Resumos dos Trabalhos

I Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações (ENAMA)

Decania do CCMN/UFRJ – IM/UFRJ

Rio de Janeiro, 07-09 de novembro de 2007

Introdução

O ENAMA – Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações – será um encontro científico anual com o propósito de criar um fórum de debates entre alunos, professores e pesquisadores de instituições brasileiras nas áreas de: análise funcional, análise numérica e equações diferenciais parciais e ordinárias.

O ENAMA deverá acontecer uma vez ao ano em uma instituição de ensino e pesquisa brasileira previamente selecionada. Sua organização dar-se-á conforme os itens abaixo:

1) Data e duração de cada ENAMA: de quarta a sexta-feira, em princípio, na primeira semana de novembro;

2) Durante o primeiro evento será eleito-escolhida/indicada uma Comissão Nacional com objetivos iniciais de: criar uma associação, auxiliar as Comissões Locais na realização dos ENAMA´s, dar suporte as atividades do Comitê Científico;

3) A Comissão Nacional será composta por, pelo menos, um membro das áreas envolvidas e decidirá os locais e eventos futuros, e será responsável pela solicitação de apoio financeiro junto aos órgãos de fomento.;

4) O Comitê Científico, além de julgar os resumos, também julgará as solicitações para mini-cursos e nomes de possíveis palestrantes. Os números de mini-cursos e palestras serão escolhidos a cada ano, levando em conta vários aspectos, inclusive a disponibilidade financeira;

5) Para cada edição será criada uma Comissão Local composta por membros da instituição que hospedará o evento, que deverá se responsabilizar pelo espaço físico, hospedagem (ou pelo menos algum tipo de desconto em hotéis próximos) e demais logísticas para a realização do ENAMA;

Foram convidados atuantes pesquisadores/professores de importantes instituições de pesquisa e ensino de diversas regiões do Brasil nas áreas de análise, análise numérica e equações diferenciais para compor o **Comitê Científico do ENAMA**. Dessa forma, obteve-se um Comitê representativo, formado pelos seguintes nomes:

EDP/EDO
Cícero L. Frota (UEM/PR)
Daniel Cordeiro de Morais Filho (UFCG/Pb)

Fágner Araruna (UFPb)
Flavio Dickstein (UFRJ)
Francisco Júlio S. A. Corrêa (UFPA/PA)
Geraldo Araújo (UFPA)
Gladson Antunes (UERJ)
Haroldo Rodrigues Clark (UFF)
Joaquim Rodrigues Feitosa (UFPb)
José Luis Boldrini (UNICAMP)
Juan Limaco Ferrel (UFF)
Luíz Adauto Medeiros (UFRJ)
Manuel Milla Miranda (UFRJ)
Marco Rojas-Medar (UNICAMP)
Marcondes Clark (UFPi/Pi)
Maria Aparecida Bená (FFCLRP/USP)
Nikolai Larkine (UEM/PR)
Olimpio H. Miyagaki (UFV/MG)
Pablo Braz e Silva (UFPe/Pe)
Plácido Zoega Táboas (USP/SC)
Silvano Menezes (UFPA/PA)
Tânia Nunes Rabello (ITA/SP)
Waldemar D. Bastos (UNESP-Rio Preto/SP)

Análise
Daniel Pellegrino (UFCG/Pb)
Daniela M. Vieira (UNICAMP)
Geraldo M. de A. Botelho (UFU)
Jorge Mujica (UNICAMP)
Luiza Amália de Moraes (UFRJ/RJ)
Mario Carvalho de Matos (UNICAMP)
Mary Lilian Lourenço (USP/SP)

Análise Numérica
Alexandre Madureira (LNCC/MCT)
Maria Inês M. Copetti (UFSM/RS)
Rigoberto Sanabria (UENF/RJ)
Sandra Malta (LNCC/MCT)

I ENAMA

O I ENAMA realiza-se nas dependências da Decania do CCMN (Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza) da UFRJ, Ilha do Fundão-RJ, de 07 a 09 de novembro de 2007 com o apoio Departamento de Métodos Matemáticos do Instituto de Matemática. Esperamos que o ENAMA seja um fórum de debates e de troca de conhecimentos entre os alunos de pós-graduação e os professores/pesquisadores das diversas instituições de ensino e pesquisa do Brasil. O I ENAMA conta com 02 palestras, três mini-cursos e 60 comunicações de 20 minutos. Agradecemos a todos aqueles que acreditaram na nossa proposta e contribuiram para sua realização.

