3/2}_{\Gamma_1}(\Omega) = \mathcal{H}^{3/2}(\Omega)\cap V$ where $\mathcal{H}^{3/2}(\Omega) = \{u \in H^{3/2}(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ and X the Banach space

$$X = \{u \in V;\ \Delta u \in L^2(\Omega)\ ,\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \in L^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}}(\Gamma_1)\ \}$$

with the norm

$$||u||_X = ||u||_V + |\Delta u| + ||\frac{\partial u}{\partial \nu}||_{L^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}}(\Gamma_1)}$$

Use the notation $\mathcal{D}_{\Gamma_1}(\overline{\Omega}) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega});\ \varphi = 0 \text{ on } \Gamma_1\ \}$. We note that $\mathcal{D}_{\Gamma_1}(\overline{\Omega})$ is dense in $\mathcal{H}^{3/2}_{\Gamma_1}(\Omega)$ and in V.

We make the following hypotheses:

$f(x,s)$ is continuous on $\mathbb{R}$, $f(x,0) = 0$, $f(x,s)$ is non decreasing on $\mathbb{R}$ a.e. $x \in \Omega$ and
$[f(x,s) - f(x,r)](s-r) \leq f_0\ (s-r)^2$, $\forall s, r \in \mathbb{R}$, a.e. $x \in \Omega$ (f_0 positive constant)
$\delta \in W^{1,\infty}(\Gamma_1)$, $\delta(x) \geq \delta_0 > 0$, $\forall x \in \Gamma_1$ (δ_0 constant)
$0 \leq \sigma \leq \frac{2}{n-2}$ if $n \geq 3$ and $\sigma \geq 0$ if $n = 1, 2$

Theorem 0.1. *Assume the above hypotheses. Consider*

$$u^0 \in \mathcal{H}^{3/2}_{\Gamma_1}(\Omega) \ \textit{and}\ u^1 \in V \cap L^{2n\sigma+2}(\Gamma_1)$$

such that

$$\frac{\partial u^0}{\partial \nu} + \delta |u^1|^{\sigma} u^1 = 0 \ \textit{on}\ \Gamma_1$$

Then there exists a unique function u in the class

$$u \in L^\infty(0,\infty;V) \cap L^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}}_{loc}(0,\infty;X)\ ,\ u' \in L^\infty(0,\infty;V)\ ,\ u'' \in L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega))$$

* IM-UFRJ, RJ, Brasil, e-mail: milla@im.ufrj.br

such that

$$u'' - \Delta u + f(x,u) = 0 \ \ in \ \ L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)),$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \delta |u'|^\sigma u' = 0 \ \ in \ \ L_{loc}^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}}(0,\infty;\Gamma_1),$$
$$u(0) = u^0 \, , \, u'(0) = u^1.$$

In the proof of the theorem, we use the Galerkin method with a special basis, appropriate Strauss approximations of real functions, trace theorems and the method of monotone operators.

The decay of solutions will be published later.

References

[1] ARARUNA, F.D. AND MACIEL A.B.- *Existence and boundary stabilization of the semilinear wave equation*, Nonlinear Analysis 67(2007),1288-1305.

[2] CALVACANTI, M.M., CAVALCANTI, V.D. AND LASIECKA. I.- *Well-posedness and optimal decay rates for the wave equation with nonlinear boundary damping-source interaction*, J. Differential Equations 236 (2007),407-459.

[3] KOMORNIK, V.- *Exact Controllability and Stabilization-The Multiplier Method*, John Wiley & Sons, 1994.

[4] LASIECKA, I. AND TATARU, D.- *Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary damping*, Differential Integral Equations 6 (1993), 507-533.

[5] LIONS, J.L.-*Problèmes aux Limites dans les Équations aux Derivées Partielles*, Les Presses de l' Universit de Montreal, Montreal, 1965.

[6] LIONS, J.L.-*Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[7] MEDEIROS, L.A.- *Tópicos em Equações Diferenciais Parciais* - Parte 1, Editora UFRJ, Rio de Janeiro ,RJ, 2006

[8] MEDEIROS, L.A. AND MILLA MIRANDA, M.-*Espaços de Sobolev, Iniciação aos Problemas Elíticos Não Homogeneos*, IM-UFRJ, Rio, 2000.

[9] MILLA MIRANDA, M.- *Traço para o dual dos espaços de Sobolev*, Bol. Soc. Paran.Matemática (2^a série) 11(2)(1990), 131-157.

[10] MILLA MIRANDA, M. AND MEDEIROS, L.A.- *On a boundary value problem for the wave equation:Existence uniqueness-asymptotic behavior*, Revista de Matemáticas Aplicadas, Universidad de Chile, (1996), 47-73

[11] STRAUSS, W.A- *On weak solutions of semilinear hyperbolic equations*, An. Acad. Brasil. Ciênc. 42)(1970),645-651

[12] VITILLARO, E.-*Global existence for the wave equation with nonlinear boundary damping and source terms*,J. Differential Equations 186(2007), 259-298.

[13] ZUAZUA, E.- *Uniform stabilization of the wave equation by nonlinear boundary feedback*, SIAM J. Control Optim. 28 (1990), 466-478.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

ON A VARIATIONAL INEQUALITY FOR THE EQUATION OF MOTION OF OLDROYD FLUID WITH VARIABLE VISCOSITY

G. M. de Araújo *

It is well know that, the motion of an incompressible fluid is described by the system of Cauchy equations

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+\nabla p=\text{div }\sigma+f,\quad \text{div } u=0, \tag{0.1}$$

where $u=(u_1,...,u_n)$ is the velocity, p is the pressure in the fluid, f is the density of external forces and σ is the deviator of the stress tensor. The Hooke's Law establishes a relationship between the stress tensor σ and the deformation tensor $D_{ij}(u)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ and their derivatives. For example, for an incompressible Stokes fluid the relationship has the form $\sigma=\alpha D+\beta D^2$ where α and β are scalar functions. If $\alpha\equiv$ constant $\equiv 2\nu>0$ and $\beta\equiv 0$ we have the Newton's Law $\sigma=2\nu D$, which substituting in (0.1) we obtain the equations of motion of Newtonian fluid, which is called the Navier-Stokes equations:

$$u'-\nu\Delta u+(u.\nabla)u+\nabla p=f,\quad \text{div}\, u=0.$$

The model studied in this work, was proposed by Oldroyd [3], [4]. Oldroyd proposed a model of a viscous incompressible fluid whose defining equations has the form

$$\left(1+\lambda\frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma=2\nu\left(1+k\nu^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\right)D, \tag{0.2}$$

where λ,ν,k are positive constants with $\nu-\dfrac{k}{\lambda}>0$. Assuming that $\sigma(x,0)=D(x,0)=0$, we write the relationship (0.2) in the form of integral equation

$$\sigma(x,t)=2k\lambda^{-1}D(x,t)+2\lambda^{-1}(\nu-k\lambda^{-1})\int_0^t e^{-\frac{(t-\xi)}{\lambda}}D(x,\xi)d\xi\,. \tag{0.3}$$

Thus, the equation for the motion of Oldroyd fluid can be written by the system of integro-differential equations

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(u.\nabla)\,u-\mu\Delta u-\int_0^t\beta(t-\xi)\Delta u(x,\xi)d\xi+\nabla p=f,\ x\in\Omega,\ t>0 \tag{0.4}$$

and the incompressible condition $\text{div}\, u=0,\ x\in\Omega,\ t>0$, with initial and boundary conditions $u(x,0)=u_0,\ x\in\Omega$, and $u(x,t)=0\ x\in\Gamma,\ t\geq 0$. Here, $\mu=k\lambda^{-1}>0$ and $\beta(t)=\gamma e^{-\delta t}$, where $\gamma=\lambda^{-1}\left(\nu-k\lambda^{-1}\right)$ with $\delta=\lambda^{-1}$. In Brézis [1] we find investigation for a unilateral problem for the case of the Navier-Stokes equations. In De Araújo and De Menezes [2] we find investigation for a unilateral problem for the case of the Navier-Stokes with viscosity of the type $\nu=\nu_0+\nu_1\|u(t)\|^2$, $\nu_0>0$ and $\nu_1>0$ are positives constants.

In the present work we consider a unilateral problem similar to De Araújo and De Menezes [2], adding a memory term, that is $-\displaystyle\int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)d\sigma$. More precisely, in this paper we study a unilateral problem or a variational inequality, for the operator $L=\dfrac{\partial u}{\partial t}+(u.\nabla)\,u-(\mu_0+\mu_1\|u\|^2)\Delta u-\displaystyle\int_0^t\beta(t-\xi)\Delta u(x,\xi)d\xi+\nabla p-f$ under standard hypothesis on f and u_0. Making use of the penalty method and Faedo- Galerkin's approximations, we establish existence and uniqueness of weak solutions. When ν is a constant, we find investigation in G. M. De Araújo, S. B. De Menezes and A. O. Marinho to appear.We propose the variational inequality

$$\begin{aligned}&u'-(\mu_0+\mu_1\|u\|^2)\Delta u+(u.\nabla)\,u-\int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)d\sigma+\nabla p\geq f\ \text{ in }\ Q_T\\&\text{div}\, u=0\quad\text{in}\quad Q_T,\quad u=0\quad\text{on}\quad\Sigma_T,\quad u(x,0)=u_0(x)\quad\text{in}\quad\Omega,\end{aligned}$$

*Instituição UFPA , FM, Belém-Pará, Brasil, gera@fpa.br

where $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ is a function of $W^{1,1}(0,\infty)$ satisfying the following hypothesis $(H1)\,\dfrac{\mu}{2}-2\displaystyle\int_0^\infty g(s)\,ds>0,(H2)\,-C_1g\leq g'\leq -C_2g,$ where C_1 and C_2 are positive constants and $(H3)\,g(0)>0$.

We define the following spaces $\mathcal{V}=\{\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)^n;\quad \operatorname{div}\varphi=0\}$, $V=V(\Omega)$ with inner product and norm denoted respectively by $((u,z))=\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\frac{\partial z_i}{\partial x_j}(x)\,dx,\quad \|u\|^2=\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\right)^2dx$, $H=H(\Omega)$ with inner product and norm defined, respectively, by $(u,v)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega u_i(x)v_i(x)\,dx,\quad |u|^2=\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega|u_i(x)|^2\,dx$ and V_2 with inner product and norm denoted, respectively by $((u,z))_{V_2}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(u_i,v_i)_{H^2(\Omega)},\quad \|u\|_{V_2}^2=((u,u))_{V_2}$,

Let K be a closed and convex subset of $V\cap V_2$ with $0\in K$. We write $\mathbb{V}=L^4(0,T;V)$, $\mathbb{V}'=L^{4/3}(0,T;V')$, $\mathbb{H}=L^2(0,T;H)$, $\mathbb{K}=\{v|v\in\mathbb{V},v(t)\in K \text{ a.e. },v(0)=0\}$, $D\left(\dfrac{d}{dt};\mathbb{V}'\right)=\left\{v|v\in L^4(0,T;V),\ v'\in L^{4/3}(0,T;V')\right\}$.

Remark 0.1. *$\mathbb{V}$ is a reflexive Banach space, $\mathbb{H}$ is a Hilbert space and $\mathbb{K}$ is a closed and convex subset of $\mathbb{V}$.*

We consider the "Compatibility Hypothesis" (see Lions [5], p. 269): $\forall v\in\mathbb{K}$ there exists a mollifiers v_j verify $i)\quad v_j\in\mathbb{K}\cap D\left(\dfrac{d}{dt};\mathbb{V}'\right), ii)\quad v_j\longrightarrow v$ in $\mathbb{V}$, $j\longrightarrow\infty, iii)\ \limsup\limits_{j\to\infty}\left(\dfrac{dv_j}{dt},v_j-v\right)\leq 0.(H4)$

We also suppose that $\displaystyle a(v,v)+b(v,\varphi,v)+\int_0^t g(t-\sigma)((v,v))d\sigma\geq 0\ \ \forall\ \varphi\in K,\forall\ v\in V.(H5)$

Next we shall state the main results of this work.

Theorem 0.1. *If $n\leq 4$, $f\in L^2(0,T;V')$ and hypotheses $(H1),(H3),(H4)$ holds, then there exists a function u such that $u\in L^4(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)$, $u(t)\in K$ a.e.*

$$\int_0^T\left[\langle\varphi',\varphi-u\rangle+\nu_0a(u,\varphi-u)+\nu_1\langle\mathcal{A}u,\varphi-u\rangle+b(u,u,\varphi-u)-\left(\int_0^t g(t-\sigma)\Delta u(\sigma)d\sigma,\varphi-u\right)\right]dt\geq\int_0^T\langle f,\varphi-u\rangle\ dt,$$

$\forall\varphi\in L^2(0,T;V),\varphi'\in L^2(0,T;V'),\varphi(0)=0,\ \varphi(t)\in K$ *a.e.*, $u(0)=u_0$

We denote by $\mathcal{A}$ the monotonous and hemicontinous operator $\mathcal{A}:V\longrightarrow V'$, $\langle\mathcal{A}u,v\rangle=\|u\|^2a(u,v)$.

Theorem 0.2. *Under the assumptions $(H5)$, $n=2,3$, suppose that $f,f'\in L^2(0,T;V')$, $u_0\in K$. Suppose also that*

$$(f(0),v)-\mu a(u_0,v)-\nu_1\|u_0\|^2a(u_0,v)-b(u_0,u_0,v)=(u_1,v)\ \textit{for all}\ v\in V\ \textit{and for some}\ u_1\in V.$$

Then there exists a unique function u such that $u\in L^2(0,T;V\cap V_2)$, $u'\in L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)$,

$$(u'(t),v-u(t))+\mu_0a(u(t),v-u(t))+\mu_1\langle\mathcal{A}u(t),v-u(t)\rangle+b(u(t),u(t),v-u(t))+\int_0^t g(t-\sigma)((u(\sigma),v-u(t)))d\sigma$$
$$\geq(f(t),v-u(t))\ \ \forall\ v\in K,\quad \textit{a.e. in } t,\ u(0)=u_0,\ u(t)\in K,\quad\forall t\in[0,T].$$

Making use of the penalty method, Faedo-Galerkin's approximation and basic result of the theory of monotone operators, we establish our result on existence of weak solutions.

References

[1] H. Brézis, Inequations Variationelles Relatives a L'Operateur de Navier-Stokes, Journal of Mathematical Analysis ans Applications, 19 (1972), 159-165.

[2] G. M. De Araújo and S. B. De Menezes On a Variational Inequality for the Navier-stokes Operator with Variable Viscosity, Communicatios on Pure and Applied Analysis. Vol. 1, N.3, 2006, pp.583-596.

[3] J.G. Oldroyd- Non-Newtonisn flow of liquids and solids, Rheology: Theory and Applications. Vol. 1(F.R. Eirich Editor), Academic Press, 1959, pp. 653-682.

[4] J.G. Oldroyd- On the formulation of rheological equations of state, Proc. Roy. Soc. London Ser. A200(1950), 253-541.

[5] J.L. Lions, Quelques Méthodes de Resolution Des Problémes Aux Limites Non Linéaires, Dunod, Paris, 1969.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

On dominated polynomials between Banach spaces

G. Botelho * D. Pellegrino † P. Rueda ‡

In this paper we prove that when $r \geq 1$, $\dim X = \infty$ and m is so that $m > r$, if $m \geq 4$ is even or $m > r+1$, if $m \geq 5$ is odd, then

$$\mathcal{P}_{as(\frac{r}{m};r)}(^mX) \neq \mathcal{P}(^mX).$$

This result proves a conjecture from [1]. We also prove an abstract Pietsch Domination Theorem which generalizes, in particular, the well-known PDT for dominated multilinear mappings. Our notation and terminology follows [3].

Theorem 0.1. *Let m be an even positive integer and X be an infinite-dimensional Banach space over the real scalar field. If $q < 1$ and $\mathcal{P}_{as(q;r)}(^mX) = \mathcal{P}(^mX)$, then id_X is $(\frac{mq}{1-q}, r)$-summing.*

Sketch of the proof. The Open Mapping Theorem gives us a $K > 0$ so that $\|Q\|_{as(q;r)} \leq K\|Q\|$ for all continuous m-homogeneous polynomials $Q : X \to \mathbb{K}$.

Let $m \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_m \in X$ and $x_j^* \in B_{X^*}$ be so that $x_j^*(x_j) = \|x_j\|$ for every $j = 1, ..., m$.

Let n be a fixed natural number and $(\mu_i)_{i=1}^n$ be such that $\sum\limits_{j=1}^{n} \mid \mu_j \mid^s = 1$, where $s = \frac{1}{q}$. Define $P : X \to Y$ by

$$Px = \sum_{j=1}^{n} |\mu_j|^{\frac{1}{q}} x_j^*(x)^m.$$

Note that $Px \geq 0$ for every $x \in X$. The proof follows the same lines of [3]. □

The proof of the lemma is not very difficult but a little bit long and we omit it (this lemma seem to be part of the folklore of the theory.

Lemma 0.1. *If $\mathcal{P}_{as(\frac{r}{n};r)}(^nX) = \mathcal{P}(^nX)$ then $\mathcal{P}_{as(\frac{r}{m};r)}(^mX) = \mathcal{P}(^mX)$ for every $m \leq n$.*

The following theorem works for spaces over $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$:

Theorem 0.2. *Let $1 \leq r$ and X be an infinite-dimensional Banach space. If m is so that $m > r$ if $m \geq 4$ is even or $m > r+1$ if $m \geq 5$ is odd, then*

$$\mathcal{P}_{as(\frac{r}{m};r)}(^mX) \neq \mathcal{P}(^mX).$$

Sketch of the proof. We may assume that X is a Banach space over the real scalar field. The case of Banach spaces over the complex scalar field is a consequence. In fact, it can be proved (using complexification) that $P : X \to Y$ is an absolutely (p_1, p_2)-summing polynomial if and only if its complexification $\widetilde{P} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ is absolutely (p_1, p_2)-summing. So, if $P : X \to Y$ is not absolutely (p_1, p_2)-summing, the same occurs to its complexification.

Case $m \geq 4$ (m even) and $r < m$:

Note that

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{\frac{m\frac{r}{m}}{1-\frac{r}{m}}} = \frac{1}{r} - \frac{1-\frac{r}{m}}{r} = \frac{1}{m} < \frac{1}{2}.$$

If we had $\mathcal{P}_{as(\frac{r}{m};r)}(^mX) = \mathcal{P}(^mX)$, the previous theorem would imply that id_X is $(\frac{m\frac{r}{m}}{1-\frac{r}{m}}, r)$-summing and it is impossible by invoking the Dvoretzky-Rogers Theorem. The case $m \geq 5$ (m odd) is a consequence of the previous lemma and the previous case (m even). □

*Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlandia, Uberlandia, MG, Brazil, botelho@ufu.br
†Departamento de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, 58.051-900 - João Pessoa, Brazil, pellegrino.math@gmail.com
‡Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Valencia, 46.100 Burjasot - Valencia, Spain, pilar.rueda@uv.es

Definition 0.1. *[2, Definition 2.1] Let $\alpha > 0$. A mapping $f : E \to F$ is called α-subhomogeneous if $\|f(\lambda x)\| \geq \lambda^{\alpha}\|f(x)\|$ for all $x \in E$ and $0 < \lambda < 1$.*

Let $\beta > 0$ and K be a compact set (any compact set). Consider the map $R : K \times E \to [0, \infty)$ so that $R(\varphi, 0) = 0$, and suppose that

$$R_x : K \to [0, \infty) : R_x(\varphi) = R(\varphi, x)$$

is continuous and

$$R(\varphi, \lambda x) \leq \lambda^{\beta} R(\varphi, x).$$

From now on, R will denote a map satisfying the above properties.

Definition 0.2. *Let $f : E \to F$ be α-subhomogeneous. If there is a constant $C_1 > 0$ such that*

$$\sum_{j=1}^{m} \|f(x_j)\|^{\frac{p\beta}{\alpha}} \leq C_1 \sup_{\varphi \in K} \sum_{j=1}^{m} R(\varphi, x_j)^p,$$

for all $x_1, \ldots, x_m \in E$ and $m = 1, 2, \ldots$, the map f is called R^{β}-abstract p-dominated.

Now, we state our main result:

Theorem 0.3. *Let $1 \leq p < \infty$ and $f : E \to F$ be α-subhomogeneous. Then f is R^{β}-abstract p-dominated if and only if there exist a Borel probability μ on K and a constant $C \geq 0$ such that*

$$\|f(x)\| \leq C \left(\int_K R(\varphi, x)^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{\alpha}{p\beta}}.$$

Below, we show how Theorem 0.3 can be easily invoked in order to obtain generalizations of PDT presented in various papers:

- PDT for absolutely p-summing linear mappings: Choose f an 1-subhomogeneous mapping, $\alpha = \beta = 1$ and $R(\varphi, x) = |\varphi(x)|$ and $K = B_{E^*}$ with the weak star topology.
- PDT for strongly p-summing mappings: Choose f an n-subhomogeneous mapping, $\alpha = \beta = n$ and $R(\varphi, x) = |\varphi(x)|$, with φ n-linear and $x = (x_1, ..., x_n)$ and K as in the original proof.
- PDT for p-semi integral mappings: Choose f an n-subhomogeneous mapping, $\alpha = \beta = n$ and $R(\varphi, x) = |\varphi_1(x_1)...\varphi_n(x_n)|$, with $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ and $x = (x_1, ..., x_n)$ and K as in the original proof.
- PDT for α-subhomogeneous mappings: $R(\varphi, x) = |\varphi(x)|$ and K as in the original proof.
- The classical PDT for p-dominated n-linear mappings is obtained as a corollary, as in [2].

References

[1] G. Botelho and D. Pellegrino, Scalar-valued dominated polynomials on Banach spaces, Proc. Am. Math. Soc. **134** (2006), 1743-1751.

[2] G. Botelho, D. Pellegrino and P. Rueda, A nonlinear Pietsch Domination Theorem, to appear in Monatschefte für Mathematik.

[3] D.M. Pellegrino, Cotype and absolutely summing homogeneous polynomials in $\mathcal{L}_p$ spaces, Studia Math. **157** (2003), 121-131.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

ON THE EXISTENCE OF POSITIVE SOLUTIONS FOR A NONLOCAL ELLIPTIC PROBLEM INVOLVING THE P-LAPLACIAN AND THE GENERALIZED LEBESGUE SPACE $L^{p(x)}(\Omega)$

Giovany M. Figueiredo [*] [†]

In this work we study the scalar problem

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u &= |u|_{q(x)}^{\alpha(x)} \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Delta_p u = \text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ is the p-Laplacian operator, $|\cdot|_{q(x)}$ is the usual norm in $L^{q(x)}(\Omega)$ and $\alpha, p : \overline{\Omega} \to I\!R$ are continuous functions satisfying certain properties will be stated later. We will use the method of sub and supersolution.

We will also consider the system

$$(P_2) \qquad \begin{cases} -\Delta_{p_1} u &= |v|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} \quad \text{in} \quad \Omega, \\ -\Delta_{p_2} u &= |v|_{q_2(x)}^{\alpha_2(x)} \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u = v &= 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\alpha_i, q_i : \overline{\Omega} \to I\!R, i = 1, 2$, are continuous functions whose behavior will be stated later.

Our approach in the study of problem (P_2) rests heavily on the a result due to Rabinowitz.

In this work we will show an existence results for the two problems.

References

[1] C.O Alves & F.J.S.A. Corrêa, *On existence of solutions for a class of problem involving a nonlinear operator*, Comm. Appl. Nonlinear Anal., 8(2001), N. 2, 43-56.

[2] C.O. Alves, F.J.S.A. Corrêa & T.F. Ma, *Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type*, Comput. Math. Appl., 49(2005), 85-93.

[3] J.W. Bebernes & P. Talaga, *Nonlocal problems modelling shear banding*, Comm. Appl. Nonlinear Anal. 3(1996), N.2, 79-103.

[4] H. Brezis & E.H. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence functionals*, Proc. Amer. Math. Coc. 8(1983), 486-490.

[5] Y. Chen & H. Gao, *Existence of positive solutions for nonlocal and nonvariational elliptic system*, Bull. Austral. Math. Soc., Vol. 72(2005), 271-281.

[6] M. Chipot & B. Lovat, *Some remarks on non local elliptic and parabolic problems*, Nonlinear Anal., 30(7)(1997), 4619-4627.

[7] M. Chipot & B. Lovat, *On the asymptotic behaviour of some nonlocal problems*, Positivity(1999), 65-81.

[*] Universidade Federal do Par - UFPA- Pa - Brasil. e-mail giovany@ufpa.br
[†] Work done with Francisco Julio Correa - UFCG and Francisco Paulo Lopes - UFPA

[8] M. Chipot & J.F. Rodrigues, *On a class of nonlinear elliptic problems*, Mathematical Modelling and Numerical Analysis, Vol. 26, N. 3(1992), 447-468.

[9] F.J.S.A. Corrêa, *On positive solutions of nonlocal and nonvariational elliptic problems*, Nonlinear Anal., 59(2004), 1147-1155.

[10] F.J.S.A. Corrêa & G.M. Figueiredo, *On the existence of positive solution for an elliptic equation of Kirchhoff-type via Moser iteration method*, Boundary Value Problems, Vol. 2006(2006), Article ID 79679, 1-10.

[11] F.J.S.A. Corrêa & G.M. Figueiredo, *On an elliptic equation of p-Kirchhoff type via variational methods*, Bull. Austral. Math. Soc., Vol. 74(2006), 263-277.

[12] F.J.S.A. Corrêa & F.P.M. Lopes, *Positive solutions for a class of nonlocal elliptic systems*, Comm. Appl. Nonlinear Anal., Vol. 14, N. 2(2007), 67-77.

[13] F.J.S.A. Corrêa & S.D.B. Menezes, *Existence of solutions to nonlocal and singular elliptic problems via Galerkin method*, Electron. J. Differential Equations, Vol. 2004(2004), N. 19, 1-10.

[14] F.J.S.A. Corrêa & S.D.B. Menezes, *Positive solutions for a class of nonlocal problems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Volume in honor of Djairo G. de Figueiredo, Vol. 66(2005), 195-206.

[15] W. Deng, Z. Duan & C. Xie, *The blow-up rate for a degenerate parabolic equation with a nonlocal source*, J. Math. Anal. Appl., 264(2001), 577-597.

[16] W. Deng, Y. Li & C. Xie, *Existence and nonexistence of global solutions of some nonlocal degenerate parabolic equations*, Appl. Math. Lett., 16(2003), 803-808.

[17] W. Deng, Y. Lie & C. Xie, *Blow-up and global existence for a nonlocal degenerate parabolic system*, J. Math. Anal. Appl., 227(2003), 199-217.

[18] E. Di Benedetto, $C^{1,\alpha}$ *local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Anal., 7, N.8(1983), 827-850.

[19] X.L. Fan & Q.H. Zhang, *Existence of solutions for p(x)-Laplacian Dirichlet problem*, Nonlinear Anal., 52(2003), 1843-1852.

[20] Z. Guo, *Some existence and multiplicity results for a class of quasilinear elliptic eigenvalue problems*, Nonlinear Anal., Vol. 18, N. 10(1992), 957-971.

[21] G. Kirchhoff, *Mechanik*, Teubner, Leipzig, 1883.

[22] T.F. Ma, *Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type*, Nonlinear Anal. 63(2005), 1967-1977.

[23] I. Peral, *Multiplicity of solutions for the p-Laplacian*, Second School of Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential equations, ICTP-Trieste-Italia(1997).

[24] K. Perera & Z. Zhang, *Nontrivial solutions of Kirchhoff type problems via the Yang index*, J. Differential Equations, 221(2006), N.1, 246-255.

[25] P.H. Rabinowitz, *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Funct. Anal. 7(1971), 487-513.

[26] P. Souplet, *Uniform blow-up profiles and boundary behavior for diffusion equations with nonlocal nonlinear source*, J. Differential Equations, 153(1999), 374-406.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

ON THE EXISTENCE OF SOLUTIONS OF A NONLOCAL ELLIPTIC EQUATION WITH A P-KIRCHHOFF-TYPE TERM

Rúbia Gonçalves Nascimento * †

In this paper we study the existence of positive solution for the following class of elliptic problems

$$\begin{cases} -[M(\|u\|_{1,p}^p)]^{p-1}\Delta_p u = f(x,u) \text{ in } \Omega, \\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded smooth domain, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ and $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, are given functions, Δ_p is the p-Laplacian, $p > 1$,

$$\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$$

and $\| \cdot \|_{1,p}$ is the usual norm

$$\|u\|_{1,p}^p = \int_\Omega |\nabla u|^p$$

in the Sobolev space $W_0^{1,p}(\Omega)$.

The interest of the mathematicians on the so called nonlocal problems like (0.1) (nonlocal because of the presence of the term $M(\|u\|_{1,p}^p)$, which implies that equations in (0.1) is no longer pointwise equalities) has increased because they represent a variety of relevant physical end engineering situations and requires a nontrivial apparatus to solve them.

Particularly, problem (0.1) presents some combinations that, at least to our knowledge, seems to be new. Indeed, in problem (0.1) appears the nonlocal term $M(\|u\|_{1,p}^p)$ motivated, among other things, by the above physical situations. Furthermore, we have the presence of the p-Laplacian operator that appears in several areas of the Science as Astronomy, Glaciology, Climatology, Non-Newtonian Fluids, Petroleum Extraction and so on. For instance, in the study of sensitive of a nonlinear stationary model that appears in Climatology regarding solar variation, in reaction-diffusion problems as well in flows through porous medium as, for example, in flows through rock filled dams. Problems that involve this operator present several such difficulties as: uniqueness, regularity, degeneracy, etc.

Besides to these considerations, we also have the presence of a singular term which poses an additional difficulty in our study. Singular elliptic problems arise in Chemical Heterogeneous Catalysts, Non-Newtonian Fluids, Nonlinear Heat Conduction, among other phenomena.

We will establish the existence results of weak solutions for the problem (0.1) by considering some types of functions f.

In the first section we study the case in which f depends only on $x \in \Omega$. This is the M_p-Linear case.

In the second section we attack problem (0.1) when f is sublinear, that is, $f(u) = u^\alpha$, for some $0 < \alpha < 1$.

In both sections we suitable adapt ideas developed in [1], [2] and [17].

In the third section , we analyze the case in which f possesses a singular term. More precisely, f is of the following form

$$f(x,u) = \frac{h(x)}{u^{\gamma-p+2}} + u^{\alpha-p+2},$$

*Universidade Federal do Pará - UFPA- Campus Universitário de Abaetetuba - Brasil. e-mail rubia@ufpa.br
†Joint work with Francisco Julio Sobreira de Araujo Correa - UFCG

for $x \in \overline{\Omega}$ and $u > 0$, with $\gamma, \alpha \in (p-2, p-1)$. In this section we have to use some arguments different from those in [8]. For instance, we do not use any Hardy-Sobolev type inequality to obtain the boundedness of the sequence of approximate solutions obtained through Galerkin method. Furthermore, the convergences considered in the last section are not consequences of straightforward computations like in case $p = 2$.

References

[1] C.O. Alves & F.J.S.A. Corrêa , *On existence of solutions for a class of problem involving a nonlinear operator*, Comm. Appl. Nonlinear Anal., 8(2001)43-56.

[2] C.O. Alves, F.J.S.A. Corrêa & T.F Ma, *Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type*, Comput. Math. Appl., 49(2005)85-93.

[3] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle-Thorie et applications*, Masson, Paris, 1983.

[4] H. Brezis & L. Oswald, *Remarks on sublinear elliptic equations*, Nonlinear Anal., Vol. 30, N 1 (1986)55-64.

[5] H. Brezis & S. Kamim, *Sublinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$, Manuscripta Math., 74(1992)87-106.

[6] M. Chipot & B. Lovat, *Some remarks on nonlocal elliptic and parabolic problems*, Nonlinear Anal., Vol. 30(1997)4619-4627.

[7] M. Chipot & J.F. Rodrigues, *On a class of nonlocal nonlinear problems*, RAIRO Modélisation Math. Anal. Numér., Vol. 26(1992)447-467.

[8] F.J.S.A. Corrêa, *On an elliptic equation involving a Kirchhoff term and a singular pertubation*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin, Blgica, to appear.

[9] F.J.S.A. Corrêa & S.D.B. Menezes, *Existence of solutions to nonlocal and singular elliptic problems via Galerking method*, Electron. J. Differential Equations, (2004)1-10.

[10] F.J.S.A. Corrêa & G. M. Figueiredo, *On the existence of positive solution for an elliptic equation of Kirchhoff type via Moser iteration Method*, Bull. Austral. Math. Soc., Vol. 74 (2006)263-277.

[11] E. Di Benedetto, $C^{1,\alpha}$ *local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Anal., Vol. 7, N8 (1983)828-850.

[12] J.I. Diaz & J.E. Saa, *Existence et unicit of solutions positives pour certaines quations elliptiques quasilinaires*, C.R. Acad. Sci. Paris, t.305, Srie 1 (1987)521-524.

[13] D.G. de Figueiredo, *Positive solutions of semilinear elliptic problems*, Lectures Notes in Mathematics, 957, Springer-Verlag, (1982)34-37.

[14] Z. Guo, *Some existence and multiplicity results for a class of quasilinear elliptic eigenvalue problems*, Nonlinear Anal., Vol. 18, N10 (1992)957-971.

[15] G. Kirchhoff, *Mechanik, Teubner, Leipzig,* 1883.

[16] J.L. Lions, *Quelques mthodes de rsolution de prblemes aux limites non linaires*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, (1969).

[17] T. F. Ma, *Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type*, Nonlinear Anal., Vol. 63 (2005)1967-1977. 1996

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

ON THE INTERPLAY OF TENSOR NORMS AND MULTI-IDEALS

G. BOTELHO [*] , E. ÇALIŞKAN [†] & D. PELLEGRINO [‡]

An n-tensor norm β_n assigns to every n-tuple of normed spaces $E_1, \ldots, E_n$ a reasonable tensor norm $\beta_n(\cdot)$ on the full n-fold tensor product $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$. The resulting normed space is denoted by $(E_1 \otimes \cdots \otimes E_n, \beta_n)$. A tensor norm is a sequence $\beta = (\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ where each β_n is an n-tensor norm.

Several papers treated the question of representing ideals of multilinear mappings (multi-ideals) by tensor norms in the following sense: we say that a tensor norm $\beta = (\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ represents the multi-ideal $\mathcal{M}$ (or $\mathcal{M}$ is β-represented) if $\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F')$ is isomorphic to $(E_1 \otimes \cdots \otimes E_n \otimes F, \beta_{n+1})'$ through the mapping

$$\varphi\colon \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F') \longrightarrow (E_1 \otimes \cdots \otimes E_n \otimes F, \beta_{n+1})'$$

$$T \mapsto \varphi(T)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y) = T(x_1, \ldots, x_n)(y),$$

for every n and every Banach spaces $E_1, \ldots, E_n, F$.

For example, in [6, Theorem 4.5] it is proved that a multi-ideal $\mathcal{M}$ is maximal if and only if $\mathcal{M}$ is represented by some (finitely generated) tensor norm. It is well known (see, e.g., [5, Exercise 12.1]) that for every normed space E and every 2-tensor norm α, $(E \otimes \mathbb{K}, \alpha)$ is (isometrically) isomorphic to E via the correspondence $x \otimes \lambda \longleftrightarrow \lambda x$. Given a tensor norm $\beta = (\beta_n)_{n=1}^{\infty}$, this property can be rewritten as $(E \otimes \mathbb{K}, \beta_2) = (E, \beta_1)$ for every E. This property is no longer valid for larger n, for example: making $\beta_2 = \pi$ and $\beta_3 = \varepsilon$ we have that $(E \otimes E, \beta_2) = E \otimes_\pi E$ is not isomorphic to $(E \otimes E \otimes \mathbb{K}, \beta_3) = E \otimes_\varepsilon E \otimes_\varepsilon \mathbb{K} = E \otimes_\varepsilon E$ in general. In this note we study tensor norms in which the transition between its levels is smooth (see Definition 0.1) as well as the multi-ideals that can be represented by such smooth tensor norms. It is worth mentioning that something in the direction of connecting the different levels of a tensor norm has been done in [4, Proposition 4.2].

Definition 0.1. A tensor norm $\beta = (\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ is said to be *smooth* if, regardless of the natural n and the normed spaces $E_1, \ldots, E_n$, the natural map

$$\psi\colon (E_1 \otimes \cdots \otimes E_n \otimes \mathbb{K}, \beta_{n+1}) \longrightarrow (E_1 \otimes \cdots \otimes E_n, \beta_n),$$

$$\psi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes \lambda) = \lambda(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)$$

is a topological isomorphism.

In Proposition 0.1 we establish the link between this notion and the multi-ideal generated by a given tensor norm, but first we need some terminology. Let a tensor norm $\beta = (\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ be given. Define $\mathcal{M}_\beta(E_1, \ldots, E_n; F)$ as those multilinear mappings $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ whose linearizations

$$A_L\colon (E_1 \otimes \cdots \otimes E_n, \beta_n) \longrightarrow F$$

are continuous. It is easy to see that $\mathcal{M}_\beta$ is a multi-ideal.

Next we define a property which is closely related to property (B) of [1]:

Definition 0.2. Given $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n, \mathbb{K}; F)$, define $A1 \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ by $A1(x_1, \ldots, x_n) = A(x_1, \ldots, x_n, 1)$. We say that a multi-ideal $\mathcal{M}$ has property [B] if

$$A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n, \mathbb{K}; F) \Longleftrightarrow A1 \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F),$$

for every n, $E_1, \ldots, E_n, F$ and $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

[*] Faculdade de Matematica, Universidade Federal de Uberlândia, 38.400-902 - Uberlândia, Brasil, e-mail: botelho@ufu.br
[†] Yıldız Technical University, Faculty of Science and Arts, Department of Mathematics, Davutpasa, 34210 Esenler, Istanbul, Turkey, e-mail: caliskan@yildiz.edu.tr
[‡] Departamento de Matematica, Universidade Federal de Paraiba, 58.051-900 - João Pessoa, Brasil, e-mail: dmpellegrino@gmail.com

Proposition 0.1. *A tensor norm β is smooth if and only if its corresponding multi-ideal $\mathcal{M}_\beta$ has property [B].*

Now we turn our attention to multi-ideals that can be represented by smooth tensor norms. Given a maximal multi-ideal $\mathcal{M}$ (for the definition see [6]), we have already mentioned that [6, Theorem 4.5] assures the existence of a tensor norm that represents $\mathcal{M}$. Let us denote such tensor norm by $\beta^{\mathcal{M}}$.

Proposition 0.2. *A maximal multi-ideal $\mathcal{M}$ is represented by a smooth tensor norm if and only if $\mathcal{M}_{\beta^{\mathcal{M}}}$ has property [B].*

At this point the following question is quite natural: is it true that every multi-ideal that is be represented by a tensor norm is also be represented by a smooth tensor norm ? The following examples shows that the answer is in general "no".

Example 0.1. For $1 \leq p < +\infty$, the multi-ideal $\mathcal{L}_{sm,p}$ of strongly multiple p-summing multilinear mappings (see [2] for the definition) is represented by a tensor norm but not by a smooth tensor norm.