Em particular, agradecemos o apoio do Diretor do IM-UFRJ prof. Waldecir Biachini, da Decana do CCMN profa. Angela Rocha dos Santos e do Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC/MCT), além dos seguintes órgãos financiadores: FAPERJ, Banco do Brasil e Fundação Universitária José Bonifácio (FUJB/UFRJ).

A Comissão Organizadora

Comitê Organizador

Angela Rocha dos Santos, UFRJ
Geraldo Botelho, UFU
Haroldo R. Clark, UFF
Luis Adauto Medeiros, UFRJ
Sandra M. C. Malta, LNCC

Comitê Científico do I ENAMA

Geraldo M. de A. Botelho, UFU
Haroldo R. Clark, UFF
Luis Adauto Medeiros, UFRJ
Olimpio Miyagaki, UFV
Placido Z. Táboas, USP-S. Carlos
Sandra M.C. Malta, LNCC

Índice dos Resumos

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edition N$^{\underline{o}}$ 1 November 2007

EXISTENCE OF POSITIVE SOLUTION FOR A QUASILINEAR PROBLEM WITH CRITICAL GROWTH IN $\mathbb{R}^N_+$ *

C. O. ALVES, † J. A. FERNANDES ‡ & A. R. F. HOLANDA §

Abstract

In this paper, we show the existence of positive solution for the following class of quasilinear problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)u^{p-1} = u^{p^*-1}, & \mathbb{R}^N_+ \\ u > 0, \text{ in } \mathbb{R}^N_+ \\ |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \partial\mathbb{R}^N_+ \end{cases} \tag{0.1}$$

where Δ_p is the p-Laplacian operator, given by

$$\Delta_p u = div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$$

$p^* = \frac{Np}{N-p}, N > p \geq 2$, $\mathbb{R}^N_+ = \left\{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N, x_N > 0\right\}$ and $V : \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}$ is a nonnegative continuous functions.

This class of problem has been study by Cerami and Passaseo [4] for the case $p = 2$. Assuming some hypotheses on V the authors showed the existence of positive solution for (0.1). Motivated by [4] and some arguments developed by Alves [1], we prove that the results found in [4] also hold for the p-Laplacian with $p \geq 2$.

In this paper, we assume the following hypotheses on function V:

$$\begin{cases} (i) \ \lim\limits_{|x|\to+\infty} V(x) = V_\infty \geq 0, \ V_\infty \in \mathbb{R} \\ (ii) \ V(x) \geq V_\infty, \ \forall x \in \mathbb{R}^N_+ \\ (iii) \ V - V_\infty \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N_+), \ |V - V_\infty|_{L^{N/p}(\mathbb{R}^N_+)} \neq 0 \end{cases} \tag{0.2}$$

We denote by $D^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$ and $W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$ the closure of $C^\infty(\mathbb{R}^N_+)$ with respect to

$$\|u\|_D = \left(\int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

and

$$\|u\|_W = \left(\int_{\mathbb{R}^N_+} (|\nabla u|^p + |u|^p)\right)^{\frac{1}{p}}$$

respectively.

$Mathematics Subject Classifications:$ 35H30, 35A15, 35B33

Key words: Quasilinear Equation, Variational Methods, Critical Exponent

†UFCG, DME, PB, Brazil, coalves@dme.ufcg.edu.br, Supported by CNPq 300959/2005-2 and PADCT/CNPq 620025/2006-9
‡UFCG, DME, PB, Brazil, arimat@dme.ufcg.edu.br, Supported by PADCT/CNPq 620025/2006-9
§UFCG, CES, PB, Brazil, angelorf.ces@ufcg.edu.br

The main tools used in this paper are the Variational Methods and Topological Degree. In some lemmas and propositions, we use some properties of the family of functions $\phi_{\delta,y} \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ given by

$$\phi_{\delta,y}(x) = \frac{\left[N\delta\left(\frac{N-p}{p-1}\right)^{p-1}\right]^{\frac{N-p}{p^2}}}{\left[\delta + |x-y|^{\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{N-p}{p}}}, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^N, \ \ \delta > 0.$$

This family is very important in our arguments, because the solutions of the problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u = u^{p^*-1} \ \ \text{in } \mathbb{R}^N \\ u > 0, \ \ \text{in } \mathbb{R}^N \\ u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

belongs to $\{\phi_{\delta,y}\}$. Hence, all solutions of (0.1) when $V = 0$ is equal to $\phi_{\delta,y}$ for some $\delta > 0$ and $y \in \mathbb{R}^N$.

The main results are the following:

Theorem 0.1. *Lat V satisfy (0.2) and $V_\infty > 0$. Then, there exists a positive number A such that if $V_\infty \in (0, A)$, problem (0.1) admits at least positive solution $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$. Moreover, if the condition*

$$|V - V_\infty|_{L^{N/p}(\mathbb{R}^N_+)} < \left(1 - 2^{-p/N}\right) S \tag{0.3}$$

is satisfied , (0.1) has at least another solution $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$.

Theorem 0.2. *Let V satisfy (0.2) and $V_\infty = 0$. If (0.3) holds, that is,*

$$|V|_{L^{N/p}(\mathbb{R}^N_+)} < \left(1 - 2^{-p/N}\right) S,$$

(0.1) has at least one positive solution $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$.

References

[1] ALVES, C. O. - *Existence of positive solutions for a problem with lack of compactness involving the p-laplacian*, Nonlinear Analysis, 51 (2002), pp. 1187-1206.

[2] BENCI, V. AND CERAMI, G. - *Existence of positive solutions of the equation $\Delta u + a(x)u = u^{\frac{N+2}{N-2}}$ in $\mathbb{R}^N$*, J. Funct. Anal., 88 (1990), 90-117.

[3] BREZIS, H. AND NIRENBERG, L. - *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents* Comm. Pure Appl. Math., 36 (1983), 437-477.

[4] CERAMI, G. AND PASSASEO, D. - *Nonminimizing positive solutions for equations with critical exponents in the half-space*, SIAM J. Math. Anal., 28 (1997), 867 - 885.

[5] LIONS, P. L. - *The concentration - compactness principle in the calculus of variations. The limit case,* Math. Iberoamericana, 1 (1983), 145-201.

[6] STRUWE, M. - *Variational Methods, Springer-Verlag, Berling, 1990.*

[7] TALENTI, G. - *Best constant in Sobolev inequality*, Ann Math., 110 (1976), 353-372.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edition N$^{\underline{o}}$ 1 November 2007

Periodic Solution for a Nonlinear Hyperbolic Equation with a Pressure Term *

G. O. Antunes†, H. R. Crippa ‡ & M. D. G. da Silva§

Abstract

The objective of the present article is to investigate existence and uniqueness of solution for the following periodic initial boundary value problem:

$$\left| \begin{array}{l} w'' - \Delta w + \nabla p + \gamma(w') = f \text{ in } Q = \Omega \times (0,T) \\ div\ w = 0 \text{ in } Q \\ w = 0 \text{ on } \Sigma \\ w(0) = w(T), \quad w'(0) = w'(T) \text{ in } \Omega. \end{array} \right. \tag{1}$$

By Ω we represent a connected, open, bounded set of $\mathbb{R}^n$ with boundary Γ which is supposed C^2. We consider the cylinder $Q = \Omega \times (0,T)$ of $\mathbb{R}^{n+1}$, $T > 0$, with lateral boundary $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$. The points of $\mathbb{R}^n$ are represented by $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ with $x_i \in \mathbb{R}$, for $i = 1, 2, ..., n$. The points of Q are denoted by (x,t), $x \in \Omega$, $0 < t < T$.