Example 0.2. For $1 \leq p \leq 2$, the multi-ideal $\mathcal{L}_{m,p}$ of multiple p-summing multilinear mappings is represented by a tensor norm [8, Proposición 4.39] but not by a smooth tensor norm.

In general we have the following criteria which shows that when a multi-ideal cannot be represented by a smooth tensor norm.

Proposition 0.3. *Let $\mathcal{M}$ be such that $\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n, F; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n, F; \mathbb{K})$ and $\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F') \neq \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F')$ for some Banach spaces $E_1, \ldots, E_n, F$ and some positive integer n. Then there is no smooth tensor norm that represents $\mathcal{M}$.*

We know no example of a multi-ideal represented by a smooth tensor norm, but we have the following example which does not satisfies the hypothesis of preceding proposition.

Example 0.3. For $1 \leq p < +\infty$, the multi-ideal $\mathcal{L}_{si,p}$ of p-semi integral multilinear mappings is represented by a tensor norm (see [3, Proposition 2]). Moreover, if for some Banach spaces $E_1, \ldots, E_n, F$ and some positive integer n, $\mathcal{L}_{si,p}(E_1, \ldots, E_n, F; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n, F; \mathbb{K})$ then we have that $\mathcal{L}_{si,p}(E_1, \ldots, E_n; F') = \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F')$.

References

[1] BOTELHO, G., BRAUNSS H.-A., JUNEK, H. AND PELLEGRINO, D. - *Holomorphy types and ideals of multilinear mappings*, Studia Math., 177 (2006), pp. 43-65.

[2] BOTELHO, G. AND PELLEGRINO, D. - *Coincidence situations for absolutely summig non-linear mappings*, Port. Math., 64 (2007), pp. 175-191.

[3] ÇALIŞKAN, E. - *On characterizations of the space of p-semi-integral multilinear mappings*, preprint.

[4] CARANDO, D., DIMANT, V. AND MURO, S. - *Coherent sequences of polynomials ideals on Banach spaces*, preprint.

[5] DEFANT, A. AND FLORET, K. - *Tensor norms and operator ideals*, North-Holland Mathematical Studies, 176, North-Holland, Amsterdam, 1993.

[6] FLORET, K. AND HUNFELD, S. - *Ultrastability of ideals of homogeneous polynomials and multilinear mappings on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 130 (2002), pp. 1425-1435.

[7] PELLEGRINO, D.M. - *Cotype and nonlinear absolutely summing mappings*, Proc. Roy. Irish. Acad., 105A (2005), pp.75-92.

[8] D. PÉREZ-GARCÍA, D. - *Operadores multilineales absolutamente sumantes*, Thesis, Universidad Complutense de Madrid, 2003.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

On the periodic Regularized Benjamin-Ono equation

Banquet, Carlos* Marcia, Scialom† Angulo, Jaime ‡

We consider the periodic initial value problem for the regularized Benjamin-Ono equation:

$$\begin{cases} u_t + uu_x + u_x + \mathcal{H}u_{xt} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}, \\ \qquad\qquad u(x,0) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{0.1}$$

with initial data in Sobolev spaces H^s_{per}, here $\mathcal{H}$ is the periodic Hilbert transform

$$\mathcal{H}u(x) = \frac{1}{2L} p.v. \int_{-L}^{L} \cot\left(\frac{\pi(x-y)}{2L}\right) u(y)dy.$$

We prove that the problem is locally well-posed if $s > \frac{1}{2}$ and globally well-posed if $s \geq \frac{3}{2}$, the proof is made via the contraction mapping principle in $C([-T,T]; H^s_{per})$ following the ideas in [4]. The most important goal of the talk will be to prove the existence of a smooth curve of periodic travelling waves solutions with fundamental period $2L$ for this equation and also prove that these solutions are orbitally stable in the energy space $H^{\frac{1}{2}}_{per}$. For this we use the theory given by Benjamin, Bona, Weinstein, Grillakis, Shatah and Strauss in [2, 3, 5, 6, 7, 8, 9]. To obtain the spectral properties needed to prove the orbital stability we use the recent theory developed by Natali and Angulo in [1].

References

[1] Angulo, J.; Natali, F. *Positivity properties and stability of periodic travelling wave solutions.* To appear in SIAM, J. Math. Anal.

[2] Benjamin, T.B. *The stability of solitary waves.* Proc. Roy. Soc. London A 338 (1972), 153-183

[3] Bona, J. L. *On the stability theory of solitary waves.* Proc. Roy. Soc. London A 344 (1975), 363–374

[4] Bona, J. L.; Kalisch, H., *Models for internal waves in deep water.* Discrete Contin. Dynam. Systems 6 (2000), no. 1, 1–20

[5] Grillakis, M. *Linearized instability for nonlinear Schrödinger and Klein-Gordon equations.* J. Comm. Pure Appl. Math. XLI (1988), 747-774

[6] Grillakis, M.; Shatah, J.; Strauss, W. *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry, I.* J. Funct. Anal. 74 (1987), 160-197

[7] Grillakis, M.; Shatah, J.; Strauss, W. *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry, II.* J. Funct. Anal. 94 (1990), 308-348

[8] Weinstein, M. I. *Modulation stability of ground states of nonlinear Schrödinger equation.* SIAM J. Math. 16 (1985), 472-490

[9] Weinstein, M. I. *Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive equations.* Comm. Pure Appl. Math. 39 (1986), 51-68

*IMECC-UNICAMP, SP, Brasil, cbanquet@ime.unicamp.br
†IMECC-UNICAMP, SP, Brasil, scialom@ime.unicamp.br
‡IME-USP, SP, Brasil, angulo@ime.usp.br

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N<u>o</u> 2 November 2008

On the viscous Burgers equation *

J. Límaco [1], H. R. Clark [1] & L. A. Medeiros [2]

Abstract

We investigate the existence and uniqueness of global solutions and a rate stability of the energy for a Cauchy problem to viscous Burgers equation in unbounded domain $\mathbb{R} \times (0, \infty)$. Some related aspects with the Cauchy problem cited are presented in order to employ the approximations of Faedo-Galerkin in all real line. This has been possible thanks to introduction of weight Lebesgue spaces so that one can use arguments of compactness in Sobolev spaces. Precisely, one consider the real valued function $u = u(x,t)$ defined for all $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T)$ satisfying the Cauchy problem:

$$u_t + uu_x - u_{xx} = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R} \times (0,T), \qquad u(x,0) = u_0(x) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}. \tag{0.1}$$

The Burgers equation has a long history. We briefly sketch this history citing one of the pioneer work due to Bateman [1] as an approximation of the flux of fluids. Later, Burgers published the works [2] and [3] also as flux of fluids or turbulence. In the classic fashion the Burgers equation has been studied by several authors, mainly in the last century, and excellent papers and books can be found in the literature specialized in PDE. One can cite, for instance, Courant & Friedrichs [4], Courant & Hilbert [5], Hopf [6], Lax [9] and Stoker [10].

The existence of global solutions for the Cauchy problem (0.1) will be obtained employing the Faedo-Galerkin and Compactness methods. In order to apply the Compactness method we employ a suitable theory on weight Sobolev spaces given by: the functional spaces $\mathcal{L}^2$ and $\mathcal{H}^m$ with suitable weight $K(y) = e^{y^2/4} = \exp\{y^2/4\}$, $y \in \mathbb{R}$ is defined by

$$\mathcal{L}^2(K) = \Big\{\phi \in L^2(\mathbb{R});\ \int_{\mathbb{R}} |\phi(y)|^2_{\mathbb{R}} K(y)dy < \infty\Big\} \quad \text{and} \quad \mathcal{H}^m(K) = \Big\{\phi \in H^m(\mathbb{R});\ D^i\phi \in \mathcal{L}^2(K)\Big\},$$

with $i = 1, 2, \ldots, m$, $m \in \mathbb{N}$. respectively. The inner product of $\mathcal{L}^2(K)$ and $\mathcal{H}^m(K)$ are defined by

$$(\phi, \psi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(y)\psi(y)K(y)dy \quad \text{and} \quad ((\phi,\psi)) = \sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}} D^i\phi(y)D^i\psi(y)K(y)dy \quad \text{respectively.}$$

Some properties of the spaces $\mathcal{L}^2(K)$ and $\mathcal{H}^m(K)$ such as the compactness of the inclusion $\mathcal{H}^m(K) \hookrightarrow \mathcal{L}^2(K)$ and Poincaré inequality has been proven in Escobedo-Kavian [7].

The methodology used to prove the existence of solutions for the Cauchy problem (0.1) consists in transforming it in another equivalent one proposed in the suitable functional spaces by using a change of variables defined by

$$z(y,s) = (t+1)^{1/2}u(x,t) \ \text{where} \ y = \frac{x}{(t+1)^{1/2}} \ \text{and} \ s = \ln(t+1). \tag{0.2}$$

The changing of variable (0.2) defines a diffeomorphism $\sigma\colon \mathbb{R}_x \times (0,T) \to \mathbb{R}_y \times (0,S)$ with $\sigma(x,t) = (y,t)$ and $S = \ln(T+1)$. From (0.2) the Cauchy problem (0.1) is equivalent by σ to

$$z_s - \frac{y}{2}z_y - z_{yy} - \frac{z}{2} + zz_y = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R} \times (0,S), \qquad z(y,0) = z_0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}. \tag{0.3}$$

---

* *Mathematics Subject Classifications:* 35B40, 35K15, 35K55, 35R35.
Key words: Unbounded domains, global solvability, uniqueness, asymptotic behavior of the energy.
[1] Universidade Federal Fluminense, IM, RJ, Brasil, jlimaco@vm.uff.br, hclark@vm.uff.br
[2] Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM, RJ, Brasil, lmedeiros@abc.org.br

Definition 0.1. *A global weak solution for the Cauchy problem (0.1) is a real valued function* $u = u(x,t)$ *defined in* $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ *such that* $u \in L^2_{loc}(0,\infty; H^1(\mathbb{R}))$ *and* $u_t \in L^2_{loc}\left(0,\infty; [H^1(\mathbb{R})]'\right)$, *the function* u *satisfies the identity*

$$-\int_0^T \int_{\mathbb{R}} [uv]\varphi_t dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} [uu_x v]\varphi dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} [u_x v_x]\varphi dxdt = 0,$$

for all $v \in H^1(\mathbb{R})$ *and for all* $\varphi \in D(0,T)$. *Moreover,* u *satisfies the initial condition* $u(x,0) = u_0(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

The existence of solution of (0.1) in the precedent sense is guaranteed by

Theorem 0.1. *Suppose* $u_0 \in \mathcal{L}^2(K)$, *then there exists a unique global solution* u *of (0.1) in the sense of Definition 0.1. Moreover, energy* $E(t) = \frac{1}{2}|u(t)|^2$ *associated with this solution satisfies* $E(t) \leq E(0)(t+1)^{-5/4}$.

As the two Cauchy problems (0.1) and (1.3) are equivalents then the Definition 0.1 and Theorem 0.1 are also equivalents to Definition 0.2 and Theorem 0.2 to be established as follows.

Definition 0.2. *A global weak solution for the Cauchy problem (1.3) is a real valued function* $z = z(y,s)$ *defined in* $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ *such that* $z \in L^2_{loc}(0,\infty; \mathcal{H}^1(K))$ *and* $z_s \in L^2_{loc}\left(0,\infty; [\mathcal{H}^1(K)]'\right)$, *the function* z *satisfies the identity*

$$-\int_0^S \int_{\mathbb{R}} [zv]\varphi_s K dyds + \int_0^S \int_{\mathbb{R}} [zz_y v]\varphi K dyds + \int_0^S \int_{\mathbb{R}} [z_y v_y]\varphi K dyds - \frac{1}{2}\int_0^S \int_{\mathbb{R}} [zv]\varphi K dyds = 0,$$

for all $v \in \mathcal{H}^1(K)$ *and for all* $\varphi \in D(0,S)$. *Moreover,* z *satisfies the initial condition* $z(y,0) = z_0(y)$ *for all* $y \in \mathbb{R}$.

Theorem 0.2. *Suppose* $z_0 \in \mathcal{L}^2(K) \cap \{\omega_1\}^{\perp}$, *then there exists a unique solution* z *of (1.3) in the sense of Definition 0.2, provided* $|z_0| < \frac{1}{4\sqrt{3}C_1}$ *holds, where* C_1 *is a suitable positive real constant. Moreover, the energy* $E(s) = \frac{1}{2}|z(s)|^2$ *satisfies* $E(s) \leq E(0)\exp\left[-s/4\right]$.

Remark 0.1. *Suppose* $z_0 \in \mathcal{H}^1(K) \cap \{\omega_1\}^{\perp}$ *then we are able to show that there exists a unique global strong solution for the problem (0.1)* ■

References

[1] Bateman, H., *Some recent researches on the motion of fluis*, Mon. Water Rev., 43 (1915), pp. 163-170.

[2] Burgers, J. M., *Application of a model system to illustrate some points of the statistical theory of free turbulence*, Proc. Acad. Sci. Amsterdam, 43 (1940), pp. 2-12.

[3] Burgers, J. M., *A mathematical model illustrating the theory of turbulence)*, Adv. App. Mech., Ed. R. V. Mises and T. V. Karman, 1 (1948), pp. 171-199.

[4] Courant, R. & Friedrichs, K. O., *Supersonic flow and shock waves* Interscience, New York, 1948.

[5] Courant, R. & Hilbert, D., *Methods of mathematical physics*, vol. II, Interscience, New York, 1962.

[6] Hopf, E., *The partial differential equation* $u_t + uu_x = \epsilon u_{xx}$, Comm. Pure Appl. Math., 3 (1950), pp. 201-230.

[7] Escobedo, M. & Kavian, O., *Variational problems related to self-similar solutions of the heat equation*, Nonlinear Analysis, TMA, Vol. 11, No. 10 (1987), pp. 1103-1133.

[8] Kurtz, J. C., *Weighted Sobolev spaces with applications to singular nonlinear boundary value problems*, J. Diff. Equations, 49, (1983), pp. 105-123.

[9] Lax, P., *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*, SIAM - Regional conference series in applied mathematics, No. 11, pp. 1-47, (1972).

[10] Stoker, J. J., *Water waves,* Interscience, New York, 1957.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

Orbital stability of periodic travelling wave solutions of the classical Boussinesq equation

L. K. Arruda *

This work studies the orbital stability of periodic travelling wave solutions of the Hamiltonian system

$$\begin{cases} u_t = v_x \\ v_t = (u - u_{xx} - \frac{u^2}{2})_x, \end{cases} \tag{0.1}$$

which is the first-order system associated with the classical Boussinesq equation

$$u_{tt} - u_{xx} + (\frac{u^2}{2} + u_{xx})_{xx} = 0. \tag{0.2}$$

Periodic travelling wave solutions with a fixed fundamental period L will be constructed by using Jacobi's elliptic functions. It will be shown that these solutions, called *cnoidal waves*, are nonlinearly stable in the energy space by periodic disturbances with period L. More precisely, our main result is the following:

Theorem 0.1. *Let $c \in (-1,1)$ and $L > 2\pi$. Then the orbit $\mathcal{O}_{\overrightarrow{\phi}_c}$ is $H^1_{per}([0,L]) \times L^2_{per}([0,L])$ - stable with regard to the flow of the Boussinesq system (0.1), provided $c^2 > \frac{1}{3}$ and $1 - c^2 > \frac{4\pi^2}{L^2}$.*

Here, the set $\mathcal{O}_{\overrightarrow{\phi}_c} := \{\overrightarrow{\phi}_c(\cdot + s);\ \ s \in \mathbb{R}\}$ is the orbit generated by the L-periodic travelling wave solution $\overrightarrow{\phi}_c$.

The outline of the proof is as follows. First, we prove local existence of smooth solutions for the initial value problem (0.2) with initial conditions

$$u(x,0) = u_0(x) \ \text{ and } \ u_t(x,0) = u_1(x).$$

Next, we show the existence of a smooth curve $c \mapsto \overrightarrow{\phi}_c = (\phi_c, \psi_c)$ of cnoidal wave solutions to system (0.1), with a fixed period L. Then, nonlinear stability of these solutions is established in $H^1_{per}([0,L]) \times L^2_{per}([0,L])$ for a certain range of their speeds of propagation and periods, by using the Lyapunov method. Our proof follows ideas by T. B. Benjamin [1], J. L. Bona [2] and M. I. Weinstein [3].

Finally, local existence coupled with the stability result is shown to imply the conditions that lead to global existence, at least for initial data close to the stable cnoidal wave.

$$\cdots$$
$$\vdots$$

References

[1] T. B. Benjamin, *The stability of solitary waves*, Proc. Roy. Soc. London, **A338** (1972), 153-183.

[2] J. L. Bona, *On the stability of solitary waves*, Proc. Roy. Soc. London , **A344** (1975), 363-374.

[3] M. I. Weinstein, *Liapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986), 51-68.

*Universidade Federal de São Carlos , CCTS-Campus de Sorocaba, CEP: 18052-780, Sorocaba-SP, Brasil, lynnyngs@ufscar.br

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

Pattern Formation from reaction in boundary with boundary oscillations

J. M. ARRIETA [*] & S. M. BRUSCHI [†]

We study how oscillations in the boundary of a domain cause the pattern formation for the following evolution reaction-diffusion equation

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 \text{ in } \Omega_\epsilon \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + g(x,u) = 0 \text{ in } \partial\Omega_\epsilon = \Gamma_\epsilon. \end{cases} \tag{0.1}$$

when $\epsilon \to 0$. We study this problem in a family of two dimensional domains Ω_ϵ which is bounded and with a C^1 and connected boundary Γ_ϵ given by

$$\psi_\epsilon : [-1,1] \to I\!R^2,\ \psi_\epsilon(t) = (\rho_\epsilon(t)\cos(\pi t), \rho_\epsilon(t)\sin(\pi t)), \psi_\epsilon(-1) = \psi_\epsilon(1),$$

where $\rho_\epsilon \geq \rho_0$, $\rho_\epsilon \to \rho_0$ in $C^1[-1,1]$ and $|\rho_\epsilon'| = O(\epsilon^{-1})$ in $\epsilon = 0$. The nonlinearity is given by

$$g(x,u) = u(1-u)(c(t)-u), x \in \Gamma_\epsilon, t = \psi_\epsilon^{-1}(x), u \in I\!R,$$

where $c \in C^1[-1,1]$ satisfies $0 < c(x) < 1$ for all $s \in (-1,1)$, $c'(s) \neq 0$ for all $s \in (-1,1)$ with $c(s) = \frac{1}{2}$. Notice that this condition implies that there exist only a finite number and even number of points x_i, $i = 1, \ldots, 2N$ satisfying $c(x_i) = \frac{1}{2}$.

Define the characteristic function in the boundary Γ given by

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Gamma \text{ with } c(t) < \frac{1}{2} \\ 0, & x \in \Gamma \text{ with } c(t) > \frac{1}{2} \end{cases}$$

and the characteristic function in the boundary Γ_ϵ given by

$$\chi_\epsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Gamma_\epsilon \text{ with } c(t) < \frac{1}{2} \\ 0, & x \in \Gamma_\epsilon \text{ with } c(t) > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Let u_0 be the harmonic extension to Ω of χ, that is

$$\begin{cases} \Delta u_0 = 0, \text{ in } \Omega \\ u_0(x) = \chi(x),\ x \in \Gamma \end{cases}$$

Note that $u_0 \notin H^1(\Omega)$ because of $\chi \notin H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

We work with an alternative energy functional $\tilde{J}_\epsilon : H^1(\Omega_\epsilon) \to I\!R$ defined by

$$\tilde{J}_\epsilon(u) = \frac{1}{|\Gamma_\epsilon|}\left(\int_{\Omega_\epsilon} |\nabla u|^2 + \int_{\Gamma_\epsilon} G(x,u)dx\right),$$

where $G(x,u) = \int_0^u g(x,s)ds$. We observe that $|\Gamma_\epsilon| = O(\epsilon^{-1})$ in $\epsilon = 0$.

The following proposition is similar to the proposition 2.1 in [3].

Proposition 0.1. *For fixed $\epsilon > 0$, if u_ϵ is an absolute minimum of $\tilde{J}_\epsilon$ in $H^1(\Omega_\epsilon)$ then u_ϵ is a stable equilibrium solution of (0.1).*

[*]Dept Matemtica Aplicada - Universidade Complutense, Madrid, Spain, jose.arrieta@mat.ucm.es
[†]Departamento de Matemtica, UNESP Rio Claro, SP Brasil, sbruschi@rc.unesp.br

We denote by $\Gamma^\delta = \Gamma \setminus \cup_{i=1}^{2N} B(x_i, \delta)$ and $\Omega^\delta = \Omega \setminus \cup_{i=1}^{2N} B(x_i, \delta)$.

Define $m_0 = \int_\Gamma G(x, \chi) d\sigma$ and $m_\epsilon = \frac{1}{|\Gamma_\epsilon|} \int_{\Gamma_\epsilon} G(x, \chi_\epsilon) d\sigma_\epsilon$. We have,

Lemma 0.1. *i) For any $u_\epsilon \in H^1(\Omega_\epsilon)$ we have $\tilde{J}_\epsilon(u_\epsilon) > m_\epsilon$,*
ii) There exists a function $\chi^\epsilon \in C^1(\Gamma)$ with $0 \leq \chi^\epsilon \leq 1$ such that $\chi^\epsilon = \chi$ in Γ^ϵ and the harmonic extension to Ω to χ^ϵ, given by the function v_ϵ, and a function $w_\epsilon \in H^1(\Omega_\epsilon)$ such that $w_{\epsilon|\Omega} = v_\epsilon$ and satisfies $\tilde{J}_\epsilon(w_\epsilon) \leq m_\epsilon + C_0 |\Gamma_\epsilon|^{-1} |\log(\epsilon)|$, for some constant C_0 independent of ϵ.

Corollary 0.1. *The set $K_\epsilon = \{u \in H^1(\Omega_\epsilon); \tilde{J}_\epsilon(w_\epsilon) \leq \frac{1}{|\Gamma_\epsilon|}(\tilde{K}|\log \epsilon| + \int_{\Gamma_\epsilon} G(x, \chi_\epsilon) d\sigma_\epsilon)\}$ is open, nonempty and positively invariant. Therefore, $u_\epsilon \in K_\epsilon$.*

The following proposition is the proposition 2.4 in [3].

Proposition 0.2. *The function u_0 satisfies the following*
i) $0 \leq u_0 \leq 1$,
ii) $u_0 \in H^s(\Omega)$ for any $s < 1$,
iii)$u_0 \in C^\infty(\Omega)$,
iv)$u_0 \in C^0(\bar{\Omega} \setminus \{x_1, \ldots, x_{2N}\})$.

In the following theorem, we get the convergence of the equilibrium points u_ϵ to u_0,

Theorem 0.1. *Let u_ϵ the equilibrium point of (0.1), that is, the minimizer of $\tilde{J}_\epsilon$. Then,*

$$\|u_\epsilon - \chi\|_{L^2(\Gamma)} + \|u_\epsilon - u_0\|_{L^2(\Omega)} \to 0,$$

when $\epsilon \to 0$.

References

[1] ARRIETA, J.; CARVALHO, A. N. AND A. RODRGUEZ-BERNAL, A. - *Attractors of parabolic problems with nonlinear boundary conditions. Uniform Bounds*, Comm. in Partial Diff. Equations, 25 (1&2)(2000), pp. 1-37.

[2] ARRIETA, J.; CONSUL, N. AND A. RODRGUEZ-BERNAL, *Pattern Formation from Boundary Reaction*, Fields Institute Communications, 31,(2002) pp. 13-18

[3] CASADO-DÍAZ, J.; FERNÁNDEZ-CARA, E. AND SIMON, J., *Why viscous fluids adhere to rugose walls: a mathematical explanation*, Journal of Differential Equations 189, no. 2,(2003), pp 526–537.

[4] CHECHKIN, G.; FRIEDMAN, A. AND PIATNITSKI, A. L. *The boundary-value problem in domains with very rapidly oscillating boundary*, J. of Math. Anal. Appl. 231, (1999) pp. 213-234.

[5] DANCER, E. N. AND DANERS, D, *Domain Perturbation of Elliptic equations subject to Robin Boundary Conditions*, Journal of Differential Equations 138, (1997) pp 86-132.

[6] LADYZENSKAYA, O. AND URALTSEVA, N. , *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Academic Press (1968).

[7] MAZ'JA, V. G., *Sobolev Spaces*, Springer-Verlag, Berlin (1985)

[8] NEUSS, N.; NEUSS-RADU, M. AND MIKELIC, A., *Effective laws for the Poisson equation on domains with curved osicllating boundaries*, Preprint 2004-36, SFB 359, Heidelberg.

[9] PASTUKHOVA, S. E., *The oscillating boundary phenomenon in the homogenization of a climatization problem*, Differential Equations 37,(2001) pp 1276-1283

[10] SANCHEZ-PALENCIA, E., *Non homogeneous media and vibration theory*, Volume 127, Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, Berlin (1980)

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{0}}$ 2 November 2008

Periodic Solution for a Nonlinear Hyperbolic Equation on Manifolds

G. O. ANTUNES [*] H.R. CRIPPA [†] & M. D. G. DA SILVA [‡]

Let Ω be a bounded open set of $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ with smooth boundary Γ. Let ν be the outward normal unit vector to Γ and $T > 0$ a real number. We consider the cylinder $Q = \Omega \times (0, T)$ with lateral boundary $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$.

The objective of the present article is to investigate existence and uniqueness of solution for the following nonlinear periodic problem:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \left| \dfrac{\partial u}{\partial t} \right|^{\rho} \dfrac{\partial u}{\partial t} = f \text{ on } \Sigma \\ u(x,0) = u(x,T) \text{ on } \Gamma \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,T) \text{ on } \Gamma. \end{array} \right. \tag{1}$$

It is important to call attention to the main point which consists in adding to (1) an elliptic equation in Ω to reduce the problem to a canonical model of Mathematical Physics, but in this case on a manifold which is the lateral boundary Σ of the cylinder Q.

In fact, let us consider the following problem:

$$\left| \begin{array}{l} \Delta w = 0 \text{ in } Q \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \dfrac{\partial w}{\partial \nu} + \left| \dfrac{\partial w}{\partial t} \right|^{\rho} \dfrac{\partial w}{\partial t} = f \text{ on } \Sigma \\ w(x,0) = w(x,T) \text{ on } \Gamma \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}(x,0) = \dfrac{\partial w}{\partial t}(x,T) \text{ on } \Gamma. \end{array} \right. \tag{2}$$

From elliptic theory, we know that for each $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$, the unique weak solution ϕ of the boundary value problem

$$\left| \begin{array}{l} \Delta \phi = 0 \text{ in } \Omega \\ \phi = \varphi \text{ on } \Gamma \end{array} \right. \tag{3}$$

belongs to $H^1(\Omega, \Delta) = \left\{ u \in H^1(\Omega) ; \Delta u \in L^2(\Omega) \right\}$. By the trace theorem, it follows that $\dfrac{\partial \phi}{\partial \nu} \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

We have by (3) and Green Identity that

$$0 = (-\Delta \phi, \psi) = (\nabla \phi, \nabla \psi) - \langle \gamma_1 \phi, \gamma_0 \psi \rangle ,$$

where γ_0 and γ_1 are the traces of order zero and one, respectively, and $\langle \cdot, \cdot \rangle$ represents the duality pairing between $H^{-1/2}(\Gamma)$ and $H^{1/2}(\Gamma)$.

For all ϕ and $\psi \in H^1(\Omega, \Delta)$, we define $a(\phi, \psi) = \langle \gamma_1 \phi, \gamma_0 \psi \rangle$.

We consider the scheme

$$\begin{tikzcd} \varphi \in H^{1/2}(\Gamma) \arrow[rr, "\gamma_0^{-1}"] \arrow[dr, "\mathcal{A}"'] & & \phi \in H^1(\Omega, \Delta) \arrow[dl, "\gamma_1"] \\ & \dfrac{\partial \phi}{\partial \nu} \in H^{-1/2}(\Gamma) & \end{tikzcd}$$

Thus

$$\mathcal{A} = \gamma_1 \circ \gamma_0^{-1} : H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma) , \; \mathcal{A}\varphi = \frac{\partial \phi}{\partial \nu}.$$

[*]Universidade do Estado do Rio de Janeiro, IME, RJ, Brasil, gladsonantunes@hotmail.com
[†]Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM, RJ, Brasil, crippa@im.ufrj.br
[‡]Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM, RJ, Brasil, darci@im.ufrj.br

We formulate now the problem on Σ. For this, we define

$$w\left(t\right)|_{\Gamma}=u\left(t\right) \qquad \text{and} \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\left(t\right)\right|_{\Gamma}=\mathcal{A}u\left(t\right).$$

In this way, the problem (1) can be rewritten as

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\mathcal{A}u+\left|\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|^{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial t}=f \text{ on } \Sigma \\ u\left(x,0\right)=u\left(x,T\right) \text{ on } \Gamma \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\left(x,0\right)=\dfrac{\partial u}{\partial t}\left(x,T\right) \text{ on } \Gamma. \end{array}\right.$$

Now we consider, cf. Lions [2] and Prodi [3], $u=U+U_0$ where is U_0 independent of t and $\int_0^T U\left(s\right)ds=0$. Then U satisfies

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\mathcal{A}U+\left|\dfrac{\partial U}{\partial t}\right|^{\rho}\dfrac{\partial U}{\partial t}-f=\mathcal{A}U_0 \text{ on } \Sigma \\ \displaystyle\int_0^T U\left(s\right)ds=0 \\ U\left(x,0\right)=U\left(x,T\right), \quad U'\left(x,0\right)=U'\left(x,T\right) \text{ on } \Gamma. \end{array}\right. \tag{4}$$

Note that if U is the solution of

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\mathcal{A}U+\left|\dfrac{\partial U}{\partial t}\right|^{\rho}\dfrac{\partial U}{\partial t}-f\right)=0 \text{ on } \Sigma \\ \displaystyle\int_0^T U\left(s\right)ds=0 \\ U\left(x,0\right)=U\left(x,T\right), \quad U'\left(x,0\right)=U'\left(x,T\right) \text{ on } \Gamma \end{array}\right. \tag{5}$$

and U_0 is the solution of $\mathcal{A}U_0=g_0$ in Γ, where $g_0=\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\mathcal{A}U+\left|\dfrac{\partial U}{\partial t}\right|^{\rho}\dfrac{\partial U}{\partial t}-f$ does not depend on t, then U will be the solution of (4) and $u=U+U_0$ will be the periodic solution of (1) which we are looking for.

We consider the following functional space

$$\mathcal{W}=\left\{v\in L^2\left(0,T;H^{1/2}\left(\Gamma\right)\right),\ v'\in L^2\left(0,T;H^{1/2}\left(\Gamma\right)\right)\cap L^{\rho+2}\left(0,T;L^{\rho+2}\left(\Gamma\right)\right),\ v''\in L^2\left(0,T;L^2\left(\Gamma\right)\right),\right.$$
$$\left.\int_0^T v\left(s\right)ds=0,\ v\left(0\right)=v\left(T\right),\ v'\left(0\right)=v'\left(T\right)\right\}.$$

The main result is contained in the following Theorem:

Theorem 1. *Let Ω be a bounded domain of $\mathbb{R}^n$ with regular boundary Γ and $f\in L^2\left(0,T;H^{1/2}\left(\Gamma\right)\right)$ such that $f'\in L^2\left(0,T;L^2\left(\Gamma\right)\right)$. Then, there exist only one solution $u\in\mathcal{W}$ of (1), with $u=U+U_0$, where U is the unique solution of (5) and U_0 is the unique solution of $\mathcal{A}U_0=g_0$ in Γ.*

Acknowledgements. We thank Professor Luis Adauto Medeiros for having drawn our attention to this question and for his assistence.

References

[1] Antunes, G. O., Araruna, F. D., Medeiros, L. A., *Semilinear Wave Equation on Manifolds*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, Vol. XI, n^0 1, pp. 7-18, 2002.

[2] Lions, J. L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéares.*, Dunod-Gauthier Villars, Paris, First edition, 1969.

[3] Prodi, G., *Soluzioni periodiche del' equazioni della onde con terme dissipative nonlineare*, Rend. Sem. Mat. Padova (35), 1966.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{0}}$ 2 Novembro 2008

PERIODIC SOLUTIONS OF PLANAR DELAY DIFFERENTIAL EQUATION WITH SELF-SUPPORTING CONDITION

M.C. GADOTTI* & P. Z. TÁBOAS †

Consider the equation

$$\dot{x}(t) = F(x(t-r)), \qquad r > 0, \tag{0.1}$$

with the function $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ continuous and at least C^2 near the origin. If $x \in \mathbb{R}^2$ and F is any function with range in $\mathbb{R}^2$, we denote $x = (x_1, x_2)$ and $F = (F_1, F_2)$. Given $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a, c > 0$, $-\infty < b < c$, define

$$\ell_{a,c} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = a,\ x_2 \geq c\}$$

and let $\gamma : [c, \infty) \to [b, c]$ be a continuous function, with $\gamma(c) = c$. Let us impose the following self-supporting condition:

$$x(t-) \in \ell_{a,c} \quad \Rightarrow \quad x(t) = x(t+) = (a, \gamma(x_2(t-))) \tag{0.2}$$

The main feature of the self-supporting condition (0.2) is that the moments of impulse are not given; the problem differential equation plus self-supporting condition is autonomous. The term *self-supporting* was introduced by Myshkis, see [7] and [8], motivated by the fact that in nonconservative systems this kind of impulse can be imposed in order to regulate the level of energy of a motion.

We are concerned with the problem (0.1)-(0.2) where F satisfies the following feedback condition:

$$(\mathbf{H1}) \qquad x_2F_1(x) > 0, \quad if \quad x_2 \neq 0, \qquad x_1F_2(x) < 0, \quad if \quad x_1 \neq 0, \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

Condition (H1) for a system similar to (0.1) was assumed for the first time in [10]. Its role is analogous to the role played by the well-known *negative feedback condition* for scalar equations.

Due to discontinuities of the solutions of problem (0.1)-(0.2), a natural phase space for it is $G = G([-r, 0], \mathbb{R}^2)$, the space of ruled functions $\phi : [-r, 0] \to \mathbb{R}^2$ with the sup norm, see [4]. However, most of our arguments can be restricted to its subspace $C = C([-r, 0], \mathbb{R}^2)$ of continuous functions.

Definição 0.1. *$D \subset G$ is the set of all $\phi \in G$ such that:*

(i) ϕ is right continuous in $[-r, 0)$;

(ii) ϕ has at most one discontinuity $t_0 \in [-r, 0]$ and $\phi(t_0-) \in \ell_{a,c}$, $\phi(t_0) = (a, \gamma(\phi_2(t_0-)))$.

Definição 0.2. *Let $\phi \in D$ be given and consider the initial condition:*

$$x_0 = \phi. \tag{0.3}$$

We consider

(H2) There exists a number $M > 0$ such that $|F(x)| \leq M$, for all $x \in \mathbb{R}^2$.

*IGCE-UNESP, Rio Claro- SP, Brasil, martacg@rc.unesp.br. Supported by FAPESP, proc. 97/14611-7
†ICMC-USP, São Carlos-SP, Brasil, pztaboas@icmc.usp.br

(H3) Given a number $L > 0$, there exist N, $\eta > 0$ such that

$$\begin{aligned} |x_2| \le L,\ |x_1| \ge N \quad &\Rightarrow \quad |F_2(x)| \ge \eta, \\ |x_1| \le L,\ |x_2| \ge N \quad &\Rightarrow \quad |F_1(x)| \ge \eta. \end{aligned}$$

(H4) The numbers $\frac{\partial F_1}{\partial x_2}(0) = \delta_1$ and $\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(0) = \delta_2$ satisfy $-\delta_1\delta_2 > 0$.

(H5) $\quad a \le x_1 < Mr,\ -Mr < x_2 \le 0 \quad \Rightarrow \quad F_1(x) \ge -a/r.$

For any real function ψ, the notations $\psi \in\downarrow$ or $\psi \in\uparrow$ mean that ψ is non increasing or non decreasing, respectively. For $M > 0$ as in (H2), we define the following closed convex subset of $C = C([-r, 0], \mathbb{R}^2)$:

$$K = \{\phi \in C \mid \phi_1(-r) = 0,\ \phi_2(-r) \le 0; \phi_j \ is\ M - Lipschitzian,\ \phi_j \in\downarrow, j = 1, 2\} \tag{0.4}$$

Teorema 0.1. *Suppose that (H1)–(H5) are satisfied. Then there exists a number $\xi > 0$ such that the problem (0.1)-(0.2) has a nontrivial periodic solution $x(\cdot;\phi)$, $\phi \in K_\xi$, with period greater than $3r$.*

We prove Theorem 0.1 by showing that a return mapping $A : K_\xi \to K_\xi$ has nontrivial fixed points. Considering theses hypotheses and choose a set K in $C[-r, 0]$ we can to establish that there exists a nontrivial periodic solution with period greater than $3r$ of (0.1)-(0.2), with initial condition in K. We prove that zero is an ejective point of A, see [3], for this we can restrict to a small neighborhood of 0 and neglect the self-supporting condition, because ejectivity is a local property and the impulses occur far from the origin.

Referências

[1] BAPTISTINI, M.Z. AND TÁBOAS, P.Z. - *On the existence and global bifurcation of periodic solutions to planar differential delay equations*, Journal of Differential Equations, Vol. 127, 391-425 , 1996.

[2] GADOTTI, M.C. AND TÁBOAS, P. Z. - *Oscillations of planar impulsive delay differential equations*, Funkcialaj Ekvacioj, 48, 35-47, 2005.

[3] HALE, J.K. AND LUNEL, S.M.V. - *Introduction to Functional Differential Equations*, New York, Springer, 1993.

[4] HONIG, C.S. - *Volterra stieltjes-integral equations*, North-Holland Publishing Company, 1975.

[5] LADEIRA, L.A.C., NICOLA, S.H.J. AND TÁBOAS, P.Z.- *Periodic solutions of an impulsive differential system with delay: an L^p approach*, Fields Inst. Comm., 31, 201-215, 2002.

[6] LAKSHMIKANTHAM, V., BAINOV, B.B. AND SIMEONOV, P.S - *Theory of impulsive differential equations*, World Scientific Publishing Company, Singapore, 1989.

[7] MYSHKIS, A.D. - *Autonomous differential equations with impulsive self-support and infinite delay*, Functional Differential Equations, Vol. 3, n 1-2, 145-154, 1995.

[8] MYSHKIS, A.D. - *Auto-oscillations in continuos systems with impulsive self-support*, in Resenhas- IME-USP, vol.3, n 1, 93-106, 1997.

[9] QUIROGA, M.E. AND TÁBOAS, P.Z. - *On retarded differential equations with impulses*, *Computational and Applied Mathematics* **20** (2001) 257–270.

[10] TÁBOAS, P.Z. - *Periodic solutions of a planar delay equations*, Proc. Royal Society Edinburgh, Vol. 116A, 85-101, 1990.

[11] GADOTTI, M.C. AND TÁBOAS, P.Z. - *Periodic and backset solutions of differential delay systems with self-supporting condition*, Journal of Differential Equations, Vol. 229, 138-153, 2006.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{0}}$ 2 November 2008

PERMANENCE OF STABILITY FOR A CLASS OF SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TWO DELAYS

S.M.T. AKI * & S.M.S. GODOY †

In this paper, our objective is to begin the study of the changes of the stability for a system of linear retarded differential difference equations with two delays.