When $\gamma(s) = 0$ and the initial value problem is not periodic, the problem was initially investigated by Lions [1] who called it hyperbolic equation with a pressure term.

We observe that $\gamma(w') = (\gamma_1(w_1'), \gamma_2(w_2'), ..., \gamma_n(w_n'))$, where $\gamma_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ is a function for $i = 1, 2, ..., n$ such that:

(H1) γ_i is an increasing and continuous function, for $i = 1, 2, ..., n$.
(H2) There are real constants k_0, $k_1 > 0$ and $\rho \geq 0$ such that
(i) $|\gamma_i(s)| \leq k_0 |s|^{\rho+1}$
(ii) $s\gamma_i(s) \geq k_1 |s|^{\rho+2}$, for $i = 1, 2, ..., n$.

The applied method is according to Lions [2] and Prodi [3].

Let us consider in (1) $w = u + u_0$ where:

$$\left| \begin{array}{l} u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0n}) \text{ independent of } t \\ \displaystyle\int_0^T u(s)\, ds = 0 \\ div\ u = div\ u_0 = 0. \end{array} \right.$$

Then u satisfies

$$\left| \begin{array}{l} u'' - \Delta u + \gamma(u') - f = -\nabla p + \Delta u_0 \text{ in } Q \\ div\ u = 0 \text{ in } Q \\ u = 0 \text{ on } \Sigma \\ \displaystyle\int_0^T u(s)\, ds = 0 \\ u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T). \end{array} \right. \tag{2}$$

* *Mathematics Subject Classifications:* 35F30, 35K35
Key words: Periodic Solutions; Hyperbolic Equation, Weak Solutions
†Universidade do Estado do Rio de Janeiro, IME, RJ, Brasil, gladsonantunes@hotmail.com
‡Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM, RJ, Brasil, crippa@im.ufrj.com
§Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM, RJ, Brasil, darci@im.ufrj.com

Note that if u is the solution of

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(u'' - \Delta u + \gamma\left(u'\right) - f\right) = 0 \text{ in } Q \\ div\ u = 0 \text{ in } Q \\ u = 0 \text{ on } \Sigma \\ \displaystyle\int_0^T u\left(s\right) ds = 0 \\ u\left(0\right) = u\left(T\right), \quad u'\left(0\right) = u'\left(T\right) \end{array} \right. \tag{3}$$

and u_0 is the solution of

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta u_0 + \nabla p = -g_0 \text{ in } \Omega \\ u_0 = 0 \text{ on } \Gamma \\ div\ u_0 = 0 \text{ in } \Omega, \end{array} \right. \tag{4}$$

where $g_0 = u'' - \Delta u + \gamma\left(u'\right) - f$ does not depend on t, then u will be the solution of (2) and $w = u + u_0$ will be the periodic solution of (1) which we are looking for.

We consider the following functional spaces $V = \left\{v;\, v \in \left(H_0^1\left(\Omega\right)\right)^n,\, div\ v = 0\right\}$, $H = \left\{v;\, v \in \left(L^2\left(\Omega\right)\right)^n,\, div\ v = 0,\, v \cdot \nu = 0 \text{ on } \Gamma\right\}$, $W = \left(L^{\rho+2}\left(\Omega\right)\right)^n$ and

$$\begin{array}{l} \mathcal{W} = \left\{v;\, v \in L^2\left(0,T;V\right),\ v' \in L^2\left(0,T;V\right) \cap L^{\rho+2}\left(0,T;W\right),\, v'' \in L^2\left(0,T;H\right),\right. \\ \left.\displaystyle\int_0^T v\left(s\right) ds = 0,\, v\left(0\right) = v\left(T\right),\, v'\left(0\right) = v'\left(T\right)\right\}. \end{array}$$