Let us consider the n-dimensional system of linear retarded differential difference equations with two delays:

$$\dot{x}(t) = \alpha\, Ax(t) + \beta\, Bx(t-\tau) + \gamma\, Cx(t-\mu) \tag{0.1}$$

($\dot{} = \frac{d}{dt}$), where we assume that τ, μ are non-negative real numbers, the parameters α, β, γ are real numbers and A, B, C are real $n \times n$ matrices. In this work, we study a particular class of such system, it is assumed that the matrices A, B, C are simultaneously triangular. The general case will be the subject of our next study.
We present some results that give us sufficient conditions about these parameters under which no stability switch occurs. As a consequence of these theorems, we can say that the stability of the trivial solution for System (0.1) is determined only by α, when we have this parameter sufficiently large. We also introduce a study for the case $|\alpha|$ small.

We can use linear systems of the form (0.1) to study the stability of equilibria for a n-dimensional system of autonomous retarded functional differential equations:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\tau), x(t-\mu)), \tag{0.2}$$

where $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, and are such that solutions to initial value problems exist and are continuous.

The stability for two delay equation (0.2) also has been investigated by many authors. See, for instance, [1], [2] [5].

Now, we are going to study the stability for the solution $x = 0$ of Equation (0.1) using the works by Cooke and van den Driessche [4] and Boese [3]. Note that the characteristic equation associated to (0.1) is:

$$p(s) = \det(sI - \alpha A - \beta B e^{-\tau s} - \gamma C e^{-\mu s}) = 0.$$

And then,

$$p(s) = \prod_{i=1}^{n} (s - \alpha\alpha_i - \beta e^{-\tau s}\beta_i - \gamma e^{-\mu s}\gamma_i) = 0.$$

Thus, if we are interested on the study of the local stability for the trivial solution(i.e. the zero solution) of (0.1), we have to analyse the existence of $s \in \mathcal{C}$ so that

$$s - \alpha - \beta e^{-\tau s} - \gamma e^{-\mu s} = 0, \tag{0.3}$$

with α, β, $\gamma \in \mathcal{C}$. Observe that the last equation is the characteristic function of a first-order delay differential equation which has the form:

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) + \beta x(t-\tau) + \gamma x(t-\mu), \tag{0.4}$$

therefore, we can relate the stability of the trivial solution to our system with the stability of this solution for such equations. Here, we refer to the stability of a differential equation as the stability of its trivial solution.

*ICMC-USP , SP, Brasil, smtanaka@icmc.usp.com.br
†ICMC-USP, SP, Brasil, e-mail smsgodoy@icmc.usp.br

If we define the functions $P(s) = s - \alpha - \gamma e^{-\mu s}$, $Q(s) = -\beta$, the Characteristic Equation (0.3) takes the form:

$$P(s) + Q(s)\, e^{-\tau s} = 0. \tag{0.5}$$

To study Equation (0.5), we use the following result that can be found in [4] and [3]:

Theorem 0.1. *Consider the equation $P(\lambda) + Q(\lambda)\, e^{-\lambda\tau} = 0$, $P(\lambda)$ and $Q(\lambda)$ are analytic functions in $\Re(\lambda) > 0$, and satisfy the following conditions:*
(i) $P(\lambda)$ and $Q(\lambda)$ have no common imaginary root;
(ii) $\overline{P(-iy)} = P(iy)$, $\overline{Q(-iy)} = Q(iy)$ for real y;
(iii) $P(0) + Q(0) \neq 0$;
(iv) $\limsup\{|Q(\lambda)|/|P(\lambda)| : |\lambda| \to \infty, \Re(\lambda) \geq 0\} < 1$;
(v) $F(y) = |P(iy)|^2 - |Q(iy)|^2$ for real y has at most a finite number of real zeros.
Then the following statements are true:
(a) If $F(y) = 0$ has no positive roots, then no stability switch may occur.
(b) If $F(y) = 0$ has at least one positive root and each of them is simple, then as τ increases, a finite number of stability switches may occur and eventually the considered equation becomes unstable.

In this work, we only analyse the case that α, β, γ are real constants. The other case, when α, β, γ are complex numbers, will be done in a forthcoming paper.

Proposition 0.1. *The function $F(y)$ defined by $F(y) = \alpha^2 + \gamma^2 + y^2 - \beta^2 + 2\alpha\gamma\cos\mu y + 2y\gamma\sin\mu y$ has only a finite number of real roots.*

Theorem 0.2. *Let us suppose that the parameters α, β, γ satisfy the inequality: $|\alpha| \geq |\beta| + |\gamma|$. Thus, in this case, there is no stability switch for equation (0.4).*

Theorem 0.3. *Consider the parameters α, β, γ satisfying $|\alpha| < |\beta| + |\gamma|$ and one of the following conditions:*
i) $\gamma > 0$, $|\beta| - |\gamma| > 0$, $|\beta| - |\gamma| < \alpha < |\beta| + |\gamma|$.
ii) $\gamma > 0$, $|\beta| - |\gamma| < 0$, $|\beta| - |\gamma| < \alpha < -|\beta| + |\gamma|$.
iii) $\gamma < 0$, $|\beta| - |\gamma| < 0$, $|\beta| - |\gamma| < \alpha < -|\beta| + |\gamma|$.
iv) $\gamma > 0$, $|\beta| - |\gamma| < 0$, $-|\beta| + |\gamma| \leq \alpha < |\beta| + |\gamma|$.
v) $\gamma < 0$, $|\beta| - |\gamma| > 0$, $-|\beta| - |\gamma| < \alpha < |\gamma| - |\beta|$.
vi) $\gamma < 0$, $|\beta| - |\gamma| < 0$, $-|\beta| - |\gamma| < \alpha \leq |\beta| - |\gamma|$.
vii) $\alpha.\gamma > 0$, $|\beta| - |\gamma| = 0$.

Define $b_0 \in (0, \frac{\pi}{\mu})$ such that $cos(\mu b_0) = b$, where $b = \frac{-\alpha+|\beta|}{|\gamma|}$, if $\gamma > 0$ or $b = \frac{\alpha+|\beta|}{|\gamma|}$, if $\gamma < 0$. If we have $m = \sqrt{(|\beta| + |\gamma|)^2 - \alpha^2} < b_0$, there is no stability switch for Equation (0.4).

References

[1] BELLMAN, R .; COOKE, K. L.- *Differential-Difference Equations,* Academic Press, Paris, (1963).

[2] BÉLAIR, J.; CAMPBELL, A.- *Stability and bifurcation of equilibria in a multipli-delayed differential equation,* Siam J. Appl. Math.,Vol 54, (1994), pp. 1402-1424.

[3] BOESE, F. G.-*Stability with respect to the delay: on a paper of K.L. Cooke and P. van den Driessche. Comment on: " On zeroes of some transcendental equations"* , J.Math.Anal. Appl., Vol 228, (1998), pp. 293-321.

[4] COOKE, K. L.; DRIESSCHE, V. P. - *On zeroes of some transcendental equations,* Funkcialaj Ekvacioj, Vol 29, (1986), pp. 77-90.

[5] LI, X.; RUAN, S.; WEI, J.- *Stability and bifurcation in delay differential equations with two delays,* J. Math. Anal. Appl., Vol 236, (1999), pp. 254-280.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{o}}$ 2 Novembro 2008

PERTURBAÇÕES SUBCRÍTICAS DE EQUAÇÕES ELÍPTICAS ENVOLVENDO O EXPOENTE CRÍTICO DE HARDY-SOBOLEV

R. B. ASSUNÇÃO * P. C. CARRIÃO † & O. H. MIYAGAKI ‡

Neste trabalho estendemos alguns resultados de multiplicidade de soluções para uma classe de equações elípticas quase lineares singulares envolvendo o expoente crítico de Hardy-Sobolev e também consideramos uma classe mais ampla de perturbações de ordens inferiores. Mais precisamente, estudamos o problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\big[|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}u\big] = |x|^{-bq}|u|^{q-2}u + g(x,u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{0.1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 3)$ é um domínio limitado contendo a origem e com fronteira $\partial\Omega$ diferenciável, $0 \leqslant a < (N-p)/p$, $a < b \leqslant a+1$, $d \equiv a+1-b$ e $q \equiv Np/[N-p(a+1-b)]$ é o expoente crítico de Hardy-Sobolev. O termo de perturbação $g(x,s)$ pode mudar de sinal e tem comportamento subcrítico no infinito, isto é, vale a relação

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{g(x,s)}{|x|^{-bq}|s|^{q-1}} = 0$$

uniformemente em relação a $x \in \Omega$.

Consideramos os espaços de Sobolev $\mathcal{D}_a^{1,p}(\Omega)$ definidos como o completamento do espaço $C_0^\infty(\Omega)$ em relação à norma dada por

$$\|u\| \equiv \Big[\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p \,\mathrm{d}x\Big]^{1/p}.$$

Seja S a melhor constante da imersão $\mathcal{D}_a^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L_q^b(\Omega)$, em que $L_q^b(\Omega)$ é o espaço com peso $L_q(\Omega)$ munido da norma $\|u\|_{L_q^b} = \Big[\int_\Omega |x|^{-bq}|u|^q \,\mathrm{d}x\Big]^{1/q}$. Seja λ_1 o primeiro autovalor de $-\operatorname{div}\big[|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big]$ relativo ao problema homogêneo de Dirichlet em Ω; seja ϕ_1 a correspondente autufunção positiva. É fato bem conhecido que λ_1 é simplies e isolado. Também definimos o número

$$\lambda^* \equiv \inf_{u\in E}\Big\{\frac{1}{p}\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p \,\mathrm{d}x \;:\; \int_\Omega |x|^{-(a+1)p+c}|u|^p \,\mathrm{d}x = 1\Big\}$$

em que

$$E \equiv \big\{u \in \mathcal{D}_a^{1,p}(\Omega) \;:\; \int_\Omega |x|^{-(a+1)p+c}|\phi_1|^{p-2}\phi_1 u \,\mathrm{d}x = 0\big\}.$$

Como nossa abordagem é variacional, definimos o funcional $J : \mathcal{D}_a^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$J(u) \equiv \frac{1}{p}\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p \,\mathrm{d}x - \int_\Omega G(x,u)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{q}\int_\Omega |x|^{-bq}|u|^q \,\mathrm{d}x,$$

em que

$$G(x,s) \equiv \int_0^s g(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Se a função g é contínua, então usando a conhecida desigualdade do tipo de Hardy-Sobolev devida a Caffarelli, Kohn e Nirenberg podemos garantir que $J \in C^1(\mathcal{D}_a^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ e que os pontos críticos do funcional J são soluções fracas do problema (0.1).

Para enunciar nossos resultados, apresentamos as seguintes hipóteses.

*Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Matemática, MG, Brasil, ronaldo@mat.ufmg.br
†Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Matemática, MG, Brasil, carrion@mat.ufmg.br
‡Universidade Federal de Minas Gerais, MG, Brasil, olimpio@ufv.br

(G1) A função $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory e, para todo $\varepsilon > 0$, existe $a_\varepsilon \in L^b_{q'}(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ tal que $|g(x,s)| \leqslant a_\varepsilon(x) + \varepsilon |x|^{-bq}|s|^{q-1}$ q. t. p. $x \in \mathbb{R}$ e para todo $s \in \mathbb{R}$.

As demais hipóteses são feitas sobre a primitiva $G(x,s)$.

(G2) $G(x,s) \geqslant 0$ q. t. p. $x \in \Omega$ e para todo $s \in \mathbb{R}$.

(G3) Existem $\delta > 0$, $\sigma > 0$ e $\nu \in (\lambda_1, \lambda^*)$ tais que $\dfrac{1}{p}(\lambda_1 + \sigma)|x|^{-(a+1)p+c}|s|^p \leqslant G(x,s) \leqslant \dfrac{\nu}{p}|x|^{-(a+1)p+c}|s|^p$ q. t. p. $x \in \Omega$ e para $|s| < \delta$.

(G4) $G(x,s) \geqslant \dfrac{1}{p}(\lambda_1 + \sigma)|x|^{-(a+1)p+c}|s|^p - \dfrac{1}{q}|x|^{-bq}|s|^q$ q. t. p. $x \in \Omega$ e para todo $s \neq 0$.

(G5) Existe um subconjunto aberto e não vazio $\Omega_0 \subset \Omega$ tal que $\displaystyle\lim_{s\to\infty} \frac{G(x,s)}{|x|^{-(a+1)p+c}|s|^\zeta} = +\infty$, uniformemente em relação a $x \in \Omega_0$, em que $\zeta \equiv p[(a+1)p - c - 2]/[p(a+1) - N]$.

(G6) Existem $\delta_0 > 0$ e $\nu \in (\lambda_1, \lambda^*)$ tais que $\dfrac{1}{p}\lambda_1|x|^{-(a+1)p+c}|s|^p \leqslant G(x,s) \leqslant \dfrac{\nu}{p}|x|^{-(a+1)p+c}|s|^p$ q. t. p. $x \in \Omega$ e $|s| < \delta_0$.

(G7) Existe $\sigma \in (0, 1/q)$ tal que $G(x,s) \geqslant \dfrac{\lambda_1}{p}|x|^{-(a+1)p+c}|s|^p - \Big(\dfrac{1}{q} - \sigma\Big)|x|^{-bq}|s|^q$ q. t. p. $x \in \Omega$ e $s \neq 0$.

(G8) Existe $0 \in \Omega_0 \subset \Omega$ tal que $\displaystyle\lim_{s\to\infty} \frac{G(x,s)}{|x|^{-(a+1)p+c}|s|^{\alpha_1}} = +\infty$ uniformemente em relação a $x \in \Omega_0$, em que

$$\alpha_1 \equiv \frac{Np}{N - Np - pd} + p - \frac{cp}{\mu(1-p)} \qquad \text{e} \qquad \mu = \frac{N - p(a+1)}{p-1}.$$

Observamos que quando $p = c = 2$ e $a = b = 0$ (i. e., $d = 1$), então $\alpha_1 = 8N/(N^2 - 4)$ é o expoente de Gazzola-Ruf.

Teorema 0.1 (Problema não ressonante)**.** *Para $\eta \equiv c - \mu \leqslant 0$ suponhamos que sejam válidas (G1)–(G4); para $\eta > 0$ suponhamos que sejam válidas (G1)–(G5). Então o problema (0.1) tem solução não trivial.*

Teorema 0.2 (Problema ressonante)**.** *Para $\eta \in \mathbb{R}$ suponhamos que sejam válidas (G1), (G2), (G6)–(G8). Então o problema (0.1) tem solução não trivial.*

Teorema 0.3. *Para $\eta < 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que, se $\lambda \in (\lambda_1 - \delta_1, \lambda_1)$, então o problema (0.1) com $g(x,s) \equiv |x|^{-(a+1)p+c}|s|^{p-2}s$ tem pelo menos dois pares de soluções não triviais.*

Referências

[1] ASSUNÇÃO, R. B., CARRIÃO, P. C., MIYAGAKI, O. H. - *Subcritical perturbations of a singular quasilinear elliptic equation involving the critical Hardy-Sobolev exponent*, Nonlinear Anal. 66 (2007), n. 6, 1351–1364.

[2] GAZZOLA, F., RUF, B. - *Lower-order perturbations of critical growth nonlinearities in semilinear elliptic equations*, Advances in Diff. Eq. 2 (1977), 555–572.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

REMARKS ON THE LINEAR KAWAHARA SYSTEM

P. N. SILVA * & C. F. VASCONCELLOS †

We consider the Linear Kawahara (K) system in a bounded interval $(0, L)$

$$\left| \begin{array}{l} u_t + u_{xxx} + \eta u_{xxxxx} = 0 \qquad \text{in} \quad (0,L) \times (0,+\infty) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad \text{for all} \quad t \geq 0 \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \qquad \text{for all} \quad t \geq 0 \\ u_{xx}(L,t) = 0 \qquad \text{for all} \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0 \qquad \text{in} \quad (0,L). \end{array} \right. \tag{K}$$

The constant η is a negative real number.

The above system describes the one-dimensional evolution of small amplitude long waves in several problems arising in fluid dynamics with surface tension. In this model the conservative dispersive effect is represented by the term $(u_{xxx} + \eta u_{xxxxx})$.

The Kawahara equation is a model for plasma waves, capillary-gravity water waves and other dispersive phenomena when the Korteweg de Vries (KdV) type dispersion is weak. The origin of this equation appears in the work by Kawahara [1], where a fifth-order term was added to KdV system to model water waves in the long-wave regime for Weber numbers near $1/3$, that is, for moderate values of surface tension. For such Weber numbers the usual description of long water waves via KdV system fails, since the third-order term in the linear dispersion relation vanishes, and so the fifth-order dispersion term becomes relevant.

The total energy associated with the (K) system is defined by

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L |u(x,t)|^2 \, dx = \frac{1}{2} ||u(t)||^2$$

Using the above boundary conditions we prove that

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\eta}{2} |u_{xx}(0,t)|^2 \leq 0 \, , \forall t > 0.$$

So, $E(t)$ is a nonincreasing function of time.

This work is devoted to analyze the following questions:

- Does the energy $E(t) \to 0$ as $t \to +\infty$?
- Is it possible to find a rate of decay of the energy?

We begin by showing that problem (K) is well-posed. In fact, we prove global existence, uniqueness and some regularity for solutions.

Theorem 1. (Existence, uniqueness and regularity)
If u_0 belongs to $L^2(0, L)$ and $\eta < 0$, then, the problem (K) has a unique solution u belonging to $C([0, +\infty); L^2(0, L)) \cap L^2(0, +\infty; H_0^2(0, L))$. Moreover, there exists a constant $C = C(L, \eta) > 0$ such that:

i) $||u||_{C([0,+\infty);L^2(0,L))} + ||u||_{L^2(0,+\infty;H_0^2(0,L))} \leq C||u_0||$

*Instituto de Matemática e Estatística - UERJ, RJ - Brasil, nunes@ime.uerj.br
†Instituto de Matemática e Estatística - UERJ, RJ - Brasil, cfredvasc@gmail.com

ii) *$u_{xx}(0,.)$ belongs to $L^2(0,+\infty)$ and $||u_{xx}(0,.)||_{L^2(0,+\infty)} \leq C||u_0||$.*

Our main result is the exponential decay of the energy associated to problem (K).

Theorem 2. (A stabilization result)
There exist $c > 0$ and $\mu > 0$ such that

$$E(t) \leq c||u_0||^2 \, e^{-\mu t}$$

for all $t \geq 0$, for all $L > 0$ and all solution of (K) with $u_0 \in L^2(0, L)$.

The methods which we use to prove the above theorem are closely related to the methods used in Vasconcellos-Silva [7] and they are similar to methods used by Menzala *et al.* [2] for KdV system.
Since we obtain some observability results, is natural to prove the exact boundary controllability for the system (K).
Given the initial and final states (u_0, u_T) belonging to $L^2(0, L) \times L^2(0, L)$, it is possible to find a control function $h \in L^2(0, T)$ such that the solution w of the below system satisfies $w(x, T) = u_T(x), \forall x \in (0, L), \forall T > 0$ and $\forall L \in (0, +\infty)$.

$$\left| \begin{array}{l} w_t + w_{xxx} + \eta w_{xxxxx} = 0 \qquad \text{in} \quad (0, L) \times (0, T) \\ w(0, t) = w(L, t) = 0 \qquad \text{for all} \quad t \in (0, T) \\ w_x(0, t) = w_x(L, t) = 0 \qquad \text{for all} \quad t \in (0, T) \\ w_{xx}(L, t) = h(t) \qquad \text{for all} \quad t \in (0, T) \\ w(x, 0) = u_0 \qquad \text{in} \quad (0, L). \end{array} \right.$$

References

[1] KAWAHARA, T. Oscillatory solitary waves in dispersive media, *Phys. Soc. Japan* 33, 1972, 260-264

[2] MENZALA, G.P., VASCONCELLOS, C.F. AND ZUAZUA, E. Stabilization of the Korteweg-de Vries equation with localized damping, *Quarterly Applied Math.*, vol. LX, 1, 2002, 111-129.

[3] ROSIER, L. Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain, *ESAIM, Control. Optimization and Calculus of Variations*, vol.2, 1997, 33-55.

[4] ROSIER, L. AND ZHANG, B-Y. Global Stabilization of the Generalized Korteweg-De Vries Equation Posed on a Finite Domain, *SIAM Journal on Control and Optimization* (45), 3, 2006, 927-956.

[5] SCHNEIDER, G. AND WAYNE, C.E. The rigorous approximation of long-wavelenght capillary-gravity waves, *Arch.Rational Mech. Anal.* 162, 2002, 247-285.

[6] TOPPER, J. AND KAWAHARA, T. Approximate equations for long nonlinear waves on a viscous fluid, *J. Phys. Soc. Japan*, (44), 1978, 663-666

[7] VASCONCELLOS, C.F. AND SILVA, P.N. Stabilization of the Linear Kawahara Equation with localized damping, to appear in *Asymptotic Analysis*, 2008.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{0}}$ 2 Novembro 2008

Semilinear fractional Integro-Differential Equations

Claudio Cuevas *† & Julio César de Souza ‡

Resumo

We study S-asymptotically ω-periodic solutions of the semilinear fractional equation $u' = \partial^{-\alpha+1}Au + f(t,u)$, $1 < \alpha < 2$, considered in a Banach space X, where A is a linear operator of sectorial type $\mu < 0$.

1 Introduction

We study the S-asymptotically ω-periodicity of the semilinear integro-differential equation of fractional order

$$v'(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Av(s)ds + f(t,v(t)), \quad t \geq 0, \tag{1.1}$$

$$v(0) = u_0 \in X, \tag{1.2}$$

where $1 < \alpha < 2$, $A : D(A) \subset X \to X$ is a linear densely defined operator of sectorial type on a complex Banach space X and $f : [0,\infty) \times X \to X$ is a continuous function satisfying suitable Lipschitz type condition.

Due to their applications in several fields of science (see [1, 7, 8]), type (1.1) equations are attracting increasing interest as well as their numerical treatment. Properties of the solutions of (1.1) have been studied in several contexts, e.g. maximal regularity [9], regularity in the framework of numerical methods [4], positivity and contractivity [5], asymptotic equivalence, nonresonant problems and almost periodic solutions (see [2, 3, 10] and references therein).

2 S-asymptotically ω-periodic mild solutions

Teorema 2.1. *([6]) Assume that A is sectorial of type $\mu < 0$. Let $f : [0,\infty) \times X \to X$ be a continuous function such that $f(\cdot, 0)$ is integrable in $[0,\infty)$ and there exists a continuous integrable function $L : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ such that*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L(t)\|x-y\|, \text{ for all } x,y \in X,\ t \geq 0. \tag{2.3}$$

Then the problem (1.1)-(1.2) has an unique S-asymptotically ω-periodic mild solution. Moreover, one has the following a priori estimate for the solution

$$||u||_\infty \leq \tilde{C}(||u_0|| + ||f(\cdot,0)||_1)\exp{(\tilde{C}||L||_1)}, \tag{2.4}$$

where $\tilde{C}$ is a suitable positive constant.

Note that Theorem 2.1 does not include the case where L in (2.3) is a constant. In this case, we have the following result.

Teorema 2.2. *([6]) Assume that A is sectorial of type $\mu < 0$. Let $f : [0,\infty) \times X \to X$ be a function uniformly S-asymptotically ω-periodic on bounded sets and satisfies the Lipschitz condition*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\|, \text{ for all } x,y \in X,\ t \geq 0. \tag{2.5}$$

If L small enough. Then the problem (1.1)-(1.2) has an unique S-asymptotically ω-periodic mild solution.

*Instituição, DMAT-UFPE, PE, Brasil, e-mail cch@dmat.ufpe.br
†The first author is partially supported by CNPQ/Brazil
‡Instituição DMAT-UFPE, PE, Brasil, e-mail jcmath.es@hotmail.com

Teorema 2.3. *([6]) Let Condition (2.5) be holds. Assume that $f(\cdot, 0)$ is a bounded function and $\lim_{t\to\infty}(f(t,x) - f(t+n\omega, x)) = 0$ uniformly in $x \in K$ and $n \in \mathbb{N}$, for every bounded subset K of X. If L small enough.. Then the problem (1.1)-(1.2) has an unique asymptotically ω-periodic mild solution.*

Referências

[1] Ahn, V.V., Mcvinish, R. *Fractional differential equations driven by Levy noise.* J. Appl. Stoch. Anal., **16** (2) (2003), 97-119.

[2] Clément, Ph., Da Prato, G. *Existence and regularity results for an integral equation with infinite delay in a Banach space*, Integral Equations Operator Theory, **11** (1988) 480-500.

[3] Cuesta, E. *Asymptotic behaviour of the solutions of fractional integro-differential equations and some time discretizations.* Discrete Contin. Dyn. Syst. (Supplement) (2007), 277-285.

[4] Cuesta, E., Lubich, Ch., Palencia, C. *Convolution quadrature time discretization of fractional diffusion-wave equations.* Math. Comput., **75** (2006), 673-696.

[5] Cuesta, E., Palencia, C. *A numerical method for an integro-differential equation with memory in Banach spaces: Qualitative properties*, SIAM, J. Numer. Anal., **41** (2003), 1232-1241.

[6] Cuevas, C., De Souza, J.C. *S-Asymptotically ω-periodic solutions of semilinear fractional Integro-Differential Equations* to appear Applied Mathematics Letters.

[7] S.D. Eidelman, S.D., A.N. Kochubei, A.N. *Cauchy problem for fractional diffusion equations.* J. of Differential Equations **199** (2004), 211-255.

[8] Gorenflo, Mainardi, R.F. *Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order*, A. Carpinteri and F. Mainardi (Editors): Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, Springer Verlag, Vienna and New York 1997, 223-276.

[9] Hilfer, H. *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific Publ. Co. Singapure, 2000.

[10] Prüss, J. *Evolutionary Integral Equations and Applications.* Monographs Math., **87**, Birkhäuser Verlag, 1993.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{o}}$ 2 Novembro 2008

Sistemas Elípticos Resonantes

Edcarlos Domingos da Silva *

Neste trabalho consideramos sistemas elípticos gradientes sobre condições adequadas de ressonância. No caso escalar existe uma bibliografia considerárel, ver [1]e [9]. Mais precisamente estudamos o seguinte sistema gradiente

$$\begin{cases} -\triangle u = F_u(x,u,v) \text{ in } \Omega \\ -\triangle v = F_v(x,u,v) \text{ in } \Omega \\ u = v = 0 \text{ on } \partial\Omega \end{cases} \tag{0.1}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com bordo suave. Além disso, exigimos que $F : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seja de classe C^2 com $F(x,0,0) = F_u(x,0,0) = F_v(x,0,0) = 0, \forall x \in \Omega$ logo $z = (0,0)$ é uma solução trivial. Lembramos que em [6] foi estabelecido a estrutura variacional para (0.1), além disso, para o caso resonante foram obtidos vários resultados sobre existência de soluções para (0.1) por técnicas minimax e/ou teoria de Morse sobre a condição de não quadraticidade no infinito, ver [6],[8] e [4]. Este tipo de problema mostra-se interessante, pois devido a resonânica o funcional associado pode não satisfazer a condição (PS) clássica. O principal objetivo deste trabalho é estabelecer resultados de existência e multiplicidade para (0.1) sobre condições de ressonância na origem em infinito simultaneamente. Neste caso teremos uma dificuldade adicional em comparação com [6] e [8], onde não é permitido resonância na origem. Todavia, trabalhamos com o seguinte problema de autovalores com peso:

$$\begin{cases} -\triangle \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda A(x) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ em } \Omega, \\ u = v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{0.2}$$

e $A \in M_2(\Omega) = \left\{ A \in C^0(\overline{\Omega}, M_2(\mathbb{R})) \middle/ A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ b(x) & d(x) \end{pmatrix} \text{e}\, b(x) \geq 0 \,\forall\, x \in \Omega \text{ , } \max_{x \in \Omega} \max(a(x), d(x)) > 0 \right\}$.
Aplicando a teoria espectral para operadores lineares autoadjuntos compactos, temos que existem uma sequência de autovalores para cada matriz $A \in M_2(\Omega)$ com

$$0 < \lambda_1(A) < \lambda_2(A) \leq \ldots \text{ onde}\, \lambda_k(A) \to \infty \,\text{se}\, k \to \infty.$$

Além disso, sabemos que $\lambda_1(A)$ é simples e admite autofunção positiva sobre Ω, ver [3] e [7]. Por outro lado, para determinarmos soluções não triviais para (0.1) iremos impor condições em ∇F no infinito e na origem. Mais precisamente definindo as seguintes funções auxiliares $G_\infty(x,z) = F(x,z) - \frac{1}{2}\langle A_\infty(x)z, z\rangle$ e $G_0(x,z) = F(x,z) - \frac{1}{2}\langle A_0(x)z, z\rangle$, onde A_∞ e $A_0 \in M_2(\Omega)$ e impondo que $G_\infty = o(|z|2)$ em infinito e $G_0 = o(|z|2)$ na origem temos que (0.1) é assintoticamente linear. Contudo o sistema (0.1) é resonante no infinito se adicionamos a condição $\lambda_k(A_\infty) = 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Resta lembrar que existe uma dificuldade extra para o problema (0.1)quando impomos resonância na origem, isto é, existe $m \in \mathbb{N}$ com $\lambda_m(A_0) = 1$. Este trabalho é realizado sobre estas condições, ou seja, admitimos resonância no infinito e na origem simultaneamente, para resultados análogos no caso escalar ver [2] e [10], para sistemas cooperativos ver [11]. Descreveremos abaixo os principais resultados obtidos neste trabalho. Usaremos as seguintes hipóteses

(H1) Existe $\alpha \in (0,1)$ tal que $|\nabla G_\infty(x,z)| \leq C(1 + |z|^\alpha), \forall\, z \in \mathbb{R}^2$, q.t.p. $x \in \Omega$.

(H2) Existem $\beta \in (1, 2^* - 1)$ e $\delta > 0$ tal que $|\nabla G_0(x,z)| \leq C|z|^\beta$, $\forall\, |z| < \delta$ q.t.p. $x \in \Omega$.

(H3) Existem $F_1, F_2 \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ com $\int F_j \neq 0$ para j=1,2 satisfazendo

$$F_1(x) \leq \liminf_{|z| \to \infty} \frac{\nabla G_\infty(x,z) \cdot z}{|z|^{1+\alpha}} \leq \limsup_{|z| \to \infty} \frac{\nabla G_\infty(x,z) \cdot z}{|z|^{1+\alpha}} \leq F_2(x). \tag{0.3}$$

*Instituição Unicamp , IMECC, SP, Brasil, eddomingos@ime.unicamp.br

(H4) Existem $f_1, f_2 \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ com $\int f_j \neq 0$ para j=1,2 onde

$$f_1(x) \leq \liminf_{|z|\to 0} \frac{\nabla G_0(x,z)\cdot z}{|z|^{1+\beta}} \leq \limsup_{|z|\to 0} \frac{\nabla G_0(x,z)\cdot z}{|z|^{1+\beta}} \leq f_2(x). \tag{0.4}$$

temos com $k, m \geq 2$ os seguintes resultados

Teorema 0.1. *Suponha (H1)-(H4). Se ocorre uma das seguintes alternativas*
a)$F_2(x) \leq 0,\ f_1(x) \geq 0\ q.t.p\ x \in \Omega\ e\ m \neq k-1$
b)$F_1(x) \geq 0,\ f_2(x) \leq 0\ q.t.p\ x \in \Omega\ e\ k \neq m-1$
c)$F_1(x) \geq 0,\ f_1(x) \geq 0\ q.t.p\ x \in \Omega,\ e\ k \neq m$
d)$F_2(x) \leq 0,\ f_1(x) \leq 0\ q.t.p\ x \in \Omega\ e\ k \neq m$
então (0.1) admite pelo menos uma solução não trivial.

Teorema 0.2. *Suponha (H1)-(H4). Se ocorrem uma das seguintes alternativas*
a)$F_2(x) \leq 0\ e\ f_1(x) \geq 0\ q.t.p\ x \in \Omega,\ m > k-1\ com\ F^{''} \geq \beta \succeq \lambda_{k-1}A_\infty$
b) $F_1(x) \geq 0\ e\ f_2(x) \leq 0\ q.t.p\ x \in \Omega,\ k > m-1\ com\ F^{''} \leq \beta \preceq \lambda_{k+1}A_\infty$
c) $F_1(x) \geq 0\ e\ f_1(x) \geq 0\ q.t.p\ x \in \Omega,\ m < k\ com\ F^{''} \leq \beta \prec \lambda_{k+1}A_\infty$
d) $F_2(x) \leq 0\ e\ f_2(x) \leq 0\ q.t.p\ x \in \Omega,\ m > k\ com\ F^{''} \geq \beta \succeq \lambda_{k-1}A_\infty$
para alguma matriz fixada $\beta \in M_2(\Omega)$*, então (0.1) admite pelo menos duas soluções não triviais.*

Observação 0.1. *Sejam* $F \in C^2$ *e* $A, B \in M_2(\Omega)$*. Então as desigualdades* $A \leq F^{''} \leq B$ *significam* $\langle A(x)z, z\rangle \leq \langle F^{''}(x)z, z\rangle \leq \langle B(x)z, z\rangle\ \forall (x,z) \in \Omega \times \mathbb{R}^2$*. Além disso,* $A \preceq B$ *se* $A \leq B$ *com desigualdade estrita em algum subconjunto de medida positiva, para resultados análogos no caso escalar ver [5].*

Referências

[1] BARTOLO,P.; BENCI,V.;FORTUNATO,D. - *Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with strong resonance at infinity.* Nonlinear Analysis 7, 981-1012, 1983.

[2] BARTSCH, T.; LI, S.J. - *Critical point theory for asymptotically quadratic functionals and applications to problems with resonance.* Nonlinear Analysis 28, 419-441,1997.

[3] CHANG, K.C. - *Principal eigenvalue for weight in elliptic systems.* Nonlinear Analysis 46, 419-443, 1993.

[4] CHANG, K.C. - *Infinite dimensional morse theory and multiple solution problem.* Birkhauser, Boston, 1993.

[5] COSTA, D. G.; OLIVEIRA, A. S. - *Existence of solution for a class of semilinear elliptic problems at double resonance.* Bol. Soc. Bras. Mat. 19, 21-37, 1988.

[6] COSTA, D. G.; MAGALHÃES, C. A. - *A variational approach to subquadratic perturbations of elliptic systems.* J. Differential Equations 111, 103-122, 1994.

[7] DE FIGUEIREDO, D. G. - *Positive solutions of semilinear elliptic problems, in: Diferential Equations .* São Paulo,in Lecture Notes in Math, vol. 957, Springer, Berlin, pp.34-87,1982.

[8] FURTADO, M. F.; DE PAIVA, F. O. V. - *Multiplicity of solutions for resonant elliptic systems.* Journal Math. Anal. Appl. 319, 435-449, 2006.

[9] LANDESMAN, E.M.; LAZER, A.C. - *Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance.* J. Math. Mech. 19, 609-623, 1969/1970.

[10] ZOU, W;LI, S.; LI, S. - *The computation of the critical groups with an application to elliptic resonant problems at a higher eigenvalue.* Journal of Math. Anal. Appl. 235, 237-259 , 1999.

[11] ZOU, W; LI, S.;LIU, J.Q. - *Nontrivial solutions for resonant cooperative elliptic systems via computations of critical groups.* Nonlinear Analysis, 38 229-247, 1999.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{0}}$ 2 Novembro 2008

Sobre a densidade de espaços de Banach sem sistemas biortogonais não-enumeráveis

C. BRECH *

Dados um espaço Banach X e um conjunto não-vazio Γ, uma família $(x_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} \subseteq X \times X^*$ é um sistema biortogonal se $\varphi_\beta(x_\alpha) = \delta_{\alpha\beta}$ para todo $\alpha, \beta \in \Gamma$. Dizemos que o sistema biortogonal $(x_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} \subseteq X \times X^*$ é fundamental se $\overline{span}\{x_\alpha : \alpha \in \Gamma\} = X$ e total se $\overline{span}^{w^*}\{\varphi_\alpha : \alpha \in \Gamma\} = X^*$.

Sabe-se que todo espaço de Banach possui um sistema biortogonal total e que todo espaço de Banach separável possui um sistema biortogonal total e fundamental (veja [3]); diversos autores mostraram a existência de sistemas biortogonais fundamentais em classes mais gerais de espaços de Banach (veja, por exemplo, [2] e [6]). Entretanto, nem todo espaço de Banach possui um sistema biortogonal fundamental, veja [3].

Sobre o problema mais geral da existência de sistemas biortogonais não-enumeráveis em espaços não-separáveis, sabe-se que é indecidível em ZFC: por um lado, os espaços construídos por Shelah [5] (assumindo $\diamondsuit$) e por Kunen (assumindo CH, veja [4]) são não-separáveis e não possuem sistemas biortogonais não-enumeráveis. Por outro lado, Todorcevic [6] provou recentemente a consistência de que todo espaço de Banach não-separável possui um sistema biortogonal não-enumerável. Nosso objetivo é mostrar que existe consistentemente um espaço de Banach de densidade $\aleph_2$ (o segundo cardinal não-enumerável) sem sistemas biortogonais não-enumeráveis. Primeiramente, provamos [1] o seguinte resultado topológico:

Teorema 0.1. *É consistente com ZFC que existe um espaço compacto e disperso K de peso $\aleph_2$ tal que K^n é hereditariamente separável para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Este resultado tem a seguinte conseqüência:

Corolário 0.1. *É consistente com ZFC que existe um espaço compacto K tal que $C(K)$ é um espaço de Asplund de densidade $\aleph_2$ e hereditariamente Lindelöf com relação à topologia fraca.*

Segue daí que, assim como os espaços de Shelah e Kunen, o espaço $C(K)$ que construímos por *forcing* não possui sistemas biortogonais não-enumeráveis e não admite renormação Fréchet-diferenciável ou com a propriedade de intersecção de Mazur, lembrando que nosso espaço tem densidade ainda maior.

Além disso, nosso exemplo mostra que o seguinte resultado de Todorcevic [6] não pode ser generalizado, substituindo-se "sistemas semi-biortogonais" por "sistemas biortogonais": todo espaço $C(K)$ de densidade estritamente maior que $\aleph_1$ (o primeiro cardinal não-enumerável) possui um sistema semi-biortogonal não-enumerável, lembrando que, dados um espaço de Banach X é um conjunto bem-ordenado (ou um ordinal) não-vazio θ, uma família $(x_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha<\theta} \subseteq X \times X^*$ é um sistema semi-biortogonal se satisfaz as seguintes condições para todo $\alpha, \beta < \theta$: $\varphi_\beta(x_\alpha) = 0$, se $\alpha < \beta$; $\varphi_\alpha(x_\alpha) = 1$ e $\varphi_\beta(\alpha) \geq 0$, se $\alpha > \beta$.

*IMECC-UNICAMP, SP, Brasil, christina.brech@gmail.com. Apoiado pela CAPES, CNPq e FAPESP.

Referências

[1] BRECH, C. & KOSZMIDER, P. - *Thin-very tall compact scattered spaces which are hereditarily separable*, submitted.