The main result is giving by the following Theorem:

Theorem 1. *Let Ω be a bounded domain of $\mathbb{R}^n$ with regular boundary Γ, γ a function satisfying the conditions (H1) and (H2) and $f \in L^2\left(0,T;H\right)$. Then, there exist only one $p \in L^2\left(\Omega\right)/\mathbb{R} := \left\{v \in L^2\left(\Omega\right);\, \int_0^T v\left(t\right) dt = 0\right\}$ and only one solution $w \in \mathcal{W}$ of* (1)*, with $w = u + u_0$, where u is the unique solution of* (3) *and u_0 is the unique solution of* (4)*.*

Proof The sketch of the proof consists of the following steps:

1. Problem (3) is solved by the elliptic regularization method;
2. Problem (4) is solved, according to Temam [4]. ■

References

[1] Lions, J.L., *On some Hyperbolic Equations with a Pressure Term,* Proceedings of the conference dedicated to Louis Nirenberg held in Trento, Italy, september 3-8. Harlom Longman Scientific and Technical, Pitman Res. Notes Math. Ser 269 196-208, 1992.

[2] Lions, J. L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéares.*, Dunod-Gauthier Villars, Paris, First edition, 1969.

[3] Prodi, G., *Soluzioni periodiche del' equazioni della onde con terme dissipative nonlineare*, Rend. Sem. Mat. Padova (35) (1966).

[4] Temam, R., *Navier-Stokes Equations*, North-Holland Pub. Company, 1977.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edição N$^{\underline{0}}$ 1 Novembro 2007

Equação Hiperbólica com Termo de Resistência em um Domínio Não-Cilíndrico

G. O. Antunes * P. N. da Silva † & R. S. Busse ‡

Resumo

Neste trabalho, estuda-se a existência e unicidade de soluções fraca para o seguinte problema, posto em um domínio não-cilíndrico

$$\widehat{Q} = \bigcup_{0<t<T} \Omega_t \times \{t\},$$

cuja froteira lateral é dada por

$$\widehat{\sum} = \bigcup_{0<t<T} \Gamma_t \times \{t\}:$$

$$\left| \begin{array}{l} u'' - \Delta u = -\nabla p \text{ em } \widehat{Q} \\ div\ u = 0 \text{ em } \widehat{Q} \\ u = 0 \text{ sobre } \widehat{\Sigma} \\ u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right), \quad u'\left(x,0\right) = u_1\left(x\right) \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \tag{1}$$

O problema (1), definido em um domínio cilíndrico, foi inicialmente proposto por J. L. Lions [1] , onde o autor investigou questões relacicondas a regularidade escondida e controlabilidade.

A metodologia empregada aqui, consiste em transformar o problema (1), via um difeomorfismo τ, em um problema equivalente definido em um domínio cilíndrico $Q = \Omega \times (0,T)$, a partir daí, aplicar o método de Faedo Galerkin, juntamente com argumentos relacionados à energia para obter os resultados desejados e retornar ao domínio original utilizando a inversa τ^{-1}.

Conforme Milla [3], τ é definido por $\tau(x,t) = (y,t)$, com $y = K^{-1}x$, onde $K\left(t\right) = k\left(t\right)M$, sendo $k : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$, $k \in C^2\left([0,T]\right)$, e M uma matriz $n \times n$, inversível, cujas entradas são constantes reais. Dessa forma, fazendo a mudança de variável $u(x,t) = v(y,t)$ e $p(x,t) = q(y,t)$, transforma-se o problema não-cilíndrico (1) no seguinte problema definido no cilindro Q:

$$\begin{cases} Lv = v'' + A(t)v + C_1(t)y_j \dfrac{\partial v'}{\partial y_j} + C_0(t)y_j \dfrac{\partial v}{\partial y_j} = -K(t)\nabla q, & \text{em } Q \\ \text{div}\left(K^{-1}(t)v\right) = 0, & \text{em } Q \\ v = 0 \text{ sobre } \Sigma & \\ v(0) = v_0, \quad v'(0) = v_1, & \text{em } \Omega \end{cases} \tag{2}$$

onde $v_0 = u_0(K(0)y)$, $v_1(y) = u_1(K(0)y) + \dfrac{k'(0)}{k(0)}\nabla v_0 \cdot y$,

$$A(t)v = -\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_l}\left(\sum_{r=1}^{n} a_{lr}(y,t)\frac{\partial v}{\partial y_l}\right),$$

$$C_0(t) = -\frac{k''(t)k(t) + (n-1)(k'(t))^2}{k^2(t)}, \qquad C_1(t) = -\frac{2k'(t)}{k(t)}$$

*Universidade do Estado do Rio de Janeiro, RJ, Brasil, gladsonantunes@hotmail.com
†Universidade do Estado do Rio de Janeiro, RJ, Brasil, patynsilva@yahoo.com.br
‡Universidade do Estado do Rio de Janeiro, RJ, Brasil, ronaldobusse@yahoo.com.br

e $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$ é a fronteira lateral de Q.

Para o estudo do problema (2) são introduzidos os seguintes espaços de funções:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \left\{\varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^n ;\ \operatorname{div}\left(K^{-1}(t)u\right) = 0\right\} \\
V &= \left\{u \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^n ;\ \operatorname{div}\left(K^{-1}(t)u\right) = 0\right\} \\
H &= \left\{u \in \left(L^2(\Omega)\right)^n ;\ \operatorname{div}\left(K^{-1}(t)u\right) = 0,\ u \cdot \nu = 0 \text{ sobre } \Gamma\right\},
\end{aligned}$$

cujo produto interno e norma serão representados, respectivamente, por

$$\begin{aligned}
(v,w)_H &= (v,w)\,, \qquad ((v,w))_V = ((v,w))\,, \\
|v|_H &= |v|\,, \qquad \|v\|_V = \|v\|\,.
\end{aligned}$$

Entende-se como solução fraca do problema (2), conforme J. L. Lions [2], uma função $v : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$v \in L^\infty(0,T;V)\,, \qquad v' \in L^\infty(0,T;H)\,,$$

e satisfaz à equação

$$-\int_0^T (v',\xi')dt + \int_0^T a(t,v,\xi)dt + \int_0^T \left\langle C_1(t)y_j\frac{\partial v'}{\partial y_j},\xi\right\rangle dt + \int_0^T \left(C_0(t)y_j\frac{\partial v}{\partial y_j},\xi\right) dt = 0$$

onde

$$\xi \in L^2(0,T,V\cap(L^2(\Omega))^n), \qquad \xi' \in L^2(0,T,H), \qquad \xi(0) = \xi(T) = 0$$

e as condições iniciais

$$v(0) = v_0, \quad v'(0) = v_1.$$

A existência e unicidade de solução fraca para o problema (2) é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 0.1. *Sejam*

$$v^0 \in V\cap(H^2(\Omega))^n \qquad e \qquad v^1 \in H.$$

Então, uma única solução fraca v do problema (2) tal que

$$v \in L^\infty(0,T,V\cap(H^2(\Omega))^n), \quad v' \in L^\infty(0,T,(H_0^1(\Omega))^n), \quad v'' \in L^\infty(0,T,(L^2(\Omega))^n),$$

e existe uma função $q \in L^\infty\left(0,T;H^1(\Omega)\right)$ que verifica a equação em $(2)_1$.

Proof A prova de existência é obtida por meio do método de Faedo Galerkin com duas estimativas. Para a primeira estimativa considera-se na equação aproximada $w = v_m'(t)$ e para a segunda $w = v_m''(t)$. A unicidade é obtida graças ao método da energia. ■

Referências

[1] Lions, J.L., *On some Hyperbolic Equations with a Pressure Term,* Proceedings of the conference dedicated to Louis Nirenberg held in Trento, Italy, september 3-8. Harlom Longman Scientific and Technical, Pitman Res. Notes Math. Ser 269 196-208, 1992.

[2] lions, j. l. - *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéares.*, Dunod-Gauthier Villars, Paris, First edition, 1969.

[3] Miranda, M. M.; Ferrel, J. L. , *The Navier Stokes equations in non-cylindrical domains,* Comp. Appl. Math. V. 16, n^0 3, (1997) 247-265.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edição N$^{\underline{0}}$ 1 Novembro 2007

EXISTÊNCIA E ESTABILIDADE DO SISTEMA DE MINDLIN-TIMOSHENKO SEMILINEAR

F. D. ARARUNA * & J. E. S. BORGES †

Resumo

Consideramos a dinâmica unidimensional do sistema de Mindlin-Timoshenko semilinear que representa as vibrações de vigas. Para uma viga de comprimento L, o sistema é dado pelo acoplamento

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\rho h^3}{12} u_{tt} - u_{xx} + K\left(u + v_x\right) + f\left(u\right) = a \text{ em } Q, \\ \rho h v_{tt} - K\left(u + v_x\right)_x + g\left(v\right) = b \text{ em } Q, \end{array} \right. \tag{0.1}$$

onde $Q = (0, L) \times (0, T)$, u é o ângulo de rotação da seção transversal da viga e v representa o deslocamento transversal da viga no tempo t. A constante h é a espessura da viga que, para esse modelo, é considerada uniforme e fina, ρ é a densidade de massa por unidade de volume e o parâmetro K, que multiplica o acoplamento das equações, é chamado de módulo de elasticidade em torção, com a, b, f e g representando forças externas. Para maiores detalhes da dedução do modelo indicamos o livro Lagnese-Lions [3].

Impomos as condições de fronteira

$$\left| \begin{array}{l} u\left(0, \cdot\right) = v\left(0, \cdot\right) = 0 \text{ sobre } \left(0, T\right), \\ u_x\left(L, \cdot\right) + u_t\left(L, \cdot\right) = 0 \text{ sobre } \left(0, T\right), \\ u\left(L, \cdot\right) + v_x\left(L, \cdot\right) + v_t\left(L, \cdot\right) = 0 \text{ sobre } \left(0, T\right). \end{array} \right. \tag{0.2}$$

As condições $(0.2)_1$ asseguram que a viga permanece presa no extremo $x = 0$. As condições $(0.2)_2$ e $(0.2)_3$ nos diz que a viga está apoiada no extremo $x = L$ sob a ação de uma força dissipativa.

Para completar nosso sistema, incluimos as condições iniciais

$$\left| \begin{array}{l} u\left(\cdot, 0\right) = u^0\left(\cdot\right), \ u_t\left(\cdot, 0\right) = u^1\left(\cdot\right) \text{ em } \left(0, L\right), \\ v\left(\cdot, 0\right) = v^0\left(\cdot\right), \ v_t\left(\cdot, 0\right) = v^1\left(\cdot\right) \text{ em } \left(0, L\right). \end{array} \right. \tag{0.3}$$

Neste trabalho estudamos a existência e o comportamento assintótico (quando $t \to \infty$) para o sistema $(0.1) - (0.3)$, onde as funções não lineares f e g satisfazem a condição de sinal,

$$f,\ g \text{ são funcões contínuas, tais que } f\left(s\right) s \geq 0 \text{ e } g(s)s \geq 0, \ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{0.4}$$