[2] DAVIS, W. J. & JOHNSON, W. B. - *On the existence of fundamental and total bounded biorthogonal systems in Banach spaces*, Studia Math. **45** (1973), 173-179.

[3] HÁJEK, P., MONTESINOS SANTALUCÍA, V., VANDERWERFF, J. & ZIZLER, V. - *Biorthogonal systems in Banach spaces*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 26, Springer, New York, 2008.

[4] NEGREPONTIS, S. - *Banach spaces and topology*, Handbook of set-theoretic topology, North-Holland, Amsterdam, 1984, pp.1045-1142.

[5] SHELAH, S. - *Uncountable constructions for B.A., e.c. groups and Banach spaces*, Israel J. Math. **51** (1985), no.4, 273-297.

[6] TODORCEVIC, S. - *Biorthogonal systems and quotient spaces via Baire category methods*, Math. Ann. **335** (2006), no.3, 687-715.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{0}}$ 2 Novembro 2008

SOBRE A EQUAÇÃO DE BOUSSINESQ EM DOMÍNIOS NÃO CILÍNDRICOS DO $\mathbb{R}^n$

H. R. CLARK *, C. L. FROTA †& J. LIMACO ‡

Em 1834, Scott-Russell, idealizou uma teoria para o deslocamento de ondas de pequenas amplitudes em águas rasas. O primeiro tratamento matemático desta teoria foi feito por Boussinesq [1] em 1872, quase quarenta anos mais tarde. Neste artigo, M. J. Boussinesq deduziu um sistema de equações diferenciais parciais não lineares e dissipativas, atualmente conhecidas como equações de Boussinesq. Por meio de mudanças de escalas, veja por exemplo Boussinesq [2] e Craig [4], a equação de Boussinesq, no caso unidimensional $x \in I$ (I um intervalo aberto e limitado de $\mathbb{R}$), pode ser escrita como a seguinte equação de evolução:

$$u_{tt} - (u + au^2)_{xx} + bu_{xxxx} = 0 \,, \tag{1}$$

onde $u = u(x,t)$ é a componente vertical da velocidade sob a superfície livre de um fluido irrotacional, a é uma constante positiva e b é uma constante real, ambas dependendo da profundidade do fluido. Quando $b > 0$ a equação (1) num domínio cilindrico, $Q = I \times (0,T) \subset \mathbb{R}^2$, descreve pequenas oscilações tranversais, não lineares, de uma barra elástica e é conhecida na literatura como a equação "boa"de Boussinesq. Por outro lado, quando $b < 0$ a equação (1) é conhecida como a equação "má"de Boussinesq, veja por exemplo Zabusky [14] e também Miles [8].

A equação de Boussinesq (1) com a, b positivos e sob a ação de um forte amortecimento, o que significa conter um damping estrutural da forma cu_{xxt}, com $c > 0$, modela as oscilações não lineares de uma barra na presença de viscosidade. Neste contexto a equação (1) é reescrita na forma:

$$u_{tt} - (u + cu_t + au^2)_{xx} + bu_{xxxx} = 0. \tag{2}$$

Diversos autores estudaram problemas de valores iniciais e fronteira, para a equação (2) em domínios cilíndricos, veja por exemplo Varlamov [11], [12], [13] e as referências aí contidas. Problema de Cauchy também foram estudados, veja por exemplo [9]. Recentemente, em [3] estudamos a existência, unicidade e decaimento exponencial de solução para o problema de valores inicias e de fronteira para a equação de Boussinesq unidimensional (2) em domínios com fronteira móvel. Neste trabalho, apresentamos um estudo do problema num domínio não cilíndrico do $\mathbb{R}^n$. Problemas mistos em domínios não cilíndricos podem ser encontrados em [5], [6],[7] e [10].

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, conexo e limitado com fronteira Γ bem regular e Q o cilindro $\Omega \times (0,\infty)$ cuja fronteira lateral é $\Sigma = \Gamma \times (0,\infty)$. Dada uma função real positiva, duas vezes continuamente diferenciavel, $k : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, com k(0)=1, representamos por Ω_t a deformação do aberto Ω por meio do valor $k(t)$, isto é:

$$\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \quad x = k(t)\, y \; \text{ com } y \in \Omega\} \,, \quad 0 \leq t < \infty \,,$$

e a fronteira de Ω_t denotamos por Γ_t. Considere $\widehat{\mathcal{Q}}$ o domínio não cilindrico em $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por

$$\widehat{\mathcal{Q}} = \bigcup_{0<t<\infty} \Big(\Omega_t \times \{t\}\Big) \,,$$

cuja fronteira lateral denotamos por $\widehat{\Sigma}$.

*Universidade Federal Fluminense, IM-GAN, Niterói, RJ, Brasil, hclark@vm.uff.br
†Universidade Estadual de Maringá, DMA, Maringá, PR, Brasil, clfrota@uem.br
‡Universidade Federal Fluminense, IM-GAN, Niterói, RJ, Brasil, jlimaco@vm.uff.br

Neste trabalho, apresentamos resultados de existência, unicidade e decaimento exponecial de soluções fracas globais para o seguinte problema de valores iniciais e de fronteira :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta\Big(u + u_t + u^2\Big) + \Delta^2 u = 0 \quad \text{em} \quad \widehat{\mathcal{Q}}, \\ \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{em} \;\; \widehat{\Sigma}, \\ \\ u(x,0) = u_0(x)\,, \qquad u_t(x,0) = u_1(x) \quad \text{para} \quad x \in \Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Referências

[1] Boussinesq, M. J., *Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses senciblement pareilles de la surface au fond*, Journal de Mathématiques Pures et Appliqueés, Vol. 17 (1872), pp. 55-108.

[2] Boussinesq, M. J., *Essai sur la théorie des eaux courantes*, Mém. Présentés par divers savants à l'Académie des Sciences Inst. France (séries 2), Vol. 17 (1877), pp. 1-680.

[3] Clark, H. R.; Cousin, A. T; Frota, C. L.; Limaco, J.; *On the dissipative Boussinesq equation in a non-cylindrical domain*, Nonlinear Analysis 67 (2007), pp. 2321-2334.

[4] Craig, W., *An existence theory for water waves and the Boussinesq and Korteweg de Vries scaling limits*, Comm. Partial Differential Equations, 10 (1985), pp. 787-1003.

[5] Límaco, J. & Medeiros, L. A., *Kirchhoff-Carrier elastic strings in noncylindrical domains*, Portugaliae Mathematica, Vol. 56, Fasc. 4, (1999), pp. 465-500.

[6] Medeiros, L. A., *Nonlinear wave equations in domains with variable boundary*, Arch. Rotional Mech. Anal., 47 (1972), pp. 47-58.

[7] Medeiros, L. A., Límaco, J. & Menezes, S. B., *Vibrations of elastic strings: Mathematical aspects, Part two*, J. of Comp. Analysis and Appl. Vol. 4, No. 3, July (2002), pp. 211-263.

[8] Miles, J. W., *Solitary waves*, Ann. Rev. Fluid Mech., 12 (1980), pp. 11-43.

[9] Tsutsumi M. & Matahshi, T., *On the Cauchy problem for the Boussinesq-type equation*, Math. Japonica, 36 (1991), pp. 371-379.

[10] Nakao, M. & Narazaki, T., *Existence and decay of solutions of some nonlinear wave equations in noncylindrical domains*, Math. Rep. XI - 2 (1978), pp. 117-125.

[11] Varlamov, V. V., *On the initial boundary value problem for the damped Boussinesq equation*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Vol. 4, N$^{\underline{o}}$ 3 (1998), pp. 431-444.

[12] Varlamov, V. V., *Asymptotic behavior of solutions of the damped Boussinesq equation in two space dimensions*, Intenat. J. Maths. Math. Sciences, 22 (1) (1999), pp. 131-145.

[13] Varlamov, V. V., *On the damped Boussinesq equation in a circle*, Nonlinear Analysis TMA, 38 (1999), pp. 447-470.

[14] Zabusky, N. J., *Nonlinear Partial Differential Equations*, Academic Press, New York, (1967)

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{o}}$ 2 Novembro 2008

SOLUÇÃO GENERALIZADA PARA UM PROBLEMA DE VALOR INICIAL E DE FRONTEIRA DO TIPO PARABÓLICO

JORGE ARAGONA * & ANTÔNIO RONALDO G. GARCIA † & STANLEY O. JURIAANS ‡

O objetivo deste trabalho é generalizar um resultado de existência e unicidade para um problema de valor inicial e de fronteira, abreviadamente PVIF, para uma equação parabólica devido a Colombeau e Langlais [2]. Para isto, vamos usar os seguintes resultados da *topologia cortante* encontrados em [1] e [3].

Teorema 0.1. *Sejam $\{\Omega_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma seqüência exaustiva de abertos para Ω, i.e., Ω_ν é aberto, $\overline{\Omega}_\nu \subset\subset \Omega_{\nu+1}$, $\forall\, \nu \in \mathbb{N}$ e $\Omega = \bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} \Omega_\nu$ e $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma família regularizante associada a $\{\Omega_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$, i.e., isto é, $\mathcal{X}_\nu \in \mathcal{D}(\Omega_{\nu+1})$ e $\mathcal{X}_\nu\Big|_{\Omega_\nu} \equiv 1$, $\forall\, \nu \in \mathbb{N}$, então $\mathcal{X}_l f \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} f$, $\forall\, f \in \mathcal{G}_f(\Omega)$ e, em conseqüência $\mathcal{G}_{f\,c}(\Omega)$ é denso em $(\mathcal{G}_f(\Omega), \tau_{\Omega\, f})$.*

Demonstração. Ver [3] □

Teorema 0.2. *Se ω é um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, então $\mathcal{G}_f\left(\overline{\omega}\right)$ munido da topologia cortante $\tau_{\overline{\omega},b}$ é completa.*

Demonstração. Ver [1] □

Como corolário deste resultado, mas que não vamos usar aqui, temos que $(\mathcal{G}_f(\Omega), \tau_{\Omega f})$ é completa (ver [1]). Ainda para a prova do nosso resultado principal é importante enunciar o seguinte:

Proposição 0.1. *Se*

$$P = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\partial^\alpha$$

é um operador diferencial parcial linear generalizado ODPLG (isto é, $a_\alpha \in \mathcal{G}_f(\Omega)$, $\forall\ |\alpha| \le m$) e $\{f_l\}_{l\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}_f(\Omega)$ que é $\tau_{\Omega\, f}$-convergente a f, então $P(f_l) \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} P(f)$. Em outros termos, P é $\tau_{\Omega\, f}$-contínua.

Demonstração. Ver [3] □

Serão úteis os seguintes resultados:

Lema 0.1 (Ver [2]). *Para todo inteiro k existe um polinômio $P_k \in \mathcal{P}[X]$ tal que se $u_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ então a solução u de*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u^3 = 0, & em\ \overline{Q} = \overline{\Omega} \times [0,T],\ T > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & em\ \Omega \\ u(x,t) = 0 & sobre\ \partial\Omega \times [0,T] \end{cases} \tag{0.1}$$

satisfaz:

$$\|u\|_{C^k(\overline{Q})} \le P_k\left(\|u_0\|_{C^{2k+1}(\overline{\Omega})}\right). \tag{0.2}$$

Teorema 0.3 (Ver [2]). *Para toda $u_0 \in \mathcal{G}_f(\Omega)$ a valores reais com suporte compacto existe $u \in \mathcal{G}_f(\overline{Q})$ solução de*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u^3 = 0, & em\ \mathcal{G}_f\left(\overline{Q}\right) \\ u\Big|_{\overline{\Omega}\times\{0\}} = u_0, & em\ \mathcal{G}_f\left(\overline{\Omega}\right) \\ u\Big|_{\partial\Omega\,\times[0,T]} = 0, & em\ \mathcal{G}_f(\partial\Omega \times [0,T]) \end{cases} \tag{0.3}$$

*Universidade de São Paulo, IME-USP, SP, Brasil, aragona@ime.usp.br
†Universidade Federal Rural do Semi-Árido, DCA-UFERSA, RN, Brasil, ronaldogarcia@ufersa.edu.br
‡Universidade de São Paulo, IME-USP, SP, Brasil, ostanley@ime.usp.br

Lema 0.2 (Ver [2]). *Seja* $v \in \mathrm{C}^\infty\left(\overline{Q}\right)$

$$\begin{cases} v_t - \Delta v + a_0 v = f, & em\ Q\ \left(f \in \mathrm{C}^\infty\left(\overline{Q}\right)\right) \\ v(x,0) = g(x), & em\ \Omega\ (g \in \mathcal{D}(\Omega)) \\ v(x,t) = h(x,t), & em\ \partial\Omega \times [0,T]\ (h \in \mathrm{C}^\infty(\partial\Omega \times [0,T])), \end{cases} \tag{0.4}$$

onde $T > 0$ *é finito e onde* $a_0(x,t) \geq 0$ *em* Q*. Então para todo* $k \in \mathbb{N}$ *existe um polinômio* $P_k \in \mathcal{P}[X]$ *com coeficientes independente de* a_0, f, g *e* h *tal que*

$$\|v\|_{\mathrm{C}^k(\overline{Q})} \leq (\|f\|_{\mathrm{C}^{2k+1}(\overline{Q})} + \|g\|_{\mathrm{C}^{2k}(\overline{\Omega})} + \|h\|_{\mathrm{C}^{2k+1}(\partial\Omega \times [0,T])}) P_k\left(\|a_0\|_{\mathrm{C}^{2k+1}(\overline{Q})}\right). \tag{0.5}$$

Teorema 0.4 (Ver [2]). *A solução de (0.3) é única.*

Teorema 0.5. *Suponhamos que o dado inicial do PVIF (0.3)* $u_0 \in \mathcal{G}_f(\Omega)$*. Então existe uma única* $u \in \mathcal{G}_f\left(\overline{Q}\right)$ *tal que* u *é solução de (0.3) com dado inicial* u_0*.*

Demonstração. Seja $u_0 \in \mathcal{G}_f(\Omega)$. Então existe uma seqüência $\{u_{0n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}_{f_c}(\Omega)$ tal que

$$u_{0n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u_0,$$

pois pelo Corolário 0.1, temos que $\mathcal{G}_{f_c}(\Omega)$ é denso em $\mathcal{G}_f(\Omega)$. Agora, pelo Teorema 0.3, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in \mathcal{G}_f(\overline{Q})$ tal que u_n é solução de (0.3) com dado inicial u_{0n} correspondente. Mas isto é conseqüência do fato que $\hat{u}_{0n}$ representante de u_{0n} está em $\mathcal{D}(\Omega)$ e $\hat{u}_n$ representante de u_n está em $\mathrm{C}^\infty\left(\overline{Q}\right)$ e é uma solução clássica de (0.1) com dado inicial $\hat{u}_{0n}$. E, portanto, pelo Lema 0.1 para todo $k \in \mathbb{N}$ existe um polinômio $P_k \in \mathcal{P}[X]$ tal que $\hat{u}_n$ satisfaz (0.2), i.e.,

$$\|\hat{u}_n\|_{\mathrm{C}^k(\overline{Q})} \leq P_k\left(\|\hat{u}_{0n}\|_{\mathrm{C}^{2k+1}(\overline{\Omega})}\right). \tag{0.6}$$

Observe que agora, temos uma seqüência de soluções $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}_f\left(\overline{Q}\right)$ do PVIF (0.3) associado à seqüência de dados iniciais $\{u_{0n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}_{f_c}(\Omega)$. Vamos mostrar que existe $u \in \mathcal{G}_f\left(\overline{Q}\right)$ tal que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$, i.e., $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência convergente em $\mathcal{G}_f\left(\overline{Q}\right)$. Como $\mathcal{G}_f\left(\overline{Q}\right)$ é completo (Teorema 0.2) basta mostrarmos que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy. Seja $u_{nm} = u_n - u_m$. Então u_{nm} é uma solução generalizada do PVIF do Lema 0.2. Daí, $\hat{u}_{nm}$ (representante de u_{nm}) satisfaz:

$$\|\hat{u}_n - \hat{u}_m\|_{\mathrm{C}^k(\overline{Q})} \leq \|\hat{u}_{0n} - \hat{u}_{0m}\|_{\mathrm{C}^{2k}(\overline{\Omega})} P_k\left(\|\hat{a}_0\|_{\mathrm{C}^{2k+1}(\overline{Q})}\right). \tag{0.7}$$

É fácil ver que o primeiro fator do segundo membro da desigualdade (0.7) tende a zero quando $n, m \to \infty$ e, portanto, resta mostrar que

$$P_k\left(\|\hat{a}_0\|_{\mathrm{C}^{2k+1}(\overline{Q})}\right) \tag{0.8}$$

é limitado para mostrarmos que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}_f\left(\overline{Q}\right)$ é uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{G}_f\left(\overline{Q}\right)$. Feito isto resta agora, mostrar que a função generalizada $u \in \mathcal{G}_f\left(\overline{Q}\right)$, limite das $u_n \in \mathcal{G}_f(\overline{Q})$ é a solução do PVIF (0.3) com dado inicial $u_0 \in \mathcal{G}_f(\Omega)$. Para isto, seja $P(u) = u_t - \Delta u + u^3$, então precisamos mostrar que $0 = P(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} P(u)$. Mas isto é imediato da continuidade do operador derivação (ver 0.1) e da continuidade da multiplicação em $\mathcal{G}_f\left(\overline{Q}\right)$. $\square$

Referências

[1] J. Aragona, A. R. G. Garcia, and O. S. Juriaans, *A completude das álgebras de colombeau* $\mathcal{G}_f(\omega)$ *e* $\mathcal{G}_f\left(\overline{O}\right)$*, onde* ω *e* O *são abertos de* $\mathbb{R}^n$ *e* O *é limitado.* Manuscrito, IME-USP, São Paulo S.P., Brazil, 2006.

[2] J.-F. Colombeau and M. Langlais, *Generalized solutions of nonlinear parabolic equations with distributions as initial conditions*, J. Math. Anal. Appl., 145 (1990), pp. 186–196.

[3] A. R. G. Garcia, *Os números e as funções generalizadas plena de Colombeau: aspectos algébricos topológicos e analíticos*, PhD thesis, Thesis, Universidade de São Paulo, 2006.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba
Edição N$^{\underline{o}}$ 2 Novembro 2008

Solução numérica da equação de difusão com coeficientes descontínuos em coordenadas polares

J. C. Z. AGUILAR * & N. M. KUHL †

Resumo

Problemas elípticos com coeficientes variáveis aparecem na modelagem matemática de processos como transferência de massa e calor, difusão em meios compostos, fluxos em meios porosos, imagens por tomografia etc... A pesar de que existem técnicas conhecidas para resolver o problema numericamente como, por exemplo [1] e [2], aplicações de médio e grande porte precisam de um método cada vez mais rápido e eficiente.

O estudo da equação de difusão em coordenadas polares e cilíndricas é importante em muitas aplicações médicas e industriais [5], [9], em particular, o caso onde os coeficientes variáveis têm a característica de ser descontínuos ainda merece atenção. Trabalhos nesta área podem ser encontrados em [3], [4], [6], [7] e [8].

Em coordenadas polares e em dimensão 2 a equação de difusão fica:

$$-\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\sigma(r,\theta)\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\sigma(r,\theta)}{r}\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial \theta}\right)\right]=f(r,\theta),\ (r,\theta)\in\Omega, \tag{1}$$

Neste trabalho consideramos Ω como sendo o disco unitário e a equação elíptica (1) munida da condição de fronteira tipo Dirichlet:

$$u(1,\theta)=g(\theta) \tag{2}$$

Considera-se a equação (1), sendo $\sigma(r,\theta)$ descontinua numa interface $\Gamma\subset\Omega$ e o fluxo $W(r,\theta)$ é definido como:

$$W(r,\theta)=-\sigma\nabla u=\begin{bmatrix}-\sigma\frac{\partial u}{\partial r}\\ -\frac{1}{r}\sigma\frac{\partial u}{\partial \theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}W_1\\ W_2\end{bmatrix}$$

Devido à natureza dos processos a solução e as componentes do fluxo são suaves na interface:

$$[u]=[W]=0,\ x\in\Gamma,$$

onde [.] denota a diferença dos limites de u à esquerda e à direita do ponto de descontinuidade.

A discretização do eixo radial é modificada para evitar a singularidade do pólo.

Neste trabalho, a interface é ortogonal aos eixos coordenados.

O presente trabalho tem como objetivo principal apresentar uma formulação e solução do problema de difusão (1) junto a condição de fronteira (2) usando o método dos volumes finitos modificados seguindo os trabalhos [6] e [7] onde foram apresentados bons resultados para o caso onde as coordenadas são cartesianas.

A dicretização da equação (1) usando o método dos volumes finitos fica:

$$h_\theta\left[r_{i+1/2}(W_1)_{i+1/2j}-r_{i-1/2}(W_1)_{i-1/2j}\right]+h_r\left[(W_2)_{ij+1/2}-(W_2)_{ij-1/2}\right]=r_ih_rh_\theta\varphi_{ij}, \tag{3}$$

onde $\varphi_{ij}=\frac{1}{r_ih_rh_\theta}\int\int_{V_{ij}}f(r,\theta)dA$ e V_{ij} é um volume finito.

O método dos volumes finitos modificados usa o desenvolvimento das componentes do fluxo em serie de Taylor. Desse desenvolvimento aparecem os esquemas numéricos a ser estudados e são conhecidos como esquema da média harmônica (HA)[1] e esquema da média harmônica modificada (HIA)[7].

O esquema numérico HIA obtido da discretização (3) tem a forma:

*Universidade de São Paulo IME, SP, Brasil, jaguilar@ime.usp.br
†Universidade de São Paulo IME, SP, Brasil, kuhl@ime.usp.br

$$
\begin{aligned}
&-h_\theta(1+a_{i+1/2j}-a_{i-1/2j})^{-1}\left[r_{i+1/2}K^H_{i+1/2j}\left(\frac{u_{i+1j}-u_{ij}}{h_r}\right)-r_{i-1/2}K^H_{i-1/2j}\left(\frac{u_{ij}-u_{i-1j}}{h_r}\right)\right]+\\
&-h_r(1+a_{ij+1/2}-a_{ij-1/2})^{-1}\left[K^H_{ij+1/2}\left(\frac{u_{ij+1}-u_{ij}}{r_ih_\theta}\right)-K^H_{ij-1/2}\left(\frac{u_{ij}-u_{ij-1}}{r_ih_\theta}\right)\right]=r_ih_rh_\theta\varphi_{ij},
\end{aligned}
\tag{4}
$$

onde:

$$K^H_{i+1/2j}=\left(\frac{1}{h_r}\int_{r_i}^{r_{i+1}}(1-\frac{r-r_{i+1/2}}{r_{i+1/2}})\frac{dr}{\sigma(r,\theta)}\right)^{-1},\quad a_{i+1/2j}=K^H_{i+1/2j}\,\frac{1}{h_r^2}\int_{r_i}^{r_{i+1}}\frac{r-r_{i+1/2}}{\sigma(r,\theta)}dr$$

$$K^H_{ij+1/2}=\left(\frac{1}{h_\theta}\int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}}\frac{d\theta}{\sigma(r,\theta)}\right)^{-1},\quad a_{ij+1/2}=K^H_{ij+1/2}\,\frac{1}{h_\theta^2}\int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}}\frac{\theta-\theta_{j+1/2}}{\sigma(r,\theta)}d\theta$$

No sistema (4) temos ainda que levar em consideração a condição de periodicidade e a condição de fronteira. O sistema de equações que conduz os volumes finitos modificados e da forma:

$$Au=b, \tag{5}$$

onde temos que para o esquema HA, A é uma matriz de coeficientes variáveis simétrica e definida positiva e no caso do esquema HIA, A e uma M- matriz não simétrica.

Os resultados numéricos obtidos mostram que o método proposto apresenta bons resultados na solução do problema de difusão com coeficientes descontínuos (1) e condição de fronteira (2) sendo um método a ser considerado por se fácil de implementar e apresentar resultados mais acurados que alguns métodos tradicionais.

Referências

[1] SAMARSKII, A. A. - *Theory of difference schemes*, Moscou, Nauka, 2001.

[2] MING-CHIH, L.; YU-HOU, T. - *A fast iterative solver for the variable coefficient diffusion equation on a disk*, Manuscript of Comp. Phys. pp. 1-13, 2005.

[3] MING-CHIH, L; CHIN-TIEN, L; YU-HOU, T. - *An efficient semi-coarsening multigrid method for variable diffusion problems in cylindrical coordinates*, App. Num. Math, Vol.57, Issue 5-7. pp. 801-810, 2007.

[4] ZHILIN, W.; WEI-CHENG, W: I-LANG, C. ET AL - *New formulation for interface problems in polar coordinates*, SIAM Journal on Scientific Computing. pp. 224-245, 2003.

[5] WANG, M. - *Inverse solutions for electrical impedance tomography based on conjugate gradients methods*, Meas. Sci. Technol. pp. 101-117, 2002.

[6] ILIEV, O. - *On second-order-accurate discretization and its fast solution with a pointwise multigrid solver*, IMA Journ. of. Num. Anal. pp. 391-406, 2002.

[7] EWING, R; ILIEV, O ; LAZAROV, R. - *A modified finite volume approximation of second-order elliptic equations with discontinuous coefficients*, SIAM J. Sci. Comput. pp 1335-1351, 2001.

[8] LE VEQUE, R; LI,Z. - *The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources*, SIAM J. Numer. Anal. pp. 1019-1044, 1994.

[9] LIONHEART, W. *EIT reconstruction algorithms: pitfalls, challenges and recent developments*, Phis. Meas. pp 125-142, 2004.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{0}}$ 2 Novembro 2008

Soluções Globais para Equações Diferenciais Parciais Abstratas Impulsivas

Eduardo Hernández Morales, Hernán Henríquez & Sueli M. Tanaka Aki *

Nesse trabalho, nós discutimos a existência de soluções globais para uma equação diferencial funcional abstrata da forma:

$$
\begin{aligned}
u'(t) &= Au(t) + f(t, u(t), u(\rho(t))), \qquad t \in I, && (0.1)\\
u(0) &= u_0, && (0.2)\\
\triangle u(t_i) &= J_i(u(t_i)), \qquad i \in \mathbb{F}, && (0.3)
\end{aligned}
$$

Nessa equação, A é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ definidos num espaço de Banach X; $I = [0, a]$ ou $I = [0, \infty)$; os pontos t_i, $i \in \mathbb{F} \subset \mathbb{N}$, são números fixos pertencents ao interior de I; $\rho : I \to I$, $f : I \times X^2 \to X$, $J_i : X \to X$, $i \in \mathbb{F}$, são funções apropriadas e o símbolo $\triangle\xi(t)$ representa o salto da função ξ em t, que é definido por $\triangle\xi(t) = \xi(t^+) - \xi(t^-)$.

Existência de solução fraca para $I = [0, a]$

Definição 1. *Uma função $u \in \mathcal{PC}([0, a]; X)$ é dita uma solução fraca do sistema (0.1)-(0.3) se (0.2), (0.3) estão satisfeitas e*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s), u(\rho(s)))ds + \sum_{t_i<t} T(t-t_i)J_i(u(t_i)), \qquad t \in [0, a].$$

Vamos assumir as seguintes hipóteses:

$\mathbf{H_1}$ A função $\rho : [0, a] \to [0, a]$ é contínua e $\rho(t) \leq t$, para todo $t \in [0, a]$.

$\mathbf{H_2}$ A função $f : [0, a] \times X^2 \to X$ satisfaz as condições:

(a) A função $f(t, \cdot) : X^2 \to X$ é contínua $q.s.$ $t \in [0, a]$;

(b) A função $f(\cdot, x) : [0, a] \mapsto X$ é fortemente mensurável, para todo $x \in X$;

(c) Existem uma função contínua $m : [0, a] \to [0, \infty)$ e uma função não-decrescente $W : [0, \infty) \to (0, \infty)$ tal que
$$\| f(t, x, y) \| \leq m(t)W(\| x \| + \| y \|), \qquad t \in [0, a],\ x, y \in X.$$

$\mathbf{H_3}$ As aplicações $J_i : X \to X$ são completamente contínuas e uniformemente limitadas. Aqui $N_i = \sup\{\| J_i(x) \| : x \in X\}$.

Teorema 1. *Suponhamos que as hipóteses $\mathbf{H_1}, \mathbf{H_2}$ e $\mathbf{H_3}$ estejam satisfeitas. Suponha, também, que as seguintes propriedades sejam verificadas.*

(a) *Para todo $t \in [0, a]$ e $r > 0$, o conjunto $\{T(t)f(s, x, y) : s \in [0, t], \| x \| \leq r, \| y \| \leq r\}$ é relativamente compacto em X.*

(b) $2M \int_0^a m(s)ds < \int_c^\infty \frac{ds}{W(s)}$, *com $c = 2\left(M \| u_0 \| + \sum_{i=1}^n MN_i\right)$.*

*Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, USP, SP, Brasil, smtanaka@icmc.usp.br

Então, existe uma solução fraca para o sistema (0.1)-(0.3).

Prova. Usamos o Teorema Alternativo de Leray-Schauder para a aplicação $\Gamma : \mathcal{P}C([0,a];X) \to \mathcal{P}C([0,a];X)$ definida por

$$\Gamma u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s,u(s),u(\rho(s)))ds + \sum_{t_i<t} T(t-t_i)J_i(u(t_i)), \ \ t \in I. \quad \square \tag{0.4}$$

Existência de solução fraca para $I = [0, \infty)$

Teorema 2. *Suponha que a condição* $\mathbf{H_3}$ *valha e assuma que as hipóteses* $\mathbf{H_1}, \mathbf{H_2}$ *estejam satisfeitas para todo* $a > 0$. *Suponha, que também sejam válidas:*

- **(a)** *Para todo* $t > 0$ *e* $r > 0$, *o conjunto* $\{T(t)f(s,x,y) : s \in [0,t], \ x,y \in B_r(0,X)\}$ *seja relativamente compacto em* X*;*
- **(b)** *Para todo* $K > 0$, $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{g(t)} \int_0^t m(s)W(Kg(s))ds = 0$*;*
- **(c)** $c = M(\| u_0 \| + \sum_{i=1}^{\infty} N_i) < \infty$ *and* $2M \int_0^{\infty} m(s)ds < \int_c^{\infty} \frac{1}{W(s)}ds$.

Então, existe uma solução fraca para o problema de Cauchy abstrato no caso $I = [0, \infty)$.

Exemplo 1. *Consideremos o sistem diferencial parcial impulsivo:*

$$\left\{ \begin{array}{rl} \dfrac{\partial}{\partial t} w(\xi,t) & = \dfrac{\partial^2}{\partial \xi^2} w(\xi,t) + F(\xi,t,w(\xi,t),w(\xi,\rho(t))), \\ w(0,t) & = w(\pi,t) = 0, \qquad\quad t \geq 0, \\ \Delta w(\cdot,t_i) & = w(\cdot,t_i^+) - w(\cdot,t_i^-) = \int_0^{\pi} p_i(s,w(\xi,t_i))ds, \end{array} \right. \tag{0.5}$$

onde $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência estritamente crescente de números positivos.*

- **(a)** *A função* $\rho : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *é contínua e* $\rho(t) \leq t$ *para todo* $t \geq 0$.
- **(b)** *A função* $F : [0,\pi] \times [0,\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é contínua e existe uma função contínua, positiva* $\eta(\cdot) : [0,\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que*
$$| F(\xi,t,w_1,w_2) | \leq \eta(\xi,t)(| w_1 | + | w_2 |), \qquad t \geq 0, \xi \in [0,\pi], w_i \in \mathbb{R}.$$
- **(c)** *As funções* $p_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, *são contínuas e existem constantes positivas* L_i *tal que*
$$| p_i(t,s) - p_i(t,\bar{s}) | \leq L_i \mid s - \bar{s} \mid, \qquad t,\bar{t} \in [0,\pi], s,\bar{s} \in \mathbb{R}.$$

Teorema 3. *Assuma que as condições* **(a)-(c)** *estão satisfeitas. Se*

$$2\int_0^{\infty} \eta(\cdot,s)_{0,\pi} ds + \sum_{i=1}^{\infty} L_i < 1,$$

então, existe uma solução fraca para o sistema impulsivo (0.5).

Referências

[1] Hernández, E., Henríquez, H., Tanaka, S. M.- *Global solutions for impulsive abstract differential equations.*, Comput. Math. Appl. 56 (2008) 5, 1206-1215.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{0}}$ 2 Novembro 2008

SOLUÇÕES POSITIVAS PARA UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍPTICOS COM BLOW-UP NO INFINITO

A. R. F. HOLANDA *

Neste trabalho estudamos existência e comportamento assintótico de soluções para o seguinte problema

$$\begin{cases} (r^\alpha |u'(r)|^\beta u'(r))' = \lambda r^\gamma f(r, u(r), |u'(r)|) \\ u > 0 \quad , r \geq 0 \\ u(0) = \xi \quad , \quad u'(0) = 0 \\ u(r) \longrightarrow \infty \quad \text{com} \quad r \longrightarrow \infty \end{cases} \tag{0.1}$$

onde α, β e γ são constantes reais, λ, ξ são parâmetros positivos e $f : \overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma função contínua, satisfazendo as seguintes hipóteses:

(H_1) $\alpha \in \mathbb{R}, \beta > -1, \gamma \geq \theta = \theta(\alpha)$ onde

$$\theta(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{se} \quad \alpha \geq 0 \\ 0, & \text{se} \quad \alpha < 0 \end{cases}.$$

(H_2) $f(t, y, z)$ é não decrescente em y, z para cada t, z e t, y fixados, respectivamente.

(H_3) Existe uma constante $a > 0$ tal que

$$\int_0^\infty t^{\gamma-\theta} f(t, a(\phi(t) + 1), a\phi'(t))dt < \infty$$

onde $\phi(t) = \frac{1}{b}t^b; b = b(\alpha, \beta) = \frac{\theta-\alpha+\beta+1}{\beta+1}$.

A pesquisa sobre soluções tipo blow-up em diversas classes de equações diferenciais, tais como, equações elípticas com blow-up no infinito, tem despertado o interesse de um grande número de matemáticos nas últimas décadas, onde destacamos os trabalhos de Cirstea e Radulescu [1], Lair e Wood [3] e Mohammed [4],[5].

O principal resultado deste trabalho pode ser aplicado a várias classes de tais problemas elípticos. Por exemplo, se $\alpha = \gamma = N - 1$, $\beta = p - 2$ e $f(x, u, |\nabla u|) = \rho(|x|)g(u)$ temos que as soluções de (0.1) são soluções radialmente simétricas da equação

$$\begin{cases} \Delta_p u = \lambda \rho(|x|)g(u), \quad \mathbb{R}^N \\ u > 0, \quad \mathbb{R}^N \\ u(x) \longrightarrow \infty \quad \text{com} \quad |x| \longrightarrow \infty \end{cases} \tag{0.2}$$

onde Δ_p é o operador Laplaciano, dado por, $\Delta_p u = div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$, $1 < p < \infty$.

Observamos que resolver (0.1) é equivalente a encontrar um ponto fixo do operador $F := F_{\lambda\xi}$ dado por

$$(Fu)(r) = \xi + \int_0^r \left(\lambda s^{-\alpha} \int_0^s t^\gamma f(t, u(t), u'(t))dt\right)^{1/\beta+1} ds,$$

definido em algum subconjunto de $X := C^1([0, \infty))$. Neste sentido, seguimos as idéias de Kusano e Swanson [2], aplicamos o Teorema de Ponto Fixo de Schauder-Tychonov para obter o seguinte resultado:

*UFCG, DME, PB, Brasil, angelo@dme.ufcg.edu.br

Teorema 0.1. *Se* $(H_1) - (H_3)$ *valem, então existe* $\lambda_0 > 0$ *tal que o problema* (0.1) *tem uma solução crescente* $u \in C^2([0,\infty))$, *para todo* $\lambda \in (0, \lambda_0]$ *e para todo* $\xi \in (0, a]$. *Além disso a solução u satisfaz*

$$\xi \leq u(r) \leq \xi(\phi(r) + 1), r \geq 0$$

e é estritamente convexa se $\alpha \leq 0$.

Referências

[1] CIRSTEA, F. & RADULESCU, V.-*Blow-Up boundary solutions of semilinear problems*, Nonlinear Anal. **48** (2002), 521-534.

[2] KUSANO, T. & SWANSON, C. A. *Existence theorems for elliptic Monge-Ampére equations in the plane*, Differential and Integral Equations. **3** (1990), 487-493.

[3] LAIR, A. V. & WOOD, A. W. *Large solutions of sublinear elliptic equations*, Nonlinear Anal. **39** (2000), 745-753.

[4] MOHAMMED, A. *Existence and asymptotic behavior of blow-up solutions to weighted quasilinear equations*, J. Math. Anal. Appl. **298** (2004), 621-637.

[5] MOHAMMED, A. *Boundary asymptotic and uniqueness of solutions to the p-Laplacian with infinite boundary values*, J. Math. Anal. Appl. (2006).

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{o}}$ 2 Novembro 2008

Soluções positivas para equações elípticas com não-linearidades supercríticas

Paulo Rabelo *

Empregaremos métodos minimax para estabelecer a existência de uma solução limitada positiva para a equação semilinear elíptica da forma

$$-\Delta u + V(x)u = \quad P(x)|u|^{p-1}u + Q(x)|u|^{q-1}u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{0.1}$$

onde $N \geq 3$, $1 < q < p^{\#} < 2^* - 1 \leq p$, $p^{\#} = 2^* - 1 - 4(\alpha(N-2))^{-1}$ e $\alpha > 1$. O termo não-linear possui crescimento supercrítico e pode ser ilimitado na variável x, enquanto o potencial muda de sinal. As soluções do problema serão obtidas por provarmos estimativas apriori para soluções de um problema auxiliar. Utilizaremos como espaço ambiente o subespaço de $H^1(\mathbb{R}^N)$ dado por

$$E = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2\, dx < \infty \right\}.$$

O objetivo deste trabalho é estender ou complementar os resultados de existência para esse tipo de problema, no sentido que usamos uma classe mais geral de potenciais e não-linearidades. Proporcionamos também uma resposta positiva para a questão introduzida por Sirakov em [10] ao considerar o problema

$$-\Delta u + |x|^a u = |x|^b u^{p-1} u \text{ em } \mathbb{R}^N, \tag{0.2}$$

onde $a > b \geq 0$ e $N \geq 3$. Em [10], o autor estabeleceu a existência de uma solução positiva para (0.2) quando $1 < p < p^{\#}$. Por outro lado, usando a identidade de Derrick-Pohozaev, é mostrado que não existe solução para $p > \widetilde{p} = 2^* - 1 + 2b/(a(N-2))^{-1}$. Então um "gap"$[p^{\#}, \widetilde{p}]$ permanece entre a região de existência e a região de não existência do espaço. Neste trabalho, obtemos soluções para $p \in [2^* - 1, \widetilde{p})$ quando o potencial não é necessariamente radial. Pelo nosso conhecimento, esta é a primeira vez que uma resposta positiva para esta questão no caso não-radial aparece na literatura.

Assumiremos as seguintes hipóteses sobre o potencial:

(V_1) Existe $B > 0$ tal que $V(x) \geq -B$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Para assegurar o mergulho contínuo de E em $H^1(\mathbb{R}^N)$, supomos que o primeiro autovalor do operador $-\Delta + V(x)$ é positivo, ou seja,

(V_2) $\lambda_1 = \inf\limits_{\substack{u \in E,\\ \|u\|_2 = 1}} \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 + V(x)u^2]\, dx > 0.$

Usamos a seguinte notação: se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e $2 \leq s < 2N/(N-2)$, fazemos

$$\nu_s(\Omega) = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega)\\ \|u\|_s = 1}} \int_\Omega \left[|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right]\, dx$$

e $\nu_s(\emptyset) = \infty$. Com o objetivo de obtermos compacidade, consideramos também as seguintes hipóteses:

(V_3) $\lim_{R \to \infty} \nu_s(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B}_R) = \infty$.

*Universidade Federal de Sergipe, SE, Brasil, rabeloa@ufs.br

(V_4) Existe uma função $K(x) \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, com $K(x) \geq 1$, e constantes $\alpha > 1$, c_0, $R_0 > 0$ tais que

$$K(x) \leq c_0 \left[1 + \left(V^+(x)\right)^{1/\alpha}\right] \quad \text{para todo} \quad |x| \geq R_0,$$

onde $V^+(x) = \max_{x \in \mathbb{R}^N}\{0, V(x)\}$.

Quanto à não-linearidade, assumimos que $P,\ Q \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ são não-negativas e podem ser ilimitadas em x desde que o crescimento de P e Q seja controlado pelo crescimento de $V(x)$. Mais precisamente,

(H) $P(x) + Q(x) \leq cK(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Nosso principal resultado para o problema (0.1) é o seguinte:

Teorema 0.1. *Suponhamos que* (V_1)–(V_4) *e* (H) *valem. Então o problema* (0.1) *tem uma solução positiva forte* $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N)$ *proposto que uma das seguintes condições seja satisfeita:*

(i) $Q(x) \not\equiv 0$ *e* $P(x)$ *é positiva em algum lugar;*

(ii) $Q(x) \equiv 0$ *e* $P(x)$ *é ilimitada.*

Referências

[1] BENCI, V. AND CERAMI, G. - *Existence of positive solutions of the equation* $-\Delta u + a(x)u = u^{(n+2)/(n-2)}$ *in* $\mathbb{R}^N$, J. funct. Analysis, **80** (1990).

[2] BERESTYCKI, H. AND LIONS, P. L. - *Nonlinear scalar field equations I and II*, Arch. Ration. Mech. Analysis **82** (1983).

[3] CHABROWSKI, C. AND YANG, J. - *Existence theorems for elliptic equations involving supercritical Sobolev exponent*, Advances in Differential equations **2** (1997).

[4] GILBARG, D. AND TRUDINGER, N. - *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer (1983), (2nd. ed).

[5] MIYAGAKI, O. H. - *On a class of semilinear elliptic problems in* $\mathbb{R}^N$ *with critical growth*, Nonlinear Analysis, **29** (1997).

[6] MOSER, J. - *A new proof de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Apll. Math. **13** (1960), 457–468.

[7] NOUSSAIR, E. S., SWANSON, C. A. AND JIANFU, Y. - *Positive finite energy solutions of critical semilinear elliptic problems*, Can. J. Math., **44** (1992), 1014–1029.

[8] RABINOWITZ, P. H. - *Variational methods for nonlinear elliptc eigenvalue problems*, Indiana Univ. J. Maths. **23** (1974), 729–754.

[9]RABINOWITZ, P. H. - *On a class of nonlinear Schrödinger equations*, Z. Angew Math. Phys. **43** (1992) 272–291.

[10] SIRAKOV, B. - *Existence and multiplicity of solutions of semilinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$, Calc. of Var. and PDE **11** (2000), 119–142.

[11] STRAUSS, W. A. - *Existence of solitary waves in higher dimensions*, Comm. Math. Phys. **55**, (1977), 149–162.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{o}}$ 2 Novembro 2008

SOLUÇÕES POSITIVAS PARA PROBLEMAS COM O P-LAPLACIANO EM $\mathbb{R}^N$ COM UMA NÃO-LINEARIDADE GENÉRICA

E. Gloss *

Neste trabalho estudamos existência e concentração de soluções positivas para equações da forma

$$-\varepsilon^p \Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = f(u), \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{1}$$

onde ε é um parâmetro positivo pequeno, $\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o operador p-Laplaciano e $1 < p < N$.

Problemas deste tipo são motivados pelo caso semilinear, p=2, cujas soluções são ondas estacionárias para a equação de Schrödinger não linear dada por

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2}\Delta\psi - V(x)\psi + f(\psi) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N.$$

Em nosso trabalho, o potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo as seguintes condições:

(V_1) V é limitado inferiormente por uma constante positiva, isto é, $\inf_{x\in\mathbb{R}^N} V(x) = V_0 > 0$;

(V_2) existe um domínio limitado $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^N$ tal que $m \equiv \inf_{x\in\mathcal{O}} V(x) < \inf_{x\in\partial\mathcal{O}} V(x)$.

Para provar a existência de soluções positivas para problemas do tipo (1) muitos trabalhos, entre os quais [2] e [3], consideram uma condição de monotonicidade sobre $t^{1-p}f(t)$ e a conhecida condição de Ambrosetti-Rabinovitz.

Nosso objetivo é obter resultados semelhantes aos atingidos por Byeon and Jeanjean em [1], para o caso do Laplaciano, onde eles consideram condições sobre a não linearidade f ditas serem ótimas e diferentes das citadas acima.

Consideramos $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo:

(F_1) $\lim_{t\to 0^+} f(t)/t^{p-1} = 0$;

(F_2) existe algum $q \in (p-1, p^*-1)$ tal que $\limsup_{t\to\infty} f(t)/t^q < \infty$, onde $p^* = Np/(N-p)$;

(F_3) existe $T > 0$ tal que $mT^p < pF(T)$, onde $F(t) = \int_0^t f(s)ds$.

Denotemos

$$\mathcal{M} \equiv \{y \in \mathcal{O} \mid V(y) = m\}.$$

O teorema seguinte é o nosso principal resultado.

Theorem 0.1. *Seja $1 < p < N$ e suponha que $(V_1) - (V_2)$ e $(F_1) - (F_3)$ são satisfeitos. Então para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno existe uma solução positiva u_ε de (1), a qual satisfaz*

(i) *existe um ponto de máximo x_ε de u_ε tal que $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{dist}(x_\varepsilon, \mathcal{M}) = 0$, e, para tais x_ε, $w_\varepsilon(x) \equiv u_\varepsilon(\varepsilon x + x_\varepsilon)$ converge (a menos de subsequência) uniformemente a uma solução de menor energia de*

$$-\Delta_p u + mu^{p-1} = f(u), \quad u > 0, \quad u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N). \tag{2}$$

(ii) *$u_\varepsilon(x) \le C\exp(-(c/\varepsilon)(|x - x_\varepsilon|))$ para algumas constantes $C, c > 0$.*

Idéia da prova: Consideramos uma modificação adequada da função f, denotada por g, e, escrevendo $V_\varepsilon(x) = V(\varepsilon x)$, buscamos solução positiva para o problema

$$-\Delta_p u(x) + V_\varepsilon(x)|u(x)|^{p-2}u(x) = g(\varepsilon x, u(x)), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{3}$$

*UNICAMP , IMECC, SP, Brasil, elisandra.gloss@gmail.com

Definimos $P_\varepsilon : H_\varepsilon \to \mathbb{R}$, $Q_\varepsilon : H_\varepsilon \to \mathbb{R}$ e $J_\varepsilon : H_\varepsilon \to \mathbb{R}$ por

$$P_\varepsilon(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + V_\varepsilon(x)|u|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(\varepsilon x, u)dx, \quad Q_\varepsilon(u) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \chi_\varepsilon(x)|u|^p dx - 1\right)_+^{\frac{q+1}{p}} \quad \text{e} \quad J_\varepsilon = P_\varepsilon + Q_\varepsilon$$

onde H_ε é o completamento de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ com respeito à norma $\|u\|_\varepsilon^p = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(y)|^p + V_\varepsilon(y)|u(y)|^p dy$ e, para $\mu > 0$ arbitrário fixado, $\chi_\varepsilon(y) = 0$ se $\varepsilon y \in \mathcal{O}$ e $\chi_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-\mu}$ se $\varepsilon y \notin \mathcal{O}$. Fixando U uma solução de menor energia do problema (2) (a qual existe por [4]), consideramos uma função corte φ conveniente e, para $U_t(x) = U(x/t)$ e $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$, vemos que existe $t_0 > 0$ tal que

$$J_\varepsilon(\varphi_\varepsilon U_{t_0}) < -2 \quad \text{para } \varepsilon > 0 \text{ suficientemente pequeno.}$$

Definindo $C_\varepsilon = \inf_{\gamma\in\Gamma_\varepsilon} \max_{s\in[0,1]} J_\varepsilon(\gamma(s))$ provamos que $\lim_{\varepsilon\to 0} C_\varepsilon = E_m$, onde E_m é o nível de menor energia do funcional associado ao problema (2) e $\Gamma_\varepsilon = \{\gamma \in C([0,1], H_\varepsilon)|\gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = \varphi_\varepsilon U_{t_0}\}$. Usando estes resultados e argumentos de deformarção, provamos a existência de uma sequência P-S (u_n) em um conjunto limitado apropriado de H_ε, para $\varepsilon > 0$ pequeno. Tomando u_ε o limite fraco de (u_n) em H_ε, vemos que de fato esta convergência é forte, e assim u_ε é um ponto crítico de J_ε. Além disso, verificamos que $u_\varepsilon > 0$ se $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno. Usando o método iterativo de Moser, obtemos que (u_ε) é limitado em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Baseando-se nisto e usando um princípio de comparação provamos um decaimento exponencial para u_ε

$$u_\varepsilon(x) \le C\exp(-c\,\mathrm{dist}(\mathrm{x}, \mathcal{M}_\varepsilon^{2\delta})) \quad \text{para todo} \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^\mathrm{N}$$

onde $C, c > 0$ são constantes independentes de ε, $\mathcal{M}_\varepsilon^{2\delta} = \{x \in \mathbb{R}^N|\mathrm{dist}(\mathrm{x}, \mathcal{M}_\varepsilon) \le 2\delta\}$ e $\mathcal{M}_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^N|\varepsilon x \in \mathcal{M}\}$. Desta forma vemos que $Q_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0$ para ε pequeno. Ou seja, u_ε é uma solução positiva para o problema (3). Além disso, $g(\varepsilon x, u_\varepsilon) = f(u_\varepsilon)$ e definindo $v_\varepsilon(x) = u(x/\varepsilon)$ temos v_ε solução do problema (1). As demais propriedades das soluções são obtidas no decorrer da construção.

Referências

[1] BYEON, J. and JEANJEAN, L. - *Standing Waves for Nonlinear Schrödinger Equations with a General Nonlinearity*, Arch. Ration. Mech. Anal., 185 (2007), p. 185-200.

[2] DEL PINO, M. and FELMER, P. L. - *Local mountain passes for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Calc. Var., 4 (1996), pp. 121-137.

[3] DO Ó, J. M. - *On existence and concentration of positive bound states of p-Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ involving critical growth*, Nonlinear Analysis, 62 (2005), pp. 777-801.

[4] DO Ó, J. M. and DE MEDEIROS, E. S. - *Remarks on least energy solutions for quasilinear elliptic problems in R^N*, Electron J. Differential Equations, 83 (2003), pp. 1-14.

[5] FIFE, P. C. - *Semilinear elliptic boundary value problems with small parameters*, Arch. Rational Mech. Anal., 52 (1973), pp. 205-232.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

SOLUTIONS OF A SEMILINEAR WAVE EQUATION WITH NONLINEAR BOUNDARY DISSIPATION

Aldo T. Louredo * & M.Milla Miranda †

In this work we study the existence and the decay of solutions of the following nonlinear hyperbolic problem:

$$\left| \begin{array}{l} u'' - \Delta u + f(.,u) + g(.,u') = 0 \ in \ \Omega \times]0,\infty[; \\ u = 0 \ on \ \Gamma_0 \times]0,\infty[; \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + h(.,u') = 0 \ on \ \Gamma_1 \times]0,\infty[; \\ u(0) = u^0, \ \ u^1 \ in \ \Omega. \end{array} \right.$$

Here Ω is an open bounded set of $\mathbb{R}^n$ whose boundary $\Gamma \in C^2$ is constituted by two disjoint closed sets Γ_0 and Γ_1 both with positive Lebesgue's measure; $\nu(x)$ is the outward unit normal at $x \in \Gamma_1$; $f(x,s)$, $g(x,s)$ are real functions defined on $\Omega \times \mathbb{R}$ and $h(x,s)$ a real function defined on $\Gamma_1 \times \mathbb{R}$.

In order to state our main result we introduce the following hypotheses:
$(H1)$ Assume that $f, g \in C^0(\mathbb{R}; L^\infty(\Omega))$ with $f(x,s)$ and $g(x,s)$ non decreasing in s for *a.e.* $x \in \Omega$ and $f(x,0) = 0$, $g(x,0) = 0$ for *a.e.* $x \in \Omega$ and $f(x,s)$ is Lipschitian in $s \in \mathbb{R}$, uniformly on Ω, that is,

$$|f(x,s) - f(x,r)| \leq f_0|s-r|, \ \forall s,r \in \mathbb{R} \ \ for \ \ a.e. \ x \in \Omega \ \ (f_0 \ \text{positive constant});$$

$(H2)$ $|g(x,s)| \leq c^*|s|, \ \forall s \in \mathbb{R} \ \ for \ \ a.e \ \ x \in \Omega$ (c^* positive constant);
$(H3)$ and $h \in C^0(\mathbb{R}; L^\infty(\Gamma_1))$ non decreasing in s for a.e. $x \in \Gamma_1$; satisfying $h(x,0) = 0$ and

$$[h(x,s) - h(x,r)](s-r) \geq h_0(s-r)^2, \ \forall s,r \in \mathbb{R} \ for \ a.e \ x \in \Gamma_1 \ (h_0 \ positive \ constant);$$

Consider the Hilbert space

$$V = \{v \in H^1(\Omega); \ v = 0 \text{ on } \Gamma_0\}$$

equipped with Dirichlet scalar product.

Theorem 0.1. *Assume hypotheses* $(H1)$-$(H3)$. *Consider* u^0 *and* u^1 *such that*

$$u^0 \in D(-\Delta), \ u^1 \in H_0^1(\Omega)$$

Then there exists a function u in the class

$$u \in L^\infty_{loc}(0,\infty;V) \ , \ u' \in L^\infty_{loc}(0,\infty;V) \ , u'' \in L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)).$$

such that

$$\left| \begin{array}{l} u'' - \Delta u + f(.,u) + g(.,u') = 0 \ in \ L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)); \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + h(.,u') = 0 \ in \ L^1_{loc}(0,\infty;L^1(\Gamma_1)); \\ u(0) = u^0, \ u'(0) = u^1 \end{array} \right.$$

*Instituição, DME-UEPB, PB, Brasil, aldotl@bol.com.br, Partially supported by Capes
†Instituição, IM-UFRJ, RJ, Brasil, e-mail milla@im.ufrj.br

Corollary 0.1. *Under the supplementary hypothesis*

$$|h(x,s)| \leq d^*|s|, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad for\ a.e\ x \in \Gamma_1 \quad (d^*\ \ positive\ constant),$$

there exists a unique function u in the class

$$u \in L^{\infty}_{loc}(0,\infty;V) \cap L^2_{loc}(0,\infty;H^{\frac{3}{2}}(\Omega)),\ u' \in L^{\infty}_{loc}(0,\infty;V),\ u'' \in L^{\infty}_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)).$$

such that

$$\left| \begin{array}{l} u'' - \triangle u + f(.,u) + g(.,u') = 0\ in\ L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)); \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + h(.,u') = 0\ in\ L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Gamma_1)) \\ u(0) = u^0,\ u'(0) = u^1 \end{array} \right.$$

Proof of Therem We use the Galerkin method with a special basis of $V \cap H^2(\Omega)$, approximate the functions g and h by the Strauss'approach and apply a Trace Theorem.

References

[1] ARARUNA, F.D. AND MACIEL A.B.- *Existence and boundary stabilization of the semilinear wave equation*, Nonlinear Analysis 67(2007),1288-1305.

[2] CALVACANTI, M.M., CAVALCANTI, V.D. AND MARTINEZ, P.- *Existence and decay rate estimates for the wave equation with nonlinear boundary damping and source term*, J. Differential Equations 203 (2004),119-158.

[3] KOMORNIK, V.- *Exact Controllability and Stabilization-The Multiplier Method*, John Wiley & Sons, 1994.

[4] KOMORNIK, V.AND ZUAZUA, E.- *A direct method for boundary stabilization of the wave equation*, J. Math. Pure Appl. 69(1990), 33-54.

[5] LASIECKA, I. AND TATARU, D.- *Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary damping*, Differential Integral Equations 6 (1993), 507-533.

[6] MEDEIROS, L.A.- *Tópicos em Equações Diferenciais Parciais* - Parte 1, Editora UFRJ, Rio de Janeiro ,RJ, 2006

[7] MILLA MIRANDA, M.- *Traço para o dual dos espaços de Sobolev*, Bol. Soc. Paran.Matemática (2^a série) 11(2)(1990), 131-157.

[8] MILLA MIRANDA, M. AND MEDEIROS, L.A.- *On a boundary value problem for the wave equation:Existence uniqueness-asymptotic behavior*, Revista de Matemáticas Aplicadas, Universidad de Chile, (1996), 47-73

[9] MILLA MIRANDA, M. AND SAN GIL JUTUCA, L.P.- *Existence and boundary stabilization of solutions for the Kirchhoff equation*, Commun. in Partial Differential Equations 24 (1999), 1759-1880

[10] STRAUSS, W.A- *On weak solutions of semilinear hyperbolic equations*, An. Acad. Brasil. Ciênc. (42)(1970),645-651

[11] ZUAZUA, E.- *Uniform stabilization of the wave equation by nonlinear boundary feedback*, SIAM J. Control Optim. 28 (1990), 466-478.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

Stability of the null solution of the equation $x^{'}(t) = -a(t)x(t) + b(t)x([t])$

M. A. BENÁ * & S. A. S. MARCONATO † & W. SEIXAS ‡

Abstract

The asymptotic stability of the null solution of the differential equation $x^{'}(t) = -a(t)x(t) + b(t)x([t])$ with argument $[t]$, where $[t]$ designates the greatest integer function, is studied by means of dichotomic maps.

Summary

The study of differential equations by using dichotomic maps has been the subject of some investigations such as Carvalho & Ferreira [2], Bená & Dos Reis [1], Carvalho & Marconato [3], Marconato [4,5,7] and Marconato & Spezamiglio [6]. In [3] Carvalho and Marconato presented the method of dichotomic maps to study the stability of the null solution of certain differential equations with piecewise continuous argument, and in [5] Marconato proved that the null solution of the equation $x^{'}(t) = cx(t) + bx([t]), t \geq 0$ is asymptotically stable, since $c \leq -\delta < 0$, $|b| < k\delta$, $\delta > 0$ and $k \in (0, 1)$.
The aim of this work is to extend the result to the equation

$$x^{'}(t) = -a(t)x(t) + b(t)x([t]) \qquad (1.1)$$

with imposed conditions about the functions $a(t)$ and $b(t)$.
This equation is a particular case of the equation

$$x'(t) = f(t, x(t), x([t])) \qquad (1.2)$$

where $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is a continuous map with $f(t, 0, 0) = 0$ for all $t \in \mathbb{R}$. We denote by $x(., t_o, \psi)$ the solution of (1.2) with $x_{t_o}(., t_o, \psi) = \psi$ and

$$x_t(., t_o, \psi)(\theta) = x(t + \theta, t_o, \psi), \qquad \theta \in [-1, 0] \qquad (1.3)$$

$\psi \in C$, where C denotes the Banach space of the continuous maps from [-1,0] into $\mathbb{R}^n$.
The solution through $\psi \equiv 0$, that is, $x(., t_o, 0)$, is the null solution.
If $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is a continuous map, roughly speaking, we say that V is dichotomic with respect to (1.2) if, for all points where the derivative with respect t of V along (1.2) is nonnegative at time t, then there exists a previous instant $\bar{t}$, $\bar{t} < t$ such that $V(t, x(t)) \leq V(\bar{t}, x(\bar{t}))$.
V is strictly dichotomic with respect to (1.2) when:
(i) if V is as above, then we must have $p(V(t, x(t)) < V(\bar{t}, x(\bar{t}))$ with p continuous and nondecreasing, $p(y) > y$, $y \in (0, \delta)$ for some $\delta > 0$ and $t - \bar{t} \leq M < \infty$, and
(ii) if the derivative with respect to t of V along a solution tends to zero as $t \to \infty$ and if V tends to a constant function as $t \to \infty$, it must imply that this solution tends to the null solution as $t \to \infty$.

We will use the following results [3] to prove the desired result:

*FFCLRP, USP, Ribeirão Preto, SP, Brasil, mabena@ffclrp.usp.br
†IGCE, UNESP, Rio Claro, SP, Brasil, sasmarc@rc.unesp.br
‡IGCE, UNESP, Rio Claro, SP, Brasil, seixas@rc.unesp.br

Theorem 0.1. *: Let $u, v : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ be continuous, nondecreasing functions, which are positive for $s > 0$ and $u(0) = v(0) = 0$. If there exists a positive definite dichotomic map with respect to (1.2), $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ such that*

$$u(|x|) \leq V(t, x) \leq v(|x|), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

then the null solution of (1.2) is stable.

Theorem 0.2. *Let V be a continuously differentiable strictly dichotomic map with respect to (1.2) in Theorem (0.1). Then, the null solution of (1.2) is asymptotically stable.*

Now, we present the main result:

Theorem 0.3. *Let $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ and $b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ be a continuous maps such that $0 < c \leq a(t) < +\infty$ and $\mid b(t) \mid \leq b < \mu.c$ for all t and for some $0 < \mu < 1$. Then the null solution of (1.1) is asymptotically stable.*

Proof The idea of the proof is to suppose $V'(x_t) \geq 0$ for some t with $V(x) = \frac{x^2}{2}$, that is,

$$V'(x_t) = x(t).x'(t) = x(t)[-a(t)x(t) + b(t)x([t])] \geq 0$$

and to analyze the cases $x(t) \geq 0$ and $x(t) < 0$, with the considerations of the signal of $b(t)$ and $x([t])$.
We observe that, if $V'(x_t) \geq 0$, then $b(t) \neq 0$ and, for example, if $x(t) \geq 0$ with $V'(x_t) \geq 0$, it follows that $b(t)x([t]) \geq a(t)x(t)$ and by considering $b(t) > 0$ and $x([t]) \geq 0$, we have that

$$x([t]) \geq \frac{a(t)}{b(t)}x(t) \geq \frac{c}{b}x(t) > \frac{1}{\mu}x(t)$$

and therefore, $\frac{x^2([t])}{2} > \frac{x^2(t)}{2\mu^2}$.
By considering the map $p(y) = \frac{y}{\mu^2}$ for $y > 0$, we have that $p(V(x(t)) < V(x([t]))$, that is, if $V'(x_t) \geq 0$ for some t, we have, in this case, an anterior instant, $[t]$, such that $p(V(x(t)) < V(x([t]))$ and therefore, the map V is a strictly dichotomic map with respect to (1.1) and, by Theorem (0.2), the null solution of (1.1) is asymptotically stable. The proof is analogous at the other cases.

References

[1] BENÁ, M. A., DOS REIS, J. G. - Some Results on Stability of Retarded Functional Differential Equations Using Dichotomic Map Techniques, *Positivity,* Vol **2** (1998) pp. 229-238.

[2] CARVALHO, L. A. V., FERREIRA, R. R. - On a New Extension of Liapunov's Direct Method to Discrete Equations, *Quart. Appl. Math.,* Vol **46** (1988) pp. 779-788.

[3] CARVALHO, L. A. V., MARCONATO, S. A. S. - On Dichotomic Maps for Differential Equations with Piecewise Continuous Argument (EPCA), *Communications in Applied Analysis,* Vol **1**, No. 1 (1997), pp. 103-112.

[4] MARCONATO, S. A. S. - On Dichotomic Maps for Non Autonomous Discrete Equations, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems,* Vol **7** (2000), pp. 325-333.

[5] MARCONATO, S. A. S. - The Relationship Between Differential Equations with Piecewise Constant Argument and the Associated Discrete Equations via Dichotomic Maps, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems,* Vol **12** (2005), pp. 755-768.

[6] MARCONATO, S. A. S., SPEZAMIGLIO, A. - Stability of Differential Equations with Piecewise Constant Argument via Discrete Equations, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems,* Vol **7** (2000), pp. 325-333.

[7] MARCONATO, S. A. S. - On Stability of Differential Equations with Piecewise Constant Argument and The Associated Discrete Equations Using Dichotomic Map, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems,* Vol **15**, No. 3 (2008) (to appear).

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

Summability properties of multilinear mappings

O. Blasco * G. Botelho † D. Pellegrino ‡ P. Rueda §

In this note we present several new coincidence results for absolutely summing mappings. We also present a generalization of the celebrated Littlewood 4/3-Theorem.

1 Coincidence results

For $0 < p, p_1, p_2, \ldots, p_n \leq \infty$, we assume that $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n}$. A multilinear mapping $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ is *absolutely* $(p; p_1, p_2, \ldots, p_n)$*-summing* if there exists $C > 0$ such that

$$\|(A(x_j^1, x_j^2, \ldots, x_j^n))_j\|_p \leq C \prod_{i=1}^{n} \|(x_j^i)_j\|_{w,p_i}$$

for all finite family of vectors x_j^i in E_i for $i = 1, 2, \ldots, n$. The infimum of such $C > 0$ is called the $(p; p_1, \ldots, p_n)$-summing norm of A and is denoted by $\pi_{(p;p_1,\ldots,p_n)}(A)$. Let $\Pi_{(p;p_1,p_2,\ldots,p_n)}(E_1, \ldots, E_n; F)$ denote the space of all absolutely $(p; p_1, p_2, \ldots, p_n)$-summing n-linear mappings from $E_1 \times \cdots \times E_n$ to F endowed with the norm $\pi_{(p;p_1 \ldots,p_n)}$. When $F = \mathbb{K}$ we just write $\Pi_{(p;p_1,p_2,\ldots,p_n)}(E_1, \ldots, E_n)$

Theorem 1.1. *Let $n \geq 2$, $1 \leq p_i \leq \infty$, $p_n \geq 2$ and*

$$n - \frac{3}{2} \leq \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n}.$$

If E'_n has the Littlewood-Orlicz property and

$$n - \frac{3}{2} \leq \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} - \frac{1}{p},$$

then $\mathcal{L}(E_1, \ldots, , E_n) = \Pi_{(p;p_1,\ldots,p_n)}(E_1, \ldots, E_n)$.

Theorem 1.2. *Let $n \geq 2$ and $E_1, \ldots, E_n$ be Banach spaces such that $E'_3, \ldots, E'_n$ have the Littlewood-Orlicz property and every continuous bilinear form on $E_1 \times E_2$ is 2-dominated. Then $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n) = \Pi_{(1;2,\ldots,2)}(E_1, \ldots, E_n)$.*

Corollary 1.1. *Let $E_1, \ldots, E_n$ be Banach spaces such that $E_1 = E_2$ and each E_j is either an $\mathcal{L}_\infty$-space, the disc algebra $\mathcal{A}$ or the Hardy space $\mathcal{H}^\infty$. Then $\mathcal{L}(E_1, \ldots, , E_n) = \Pi_{(1;2,\ldots,2)}(E_1, \ldots, E_n)$.*

The same reasoning gives the following result:

Theorem 1.3. *If $E'_2, \ldots, E'_n$ have the Littlewood-Orlicz property and $A \colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow \mathbb{K}$ is multilinear and bounded, then $\mathcal{L}(E_1, \ldots, , E_n) = \Pi_{(1;1,2,\ldots,2)}(E_1, \ldots, E_n)$.*

Theorem 1.4. *Let $1 \leq r \leq 2$. If $\mathcal{L}(^2E) = \Pi_{(1;r,r)}(^2E)$ and $\pi_{(1;r,r)} \leq C\| \cdot \|$, then*

(i) For n even, $\mathcal{L}(^nE) = \Pi_{(1;r,\ldots,r)}(^nE)$ and $\pi_{(1;r,\ldots,r)} \leq C^{n/2}\| \cdot \|$.

(ii) For $n \geq 3$ and odd, $\mathcal{L}(^nE) = \Pi_{(r;r,\ldots,r)}(^nE)$ and $\pi_{(r;r,\ldots,r)} \leq C^{(n-1)/2}\| \cdot \|$.

*Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Valencia, 46.100 Burjasot - Valencia, Spain, oscar.blasco@uv.es.
†Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlandia, Uberlandia, MG, Brazil, botelho@ufu.br
‡Departamento de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, 58.051-900 - João Pessoa, Brazil, pellegrino.math@gmail.com
§Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Valencia, 46.100 Burjasot - Valencia, Spain, pilar.rueda@uv.es

2 An extension of Littlewood's $4/3$ theorem

One of the versions of the celebrated Littlewood 4/3 Theorem asserts that if $T\colon c_0 \times c_0 \to \mathbb{K}$ is a continuous bilinear form, then

$$\left(\sum_{j,k} |T(e_j, e_k)|^{4/3}\right)^{3/4} \leq c\,\|T\| \tag{2.1}$$

with $c = \sqrt{2}$. In [1, p. 463] it is proved that in the complex case the best constant c satisfying (2.1) is dominated by $2^{1/4}K_G^{1/2}$, i.e.,

$$c \leq 2^{1/4}K_G^{1/2}, \tag{2.2}$$

where K_G is Grothendieck's constant (note that $2^{1/4}K_G^{1/2} < \sqrt{2}$ in the complex case since $K_G < \sqrt{2}$ in this case).

In this section we extend Littlewood's Theorem to a more general setting and also improve the estimate (2.2) for the case of $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Given a matrix m_{jk} we write

$$\|(m_{jk})\|_{\ell_p(\ell_q)} = (\sum_k (\sum_j |m_{jk}|^q)^{p/q})^{1/p}.$$

If a and β are matrices, we denote by $(\beta \circ a)_{jk}$ the product of β and a, that is

$$(\beta \circ a)_{jk} = \sum_l \beta_{jl} a_{lk}.$$

Theorem 2.1. *Let $A \in \mathcal{L}(^2c_0; \mathbb{C})$. If $a = (a_{jk})_{j,k} := (A(e_j, e_k))_{j,k}$, $1 \leq p \leq 2$ and $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{p'}$, then*

$$\|(\beta \circ a)_{jk}\|_{\ell_p(\ell_q)} \leq K_G \|A\| \|(\beta_{jk})\|_{\ell_\infty(\ell_2)},$$

that is

$$\left(\sum_k \left(\sum_j |\sum_l \beta_{jl} A(e_l, e_k)|^q\right)^{p/q}\right)^{1/p} \leq K_G \|A\| \sup_k \left(\sum_j |\beta_{jk}|^2\right)^{1/2}.$$

In particular, selecting β as the identity matrix,

$$\left(\sum_k \left(\sum_j |A(e_j, e_k)|^q\right)^{p/q}\right)^{1/p} \leq K_G \|A\|.$$

Selecting $p = 4/3$ we recover Littlewood's Theorem, that is $(A(e_j, e_k))_{jk} \in \ell_{4/3}(\mathbb{N}^2)$.

Remark 2.1. *It is known that $K_G \leq 1,405 < \sqrt{2}$ in the complex case. So, we can conclude that*

$$K_G < 2^{1/4}K_G^{1/2}$$

and hence the constant obtained in the previous theorem improves the estimate given in [1, p. 463] for the complex case.

References

[1] A. Defant, K. Floret, *Tensor Norms and Operator Ideals.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1993.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{o}}$ 2 Novembro 2008

Teoria de regularidade para problemas elípticos com obstáculo em ambientes de dimensões infinitas

Eduardo Teixeira *

Dado uma membrana u em um domínio D e um obstáculo φ, um importante problema em matemática aplicada é encontrar a posição de equilíbrio da membrana em repouso em cima do obstáculo. Esta classe de problemas, na literatura conhecida como *problemas do tipo obstáculo*, tem promovido avanços revolucionários em diversas áreas da matemática pura e aplicada. Sua versão mais simples pode ser matematicamente formulada da seguinte forma: dado um domínio D, uma função $g\colon \partial D \to \mathbb{R}$, e uma função $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$,

$$\text{Minimize } \left\{ \int_{\partial D} |\nabla v|^2 dX \ : \ v \in H^1(D), \ v = g \text{ na } \partial D \text{ e } v \geq \varphi \right\}. \tag{1}$$

O estudo do problema acima teve início com importantes trabalhos de Stampacchia, Jacques-Louis Lions, Kinderlehrer, Brezis, dentre outros. Propriedades geométricas e regulares da fronteira livre, $\partial\{u > \varphi\}$, foram estabelecidos por Luis Caffarelli, [1], em um artigo revolucionário, cujo a importância seria dificilmente exagerada.

Problemas do tipo obstáculo são utilizados hoje em dia em modelamentos matemáticos de uma diversidade de fenômenos físicos. Interpretações probabilisticas permitem a infiltração desta teoria em problemas emergentes da matemática financeira, da teoria de controles estocásticos ótimos, dentre muitos outros.

Não é difícil observar que uma solução do problema acima deve satisfazer a seguinte equação totalmente não linear:

$$\min \ \{\Delta u, u - \varphi\} = 0. \tag{2}$$

De fato, equação (2) é equivalente ao problema de minimização (1). A vantagem da interpretação (2) é que possibilita estendermos a teoria de problemas do tipo obstáculo para sistemas modelados por equações que não admitem caracterizações variacionais, como por exemplo, equações elípticas da forma não divergente, $a_{ij}(X)D_{ij}v$, ou mais geralmente, operadores totalmente não lineares, $F(D^2v)$, bem como problemas modelados em espaços de dimensões infinitas.

Em colaboração com Andrzej Święch da Georgia Institute of Technology, iniciamos o estudo de problemas do tipo obstáculo modelados por operadores totalmente não lineares em espaços de Hilbert. A motivação inicial do programa tem raizes em questionamentos modernos na teoria de controle ótimo e interpretações probabilisticas e estocásticas da teoria. Não obstante, do ponto de vista abstrato, nosso trabalho, [2], abre uma promissora nova área de pesquisa: o estudo de propriedades geométricas e qualitativas de problemas de fronteira livre em espaços de dimensões infinitas.

O primeiro passo na elaboração do projeto é a definição apropriada de eliticidade para operadores em dimensões infinitas. Nesta direção introduzimos a seguinte definição:

Definição 1. *Seja H um espaço de Hilbert separável e Q um operator da classe do traço. $\mathcal{S}(H)$ denota o espaço de todos os operadores auto-adjunto em H. Uma função contínua $F\colon \mathcal{S}(H) \to \mathbb{R}$ será chamada "Q-elíptica"se existirem contantes $0 < \lambda \leq \Lambda$ tais que*

$$-\Lambda\, Tr(QY) \leq F(X+Y) - F(X) \leq -\lambda\, Tr(QY), \quad \forall X, Y \in \mathcal{S}(H), \quad Y \geq 0. \tag{3}$$

Um exemplo de um operator Q-elíptico é

$$F(D^2u) = -\mathrm{Tr}(QD^2u),$$

*Universidade Federal do Ceará, teixeira@math.rutgers.edu

o qual responde pela estensão de problemas modelados pelo Laplaciano em espaços euclidianos. Observe que o operator Q não é necessariamente positivo; portanto F pode ser totalmente degenerada em várias direções.

O problema do tipo obstáculo, governado por um operador Q-elíptico em um espaço de Hilbert, H, toma então a seguinte forma:

Problema 1 (Problema do tipo Obstáculo)**.** *Dado um obstáculo $\varphi: H \to \mathbb{R}$, encontre uma função $u: H \to \mathbb{R}$ satisfazendo*

1. *$u \geq \varphi$ em H.*
2. *$F(D^2u) \geq 0$ em H.*
3. *$F(D^2u) = 0$ em $\{u > \varphi\}$.*
4. *$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$.*

Os itens 2 e 3 acima devem ser entendidos no sentido da viscosidade; portanto o problema acima pode ser re-escrito da seguinte forma: encontre uma função $u: H \to \mathbb{R}$ que se anula nos fins de H e que seja uma solução no sentido da viscosidade da Equação Diferencial Parcial

$$\min\left\{F(D^2u), u - \varphi\right\} = 0 \quad \text{em } H. \tag{4}$$

Para sumarizar os resultados que demonstramos, permita-nos incluí-los em um único teorema:

Teorema 1 (Święch & T.)**.** *Seja φ um obstáculo uniformemente contínuo e limitado superiormente. Sob a hipótese que Q possui pelo menos 3(três) autovalores positivos, o problema 1 possui uma única solução, u. Ademais u gaza do mesmo móludo de continuidade que φ, em particular, u é Lipschitz contínua se φ o for. Se assumirmos que F é concavo e φ semi-convexo, u é de classe $W^{2,\infty}_Q(H)$, que representa a regularidade ótima do problema.*

Algumas observações finais sobre o teorema acima. A hipótese que Q possui pelo menos 3(três) autovalores positivos, é necessária, já que o problema 1 não admite solução no plano nem na reta. A regularidade ótima do problema, (1) é $C^{1,1}$. Isto porque Δu desenvolve descontinuidade ao passar pela fronteira livre, $\partial\{u > \varphi\}$. A reguaridade ótima corespondente ao problema 1 é $W^{2,\infty}_Q(H)$, espaço introduzido e desenvolvido em [2]. Contudo, mesmo para operadores uniformemente elípticos, $F(D^2u)$ em espaços euclidianos, convavidade de F é uma condição necessária para regularidade $C^{1,1}$ da solução do problema do obstáculo. Isto porque apenas sob tal condição esta disponível estimativas $C^{2,\alpha}$ para soluções de $F(D^2u) = 0$. Propriedades regulares da fronteira livre do problema encontram-se sob investigção, no (ambisioso) intúito de estender a teoria do Caffarelli, [1], para problemas modelados em dimensões infinitas.

$$\cdots$$
$$\vdots$$

Referências

[1] Caffarelli, Luis A. - *The regularity of free boundaries in higher dimensions.*, Acta Math. 139 (1977), no. 3-4, 155–184.

[2] Święch, Andrzej; Teixeira, Eduardo V. - *Regularity for obstacle problems in infinite dimensional Hilbert spaces.* Pré-Publicação.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{0}}$ 2 Novembro 2008

THE APPROXIMATE FIXED POINT PROPERTY IN HAUSDORFF TOPOLOGICAL VECTOR SPACES AND APPLICATIONS

C. S. Barroso *

In fixed point theory, one of the main subject of investigation is the fixed point property for a topological space. Recall that a topological space $\mathcal{C}$ is said to have the fixed point property if every continuous map $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ has a fixed point. The well-known Schauder-Tychonoff's fixed point theorem [8,9] is the main contribution on this topic, providing us with a large and rich variety of approaches to solve nonlinear problems. It states that every compact convex subset of a locally convex space has the fixed point property. Nowadays, there are several celebrated works concerning generalizations and improvements of this result. We refer to the reader to [3,7] and references therein.

Another fruitful line of research, which is very closely related to the one mentioned above, is the approximate fixed point property for a topological space, which concerns the possibility of proving the existence of a sequence $\{x_n\}$ in $\mathcal{C}$ such that $x_n - f(x_n) \to 0$. This is a current area of investigation in fixed point theory with many supporters in applied sciences. In game theory, for instance, many pratical situations where one wishes to bring out the solution of one a given functional equation, an approximate solution would be more than sufficient. In this case, approximation techniques via fixed points could be useful in solving many of these problems. Examples of such circumstances include the Nash approximation problem in game theory, see [2] and some of its references.

In the process of finding approximate solutions for a given functional equation, for example, many important difficulties can arise when we are using approximation methods via fixed points. Let us make a little comment on this: Suppose we are interesting in solving a class of nonlinear problems. It is natural to choose a functional space where one wishes to establish existence results. From the mathematical point of view, it is worthwhile to point out that in general such spaces are infinite dimensional vector spaces. Thus, it is also natural to endow the space with a vector topology that best fits the problem. Nevertheless, can still arise some technical problems as for example, the chosen topology may not be compatible with the notion of continuity of the associated operator to the problem. On the other hand, even if this were not the case, there could situations where we cannot find approximate fixed points if the topology is not so appropriated to this end. For instance,

Teorema 0.1. *Let $\mathcal{C}$ be a noncompact convex subset of a Banach space. Then there exists a continuous mapping $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ such that*

$$\inf_{x\in\mathcal{C}} \|x - f(x)\| > 0.$$

This result is due to Klee [5,6], see also [4] for a Lipschitzs version of it. Notice that in this case, the strong topology of a Banach space is not the more suitable topology to approximate fixed points of a continuous mapping. In view of the foregoing, it is important to build alternative but plausive results to overcome such difficulties. The main focus of this brief talk will be on precisely the following question:

Question. Let $\mathcal{C}$ be a weakly compact convex subset of a Banach space and $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ a continuous (in norm topology) mapping. Is there a sequence $\{x_n\}$ in $\mathcal{C}$ such that

$$x_n - f(x_n) \rightharpoonup 0?$$

We give a positive answer for this question and explore some of their generalizations, see [1] for more details.

*Universidade Federal do Ceará, Campus do Pici, CE, Brasil, cleonbar@mat.ufc.br

References

[1] BARROSO, C. S. - *The approximate fixed point property in Hausdorff topological vector spaces and applications.* To appear in Fixed Point Theory and Applications, 20 pages (2008).

[2] BRANZEI, R., MORGAN, J., SCALZO, V., TIJS, S., *Approximate fixed point theorems in Banach spaces with applications in game theory.*, J. Math. Anal. Appl. 285 (2003), no. 2, 619–628.

[3] COBZAŞ, S. - *Fixed point theorems in locally convex spaces - the Schauder mapping method.*, 2006 (2006), 1–13.

[4] LIN, P. K. AND STERNFELD Y. - *Convex sets with Lipschitz fixed point property are compact*, Proc. Amer. Math. Soc. **93** (1985), 633-639.

[5] KLEE, V. L. JR. - *Convex bodies and periodic homeomorphisms in Hilbert space,* Trans. Amer. Math. Soc. **74** (1953), 10–43.

[6] KLEE, V. L. JR. - *Some topological properties of convex sets,* Trans. Amer. Math. Soc. **79** (1955), 30–45.

[7] KLEE, V. L. JR. - *Stability of the fixed-point property*, Coll. Math., **8** (1961), 43–46.

[8] SCHAUDER, J. - *Der Fixpunktsatz in Functionalraümen,* Studia Math., **2** (1930), 171–180.

[9] TYCHONOFF, H. - *Ein Fixpunktsatz,* Math. Ann., **111** (1935), 767-776.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{o}}$ 2 Novembro 2008

TIPOS DE HOLOMORFIA E ESPAÇOS DE FUNÇÕES INTEIRAS DE TIPO LIMITADO

V. V. Fávaro * & A. M. Jatobá †

Neste trabalho, introduzimos os espaços de funções inteiras de Θ-tipo de holomorfia de tipo limitado e provamos resultados envolvendo estes espaços. Mais precisamente, "construímos um algoritmo"para obter resultados de dualidade via trasformada de Borel e resultados de existência e aproximação para equações de convolução sobre tais espaços. Os resultados que provamos generalizam resultados deste tipo obtidos por C. Gupta [2], B. Malgrange [3], M. Matos [4], X. Mujica [5].

Introduziremos abaixo as funções de Θ-tipo de holomorfia de tipo limitado e algumas propriedades sobre um tipo de holomorfia Θ. E e F denotarão espaços de Banach complexos.

Definição 0.1. *Seja* $(\mathcal{P}_\Theta(^mE;F))_{m=0}^\infty$ *um tipo de holomorfia de* E *em* F*. Dizemos que* $f \in \mathcal{H}(E;F)$ *é de* Θ-tipo de holomorfia de tipo limitado *se*

(*i*) $\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(0) \in \mathcal{P}_\Theta(^mE;F)$, *para todo* $m \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$,

(*ii*) $\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(0)\|_\Theta\right)^{\frac{1}{m}} = 0.$

O subespaço vetorial de $\mathcal{H}(E;F)$ *de todas funções* f *de* Θ*-tipo de holomorfia de tipo limitado é denotado por* $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$.

Definição 0.2. *Seja* $(\mathcal{P}_\Theta(^mE;F))_{m=0}^\infty$ *um tipo de holomorfia de* E *em* F*. O tipo de holomorfia* Θ *é um* π_1-tipo de holomorfia *se satisfaz as seguintes condições:*

(1) $\|\phi^m \otimes b\|_\Theta = \|\phi\|^m\|b\|$ *para todo* $\phi \in E'$, $b \in F$ *e* $m \in \mathbb{N}_0$;

(2) *Para cada* $m \in \mathbb{N}_0$, $\mathcal{P}_f(^mE;F)$ *é denso em* $(\mathcal{P}_\Theta(^mE;F), \|\cdot\|_\Theta)$. $\mathcal{P}_f(^mE;F)$ *denota o espaço dos polinômios homogêneos de tipo finito.*

Definição 0.3. *Seja* $(\mathcal{P}_\Theta(^mE))_{m=0}^\infty$ *um* π_1*-tipo de holomorfia de* E *em* $\mathbb{C}$*. Dizemos que* $f \in \mathcal{H}(E')$ *é de* Θ'-tipo exponencial *se* $\hat{d}^m f(0) \in \mathcal{P}_{\Theta'}(^mE')$, *para todo* $m \in \mathbb{N}_0$, *e se existem constantes* $C \geq 0$, $c > 0$ *tais que*

$$\|\hat{d}^m f(0)\|_{\Theta'} \leq Cc^m,$$

para todo $m \in \mathbb{N}_0$.
O espaço vetorial de todas essas funções é denotado por $Exp_{\Theta'}(E')$.

A partir dessas definições podemos enunciar o resultado que garante o isomorfismo algébrico da transformada de Borel.

Teorema 0.1. *Se* Θ *é um* π_1*-tipo de holomorfia de* E *em* $\mathbb{C}$*, então a aplicação*

$$\mathcal{B}\colon [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]' \to Exp_{\Theta'}(E'),$$

dada por $\mathcal{B}T(\phi) = T(e^\phi)$, *para todo* $T \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$ *e* $\phi \in E'$, *estabelece um isomorfismo algébrico entre estes espaços.*

*Universidade Federal de Uberlândia, MG, Brasil, e-mail: favaro@famat.ufu.br.
†Universidade Estadual de Campinas, SP, Brasil, e-mail: marques@ime.unicamp.br.

Definição 0.4. *Seja* $(\mathcal{P}_\Theta({}^mE))_{m=0}^\infty$ *um tipo de holomorfia de* E *em* $\mathbb{C}$. *O tipo de holomorfia* Θ *é um* π_2-tipo de holomorfia *se* $T(\widehat{A\cdot^k}) \in \mathcal{P}_\Theta({}^{m-k}E)$ *e*

$$\|T(\widehat{A(\cdot)^k})\|_\Theta \leq C\rho^k\|P\|_\Theta,$$

para $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq m$, $T \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$, $P \in \mathcal{P}_\Theta({}^mE)$ *e constantes positivas* C *e* ρ *convenientes.*
O polinômio $T\left(\widehat{A(\cdot)^k}\right)$ *de* E *em* $\mathbb{C}$ *é dado por* $T\left(\widehat{A(\cdot)^k}\right)(y) = T\left(A(\cdot)^k y^{m-k}\right)$, *onde* $P = \hat{A}$.

Definição 0.5. *Sejam* U *um subconjunto aberto de* E *e* $\mathcal{F}(U)$ *uma coleção de funções holomorfas de* U *em* $\mathbb{C}$. *Dizemos que* $\mathcal{F}(U)$ *é* fechado para divisão *se, para* f *e* g *em* $\mathcal{F}(U)$, *com* $g \neq 0$ *e* $h = f/g$ *uma função holomorfa em* U, *tivermos* h *pertencente a* $\mathcal{F}(U)$.

Enunciaremos agora os teoremas de aproximação e existência de soluções para equações de convolução, respectivamente.

Teorema 0.2. *Se* $(\mathcal{P}_\Theta({}^mE))_{m=0}^\infty$ *é um* π_1-π_2*-tipo de holomorfia,* $Exp_{\Theta'}(E')$ *é fechado para divisão e* $\mathcal{O}$ *é um operador de convolução sobre* $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$, *então o subespaço vetorial de* $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ *gerado por*

$$\mathcal{L} = \{P\exp\varphi; P \in \mathcal{P}_\Theta\left({}^mE\right), m \in \mathbb{N}_0, \varphi \in E', \mathcal{O}\left(P\exp\varphi\right) = 0\}$$

é denso em

$$\ker\mathcal{O} = \{f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E); \mathcal{O}f = 0\}.$$

Teorema 0.3. *Se* $(\mathcal{P}_\Theta({}^mE))_{m=0}^\infty$ *é um* π_1-π_2*-tipo de holomorfia,* $Exp_{\Theta'}(E')$ *é fechado para divisão e* $\mathcal{O}$ *é um operador de convolução não nulo sobre* $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$, *então* $\mathcal{O}\left(\mathcal{H}_{\Theta b}\left(E\right)\right)$ *é igual a* $\mathcal{H}_{\Theta b}\left(E\right)$.

Referências

[1] DINEEN, S. - *Holomorphy types on a Banach space.* Studia Math. **39** (1971), 241–288.

[2] GUPTA, C. - *Convolution Operators and Holomorphic Mappings on a Banach Space.* Séminaire d'Analyse Moderne, 2. Université de Sherbrooke. Sherbrooke, 1969.

[3] MALGRANGE, B. - *Existence et approximation des équations aux dérivées partielles et des équations des convolutions.* Annales de l'Institute Fourier (Grenoble)VI (1955/56), 271–355.

[4] MATOS, M. C. - *Absolutely Summing Mappings, Nuclear Mappings and Convolution Equations.* IMECC-UNICAMP, 2007. Web: http://www.ime.unicamp.br/rel_pesq/2007/rp03-07.html

[5] MUJICA, X. - *Aplicações* $\tau(p;q)$*-somantes e* $\sigma(p)$*-nucleares.* Tese, Universidade Estadual de Campinas, 2006.

[6] NACHBIN, L. - *Topology on Spaces of Holomorphic Mappings.* Springer-Verlag, New York, 1969.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{o}}$ 2 Novembro 2008

TRAJETÓRIAS REGULARES DE SISTEMAS DE CONTROLE NO SENTIDO DE YOUNG

P. J. CATUOGNO * & M. G. O. VIEIRA †

Sejam E_1 e E_2 espaços de Banach e denote por $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ o conjunto de todas as aplicações lineares contínuas de E_1 em E_2. Seja $p \in [1, \infty)$ e denote o intervalo $[0, T]$ por J. A *p-variação* de um caminho contínuo $X\colon J \to E_1$ é definida por

$$\|X\|_{p,J} = (\sup_{D\in\mathcal{P}(J)} \sum_{t_i\in D} \left\|X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\right\|^p)^{\frac{1}{p}}, \tag{0.1}$$

onde $\mathcal{P}(J)$ denota o conjunto de todas as partições $D = \{0 = t_0 < ... < t_{k-1} < t_k = T\}$ do intervalo J. O conjunto de todos os caminhos contínuos de J em E_1 com p-variação finita é denotado por $\mathcal{V}^p(J, E_1)$.

Laurence C. Young (veja [1]) mostrou que se $X \in \mathcal{V}^p(J, E_1)$, $Y \in \mathcal{V}^q(J, \mathcal{L}(E_1, E_2))$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ então para cada $t \in J$ existe a integral

$$\textstyle\int_0^t Y_s\, dX_s := \lim_{\substack{|D|\to 0\\ D\in\mathcal{P}([0,t])}} \sum_{s_i\in D} Y_{s_i}(X_{s_{i+1}} - X_{s_i}) \tag{0.2}$$

e além disso, $\int_0^{\cdot} Y_s\, dX_s \in \mathcal{V}^p(J, E_2)$.

Seja $\Delta \subset \mathcal{V}^p(J, E_1)$. Nós dizemos que:
i) Δ é *fechado por reparametrizações positivas* se para cada $X \in \Delta$ e para cada parametrização não-decrescente $\varphi\colon J \to [0, t]$, com $t \in J$, temos que $X \circ \varphi \in \Delta$.
ii) Δ é *fechado por concatenações contínuas* se para cada $(X, Y) \in \Delta \times \Delta$ temos que $X * Y \in \Delta$, onde

$$(X * Y)_t = \begin{cases} X_t\,, & \text{se } t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \\ Y_{2t-T} + X_T - Y_0\,, & \text{se } t \in \left[\frac{T}{2}, T\right] \end{cases}. \tag{0.3}$$

Considere $\Delta \subset \mathcal{V}^p(J, E_1)$ satisfazendo as condições i) e ii) acima e $f \in Lip^\gamma(E_2, \mathcal{L}(E_1, E_2))$, com $\gamma \in (0, \infty)$, onde $Lip^\gamma(E_2, \mathcal{L}(E_1, E_2))$ denota conjunto de todas as aplicações γ-Hölder contínuas de E_2 em $\mathcal{L}(E_1, E_2)$. Para cada $X \in \Delta$ e para cada $u \in E_2$ podemos considerar a equação, com condição inicial, dada por

$$\begin{cases} dY = f(Y)\, dX \\ Y_0 = u \end{cases}. \tag{0.4}$$

Uma solução para esta equação é definida como sendo um caminho $\alpha \in \mathcal{V}^p(J, E_2)$ tal que $\alpha_t = u + \int_0^t f(\alpha_s)\, dX_s$, para todo $t \in J$. A aplicação f é chamada de *campo* e o caminho X de *sinal (ou controle) de integração*. É importante mencionar que uma solução para a equação (0.4) pode não ser diferenciável com respeito aos pontos do intervalo J. Um outro ponto importante a mencionar é que se o expoente Hölder do campo f é tal que $\gamma \in (0, 1]$ e se $Y \in \mathcal{V}^p(J, E_2)$ então $f \circ Y \in \mathcal{V}^{\frac{p}{\gamma}}(J, \mathcal{L}(E_1, E_2))$. Desta forma, se $X \in \mathcal{V}^p(J, E_1)$ e $f \circ Y \in \mathcal{V}^{\frac{p}{\gamma}}(J, \mathcal{L}(E_1, E_2))$, para garantir via o Teorema de Young que a integral $\int_0^{\cdot} f(Y_s)\, dX_s$ existe é preciso que a desigualdade $\frac{1}{p} + \frac{\gamma}{q} > 1$ seja válida, e uma vez válida, esta desigualdade implica que $\gamma > p - 1$ e portanto que $p \in [1, 2)$, visto que $\gamma \in (0, \infty)$. A equação (0.4) tem solução se $0 \le p - 1 < \gamma \le 1 \le p < 2$ e ela tem solução única se $p \in [1, 2)$ e $p < \gamma$ (veja [1]).

Sejam $1 \le p < \gamma$ e Σ uma lista do tipo (f, Δ, U, M), onde $f \in Lip^\gamma(E_2, \mathcal{L}(E_1, E_2))$, $\Delta \subseteq \mathcal{V}^p(J, E_1)$ é fechado por reparametrizações positivas e por concatenações contínuas e U e M são subsepaços topológicos de E_2 tais que $U \subset M \subset E_2$. Neste caso, dizemos que a lista Σ é um *sistema de Young com p-variação* para o qual f é o campo, Δ

*IMEEC - UNICAMP, Campinas, SP, Brasil, e-mail: pedrojc@ime.unicamp.br.
†IMEEC - UNICAMP, Campinas, SP, Brasil, e-mail: mgov@ime.unicamp.br. Apoiado por CNPq.

é o conjunto de sinais (ou controles) de integração, U é o conjunto de condições iniciais e M é o espaço de estados. Os elementos do conjunto

$$T(\Sigma) = \{\alpha \in \mathcal{V}^p(J, E_2) : \alpha_\cdot = u + \int_0^{\cdot} f(\alpha_s)\, dX_s,\ X \in \Delta,\ u \in U \ \text{ e } \ \alpha(J) \subset M\} \tag{0.5}$$

são chamados de *trajetórias do sistema de Young* Σ. Dados $u \in U$ e $v \in M$, o conjunto das trajetórias do sistema Σ que iniciam em u e terminam em v é denotado por $T(\Sigma, u, v)$.

Definição 0.1 *Seja Σ um sistema de Young da forma (f, Δ, U, M). Dizemos que Σ é* consistente *se para cada $(u, X) \in U \times \Delta$ existe uma única trajetória $\alpha \in T(\Sigma)$ tal que $\alpha_t = u + \int_0^t f(\alpha_s)\, dX_s$, para todo $t \in J$.*

Se Σ é um sistema de Young consistente da forma (f, Δ, U, M), então faz sentido definir a *aplicação de Itô* $I_\Sigma \colon U \times \Delta \to T(\Sigma)$ dada por $I_\Sigma(u, X) = \alpha$, onde $\alpha_t = u + \int_0^t f(\alpha_s)\, dX_s$, para todo $t \in J$. Além disso, se a variação do sistema consistente Σ é tal que $p \in [1, 2)$, então para cada $(t, X) \in J \times \Delta$ a aplicação $\Phi_t^{\Sigma,X} : U \to \Phi_t^{\Sigma,X}(U) \subset M$ dada por $\Phi_t^{\Sigma,X}(u) = I_\Sigma(u, X)(t)$ é um difeomorfismo (veja [3]) e para cada $(t, u) \in J \times U$ a aplicação $\Psi_t^{\Sigma,u} \colon \Delta \to M$ dada por $\Psi_t^{\Sigma,u}(X) = I_\Sigma(u, X)(t)$ é diferenciável (veja [4]).

Definição 0.2 *Sejam $p \in [1, 2)$ e Σ um sistema de Young consistente da forma (f, Δ, U, M) com p-variação. Dizemos que $X \in \Delta$ é um* sinal regular *com respeito a $u \in U$ se a derivada $D(\Psi_T^{\Sigma,u})_{|X}$ é sobrejetiva.*
Dizemos $\alpha \in T(\Sigma, u, v)$ é uma trajetória regular *se $\alpha = I_\Sigma(u, X)$, para algum sinal regular X com respeito u.*

Nós obtivemos recentemente uma versão no contexto de sistemas de Young de um resultado que Colonius, Kizil e San Martin apresentaram em [2] para o contexto de sistemas de controle dados por equações diferenciais ordinárias. Este é o principal resultado deste trabalho e seu enunciado é:

Teorema 0.1 *Sejam $p \in [1, 2)$, Σ um sistema de Young consistente da forma (f, Δ, U, M) com p-variação, $\alpha \in T(\Sigma, u, v)$ e $\beta \in T(\Sigma, v, w)$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*
i) Se α é uma trajetória regular então $\alpha * \beta$ é uma trajetória regular.
ii) Se β é uma trajetória regular então $\alpha * \beta$ é uma trajetória regular.

Para provar este resultado alguns outros resultados, não menos importantes, foram obtidos também, tais como:

Teorema 0.2 *Seja Σ um sistema de Young consistente. Se $I_\Sigma(u, X) \in T(\Sigma, u, v)$ e $I_\Sigma(v, Y) \in T(\Sigma, v, w)$, então $I_\Sigma(u, X) * I_\Sigma(v, Y) \in T(\Sigma, u, w)$ e*

$$I_\Sigma(u, X) * I_\Sigma(v, Y) = I_\Sigma(u, X * Y). \tag{0.6}$$

Teorema 0.3 *Sejam $p \in [1, 2)$ e Σ um sistema de Young consistente da forma (f, Δ, U, M) com p-variação. Para cada $(t, u, X) \in J \times U \times \Delta$ e para cada $Z \in span(\Delta)$ temos que*

$$D(\Psi_t^{\Sigma,u})_{|X}(Z) = D(\Phi_t^{\Sigma,X})_{|u} \left(\int_0^t \left(D(\Phi_s^{\Sigma,X})_{|u}\right)^{-1} \circ f(\Phi_s^{\Sigma,X}(u))\, dZ_s \right). \tag{0.7}$$

Referências

[1] CARUANA, M., LÉVY T. AND LYONS, T. J. - *Differential Equations Driven by Rough Paths.*, Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXXIV, Springer, 2004.

[2] COLONIUS, F., KIZIL, E. AND SAN MARTIN, L. A. - *Covering space for monotonic homotopy of trajectories of control system.*, J. Differential Equations. **216**, issue 2 (2005), pp. 324-353.

[3] FRIZ, P. K. - *Minicourse on Stochastic Analysis via Rough Paths.*, Columbia, 2008.
Web: http://www.statslab.cam.ac.uk/∼peter/Columbia2008/roughpaths.htm .

[4] LI, X. D. AND LYONS, T. J. - *Smoothness of It maps and diffusion process on path spaces (I).*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **39** (2006), no. 4, pp. 649-677.

[5] SOTOMAYOR, J. - *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias.*, Projeto Euclides, IMPA, 1979.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{0}}$ 2 Novembro 2008

Um novo estudo da superconvergência da derivada para elementos de Lagrange pelo Teorema de Taylor

D. S. PINTO JR. *

Este artigo retifica as coordenadas dos pontos nos quais a derivada da interpolante de elementos finitos da família de Lagrange unidimensional apresenta uma ordem de convergência de $O(h^{k+1})$, i.e., semelhante à ordem de convergência da interpolante de elementos finitos na variável primitiva. Basicamente, a prova fundamenta-se nos Teoremas de Rolle e no Teorema de Taylor aplicados ao caso de uma base de Lagrange que compõe a interpolante de elementos finitos e, adicionalmente, às propriedades de completeza da base lagrangiana [1]. O cálculo analítico dos pontos de superconvergência demonstra, então, que, contrariamente ao apresentado na literatura [2], os pontos obtidos não são, na verdade, os pontos de quadratura de Gauss. As coordenadas estão indicadas na tabela abaixo.

Tabela 1: Pontos superconvergentes de Taylor e pontos e quadratura de Gauss

k	Pontos de Taylor	Pontos de Gauss
1	0	0
2	$\pm\sqrt{3}/3 = \pm 0.57735$	$\pm\sqrt{3}/3 = \pm 0.57735$
3	$0, \pm\sqrt{5}/3 = \pm 0.74535$	$0, \pm\sqrt{3/5} = \pm 0.77459$
4	$\pm\frac{\sqrt{3\pm\sqrt{29/5}}}{2\sqrt{2}} = \pm 0.27195, \pm 0.82221$	$\pm\sqrt{\frac{3}{7} \pm \frac{2\sqrt{6}}{7\sqrt{5}}} = \pm 0.33998, \pm 0.861136$
5	$0, \pm\frac{\sqrt{35\pm 8\sqrt{7}}}{5\sqrt{3}} = \pm 0.42948, \pm 0.86537$	$0, \pm\frac{\sqrt{5\pm 2\sqrt{10/7}}}{3} = \pm 0.53846, \pm 0.90617$

Referências

[1] D.S. Pinto Jr., *Numerical and Analytical Studies of Superconvergence for First and Second Order Derivatives in Finite Element Interpolations*, Procedings of 23^{st} Ibero-Latin American Congress on Computer Methods in Engineering, GiuliaNova, Italy,(2002).
[2] R.G. Mackinnon, G.F. Carey,*Superconvergent derivatives: A Taylor Series Analysis, Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, 28 (1989)489-509.

*Departamento de Matemática, UFS, SE, Brasil, david@ufs.br

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

WELL-POSEDNESS OF SECOND ORDER EVOLUTION EQUATION ON DISCRETE TIME

AIRTON CASTRO * & CLAUDIO CUEVAS †‡ & CARLOS LIZAMA §¶

Abstract

We characterize the well-posedness for second order discrete evolution equations in UMD spaces by means of Fourier multipliers and R-boundedness properties of the resolvent operator which defines the equation.

1 Introduction

Let X be a Banach space and let T be a bounded linear operator. Our main objective of this work is to characterize the well-posedness in weighted spaces $l_p^r(\mathbb{Z}_+;X) := \{(x_n) : (r^{-n}x_n) \in l_p(\mathbb{Z}_+;X)\}$ $(r > 0)$ for the following discrete second order evolution equation:

$$\Delta^2 u_n + (I-T)u_n = f_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.1}$$

with zero initial conditions and $f \in l_p^r(\mathbb{Z}_+;X)$.

Beside its theoretical interest, the study of abstract discrete evolution equation together with well-posedness has great importance in applications. For these reasons the theory of discrete regularity has drawn the attention of several authors (see [2-9]).

2 A Characterization of Well-posedness

We will always assume that

$$\alpha = 1+\sqrt{2},\ r \geq r_0,\ 1/(1+\sqrt{2}) < r_0 < 1. \tag{2.2}$$

We consider the following discrete second order evolution equation:

$$\Delta_r^2 x_n - r^2(I-T)x_n = f_n, \quad \text{for all } n \in \mathbb{Z}_+, \quad x_0 = 0,\ \ x_1 = 0. \tag{2.3}$$

The characterization of well-posedness of (2.3) in terms of R-boundedness properties of the resolvent operator T and l_p-multipliers reads as follows (see [1]) .

Theorem 2.1. *[1] Let X be a UMD space and let $T \in \mathcal{B}(X)$ be an analytic operator; assume that (2.2) is fulfilled. Then, the following assertions are equivalent.*
(i) Problem (2.3) is well-posed.
(ii) $\{M(z) := (z-r)^2((z-r)^2 - r^2(I-T))^{-1} : |z| = \alpha r,\ z \neq \alpha r\}$ is a $l_p - l_p-$multiplier.
(iii) The set $\{M(z) :\ |z| = \alpha r,\ z \neq \alpha r\}$ is R-bounded.
(iv) Equation (2.3) has discrete maximal regularity.

*Instituição, DMAT-UFPE, PE, Brasil, e-mail airton@dmat.ufpe.br
†Instituição DMAT-UFPE, PE, Brasil, e-mail cch@dmat.ufpe.br
‡The second author is partially supported by CNPQ/Brazil
§Instituição USACH, Chile, e-mail clizama@usach.cl
¶The third author is partially supported by Laboratorio de Análisis Estocástico, Proyecto Anillo PBCT ACT-13.

Referências

[1] Castro, A., Cuevas, C., Lizama, C. *Well-posedness of Second Order Evolution Equation on discrete time* , Submitted.

[2] Blunck, S. *Maximal regularity of discrete and continuous time evolution equations*, Studia Math. **146**(2) (2001), 157-176.

[3] Blunck, S.*Analyticity and discrete maximal regularity of L_p-spaces,* J. Funct. Anal., **183** (1) (2001), 211-230.

[4] Cuevas, C., Lizama, C. *Maximal regularity of discrete second order Cauchy problems in Banach spaces,* J. Differ. Equ. Appl., **13** (12) (2007), 1129-1138.

[5] Geissert, M. *Maximal L^p regularity for parabolic difference equations,* Math. Nach., (16) **279** (2006), 1787-1796.

[6] Guidetti, D. and Piskarev, S. *Stability of the Crank-Nicolson scheme and maximal regularity for parabolic equations in $C^\theta(\overline{\Omega})$ spaces,* Numer. Funct. Anal. Optim., **20** $(3-4)$ (1999), 251-277.

[7] Kalton N., Portal, P. *Remarks on l^1 and l^∞ maximal regularity for power bounded operators,* Preprint 2007.

[8] Portal, P. *Discrete time analytic semigroups and the geometry of Banach spaces,* Semigroup Forum, **67** (2003), 125-144.

[9] Portal, P. *Maximal regularity of evolution equations on discrete time scales,* J. Math. Anal. Appl., **304** (2005), 1-12.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{0}}$ 2 November 2008

Análise Matemática do Problema Estacionário de Navier-Stokes no $\mathbb{R}^3$

Maria de J. R.Silva *

No presente trabalho, estudamos a existência e unicidade de solução das equações estacionárias de Navier-Stokes, as quais regem o escoamento de fluidos homogêneos, incompressíveis e viscosos. Apresentamos uma dedução do modelo matemático por meio de argumentos elementares e intuitivos, esta é devida a Medeiros [8].

Analisamos tanto o problema homogêneo quanto o não homogêneo, sempre considerando um aberto limitado do $\mathbb{R}^3$, com fronteira Γ bem regular que é o caso físico mais importante.

O Problema Homogêneo de Navier-Stokes no $\mathbb{R}^3$, consiste em determinar um campo vetorial $u = (u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)})$ definido em Ω, e p verificando

$$(P)\quad \left| \begin{array}{l} -\nu\Delta u + \sum_{i=1}^{3} u^{(i)} D_i u + \nabla p = f \text{ em } \Omega, \\ div\, u = 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma \end{array} \right.$$

onde u é uma função vetorial e p uma função escalar que representam, respectivamente, a velocidade e pressão do fluido. Estudamos o problema (P) em três etapas: na primeira apresentamos sua formulação fraca

$$\left| \begin{array}{l} \text{Dadof} \in \mathrm{V}' \text{ encontrar u} \in \mathrm{V} \text{ tal que} \\ \nu a\,(u, v) + b\,(u, u, v) = \langle f, v \rangle\,, \forall\; v \in V, \end{array} \right.$$

onde $V = \left\{ v \in \left(H_0^1\,(\Omega) \right)^3 ;\; div\, v = 0 \right\}$. Na segunda, garantimos a existência de solução usando o método de Galerkin na demonstração do seguinte teorema

Teorema: Dado f em V', existe u em V solução de

$$\nu a\,(u, v) + b\,(u, u, v) = \langle f, v \rangle\,, \forall\; v \in V.$$

E na terceira etapa mostramos, sob certas condições a unicidade de solução.

Para estudar o problema Não Homogêneo o transformamos em um problema homogêneo equivalente e usando o mesmo procedimento, mostramos a existência e unicidade de solução.

Referências

[1] Brézis, H., *Analyse Fonctionelle, Théorie et Aplications*, Paris, Masson, 1983.

[2] Carvalho, Ricardo Rodrigues, *Análise Matemática das Equações de Navier-Stokes: Existência, Unicidade e Periodicidade.* João Pessoa: DM/UFPB, 2000.

[3] Cavalcante, M. M., Cavalcante, V. N. D., *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*, vol. 1 e vol. 2. Maringá: Universidade Estadual de Maringá. Notas. Maringá, 2000.

[4] Goffman, C., Pedrick, G., *First Course in Functional analysis*, United States, Prentice-Hall, 1965.

[5] Hopf, E., *On nonlinear partial differential equations, Lecture Series of the Symposium on Partial Differential Equations*, Berkeley, 1955, the Univ. of Kansas(1957), p.1-29.

*Universidade Federal da Paraiba, CCEN-DM, PB, Brasil, mariajrs@ufcg.edu.br

[6] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis With Apllications.* New York, Wiley e Sons, 1989.

[7] Lions, J. L., *Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites Non Lineares*, Paris, Dunod, 1969.

[8] Medeiros, L. A., *Sobre o modelo matemático do sistema de Navier-stokes.* Notas de aula, IM-UFRJ.

[9] Medeiros, L. A. & Miranda, M.M., *Introdução aos Espaços de Sobolev e às EDP*, Rio de Janeiro, I. M., 1989.

[10] Medeiros, L. A. & Rivera, P.H., *Textos e Métodos Matemáticos: Espaços de Sobolev e EDP*, Rio de Janeiro, I. M., 1975.

[11] Medeiros, L. A., *Equações Diferenciais Parciais,* Rio de Janeiro, 1981.

[12] Temam, R., *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, New York, North-Holland, 1979.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG - Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

DISCONTINUITIES LOCALIZATION IN PSEUDOLOCAL TOMOGRAPHY

D. M. DE SOUSA * & IVO F. LOPEZ †

Let $\mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$ denote the set of functions that are limited, have compact support, and discontinuities only in a finite set of smooth curves of finite length, each one of them without auto-intersection, and has derivative of second order continuous and limited in the regions where f is not discontinuous. For tomography applications these considerations are not excessively restrictive. And let $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ denote the Schwartz space on $\mathbb{R}^2$.

Let $\mathbb{S}$ be the unit sphere of $\mathbb{R}^2$. To each $\theta \in \mathbb{S}$ we denote $\theta_\perp$ as the unit vector $\pi/2$ units counterclockwise from θ. For a function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ we define the *Radon transform* of f in the point $(\theta, s) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}$ as

$$\mathbf{R}f(\theta, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(s\theta + t\theta_\perp\right) dt.$$

For $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ and fixed $d > 0$ we define

$$f_d(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^d \frac{\partial_q F(x,q)}{q} dq$$

and

$$f_d^c(x) = -\frac{1}{\pi}\int_d^\infty \frac{\partial_q F(x,q)}{q} dq, \tag{1}$$

where $F(x,q) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{S}} \mathbf{R}f(\theta, x\cdot\theta + q)d\theta$.

Thus, from the Radon's original inversion formula [3], we have $f = f_d + f_d^c$ when $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

For $f \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$ we define

$$f_d^c(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{F(x,d)}{d} - \int_d^\infty \frac{F(x,q)}{q^2} dq\right] \tag{2}$$

and

$$f_d(x) = f(x) - f_d^c(x). \tag{3}$$

This definition was done to prevent derivatives of F in points where it is not derivable. Considering $f \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ and making a integration by parts we can see that (1) and (2) are equivalents.

Lemma 1. *If $f \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$ then f_d^c is continuous.*

From (3) and Lemma 1 we have that f and f_d have the same discontinuities curves and the same jumps. Thus we can find the discontinuities of f analyzing the discontinuities of f_d. Its better calculate f_d intead of f because given $x \in \mathbb{R}^2$, the calculation of $f_d(x)$ demands the knowledge of $\mathbf{R}f$ in a small subset of $\mathbb{S}\times\mathbb{R}$ whereas to calculate $f(x)$ it is necessary to know $\mathbf{R}f$ in all $\mathbb{S}\times\mathbb{R}$. This method is known as Pseudolocal Tomography and was introducted in [4] by Katsevich and Ramm.

Moreover, we have the convergence $f_d^c \to f$ characterized by the next theorem.

Theorem 1. *Let $f \in C^2(U)$ for some open set $U \subset \mathbb{R}^2$. If $x_0 \in U$ then*

$$|f_d^c(x_0) - f(x_0)| = O(d) \quad as \quad d \to 0.$$

Note that the convergence $f_d^c \to f$ presented in Theorem 1 implies the convergence $f_d \to 0$ in open subsets U where $f \in C^2(U)$.

To prove the Theorem 1 we use the formula given by the lemma below.

*Programa de Engenharia Nuclear, COPPE - UFRJ, RJ, Brazil, denis@ufrj.br
†Departamento de Métodos Matemáticos, IM - UFRJ, RJ, Brazil, ivolopez@ufrj.br

Lemma 2. *If $f \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$ then*

$$f_d^c(x) = \bar{f}(0,x) + d\frac{2}{\pi}\int_d^\infty \frac{\bar{f}(r,x) - \bar{f}(0,x)}{(1-(d/r)^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{dr}{r^2},$$

where $\bar{f}(r,x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{S}} f(x + r\theta)d\theta$, *for* $r > 0$, *and* $\bar{f}(0,x) = \lim\limits_{r\to 0}\bar{f}(r,x)$.

From Theorem 1 we have the next corollary.

Corollary 1. *Let $f \in C^2(U)$ for some open subset $U \subset \mathbb{R}^2$. The convergence $f_d^c \to f$ as $d \to 0$ is uniform on all compact subsets of U.*

In the implementation of this method, we define a regularized version of f_d given, for $\epsilon > 0$, by $f_{d\epsilon} = f_d * W_\epsilon$ where W_ϵ is an element of a sequence of mollifiers satisfying the following properties:

1. W_ϵ is a radial function of class $C^\infty(\mathbb{R}^2)$;
2. $W_\epsilon(x) = 0$, when $|x| \geq \epsilon$;
3. $W_\epsilon(x) = \epsilon^{-2}W_1(x/\epsilon)$ and $\int\limits_{|x|\leq 1} W_1(x)dx = 1$.

This procedure makes the discontinuities of f_d more identifiable. In Figure 1 we can see one numeric experiment of [1].

Figure 1: Representations of functions f and $f_{d\epsilon}$.

In the left image we have f(x) = 1 in the white region and f(x) = 0 in the black region. In the right image we have $f_{d\epsilon}$. We can observe that the discontinuities of the function f can be easily located at this image by the curves where f changes from a maximum to a minimum value.

In [2], we detail more computational aspects of this technique.

References

[1] DE SOUSA, D. M. - *A Transformada de Radon e Aplicações à Tomografia.* Master's Dissertation, Departamento de Matemática Aplicada - IM - Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2008.

[2] DE SOUSA, D. M., LOPEZ, I. F., CIPOLATTI, R., AND ROBERTY, N. C. - *Discontinuities Localization Inside a Domain Using Radon Transform.* In XXIX CILAMCE - Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (2008). (*waiting evaluation*)

[3] NATTERER, F. - *The Mathematics of Computerized Tomography.* J. Wiley & Sons, New York, 1986.

[4] KATSEVICH, A. I., AND RAMM, A. G. - *Pseudolocal Tomography.* SIAM J. Appl. Math. 56, 1 (1996), 167-191.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{o}}$ 2 Novembro 2008

Equações Diferenciais Parciais Não Lineares sobre a Fronteira de um Domínio Limitado do R^{n+1}

Célia Maria Rufino Franco

Seja Ω um conjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$, com fronteira Γ e seja η o vetor unitário normal exterior a Γ. Consideremos o cilindro $Q = \Omega\times]0,T[$ com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma\times]0,T[$, onde $T > 0$ é um número real. Motivados por Lions [1], estudamos equações diferenciais parciais de evolução sobre Σ, mais precisamente os problemas

$$\left|\begin{array}{l} \Delta w = 0 \quad \text{em} \quad Q \\ w' + \dfrac{\partial w}{\partial \eta} + |w|^\rho\, w = f \quad \text{sobre} \quad \Sigma \\ w(x,0) = w_0(x), \quad x \in \Gamma \end{array}\right. \tag{0.1}$$

$$\left|\begin{array}{l} \Delta w = 0 \quad \text{em} \quad Q \\ w^{''} + \dfrac{\partial w}{\partial \eta} + |w|^\rho\, w = f \quad \text{sobre} \quad \Sigma \\ w(x,0) = w_0(x), \quad w'(x,0) = w_1(x), \quad x \in \Gamma, \end{array}\right. \tag{0.2}$$

onde Δ denota o operador Laplaciano, w' e w'' significam a derivada primeira e segunda, respectivamente, de w com respeito ao tempo, $\dfrac{\partial w}{\partial \eta}$ a derivada normal de w, $\rho > 0$ e f sobre Σ são dados.

Em cada caso, investigamos a existência e unicidade de solução fraca, utilizando o Método de Faedo-Galerkin. Para isso, formulamos os problemas (0.1) e (0.2) sobre a variedade Γ, utilizando um novo operador A apresentado a seguir.

Dada $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$, segue da teoria de equação elíptica que o problema

$$\left|\begin{array}{l} \Delta \Phi = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ \Phi = \varphi \quad \text{sobre} \quad \Gamma \end{array}\right.$$

possui solução $\Phi \in H^1(\Omega)$ e da teoria do traço resulta que $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \eta} \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Definimos o operador

$$A : H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$$

por

$$A\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad A \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma); H^{-1/2}(\Gamma)).$$

Designando $w(t)|_\Gamma = u(t)$ e observando que $\dfrac{\partial w}{\partial \eta}(t) = Au(t)$, obtemos a seguinte formulação dos problemas (0.1) e (0.2), respectivamente:

$$\left|\begin{array}{l} \text{Encontrar uma função } u : \Sigma \to \mathbb{R}, \text{ tal que} \\ u' + Au + |u|^\rho\, u = f \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \\ u(0) = w_0, \quad \text{dado sobre} \quad \Gamma. \end{array}\right. \tag{0.3}$$

$$\left|\begin{array}{l} \text{Encontrar uma função } u : \Sigma \to \mathbb{R}, \text{ tal que} \\ u^{''} + Au + |u|^\rho\, u = f \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \\ u(0) = w_0, \quad u'(0) = w_1, \quad \text{dados sobre} \quad \Gamma. \end{array}\right. \tag{0.4}$$

Demonstramos os resultados, enunciados a seguir, que garantem a existência e unicidade de solução dos problemas (0.3) e (0.4).

Teorema 0.1. *Dados* $w_0 \in L^2(\Gamma)$ *e* $f \in L^2(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))$, *existe uma única função* $u:\Sigma \to \mathbb{R}$ *satisfazendo*

$$\begin{aligned} u &\in L^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Gamma)) \cap L^p(\Sigma), \\ u' + Au + |u|^\rho u &= f \quad \textit{no sentido de} \quad L^{p'}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma) + L^{p'}(\Gamma)), \\ u(0) &= w_0, \quad \textit{sobre} \quad \Gamma, \end{aligned}$$

onde $p = \rho + 2$.

Teorema 0.2. *Dados* $w_0 \in H^{1/2}(\Gamma) \cap L^p(\Gamma)$, $w_1 \in L^2(\Gamma)$ *e* $f \in L^2(\Sigma)$, *existe uma função* $u:\Sigma \to \mathbb{R}$ *satisfazendo*

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(0,T;H^{1/2}(\Gamma)) \cap L^\infty(0,T;L^p(\Gamma)), \\ u' &\in L^\infty(0,T;L^2(\Gamma)), \\ u'' + Au + |u|^\rho u &= f \quad \textit{no sentido de} \quad L^2(0,T;H^{-1/2}(\Gamma) + L^{p'}(\Gamma)), \\ u(0) &= w_0, \quad u'(0) = w_1 \quad \textit{sobre} \quad \Gamma, \end{aligned}$$

onde $p = \rho + 2$. *Além disso, se* $\rho \leq \dfrac{1}{n-2}$ *para* $n \geq 3$ *(ou* $\rho > 0$ *qualquer, se* $n = 2$*), então a solução é única.*

Outros problemas de evolução sobre variedades podem ser encontrados em [3] e [4].

Referências

[1] LIONS, J. L. - *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod-Gauthier Villars, Paris, First edition, 1969.

[2] LIONS, J. L. & MAGENES, E. - *Problèmes aux limites non homogenes et applications*, Dunod-Gauthier Villars, Paris, 1968.

[3] ARARUNA, F. D., ANTUNES, G. O. & MEDEIROS, L. A., - *Semilinear Wave Equation on Manifolds*, Annales de la Faculté des Science de Toulouse, XI(1), 2002, pp. 7-18.

[4] CAVALCANTI, M. M., AND DOMINGOS CAVALCANTI, V. N., - *On Solvability of Solutions of Degenerate Nonlinear Equations on Manifolds*, Differential and Integral Equation, **13**(10-12), 2000, pp. 1445-1458.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{o}}$ 2 Novembro 2008

EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES COM CONDIÇÕES DE FRONTEIRA TIPO NAVIER DE FRICÇÃO.

PAULO M. C. NETO *

Neste texto buscamos a análise de aspectos teóricos, incluindo existência e unicidade, das equações de Navier-Stokes com condições de fronteira tipo Navier de fricção em domínios limitados bidimensionais. Também visa estudar o problema do limite invíscido. A análise feita por este texto está baseada no artigo Clopeau [1].

Considere a equação de Navier-Stokes bidimensional incompressível

$$\begin{aligned} \partial_t u - \mu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f &\qquad \text{em } \Omega\times(0,T) &(0.1)\\ div\, u = 0 &\qquad \text{em } \Omega\times(0,T) &(0.2)\\ u(\,\cdot\,,0) = u_0 &\qquad \text{em } \Omega &(0.3)\\ u\cdot\nu = 0 &\qquad \text{em } \partial\Omega\times(0,T) &(0.4)\\ 2\mathcal{D}(u)\nu\cdot\tau + \alpha u\cdot\tau = 0 &\qquad \text{em } \partial\Omega\times(0,T) &(0.5)\end{aligned}$$

onde $\mu > 0$ é o coeficiente de viscosidade cinética, $\alpha(x)$ é uma função positiva duas vezes continuamente diferenciável definida em $\partial\Omega$, u é o vetor velocidade e p a pressão. Consideramos $\mathcal{D}(u)$ a taxa do tensor de tensão definida por $\mathcal{D}_{ij}(u) = \frac{1}{2}(D_j u_i + D_i u_j)$ e sistematicamente usaremos a definição $A : B = \sum_{i,j} A_{ij}B_{ij}$. Vamos supor que Ω é um subconjunto aberto, limitado e simplesmente conexo de $\mathbb{R}^2$, $\partial\Omega$ é suficientemente regular, ν o vetor unitário normal e τ o vetor unitário tangente, com $\{\nu,\tau\}$ sendo uma base na fronteira. A função $f(t,x)$ é uma força dada e u_0 é uma velocidade inicial.

Estaremos interessados na análise de aspectos teóricos desta equação com condições de fronteira tipo Navier de fricção, que difere da condição clássica de não deslizamento (no-slip) abordado em Temam [3]. Podemos notar que a condição *no-slip* não é muito intuitiva e foi contestada mesmo por Navier [2], o qual propôs a condição de fronteira de fricção que diz: a velocidade tangencial na fronteira deve ser proporcional a componente tangencial do estresse viscoso.

Para tratarmos deste problema, consideraremos espaços especiais dados por

$$\begin{aligned} &L^2_0(\Omega) = \{z\in L^2(\Omega)^2 :\ div\, z = 0 \quad e \quad \int_\Omega z dx = 0\}\\ &V = \{v\in H^1(\Omega)^2 :\ div\, v = 0\ em\ \Omega \quad e \quad v\cdot\nu = 0\ em\ \partial\Omega\}\\ &H = \{v\in L^2(\Omega)^2 :\ div\, v = 0\ em\ \Omega \quad e \quad v\cdot\nu = 0\ em\ \partial\Omega\}\\ &\mathcal{W} = \{v\in V\cap H^2(\Omega)^2 : 2\mathcal{D}(v)\nu\cdot\tau + \alpha v\cdot\tau = 0\ em\ \partial\Omega\}.\end{aligned}$$

Para que seja possível encontrar solução fraca para esta equação, vamos considerar um teorema central sobre a construção de uma base conveniente.

Lema 0.1. *Existe uma base $\{v_n\}\subset H^3(\Omega)^2$, para V, o qual também é uma base ortonormal para H, que satisfaz*

$$2D(v_n)\nu\cdot\tau + \alpha v_n\cdot\tau = 0 \qquad em\ \partial\Omega. \tag{0.6}$$

Com este lema, podemos então concluir o teorema central de existência e unicidade de solução fraca para o problema proposto.

*Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo-Campus de São Carlos, Caixa Postal 668, 13560-970 São Carlos SP, Brazil. E-mail: pmat@icmc.usp.br

Teorema 0.1. *Para uma dada função* $f \in H^1(0,T;H)$ *e* $u_0 \in \mathcal{W}$, *existe uma única função* $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$ *que satisfaz o forma variacional de (0.1)-(0.5), isto é*

$$\forall v \in V, \; \frac{d}{dt}\int_\Omega u(t)v \; dx + 2\mu \int_\Omega \mathcal{D}(u(t))\mathcal{D}(v) \; dx + \int_\Omega (u(t)\cdot\nabla)u(t)v \; dx$$
$$+\mu \int_{\partial\Omega} \alpha(u(t)\cdot\tau)(v\cdot\tau) \; dS = \int_\Omega f(t)v \; dx \tag{0.7}$$
$$u(0,\cdot) = u_0. \tag{0.8}$$

Ainda mais, seja em adicional $curl\, u_0 \in L^\infty(\Omega)$ *e* $curl\, f \in L^2(0,T;L^\infty(\Omega))$. *Então* $u \in C([0,t];\mathcal{W})$ *e* $\omega = curl\, u \in C([0,T];H^1(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega \times (0,T))$. *Finalmente, existe um único campo de pressão* $p \in C([0,t];H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega))$ *tal que (0.1)-(0.5) é satisfeito em quase toda parte de* $\Omega \times (0,T)$.

Como resultado final, conseguimos o limite invíscido do problema proposto.

Teorema 0.2. *Seja* $f \in H^1(0,T;H)$, *com* $curl\, f \in L^2(0,T;L^\infty(\Omega))$, *e* $u_0 \in \mathcal{W}$, $curl\, u_0 \in L^\infty(\Omega)$. *Seja* $u^\mu \in L^\infty(0,T;V)$ *a solução correspondente de (0.7), (0.8) e* $\omega^\mu = curl\, u^\mu \in L^\infty(\Omega \times (0,T))$. *Então temos que*

$$\begin{array}{ccc} u^\mu \to u & em\ L^q(0,T;W^{\alpha,q'}(\Omega)^2) & para\ \alpha \in (0,1) \;\; e \;\; q,\, q' \in (1,\infty) \\ u^\mu \rightharpoonup u & em\ L^2(0,T;V) & fraca \\ \omega^\mu \overset{\star}{\rightharpoonup} \omega = curl\, u & em\ L^\infty((0,T)\times\Omega) & fraca\ estrela \end{array}$$

quando $\mu \to 0$, *onde* $\{u,\omega\}$ *é a única solução do modelo imcompressível de Euler*

$$\begin{array}{cc} \partial_t\Omega + div(u\omega) = curl\, f & em\ \Omega \times (0,T) \\ div\, u = 0 & em\ \Omega \times (0,T) \\ curl\, u = \omega & em\ \Omega \times (0,T) \\ u\cdot\nu = 0 & em\ \partial\Omega \times (0,T) \\ \omega(0) = curl\, u_0 & em\ \Omega. \end{array}$$

Referências

[1] CLOPEAU T., MIKELIĆ A., ROBERT R. - *On the vanishing viscosity limit for the 2D incompressible Navier-Stokes equations with the friction type boundary conditions*, Nonlinearity 11, 1625-1636, 1998.
[2] NAVIER, C. L. M. H. - *Sur les lois de l'équilibrie et du mouvement des corps élastiques*, Mem. Acad. R. Sci. Inst. France 369, 1827.
[3] TEMAM, R. - *Navier-Stokes equations 3rd.*, AMS Chelsea Publishing, Providence, 1984.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$\underline{\text{o}}$ 2 Novembro 2008

Equações de Renovação e sua conexão com Equações Diferenciais Funcionais

Vinícius C. N. Siqueira *

Considere $\mathcal{C} = \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{C}^n)$ o espaço de Banach das funções contínuas de $[-r, 0]$ $(r > 0)$ com valores em $\mathbb{C}^n$ com a norma do supremo. Do Teorema de Representação de Riesz, (veja por exemplo Royden [8] ou Rudin [9]) segue que toda aplicação linear limitada $L : \mathcal{C} \to \mathbb{C}^n$ pode ser representada por

$$L\varphi = \int_0^r d\eta(\theta)\varphi(-\theta), \tag{1}$$

onde η é uma função de variação limitada em $[0, r]$ normalizada tal que $\eta(0) = 0$ e η é contínua pela direita em $(0, r)$ com valores no espaço das matrizes $\mathbb{C}^{n\times n}$. Este conjunto de funções é denotado por $NBV([0, r], \mathbb{C}^{n\times n})$. Podemos estender trivialmente $\eta \in NBV([0, r], \cdot)$ em $\mathbb{R}$ por $\eta(\theta) = 0$ se $\theta < 0$ e $\eta(\theta) = \eta(r)$ se $\theta > r$.

Um problema de valor inicial para uma Equação Diferencial Funcional autônoma (FDE) é dado pela seguinte relação

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}Mx_t = Lx_t, & t \geq 0, \\ x_0 = \varphi, & \varphi \in \mathcal{C}, \end{cases} \tag{2}$$

onde $L, M : \mathcal{C} \to \mathbb{C}^n$ são lineares e contínuas, dadas respectivamente, por

$$L\varphi = \int_0^r d\eta(\theta)\varphi(-\theta), \qquad M\varphi = \varphi(0) - \int_0^r d\mu(\theta)\varphi(-\theta), \tag{3}$$

onde $\eta, \mu \in NBV([0, r], \mathbb{C}^{n\times n})$ e μ é contínua em zero. Veja Hale & Verduyn Lunel [5] para uma introdução detalhada para estas equações.

Equações diferenciais da forma 2 com $\mu = 0$

$$\dot{x}(t) = Lx_t, \qquad x_0 = \varphi$$

são conhecidas como *equações diferenciais retardadas*. Se, para todo $\varphi \in \mathcal{C}$ temos a existência e unicidade de soluções contínuas de 2 para t em algum intervalo $[0, t_0)$, então podemos definir um semigrupo $T(t) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ por

$$T(t)\varphi = x_t, \qquad t \in [0, t_0)$$

onde x é a solução de 2. Podemos ver que, na verdade, T é um semigrupo fortemente contínuo, isto é, $T(0) = I, T(t + s) = T(t)T(s)$ e $\lim_{t\to 0+} T(t)\varphi = \varphi$. O semigrupo T é conhecido como *semigrupo solução* de 2.

Para equações diferenciais funcionais, sabe-se que o adjunto $T^*(t)$ do semigrupo solução $T(t)$ não é do mesmo tipo de $T(t)$. A interpretação do semigrupo solução adjunto em termos da equação considerada foi dada primeiramente por Burns & Herdman [1] para equuações integro-diferenciais de Volterra. Estes autores mostraram que o semigrupo adjunto é associado com a equação transposta através de um conceito de espaço de fase alternativo introduzido por Miller [6]. No livro de Diekmann *et al.*[2] foi mostrado que EDFR podem ser escritas na forma

$$x = k * x + f, \tag{4}$$

onde k é uma função de variação limitada e f, o termo forçante, é contínuo. Para desenvolver resultados similares para EDF's como 2, estudamos as *equações de renovação* (ER), ou alternativamente, *equações integrais de*

*Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo-Campus de São Carlos, Caixa Postal 668, 13560-970 São Carlos SP, Brazil. E-mail: vinicns@icmc.usp.br

convolução do tipo Volterra-Stieltjes (do segundo tipo), e a convolução entre medidas e funções. Nossas principais referências são os livros de Salamon [10] e Gripenberg, Londen & Staffans [4] onde estão formulados resultados de existência, unicidade, dependência contínua de soluções e representação de soluções em espaços L^p da equação de renovação

$$z(t) = \int_0^t d\alpha(s)z(t-s) + f(s), \tag{5}$$

ou alternativamente,

$$z = d\alpha * z + f, \tag{6}$$

onde $\alpha \in NBV([0,R),\mathbb{C}^{n\times n})$ representa a medida de Borel $d\alpha$ que é chamada *núcleo* da equação de renovação (6) e $f \in L^p([0,R],\mathbb{C}^n)$ é chamada *termo forçante*. Veja Salamon [10] para a definição da convolução $d\alpha * z$ entre uma medida e uma função.

As equações de renovação (6) estão bem definidas tomando-se uma variedade de espaços de fase, como L^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\mathcal{C}$ e NBV. O lema a seguir, mostra que podemos relacionar problemas sobre equações diferenciais funcionais com problemas para uma classe de equações de renovação. Também nos permite estudar EDF em espaços mais gerais que $\mathbb{C}$.

Teorema 0.1. *A equação diferencial funcional 2 é equivalente à equação de renovação*

$$x(t) = \int_0^t [d\mu(\theta) + \eta(\theta)d\theta]x(t-\theta) + F\varphi(t), \qquad t \geq 0 \tag{7}$$

onde $F : \mathcal{C} \to L^\infty$, definida por

$$F\varphi(t) = M\varphi + \int_t^r d\mu(\theta)\varphi(t-\theta) + \int_0^t [\int_s^r d\eta(\theta)\varphi(s-\theta)]ds, \quad t \geq 0, \tag{8}$$

mapeia a condição inicial $\varphi \in \mathcal{C}$ no correspondente termo forçante da equação de renovação 7. Para $\varphi \in \mathcal{C}$, temos que $F\varphi(\cdot)$ é constante em $[r,\infty)$, $F\varphi(0) = \varphi(0)$ e $F\varphi + \mu \cdot \varphi(0)$ é contínua.

Referências

[1] BURNS, J. A., HERDMAN, T.L. - *Adjoint Semigroup Theory for a Class of Functional Differential Equation.*, SIAM. J. Math. Anal., 7 No. 5, 729-745, 1976.

[2] DIEKMANN, O. VAN GILS, S. A., VERDUYN LUNEL, S. M. WALTHER, H. -O. - *Delay Eqations*, vol. 110 of Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag (New York). Functional, complex and non-linear analysis, 1993.

[3] FRASSON, M. - *Large Time Behavior of Neutral Delay Systems*, PhD thesis, 2005.

[4] GRIPENBERG, G., LONDEN, S. -O., STAFFANS, O. - *Volterra Integral and Functional Equations*, vol 34 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press (Cambridge) 1990.

[5] HALE, J. K., VERDUYN LUNEL, S. M - *Introduction to Functional-differential equations*, vol 99 of Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag (New York), 1993.

[6] MILLER, R. K. - *Linear Volterra Integrodifferencial Equations as Semigroups*, Funckcial. Ekvac., 17 39-55, 1974.

[7] O'CONNOR, D. A., TARN, T. J. - *On The Function Space Controllability of Linear Neutral Systems*, SIAM. J. Control. Optim., 21 No. 2 306-329, 1983.

[8] ROYDEN, H. L. - *Real Analysis*, Macmillan Publishing Company (New York) third ed., 1988.

[9] RUDIN, W. - *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Co. (New York) third ed., 1987.

[10] SALAMON, D. - *Control and Observation of Neutral Systems*, vol 91 of Research Notes in Mathematics. Pitman (Advanced Publishing Program), (Boston, MA), 1984.

[11] VERDUYN LUNEL, S. M., YAKUBOVICH, D. V. - *A Function Model Approach to Linear Neutral Functional-differential Equations*, Integral Equations Operator Theory, 27 No. 3 347-378, 1997.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{o}}$ 2 Novembro 2008

FORMULAÇÃO MÍNIMOS QUADRADOS COM ELEMENTOS FINITOS EM FLUIDOS NÃO NEWTONIANOS

J.A.J. AVILA *

As equações de Navier-Stokes governam o compotamento de uma vasta classe de fluidos. A suposição fundamental referente ao modelo constitutivo, estabelece uma conexão linear entre os esforços e a taxa de deformação, para fluidos de viscosidade constante. A cada dia, o estudo dos fluidos que não obedecem esta conexão linear cresce em importância. Muitos líquidos tais como polímeros, óleos de diversas qualidades e plásticos são usados atualmente em processos industriais, mostrando características não lineares, porém, em outros líquidos isto ocorre naturalmente como no sangue e o fluido sinovial. O processamento e o transporte de tais fluidos são problemas centrais nas industrias químicas, de alimentos, de plásticos, de petróleo e de polímeros.

Resolveremos numericamente o problema de uma cavidade quadrada (veja em Fig. 1 as condições de contorno para o campo de velocidades) usando o método: Formulação Mínimos Quadrados com Elementos Finitos (FMQEF) para um escoamento estacionário e isotérmico de um fluido incompressível não Newtoniano 2D, modelo Lei de Potência. O sistema de equações que governa esse escoamento, são: a equação de continuidade e a equação da quantidade de movimento com viscosidade não Newtoniana, isto é,

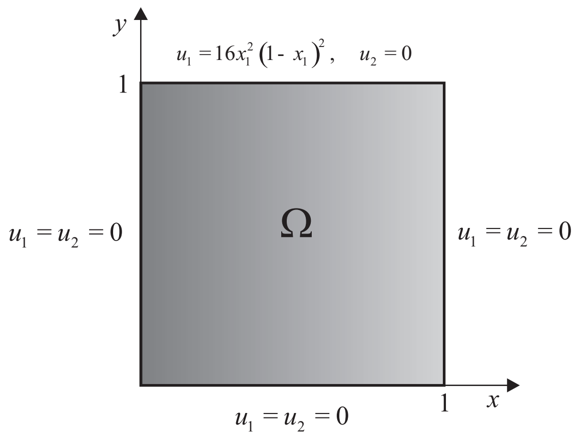

Figura 1: Condições de contorno numa cavidade quadrada bidimensional.

$$\nabla \cdot u = 0$$

$$(u \cdot \nabla)u + \frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{1}{\rho}\nabla \cdot (2\eta D) = f$$

$$\eta = k\, I^{\frac{n-1}{2}}, \quad I = 2II_D, \quad k, n > 0$$

u: vetor velocidade do fluido	f: vetor força de corpo	k: índice de consistência
ρ: densidade do fluido	η: viscosidade não Newtoniana	II_D: segunda invariante de D
p: pressão	D: tensor taxa de deformação	n: índice lei de potência

As incógnitas são as variavéis: $u = (u_1, u_2)$ e p. Para mais detalhes veja Avila [1]. A seguir mostraremos a FMQEF, Avila [1], Bose and Carey [2]. A função resíduo num elemento e é definida por:

$$R_i^e = A_{ij}\, \tilde{u}_j^e - F_i, \quad i, j = \overline{1, M},$$

onde $\tilde{u}^e$ é a função interpolante definida como:

$$\tilde{u}^e = \sum_{i=1}^{Nn_l} \delta_i^e\, \omega_i,$$

tal que $\tilde{u}^e(n_i) = \delta_i^e$ é o i-ésimo valor nodal de $\tilde{u}^e$, ω_i são as funções bases locais e Nn_l número de nós locais. Num sistema de M- equações o *erro funcional mínimos quadrados*, I^e, para um elemento e, é definido como:

$$I^e = \sum_{i=1}^{M} \left|\left| R_i^e \right|\right|_0^2 = \sum_{i=1}^{M} \int_e \left(R_i^e \right)^2 dx$$

*Colegiado de Matemática, Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, UESC, BA, Brasil, jorge.avila@poli.usp.br

Para uma malha consistindo de Ne-elementos, o ***erro funcional total mínimos quadrados***, I, é definido por:

$$I : \mathbb{R}^{Nn} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \qquad\qquad \delta \longmapsto I(\delta) = \sum_{e=1}^{Ne} I^e(\delta^e)\,.$$

Uma condição necessária para que δ seja o mínimo é:

$$\frac{\partial I(\delta)}{\partial \delta} = 0\,.$$

Agora, denote-se:

$$g^g = \frac{\partial I(\delta)}{\partial \delta}\,, \qquad\qquad g^e = \frac{\partial I^e(\delta^e)}{\partial \delta^e} = 2\sum_{i=1}^{M}\int_e R_i^e\,\frac{\partial R_i^e}{\partial \delta^e}\,dx\,,$$

Então, temos:

$$g^g = \frac{\partial I(\delta)}{\partial \delta} = 0\,.$$

Derivando com respeito a δ a função I, e subtituindo na última equação temos:

$$g^g = \sum_{e=1}^{Ne}\frac{\partial I^e(\delta^e)}{\partial \delta^e} = \sum_{e=1}^{Ne} g^e = 0 \qquad \Rightarrow \qquad g^g = \sum_{e=1}^{Ne} g^e = 0\,,$$

Portanto, esta última equação representa a verdadeira expressão da FMQEF.

Resultados numéricos foram testados numa cavidade quadrada 2D, para o caso de $n = 1,9$, veja Fig. 2. A pressão foi adimensionalizada, isto é:

$$\mathrm{P} = \frac{p}{\rho_0 U_0^2}$$

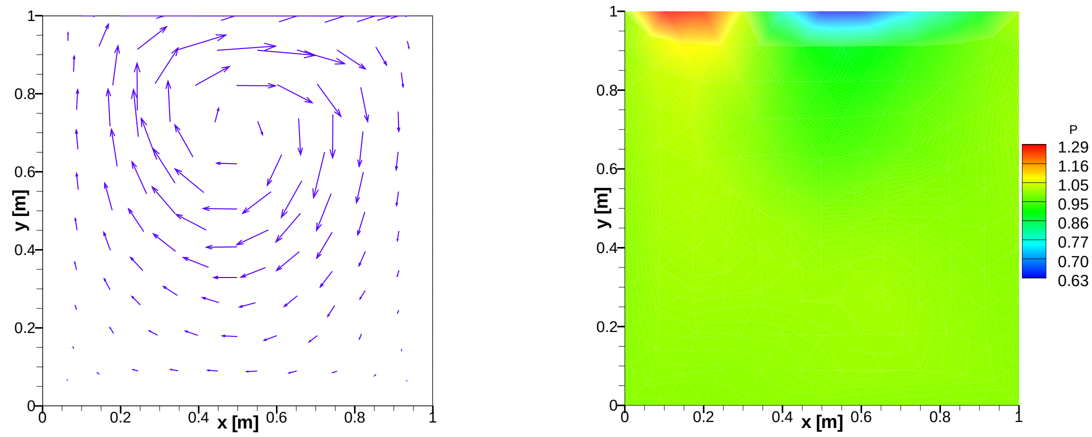

Figura 2. Solução numérica numa cavidade quadrada para um fluido não Newtoniano, $n = 1,9$. Esquerda: campo de velocidade. Direita: contornos de pressão.

Referências

[1] AVILA, J.A.J. - *Formulação Mínimos Quadrados com Elementos Finitos na resolução numérica do escoamento de um fluido não Newtoniano*, 130 p. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

[2] A. BOSE, AND G. F. CAREY - *Least-squares $p-r$ finite element methods for incompressible non-Newtonian flows*, Comput. Meth. appl. Mech. Engrg, **180**, 431-458, 1999.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{o}}$ 2 Novembro 2008

IDEAIS DE APLICAÇÕES MULTILINEARES E POLINÔMIOS ENTRE ESPAÇOS DE BANACH

A. THIAGO BERNARDINO *

Neste trabalho desenvolvemos resultados básicos da teoria de aplicações multilineares e polinômios entre espaços de Banach. Apresentaremos, por exemplo, os Teoremas do Gráfico Fechado, da Limitação Uniforme e de Banach-Steinhaus para aplicações multilineares e polinômios. As versões multilineares dos Teoremas da Limitação Uniforme (TLU) e de Banach-Steinhaus (TBS) são bem conhecidas, mas a demonstração encontrada na literatura não é natural. A demonstração do TLU para multilineares pode ser encontrada em [6] e o TBS para multilineares é um resultado folclórico, e sua demonstração é uma adaptação do Exercício 1.11 de [3]. Nas duas demonstrações se usa o TLU no caso linear. Precisamente, em [6], a demonstração do TLU para multilineares é desnecessariamente complicada, usando duas vezes o TLU no caso linear e um argumento de indução. Por sua vez, a demonstração do TBS para multilineares se baseia no fato de que toda aplicação multilinear, definida em espaços de Banach, separadamente contínua é contínua (e isso é uma consequência do TLU no caso linear). Apresentamos uma demonstração mais natural e auto-suficiente para estes dois teoremas.

Apresentamos uma breve introdução à teoria de ideais de operadores lineares. Estudamos vários resultados sobre a teoria de ideais de aplicações multilineares e de polinômios entre espaços de Banach. Estudamos duas maneiras de construir ideais de aplicações multilineares e de polinômios através de ideais de operadores lineares (chamadas de métodos da linearização e da fatoração) e, mostramos que estes ideais respeitam uma relação de inclusão.

Em [4], K. Floret e D. García introduziram a noção de ideais simétricos de aplicações multilineares. Apresentamos resultados de [2] com exemplos e contra exemplos de ideais simétricos e condições que os ideais de operadores $\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m$ devem satisfazer para que os ideais gerados pelos métodos da fatoração e linearização sejam simétricos.

Fazemos uma breve introdução à teoria dos operadores lineares absolutamente somantes, e um estudo da teoria das aplicações multilineares e polinômios absolutamente somantes. Seguindo [1], apresentamos versões do Teorema de Dvoretzky-Rogers para aplicações multilineares e polinômios homogêneos que são absolutamente somantes em um dado ponto não nulo. Mostramos que o espaço das aplicações multilineares (polinômios) que são absolutamente somantes em todo ponto é um ideal de aplicações multilineares (polinômios). Mais ainda, estudamos normas nos ideais das aplicações multilineares e polinômios absolutamente somantes em todo ponto, que os tornam ideais de Banach. De agora em diante, m é um inteiro positivo, E, F e $E_j, j = 1, ..., m$ são espaços vetoriais sobre o corpo dos reais ou complexos. É fácil ver que se $E_j, j = 1, ..., m$ são espaços de Banach, então $E_1 \times \cdots \times E_m$ é um espaço de Banach munido da norma $\|(x_1, ..., x_m)\| = \max_{1 \leq j \leq m} \|x_j\|$.

A seguir, apresentamos alguns resultados da nossa dissertação.

Os seguintes teoremas são versões multilineares do Teorema do Gráfico Fechado e da Limitação Uniforme:

Teorema 0.1 (Teorema do Gráfico Fechado para Aplicações Multilineares). *Sejam $E_1, ..., E_m$ e F espaços de Banach e $A : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ uma aplicação m-linear de gráfico fechado. Então A é contínua.*

Teorema 0.2 (Teorema da Limitação Uniforme para Aplicações Multilineares). *Sejam $E_j, j = 1, ..., m$, espaços de Banach, F espaço vetorial normado e $\{T_i\}_{i \in I}$ uma família de aplicações m-lineares contínuas de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F. Se*

$$\sup_{i \in I} \|T_i (x_1, ..., x_m)\| < \infty \text{ para todo } (x_1, ..., x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m, \tag{0.1}$$

então

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty.$$

*Universidade Federal da Paraíba , PGmat, PB, Brasil, thiagobernardino@yahoo.com.br

O Teorema de Banach-Stainhaus para aplicações multilineares é um corolário natural do teorema anterior.

O seguinte teorema nos dá a condição que os ideais $\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m$ devem satisfazer para que o ideal $[\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m]$, gerado pelo método da linearização, seja simétrico (temos um teorema semelhante para o método da fatoração).

Teorema 0.3. *([2]) Sejam $\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m$ ideais de operadores. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $[\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m]$ é um ideal simétrico de aplicações multilineares;

(b) $[\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m] = [\mathcal{I}_{\sigma(1)}, ..., \mathcal{I}_{\sigma(m)}]$ para toda permutação σ do conjunto $\{1, ..., m\}$;

(c) $\mathcal{I}_1 = \cdots = \mathcal{I}_m$.

A teoria de aplicações multilineares e polinômios que são absolutamente somantes em um dado ponto (e também em todo ponto) foi iniciada por M. Matos [5]. O próximo teorema fornece uma equivalência para aplicações multilineares absolutamente somantes em todo ponto, que é uma adaptação da idéia de Matos.

Teorema 0.4. *([1])$T \in \mathcal{L}^{ev}_{as(p;q)}(E_1, ..., E_m; F)$ (multilinear contínua de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F que é (p,q)-somante em todo ponto) se, e somente se, existe $C > 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\| T\left(b_1 + x_j^{(1)}, ..., b_m + x_j^{(m)}\right) - T(b_1, ..., b_m)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\|b_1\| + \left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^n\right\|_{w,q}\right) \cdots \left(\|b_m\| + \left\|\left(x_j^{(m)}\right)_{j=1}^n\right\|_{w,q}\right)$$

para quaisquer $x_j^{(k)} \in E_k$, $b_j \in E_j$, com $k = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$ e $n \in \mathbb{N}$. O ínfimo de todas as constantes C para as quais a desigualdade acima é satisfeita define uma norma em $\mathcal{L}^{ev}_{as(p;q)}(E_1, ..., E_m; F)$.

A norma definida acima é denotada $\|\cdot\|_{ev^{(2)}(p;q)}$. Essa norma é normalizada, ou seja, para todo $m \in \mathbb{N}$ a aplicação $id_{\mathbb{K}^m} : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}$ dada por $id_{\mathbb{K}^m}(x_1, ..., x_m) = x_1 \cdots x_m$ é tal que$\|id_{\mathbb{K}^m}\|_{ev^{(2)}(p;q)} = 1$ para todo $p \geq q \geq 1$.

Denotamos por $\mathcal{L}^{(a)}_{as,p}(^mE; E)$ o espaço vetorial das aplicações m-lineares contínuas, de E^m em E, p-somantes no ponto a. $\mathcal{L}(^mE; E)$ denota o espaço das aplicações m-lineares contínuas de E^m em E.

Teorema 0.5. *([1]) Sejam E um espaço de Banach, $m \geq 2$ e $p \geq 1$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) E tem dimensão infinita;

(ii) $\mathcal{L}^{(a)}_{as,p}(^mE; E) \neq \mathcal{L}(^mE; E)$ para todo $a = (a_1, ..., a_m) \in E^m$ com $a_i \neq 0$ para todo i ou $a_i = 0$ para um único i;

(iii) $\mathcal{L}^{(a)}_{as,p}(^mE; E) \neq \mathcal{L}(^mE; E)$ para algum $a = (a_1, ..., a_m) \in E^m$ com $a_i \neq 0$ para todo i ou $a_i = 0$ para um único i.

Em nosso trabalho, apresentamos teoremas semelhantes aos Teoremas 0.1, 0.2, 0.4 e 0.5 para o caso polinomial.

Referências

[1] BARBOSA, J., BOTELHO, G., DINIZ, D. E PELLEGRINO, D. - *Spaces of absolutely summing polynomials*, Mathematica Scandinavica, **101**, 219-237, 2007.

[2] BOTELHO, G. E PELLEGRINO, D. - *On symetric ideals of multilinear mappings between Banach spaces*, Journal of the Australian Mathematical Society, **81**, 141-148, 2006.

[3] DEFANT, A. E FLORET, K. - *Tensor Norms and Operators Ideals*, North-Holland Mathematics Studies, **258**, North-Holland, 2003.

[4] FLORET, K. E GARCÍA, D. - *On ideals of polynomials and multilinear mappings between Banach spaces*, Archiv der Mathematik, Basel, **81**, 300-308, 2003.

[5] MATOS, M. C. - *Nonlinear absolutely summing mappings*, Mathematische Nachrichten, **258**, 71-89, 2003.

[6] SANDBERG, I. - *Multilinear maps and uniform boundedness*, IEEE Trans. Circuits and Systems, **32**, 332-336, 1985.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG-Universidade Federal de Campina Grande
Edition N$^{\underline{o}}$ 2 November 2008

Integral operators induced by multi-scale kernels

T. JORDÃO * & V. A. MENEGATTO †

The subject matter of this note is to analyze basic properties of integral operators generated by the so-called multi-scale kernels. That includes well-posedness in the L^2 context, self-adjointness, positive definiteness, etc.

Let $\mathbb{R}^d$ be endowed with its usual Lebesgue measure, here denote by μ and consider the usual Hilbert space $(L^2(\mathbb{R}^d), \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ where

$$\langle f, g\rangle_2 = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}d\mu(x), \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

Let $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ be a fixed continuous function of compact support. Assume the family $\{\varphi_{j,k} : j \geq l;\ k \in \mathbb{Z}^d\}$ is an orthonormal subset of $L^2(\mathbb{R}^d)$, in which

$$\varphi_{j,k}(x) = \varphi(2^j x - k), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad j \geq l, \quad k \in \mathbb{Z}^d.$$

A multi-scale kernel generated by φ is a function $\phi_l : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ having the form

$$\phi_l(x, y) = \sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \overline{\varphi_{j,k}(x)}\varphi_{j,k}(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^d,$$

where $\lambda_j \geq 0$, $j \geq l$ and $\sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j < \infty$.

A multi-scale kernel is well defined, positive definite and the family of supports, $\{\operatorname{supp}\varphi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ is locally finite, for every $j \geq l$, that is, given $x \in \mathbb{R}^d$, there exists a neighborhood U_x of x intersecting finitely many elements of the family.

Local finiteness is the key aspect in the proof of the following property.

Theorem 0.1. *The multi-scale kernel ϕ_l is continuous.*

Since measurability of ϕ_l is now guaranteed, to every function function f of $L^2(\mathbb{R}^d)$, we can associate the function $T_l(f) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ given by

$$T_l(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi_l(x, y)f(x)d\mu(x), \quad y \in \mathbb{R}^d.$$

The transformation $f \to T(f)$ defines a linear mapping from $L^2(\mathbb{R}^d)$ into the space of the complex functions with domain $\mathbb{R}^d$.

A multi-scale kernel is not an element of $L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, unless it is identically zero. Even not having this desirable property, the assumption we have made above, allows us to see that actually T_l is a bounded linear operator on $L^2(\mathbb{R}^d)$, the so-called integral operator induced by ϕ_l. The following representation for T_l is similar to that provided by some versions of the so-called Mercer's Theorem. It reveals that the operator T_l may have many of the properties asserted by Mercer's theorem.

Lemma 0.1. *If $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ then*

$$T_l(f)(y) = \sum_{j=l}^{\infty} \lambda_j \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \langle f, \varphi_{j,k}\rangle_2 \varphi_{j,k}(y), \quad y \in \mathbb{R}^d.$$

Another interesting property is this.

*ICMC-USP - São Carlos, SP, Brasil, tjordao@icmc.usp.br. Partially supported by CNPq.
†ICMC-USP - São Carlos, SP, Brasil, menegatt@icmc.usp.br.

Lemma 0.2. *The function $h : \mathbb{R}^d \to L^2(\mathbb{R}^d)$ given by*

$$h(y) = \overline{\phi_l(\cdot, y)}, \quad y \in \mathbb{R}^d,$$

is continuous.

These two lemmas can be used to ratify that the family of functions $\{\varphi_{j,k} : j \geq l;\ k \in \mathbb{Z}^d\}$ forms a collection of eigenfunctions of T_l:

$$T_l(\varphi_{j,k}) = \lambda_j \varphi_{j,k}, \quad k \in \mathbb{Z}^d, \quad j \geq l.$$

Observing that

$$T_l(f)(y) = \langle f, \overline{\phi_l(\cdot, y)} \rangle_2, \quad y \in \mathbb{R}^d, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

we have the following results.

Theorem 0.2. *The range of T_l is composed of continuous functions.*

Theorem 0.3. *The following assertions hold:*
(i) T_l is not compact;
(ii) T_l is positive, that is, $\langle T_l(f), f \rangle_2 \geq 0$, $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

A classical result on positive operators [9, p. 142] now implies our final result.

Theorem 0.4. *The operator T_l is self-adjoint.*

References

[1] Cucker, F.; Smale, S., *On the mathematical foundations of learning,* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 39 (2002), no. 1, 1-49.

[2] Ferreira, J. C.; Menegatto, V. A., *Eigenvalues of integral operators defined by smooth positive definite kernels,* preprint, 2008.

[3] Koornwinder, T. H., *Wavelets: an elementary treatment of theory and aplications,* World Scientific, 1995.

[4] Opfer, R., *Multiscale kernels,* Adv. Comput. Math. 25 (2006), no. 4, 357-380.

[5] Opfer, R., *Multiscale kernels,* Shaker Verlag, 2004.

[6] Porter, D.; Stirling, D. S. G., *Integral equations. A practical treatment, from spectral theory to applications,* Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[7] Schaback, R., *Native Hilbert spaces for radial basis functions I,* New developments in approximation theory (Dortmund, 1998), 255-282, Internat. Ser. Numer. Math., 132, Birkhäuser, Basel, 1999.

[8] Sun, H., *Mercer theorem for RKHS on noncompact sets,* J. Complexity 21 (2005), no. 3, 337-349.

[9] Young, N., *An introduction to Hilbert space,* Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[10] Weidmann, J., *Linear operators in Hilbert spaces,* Translated from the German by Joseph Szücs. Graduate Texts in Mathematics, 68. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{o}}$ 2 Novembro 2008

MÉTODO DA MÉDIA PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS IMPULSIVAS VIA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS GENERALIZADAS

JAQUELINE B. GODOY *

Vamos considerar EDOs com um parâmetro pequeno

$$\dot{x}(t) = \varepsilon f(x,t) \tag{0.1}$$

onde $\varepsilon \geq 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é tal que $t \mapsto f(x,t)$ é uma função Lebesgue integrável para todo $x \in \Omega$. Consideraremos o problema (0.1) sujeito à ação impulsiva

$$\Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)), \, k = 1, 2, \ldots, \tag{0.2}$$

onde os t_k, $k = 1, 2 \ldots$ com $0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots \to +\infty$ são momentos pré-fixados de impulsos, $x \mapsto I_k(x)$ é uma função de Ω em $\mathbb{R}^n$ e $\Delta x(t_k) := x(t_k+) - x(t_k-) = x(t_k+) - x(t_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, ou seja, x é contínua à esquerda.

Uma maneira de tratar equações diferenciais do tipo (0.1) é através do chamado método da média que transforma a equação não-autônoma (0.1) na equação autônoma

$$\dot{x}(t) = \varepsilon f_0(x), \tag{0.3}$$

onde

$$f_0(x) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x,s)ds. \tag{0.4}$$

Os primeiros resultados envolvendo o método da média para EDIs são devidos a A. M. Samoilenko (veja [5] e [6]). Outros resultados nesta direção podem ser encontrados em [1]-[4], por exemplo.

Vamos assumir condições dos tipos Carathéodory e Lipschitz para a integral indefinida de f e também para os operadores de impulsos I_k e vamos estudar o método da média para a EDI (0.1)-(0.2) considerando-se a integral de Riemann generalizada em (0.4) e

$$I_0(x) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \sum_{a \leq t_k < T} I_k(x)$$

a fim de transformarmos (0.1)-(0.2) em

$$\dot{x}(t) = \varepsilon \left[f_0(x) + I_0(x) \right].$$

Nossos resultados estão na direção do tratamento de [7].

Teorema 0.1. *Sejam $G = B \times [0, +\infty)$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| < c\}$, $c > 0$, e $K_1, K_2 \geq 0$. Seja $f : G \to \mathbb{R}^n$, com $t \mapsto f(x,t)$ Lebesgue integrável para todo $x \in B$, e suponha que as seguintes condições acontecem:*

(A) *existe uma função localmente Lebesgue integrável, $M_1 : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, tal que para quaisquer $x \in B$ e $u_1, u_2 \in [0, +\infty)$,*

$$\left| \int_{u_1}^{u_2} f(x,s)\, ds \right| \leq \int_{u_1}^{u_2} M_1(s)\, ds;$$

*Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo-Campus de São Carlos, Caixa Postal 668, 13560-970 São Carlos SP, Brazil. E-mail: jaquebg@icmc.usp.br

(*B*) *existe uma função localmente Lebesgue integrável,* $M_2 : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$*, tal que para quaisquer* $x, y \in B$ *e* $u_1, u_2 \in [0,+\infty)$*,*

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} [f(x,s) - f(y,s)]\, ds\right| \leq \|x-y\| \int_{u_1}^{u_2} M_2(s)\, ds.$$

Além disso, assuma que uma sequência de pontos $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots$ *é tal que*

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{1}{r} \sum_{\alpha \leq t_i \leq \alpha + r} 1 \leq d$$

para todo $\alpha \geq 0$ *e seja* $I_i : B \to \mathbb{R}^n$ $i = 1, 2, \ldots$ *uma sequência de funções tais que*

$$\|I_i(x)\| \leq K_1 \qquad e \qquad \|I_i(x) - I_i(y)\| \leq K_2\|x-y\|$$

para $x, y \in B,\ i = 1, 2, \ldots$*. Suponha que*

$$f_0(x) = \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{r} \int_0^r f(x,s) ds,\ x \in B \qquad e \qquad \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{r} \sum_{0 \leq t_i < r} I_i(x) = I_0(x),\ x \in B.$$

Seja $y : [0,+\infty) \to \mathbb{R}^n$ *uma solução unicamente determinada da equação diferencial autônoma*

$$\dot{y} = f_0(y) + I_0(y)$$

que pertence a B *junto com sua* ρ*-vizinhança, com* $\rho > 0$*. Então para todo* $\mu > 0$ *e todo* $L > 0$*, existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tal que para* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *a desigualdade*

$$\|x_\varepsilon(t) - \xi_\varepsilon(t)\| < \mu$$

acontece para $t \in [0, \frac{L}{\varepsilon}]$*, onde* x_ε *é uma solução da equação diferencial com impulsos*

$$\dot{x} = \varepsilon f(x,t),\ t \neq t_i$$

$$\Delta x|_{t_i} = x(t_i+) - x(t_i) = \varepsilon I_i(x(t_i)),\ i = 1, 2, \ldots$$

em $[0, \frac{L}{\varepsilon}]$ *tal que* $x_\varepsilon(0) = y(0)$*, e* ξ_ε *é uma solução "média" do sistema de equações diferenciais ordinárias autônomas*

$$\dot{x} = \varepsilon[f_0(x) + I_0(x)]$$

em $[0, \frac{L}{\varepsilon}]$*, tal que* $\xi_\varepsilon(0) = y(0)$*.*

Referências

[1] BAĬNOV, D.; COVACHEV, V. *Impulsive differential equations with a small parameter.* Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, 24. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1994.

[2] ELGONDYEV, K. K.; ROGOVCHENKO, YU. V. *Application of the averaging method for the study of differential equations with impulse action.* Asymptotic solutions of nonlinear equations with a small parameter, 32-36, Akad. Nauk Ukrainy, Inst. Mat., Kiev, 1991 (em russo).

[3] PLOTNIKOV, V. A.; IVANOV, R. P.; KITANOV, N. M. *Method of averaging for impulsive differential inclusions.* C. R. Acad. Bulgare Sci. 52(3-4) (1999), 17-20.

[4] PLOTNIKOVA, N. *Averaging of impulsive differential inclusions.* Mat. Stud. 23(1) (2005), 52-56 (em russo).

[5] SAMOILENKO, A. M. *Justification of the avaraging method for differential equations with a disrupted right-hand side*, in *Priblizenie matodi reshenia diferentzialnih uravnenii*, Publishing House Naukova dunka, Kiev, 1963 (em russo).

[6] SAMOILENKO, A. M. *On the justification of the avaraging method for the study of oscillation in systems undergoing impulsive influence*, *Ukrainian Math. J.* 19(5) (1967) (em russo).

[7] SCHWABIK, Š *Generalized Ordinary Differential Equations*, World Scientific, Series in Real Anal., vol. 5, 1992.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{0}}$ 2 Novembro 2008

O PROBLEMA DE CAUCHY PARA A EQUAÇÃO DISPERSIVA KURAMOTO-VELARDE: O PROBLEMA DISSIPATIVO

ISNALDO ISAAC B. * & A. S. BARROS †

O objeto de estudo deste trabalho é a **Equação Dispersiva *Kuramoto-Velarde* (KdV-KV)** dada pela expressão abaixo

$$\begin{cases} \partial_t u + \delta\partial_x^3 u + \mu\left(\partial_x^4 + \partial_x^2\right) + \alpha\left(\partial_x u\right)^2 + \gamma u \partial_x^2 u = 0 \\ u(0) = \phi \end{cases}, \tag{0.1}$$

onde $x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+,\ u$ é uma função que toma valores reais e $\mu,\ \delta,\ \alpha$ e γ são constantes reais tais que $\mu \geq 0$ e $\delta \neq 0$.

Quando $\mu > 0$, esta equação combina a parte linear dispersiva e efeitos dissipativos.

Esta equação foi estudada por Pilod em [1], o qual é o principal artigo explorado.

Estudaremos esta equação no seguinte espaço:

Definição 0.1. *Definimos o **Espaço de Bourgain** $X^{s,b}$ como o completamento do espaço $S(\mathbb{R}^2)$ com a norma*

$$\|u\|_{X^{s,b}} = \|(1 + \left|i(\tau - \xi^3) + (\xi^4 - \xi^2)\right|^b)(1 + |\xi|^s)\widehat{u}(\xi,\tau)\|_{\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Note que $X^{s,b}$ é um Espaço de Banach, e que ele é isomorfo ao espaço com peso $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, (1 + \left|i(\tau - \xi^3) + (\xi^4 - \xi^2)\right|^b)(1 + |\xi|^s)d\xi d\tau)$.

Trabalhamos nos espaços de Bourgain e usaremos estimativas lineares e bilineares para provar que o problema 0.1 com dado inicial $\phi \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R})$ (onde $\mathcal{H}^s(\mathbb{R})$ é um Espaço de Sobolev) é Bem Colocado Localmente para $s > -1$ e Mal Colocado para $s < -1$ e que impondo a hipótese de $\gamma = \frac{\alpha}{2}$ ou $\gamma = 0$ temos que a solução do problema 0.1 é global.

Noutros termos, provaremos os seguintes resultados:

Teorema 0.1 (***Boa Colocação Local***)**.** *Seja $s > -1$, então $\forall \phi \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}), \exists\ T = T(\|\phi\|_{\mathcal{H}^s})$ (com $T(\rho) \longrightarrow \infty$ quando $\rho \longrightarrow 0$) e uma única solução u para o problema de Cauchy 0.1, com $\mu > 0$, no espaço de Bourgain $X_T^{s,1/2}$. Além disso, u satisfaz a regularidade adcional*

$$u \in C\left([0,T]; \mathcal{H}^s(\mathbb{R})\right) \cap C\left((0,T); \mathcal{H}^\infty(\mathbb{R})\right),$$

e a aplicação solução

$$\begin{aligned} S : \mathcal{H}^s(\mathbb{R}) &\longrightarrow X_T^{s,1/2} \cap C\left([0,T]; \mathcal{H}^s(\mathbb{R})\right), \\ \phi &\longmapsto u(t) \end{aligned}$$

é suave. Ainda, se $\phi \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R})$ com $s' > s$, o resultado mantêm-se com s' no lugar de s no mesmo intervalo $[0,T]$ com $T = T(\|\phi\|_{\mathcal{H}^s})$.

*Universidade Federal de Alagoas, IM, AL, Brasil, isnaldoisaac@hotmail.com
†Universidade Federal de Alagoas, IM, AL, Brasil,

Teorema 0.2 (***Boa Colocação Global***). *Seja $s > -1$ e $\phi \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R})$.*

- *Se $\gamma = \frac{\alpha}{2}$, então a solução local u para o problema de Cauchy 0.1, com $\mu > 0$, extende-se globalmente no tempo;*

- *Se $\gamma = 0$, então a solução local u para o problema de Cauchy 0.1, com $\mu > 0$, extende-se globalmente no tempo.*

Teorema 0.3. *Assumindo que $\alpha \neq \gamma$ em (1). Seja $s < -1$, se existe o mesmo $T > 0$ tal que o problema (1) é localmente bem posto em $\mathcal{H}^s(\mathbb{R})$, então, a aplicação solução*

$$S : \mathcal{H}^s(\mathbb{R}) \longrightarrow X_T^{s,1/2} \cap C\left([0,T]; \mathcal{H}^s(\mathbb{R})\right),$$

$$\phi \;\longmapsto u(t)$$

não é C^2 em zero.

Referências

[1] PILOD, D. J. F. - *The Cauchy problem for The dispersive Kuramoto-Velarde equation*, Tese IMPA, Rio de Janeiro, 2006.

[2] ARGENTO, C. R. R. - *O Problema de Cauchy para a Equação de Kuramoto-Velarde Generalizada com Dispersão*, Ph.D. thesis IMPA, Rio de Janeiro, 1997.

[3] F. LINARES AND G. PONCE - *Introduction to nonliear dispersive equations*, Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro, 2003.

[4] J. ANGULO AND A. S. BARROS - *Local well-posedness and ill-posedenss for super Korteweg-de Vries equations*, Preprint, 2005.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{o}}$ 2 Novembro 2008

O PROBLEMA DE CAUCHY PARA A EQUAÇÃO DE KURAMOTO-VELARDE GENERALIZADA COM DISPERSÃO: O PROBLEMA NÃO-DISSIPATIVO

Leandro F. da Costa * & a. s. barros †

O presente trabalho tem como objetivo estudar o problema de Cauchy para a **Equação de *Kuramoto-Velarde* com dispersão** sem o termo dissipativo, isto é,

$$\begin{cases} \partial_t u + \alpha\, \partial_x^3 u + \gamma\left(\partial_x u\right)^2 + \delta u\, \partial_x^2 u = 0 \\ u(0) = \phi \end{cases}, \tag{0.1}$$

onde $x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+,\ u$ é uma função que toma valores reais e, vamos supor que $\alpha,\ \gamma$ e δ são constantes reais não nulas.

Será explorado diretamente o caráter dispersivo da equação, não sendo levado em conta suas propriedades dissipativas. O efeito da dispersão é traduzido pelos chamados efeitos regularizantes locais do tipo Kato, presentes no grupo unitário $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, o qual descreve a solução do problema linear homogêneo associado a

$$\begin{cases} \partial_t u + \alpha\, \partial_x^3 u = g(x,t) \\ u(0) = \phi. \end{cases} \tag{0.2}$$

Tal solução é dada por

$$u(x,t) = W(t)\,\phi(x) = S_t * \phi(x)\,, \tag{0.3}$$

onde $W(t) = e^{-\alpha t \partial_x^3}$ e S_t é a integral oscilatória

$$S_t(x) = c\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} e^{it\alpha\xi^3} d\xi. \tag{0.4}$$

O problema para equação de Kuramoto-Velarde generalizada com dispersão, com e sem as características dissipativas, foi estudado com primor por Argento[1].

Nosso objetivo principal é demontrar que o problema (0.1) é bem posto, ou seja, provaremos o seguinte teorema que trata da boa colocação para (0.1)

Teorema 0.1 (***Boa Colocação Local***)**.** *Seja $\phi \in H^s(\mathbb{R}) \cap H^3\left(\mathbb{R}; x^2 dx\right)$, com $s \geq 5$ inteiro. Então, existe $\eta > 0$ tal que, se*

$$\|\phi\|_5 + \|\phi\|_{3,2} < \eta,$$

o problema (0.1) tem uma única solução $u(\cdot)$ definida no intervalo $[0,T]$, onde $T = T\left(\|\phi\|_5 + \|\phi\|_{3,2}\right) > 0$ com $T(\theta) \to \infty$ quando $\theta \to 0$ satisfazendo

$$u \in C\left([0,T]\,; H^s(\mathbb{R}) \cap H^3\left(\mathbb{R}; x^2 dx\right)\right) \equiv Z_T^s$$

*Universidade Federal de Alagoas, IM, AL, Brasil, leandrofavacho@hotmail.com
†Universidade Federal de Alagoas, IM, AL, Brasil,

e

$$u \in \left\{ v : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R}; \partial_x^{s+1} v \in L^\infty \left(\mathbb{R}; L^2 [0,T] \right) \right\} \equiv Y_T^s.$$

Além disso, qualquer que seja $T^{'} \in (0,T)$*, existe uma vizinhança* V_ϕ *de* ϕ *em* $H^s(\mathbb{R}) \cap H^3 \left(\mathbb{R}; x^2 dx \right)$*, tal que a aplicação* $\tilde{\phi} \to \tilde{u}(t)$ *de* V_ϕ *em* $Z_{T'}^s \cap Y_{T'}^s$ *é Lipschitziana.*

Daremos a demonstração do teorema para o caso em que $s = 5$*, que corresponde ao índice de Sobolev mais baixo.*

Para isso, inicialmente definiremos um espaço métrico completo conveniente, denotado por χ_T^a*. Para* $\phi \in H^5(\mathbb{R}) \cap H^3 \left(\mathbb{R}; x^2 dx \right)$ *fixado, denotaremos por* $Av = A_\phi(v)$ *a solução do problema linear não homogêneo*

$$\begin{cases} \partial_t u + \alpha\ \partial_x^3 u + \gamma \left(\partial_x v \right)^2 + \delta \partial_x^2 \left(v^2 \right) = 0 \\ u(0) = \phi \end{cases}, \tag{0.5}$$

em sua versão integral, onde $v \in \chi_T^a$*. A seguir, mostraremos que existem* $\eta > 0$*,* $a > 0$ *e* $T = T\left(\|\phi\|_5 + \|\phi\|_{3,2} \right) > 0$*, tais que se* $\|\phi\|_5 + \|\phi\|_{3,2} < \eta$*, então* $Av \in \chi_T^a$ *e* $A : \chi_T^a \to \chi_T^a$ *é uma contração. Assim, o ponto fixo de* A *em* χ_T^a *é solução de (0.1) em sua versão integral.*

Referências

[1] ARGENTO, C. R. R. - *O Problema de Cauchy para a Equação de Kuramoto-Velarde Generalizada com Dispersão, Ph.D. thesis IMPA, Rio de Janeiro, 1997.*

[2] F. LINARES AND G. PONCE - *Introduction to nonliear dispersive equations, Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro, 2003.*

[3] A. S. BARROS - *Local well-posedness for super Korteweg-de Vries equations, Nonlinear Analysis, Vol.68, Number 6, 2008.*

[4] C. E. KENIG, G. PONCE AND L. VEGA - *Well-Posedness and Scattering Results for the Generalized Korteweg-de Vries Equation via the Contraction Principle, Communications on Pure and applied Mathematics, Vol. XLVI, 527-620, 1993.*

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{0}}$ 2 Novembro 2008

O PROBLEMA DE CAUCHY PARA A EQUAÇÃO KDV

Carlos Alberto Silva dos Santos *

O presente estudo tem por objetivo apresentar a existência e a unicidade de soluções para o problema de Cauchy dado pela expressão abaixo

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + u\partial_x u = 0 \qquad t, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}, \tag{0.1}$$

conhecida como equação Korteweg-de Vries denotada por (KdV).

Provaremos o seguinte resultado

Teorema 0.1. *Seja $k = 1$ e $s > 3/4$. então para cada $u_0 \in H^S(\mathbb{R})$ existe $T = T(||u_0||_{s,2}) > 0$ (com $T(\rho) \to \infty$ para $\rho \to 0$) e uma única solução $u(t)$ de (0.1) satisfazendo*

$$u \in C([-T,T] : H^s(\mathbb{R})) \tag{0.2}$$

$$\partial_x u \in L^4([-T,T] : L^\infty(\mathbb{R})) \tag{0.3}$$

$$\left\| D_x^s \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L_x^\infty L_T^2} < \infty \tag{0.4}$$

$$\|u\|_{L_x^2 L_T^\infty} < \infty \tag{0.5}$$

Para qualquer $T' \in (0,T)$ existe uma vizinhança V de u_0 em $H^s(\mathbb{R})$ tal que a função $\widetilde{u}_0 \to \widetilde{u}(t)$ de V sobre a classe definida por (0.2)-(0.5) com T' en vez de T é Lipschitz.

Referências

[1] C. Kenig, G. Ponce, and V. Vega. *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via contraction principle. Comm. Pure Appl. Math.*, 46 : 527 − 620, 1993.

*Universidade Federal de Alagoas, IM, AL, Brasil, carlos@pos.ufal.mat.br

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{o}}$ 2 Novembro 2008

Obtención de relajaciones lineales mediante planos de corte Fenchel asociadas a relajaciones lagrangeanas para problemas de programación entera

J. ROJAS * & A. U. ZAVALETA **

En los últimos años la relajación lagrangeana ha tenido un rol muy importante en la resolución de problemas de optimización entera y optimización combinatorial, en la actualidad, es la técnica más usada para obtener cotas fuertes de la solución de estos problemas, aunque éstas no provienen de una relajación lineal. El principal objetivo del presente trabajo, es mostrar como obtener relajaciones lineales con mejores valores a los que proporciona el problema dual lagrangeano mediante métodos poliedricos. Se demuestra que los recientemente introducidos planos de corte Fenchel resuelven el problema convexificado asociado a cada relajación lagrangeana. Además, se demuestra que los planos de corte Fenchel son más efectivos que los planos de corte lagrangeno y que presentan buenas propiedades computacionales para problemas binarios.

Un problema de programación lineal entera es de la forma:

$$\begin{array}{lll}(PE) & \max & c^t x \\ & & Ax \leq b,\, x \in X.\end{array}$$

X incluye las restricciones discretas de las variables.
Introduciendo un vector de multiplicadores μ se forma la relajación lagrangeana del problema:

$$\begin{array}{lll}(PE_\mu) & \max & c^t x + \mu(b - Ax) \\ & & x \in X.\end{array}$$

Si $L(\mu)$ es el valor óptimo de (PE_μ) se conoce que $v(PE) \leq L(\mu)$ para $\mu \geq 0$, ésto induce a considerar el problema dual lagrangeano,

$$\begin{array}{lll}(D_L) & \min & L(\mu) \\ & & \mu \geq 0.\end{array}$$

Este problema está asociado a la relajación lineal del problema (PE), conocido como *convexificación* respecto a X,

$$\begin{array}{lll}(PE^*) & \max & c^t x \\ & & Ax \leq b,\, x \in conv(X)\end{array}$$

Teorema 0.1. $conv(X) = \{x \in \mathbb{R}^n : \lambda x \leq f(\lambda), \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^n\}$, *donde* $f(\lambda) = \max\{\lambda x : x \in X\}$.

En el teorema, la desigualdad $\lambda x \leq f(\lambda)$ es válida para X y se llama *desigualdad Fenchel.*

Prueba: Como $\lambda x \leq f(\lambda)$ es válida para X, también es válida para $conv(X)$ y se tiene que, $conv(X) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \lambda x \leq f(\lambda), \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^n\}$. Para demostrar el reciproco, consideramos $\tilde{x}$ tal que $\lambda\tilde{x} \leq f(\lambda)\, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^n$, y supongamos que $\tilde{x} \notin conv(X)$. Como $conv(X)$ es un poliedro (ver [6]), es posible aplicar el teorema de separación a $\tilde{x}$ y $conv(X)$. Entonces existe un vector $\lambda \in \mathbb{R}^n$ y un número real δ tal que $\lambda x \leq \delta\, \forall\, x \in conv(X)$ y $\lambda\tilde{x} > \delta$. Ésto implica que $\max\limits_{x \in conv(X)} \lambda x = f(\lambda) \leq \delta$ y $\lambda\tilde{x} > \delta$, lo cual es una contradicción. ∎

*Universidad Nacional de Trujillo ... , Trujillo, Perú, jmrojas00@yahoo.es
**Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo, Perú, ulicesz@mixmail.com

La descripción de la envolvente convexa dada en el teorema no es de forma concisa. En la práctica esto no implica mayor problema debido a que se incorporarán sólo desigualdades violadas y bastará con tener una aproximación de la envolvente convexa. Usualmente la solución del problema de separación proporciona las desigualdades más violadas y que mejor aproximan a la envolvente convexa.

Por otro lado se tiene la relajación Fenchel, $LP(F)$, cuya formulación es dada por:

$$LP(F): \quad \text{máx}\, c^t x \ , \quad Ax \leq b \ , \quad x \in \bar{X}$$
$$\lambda x \leq f(\lambda) \ \forall \ \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Ahora, dada una solución fraccional $\tilde{x}$, para $LP(F)$, si $v(\lambda)$ es la cantidad en que la desigualdad Fenchel asociada a λ es violada, entonces (ver Boy [2]), $v(\lambda) = \lambda\tilde{x} - f(\lambda)$. Usando esta función, Boy [2] establece el siguiente resultado.

Teorema 0.2. *$\tilde{x} \notin conv(X)$ si y sólo si existe un valor de λ para el cual $v(\lambda) > 0$.*

El teorema de separación asociado se formula como:

$$(Q) \quad \text{máx}\, v(\lambda)\,, \lambda \in \Lambda,$$

donde Λ es un dominio donde $v(\lambda)$ alcanza un valor positivo en $\mathbb{R}^n$ si tiene un valor positivo en Λ.

Considerando el conjunto L de todas las desigualdades lagrangeanas y la relajación lagrangeana:

$$LP(L): \qquad \text{máx}\, c^t x \ , \quad Ax \leq b \ , \quad x \in \tilde{X}$$
$$cx + \mu(b - Ax) \leq L(\mu) \ , \quad \mu \geq 0,$$

el siguiente teorema muestra la relación entre las relajaciones Fenchel y lagrangeana.

Teorema 0.3. *La desigualdad lagrangeana para $\mu \geq 0$ es una desigualdad Fenchel para $\lambda = c - \mu A$*

Prueba: Sea la desigualdad $cx + \mu(b - Ax) \leq L(\mu)$, es decir $(c - \mu A)x \leq L(\mu) - \mu b$ y sea $\lambda = c - \mu A$. Entonces,

$$f(\lambda) = \quad \text{máx}\{(c - \mu A)x : x \in X\} = \text{máx}\{cx + \mu(b - Ax) : x \in X\} - \mu b = L(\mu) - \mu b \quad \blacksquare$$

Del teorema anterior se obtiene que para $\mu \geq 0$,

$$v(PE) \leq v(LP(F)) \leq v(LP(L)) \leq v(LP_\mu) \leq L(\mu).$$

Aplicando el teorema de convexificación-Dualización de Guignar[4] se establece la relación de los valores óptimos de los respectivos problemas, obteniéndose que,

$$v(D_L) = v(LP(F)) = v(LP(L)) = v(LP(\mu^*)).$$

Por tanto agregar todos las inecuaciones Fenchel, o todas las desigualdades lagrangeanas tienen el mismo efecto sobre la función objetivo.

Referências

[1] AARDAL K., Z.; POCHET, Y ;WOLSEY, L.A - *Capacitated facility location: valid inequalities and facts.* Math.Oper.Res. 20, 1995. 562-582p.

[2] BOY, A. - *Fenchel cutting planes for integer program*,J.Oper. Res., v.42,1, p.53-63, 1992.

[3] CORNUÉJOLS G.; SRIDHARAM, R; THIZY, J.M- *A comparasion of heuristics and relaxations for the capacitates plant location problem*,European J. oper, v.50(1), p.28-297, 1991.

[4]GUIGNARD M.; SIWHAN,K. -*Lagrangean Decomposition: A Model yielding stronger Lagrangean Bounds.* Mathematical Programming, v.39(1), p.215-228, 1997.

[5] NEMHHAUSER,L.;WOLSEY,A.- *Integer and Combinatorial Optimization.* Wiley, New York 1988.

[6]RAMOS, M.T.; SÁEZ,J. *Solving capacitated facility location problems by fenchel cutting planes.* J.Oper.Res. Soc, v.39(1), p.215-228, 2002.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{o}}$ 2 Novembro 2008

Resultados de coincidência para aplicações absolutamente somantes

J. S. Santos *

Neste trabalho apresentamos alguns dos principais resultados da teoria de operadores absolutamente somantes. Na década de 60, com os trabalhos de Pietsch [5], Lindenstrauss e Pelczyński [3] e Mitjagin e Pelczyński [4], a teoria de operadores absolutamente somantes foi apresentada de forma mais acessível, simplificando a apresentação original de Grothendieck e, desde então, a teoria de operadores absolutamente somantes vem tendo um papel de destaque na Análise Funcional. A partir da década de 80, com o trabalho de Pietsch [6], começaram a ser investigadas generalizações do conceito "absolutamente somante" para polinômios e aplicações multilineares entre espaços de Banach. O objeto principal de nosso estudo serão polinômios homogêneos absolutamente somantes entre espaços de Banach, e o principal resultado a ser apresentado será um resultado, que denominamos Teorema de Limitação, obtido por G. Botelho e D. Pellegrino [1].

Definição 0.1. *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e X um espaço de Banach. Uma seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X é fortemente p-somável se a seqüência de escalares correspondente $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty}$ estiver em l_p. Denotamos por $l_p(X)$ o espaço vetorial de todas as seqüências fortemente p-somáveis em X.*

Definição 0.2. *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e X um espaço de Banach. Uma seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X é fracamente p-somável se a seqüência de escalares $(\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}$ estiver em $l_p(X)$ para todo $\varphi \in X'$. Denotamos por $l_{p,w}(X)$ o espaço vetorial de todas as seqüências fracamente p-somáveis.*

Definição 0.3. *Sejam $1 \leq p, q < \infty$ e $u : X \longrightarrow Y$ um operador linear contínuo entre espaços de Banach. Dizemos que u é absolutamente (p,q)-somante (ou $(p;q)$-somante) se existir um operador induzido*

$$\widehat{u} : l_{q,w}(X) \longrightarrow l_p(Y) : (x_n)_{n=1}^{\infty} \longmapsto (ux_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Denotamos por $\prod_{p,q}(X;Y)$ o conjunto formado por todos os operadores $(p;q)$-somantes de X em Y. Quando $p = q$, escrevemos $\prod_p(X;Y)$ no lugar de $\prod_{p,p}(X;Y)$.

O próximo teorema é o resultado central da teoria de operadores absolutamente somantes.

Teorema 0.1 (Grothendieck)**.** *Todo operador linear contínuo $u : l_1 \longrightarrow l_2$ é absolutamente somante, ou seja, $\mathcal{L}(l_1, l_2) = \prod_1(l_1, l_2)$.*

Resultados deste tipo são chamados de resultados de coincidência.

Definição 0.4. *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. A aplicação $P : X \longrightarrow Y$ é um polinômio m-homogêneo se existir $A \in \mathcal{L}(^m X;Y)$ tal que $P(x) = A(x,...,x)$ para todo $x \in X$. Dizemos que P é o polinômio m-homogêneo associado a A.*

O espaço de Banach formado por todos os polinômios m-homogêneos contínuos de X em Y com a norma do sup é denotado por

$$\mathcal{P}(^m X;Y) \, (\text{ou } \mathcal{P}(^m X) \text{ se } Y = \mathbb{K}).$$

*Universidade Federal da Paraíba UFPB, PB, Brasil, joedsonsr@yahoo.com.br

Definição 0.5. *Um polinômio m-homogêneo* $P : X \longrightarrow Y$ *é absolutamente* (p,q)*-somante (ou* (p,q) *-somante) se* $(P(x_j))_{j=1}^{\infty} \in l_p(Y)$ *para toda* $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{q,w}(X)$*. O espaço de todos os polinômios m-homogêneos absolutamente* (p,q)*-somantes de* X *em* Y *é denotado por*

$$\mathcal{P}_{as(p,q)}\left({}^{m}X;Y\right) \quad \left(ou\ \mathcal{P}_{as(p,q)}\left({}^{m}X\right)\ se\ Y=\mathbb{K}\right).$$

Quando $m = 1$*, temos o conceito original de operadores absolutamente somantes e notação da teoria linear.*

Definição 0.6. *Se* X *é um espaço de Banach de dimensão infinita com uma base de Schauder incondicional normalizada* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$*, definimos*

$$\mu_{X,(x_n)} = \inf\left\{t; (a_j)_{j=1}^{\infty} \in l_t \ sempre\ que\ x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \in X\right\}.$$

Os resultados a seguir são devidos a G. Botelho e D. Pellegrino [1].

Lema 0.1. *Suponha que* Y *satisfaça a seguinte condição:*

Existem $C_1, C_2 > 0$ *e* $p \geq 1$ *tais que, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, existem* $y_1, \ldots, y_n$ *em* Y *com* $\|y_j\| \geq C_1$ *para todo* j *e*

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} a_j y_j\right\| \leq C_2 \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{1/p}$$

para todo $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$.

Neste caso, se X *tem uma base de Schauder incondicional normalizada* $(x_r)_{r=1}^{\infty}$*,* $q < p$ *e* $\mathcal{P}_{as(q,1)}\left({}^{m}X;Y\right) = \mathcal{P}\left({}^{m}X;Y\right)$*, então*

$$\mu_{X,(x_n)} \leq mq.$$

Teorema 0.2 (Teorema de Limitação)**.** *Seja* X *um espaço de Banach de dimensão infinita com uma base incondicional normalizada* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *e* $\mathcal{P}_{as(q,1)}\left({}^{m}X;Y\right) = \mathcal{P}\left({}^{m}X;Y\right)$*. Então*

$$\mu_{X,(x_n)} \leq mq,$$

se

(i) $q < 1$ *e* $\dim Y < \infty$;

(ii) $q < \cot Y$ *e* $\dim Y = \infty$.

Referências

[1] G. Botelho, D. Pellegrino - *Absolutely summing polynomials on Banach spaces with unconditional basis. Journal of Mathematical Analysis and Applications,* ***321*** *(2006), 50-58.*

[2] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge - *Absolutely summing operators, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 43, 1995.*

[3] J. Lindenstrauss e A. Pelczyński - *Absolutely summing operators in* L_p *spaces and their applications, Studia Mathematica* ***29*** *(1968), 276-326.*

[4] B.Mitjagin e A. Pelczyński - *Nuclear operators and approximative dimension, Proc. of ICM, Moscow, 1966, 366-372.*

[5] A. Pietsch - *Absolut p–summierende Abbildungen in normieten Räumen, Studia Math.* ***27*** *(1967), 333- 353.*

[6] A. Pietsch - *Ideals of multilinear functionals, Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and their Applications in theoretical Physics, 185-199, Teubner-Texte, Leipzig, 1983.*

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFPB - Universidade Federal da Paraíba & UFCG -Universidade Federal de Campina Grande
Edição N$^{\underline{0}}$ 2 Novembro 2008

UM ESTUDO SOBRE A BOA COLOCAÇÃO LOCAL DA EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER EM H^s_{per}

D. C. ROMÃO *

Dados X e Y, espaços de Banach, dizemos que o problema de Cauchy

$$u_t(t) = F(t, u(t)) \in X, \qquad u(0) = \phi \in Y, \tag{0.1}$$

onde $F : [0, T_0] \times X \longrightarrow Y$, é **localmente bem-posto** se

(a) existe $T \in (0, T_0]$ e uma função $u \in C([0, T]; Y)$ tal que $u(0) = \phi$ e a equação diferencial é satisfeita no sentido que

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - F(t, u(t)) \right\|_X = 0,$$

onde as derivadas em 0 e T são calculadas à direita e à esquerda;

(b) o problema (0.1) tem pelo menos uma solução em $C([0, T]; Y)$;

(c) a aplicação $\phi \longmapsto u$ é contínua. Mais precisamente, seja $\phi_n \in Y$, $n = 1, 2, \cdots, \infty$, tal que $\phi_n \overset{Y}{\to} \phi_\infty$, e sejam $u_n \in C([0, T_n]; Y)$ as correspondentes soluções. Seja $T \in (0, T_\infty)$ Então as soluções u_n podem ser extendidas ao intervalo $[0, T]$ para todo n suficientemente grande e

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{[0,T]} \|u_n(t) - u(t)\|_Y = 0.$$

Se qualquer dessas condições não forem satisfeitas, o problema é dito **mal-posto**.

Dado $s \in \mathbb{R}$, H^s_{per} denota o espaço de Banach, com a norma

$$\|f\|_s^2 = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(1 + |k|^2\right)^s \left|\widehat{f}(k)\right|^2.$$

Estes espaços são conhecidos como os espaços de Sobolev periódicos.

Neste trabalho estamos interessados em estudar a boa colocação local da equação cúbica não-linear de Schrödinger unidimensional, com dados em H^s_{per}, isto é

$$iu_t + u_{xx} = |u|^2 u, \qquad u(0) = \phi \in H^s_{per}. \tag{0.2}$$

Este modelo é muito utilizado na ótica não-linear. Provaremos os seguintes resultados:

Teorema 0.1. *O problema de Cauchy (0.2), com dados iniciais em H^s_{per}, é localmente bem-posto para $s \geq 0$.*

*Universidade Federal de Alagoas ,IM, AL, Brasil, darliton.cezario@gmail.com

Teorema 0.2. *O problema de Cauchy (0.2), com dados inicias em H^s_{per}, é mal-posto para $s < 0$.*

O primeiro teorema terá a demonstração dividida em duas partes. Inicialmente, inspirados em [3], usamos o fato dos espaços de Sobolev formarem uma álgebra de Banach para $s > 1/2$, para provar a boa colocação local nestes espaços. Em seguida, usamos a moderna teoria de Bourguain, [1], para demonstrar a boa colocação local para $0 \leq s \leq 1/2$.

No segundo teorema, seguiremos de perto o trabalho de Burq-Gérard-Tzvetkov, [2], para exibir alguns exemplos que mostram a instabilidade do fluxo da equação (0.2) nos espaços de Sobolev com índices negativos. Precisamente, provaremos que o fluxo não é uniformemente contínuo para dados iniciais em conjuntos limitados.

Referências

[1] BOURGAIN, J. - *Fourier Transform Restriction Phenomena For Certain Lattice Subsets and Applications to Nonlinear Evolution Equations*, 1993.

[2] BURQ, N.; GÉRARD, P.; TZVETKOV, N. - *An Instability Property of the Nonlinear Schödinger Equation on S^d*, 2002.

[3] IÓRIO, R.; IÓRIO, V. - *Fourier Analysis and Partial Differential Equations.*, Cambridge University Press, First edition, 2001.

Apoio:

UFPB

UFCG

Patrocínio:

UFPB

UFCG