Analisamos também o comportamento assintótico (quando $t \to \infty$) do mesmo sistema com as não linearidades f e g satisfazendo, além de (0.4), as condições de crescimento

$$\exists \delta_1 > 0 \text{ tal que } f(s)s \geq (2 + \delta_1)F(s), \forall s \in \mathbb{R}, \text{ onde } F\left(s\right) = \int_0^s f\left(t\right) dt \tag{0.5}$$

e

$$\exists \delta_2 > 0 \text{ tal que } g(s)s \geq (2 + \delta_2)G(s), \forall s \in \mathbb{R}, \text{ onde } G\left(s\right) = \int_0^s g\left(t\right) dt. \tag{0.6}$$

*UFPB, DM, PB, Brasil, fagner@mat.ufpb.br
†UFPB, DM, PB, Brasil, dudusampaioborges@hotmail.com

Precisamente, mostramos que a energia do sistema (0.1) definida por

$$
\begin{aligned}
E(t) = \; & \frac{1}{2}\left[\frac{\rho h^3}{12}\left|u_t\left(t\right)\right|^2+\rho h\left|v_t\left(t\right)\right|^2+K\left|\left(u+v_x\right)\left(t\right)\right|^2+\left|\left|u\left(t\right)\right|\right|^2\right. \\
& \left. +2\int_0^L F(u(x,t))dx + +2\int_0^L G(v(x,t))dx\right],
\end{aligned}
\tag{0.7}
$$

decai exponencialmente quando t tende ao infinito.

Denotaremos por V o espaço de Hilbert $V=\left\{v\in H_0^1\left(0,L\right);\; v\left(0\right)=0\right\}.$

Estabeleceremos o principal resultado do nosso trabalho.

Teorema 0.1. *Dados* $(u^0,u^1,a),(v^0,v^1,b)\in V\times L^2(0,L)\times L^2(Q)$ *com* $F(u^0),G(v^0)\in L^1(0,L)$ *e* f,g *satisfazendo* (0.4), *então existe pelo menos um par de funções* $u,v:Q\to\mathbb{R}$ *satisfazendo* $(0.1)-(0.3)$ *na classe*

$$u,v\in L^\infty(0,T,V), \tag{0.8}$$

$$u_t,v_t\in L^2(0,T,L^2(0,L)), \tag{0.9}$$

$$u_{tt},v_{tt}\in L^1(0,T,V'+L^1(0,L)). \tag{0.10}$$

Além disso, se as não linearidades f *e* g *satisfazem* (0.5) *e* (0.6), *existem constantes* $C>0$ *e* $\kappa>0$ *tais que a energia* (0.7) *verifica a estimativa*

$$E(t)\le Ce^{-\kappa t}E\left(0\right),\;\forall\; t\ge 0. \tag{0.11}$$

Idéia da prova. Para a existência, primeiramente resolvemos o problema (existência e unicidade) com dados bem regulares e as não linearidades do tipo Lipschitziana satisfazendo a condição de sinal em (0.4). Para isto, aplicamos o método de Faedo-Galerkin usando uma base especial como em Milla Miranda-Medeiros [4]. Em seguida, aproximamos as não linearidades contínuas (como em (0.4)) pelas Lipschitzianas, antes mencionadas, por meio de um resultado devido a Strauss [5]. Os dados iniciais, agora não tão regulares, aproximamos por densidade. Usando os mesmos argumentos de Araruna-Maciel [1], que consiste em obter estimativas à priori e provar alguns resultados de existência e unicidade de problemas elípticos, pudemos garantir a existência de pelo menos uma solução nas condições do teorema. A unicidade, para este caso geral, ainda é um problema em aberto. Para o comportamento assintótico, usando o método da pertubação de energia (ver, por exemplo, Komornik-Zuazua[2]), mostramos que a energia (0.7), associada a solução (u,v) do problema (0.1), verifica a desigualdade (0.11) e, portanto, tem decaimento exponencial, quando t tende ao infinito. ■

Referências

[1] ARARUNA, F. D. and MACIEL, A. B, Existence and Boundary Stabilization of the Semilinear Wave Equation, Nonlinear Analysis T. M. A., 67 (2007), 1288–1305

[2] KOMORNIK. V and ZUAZUA. E, A Direct Method for Boundary Stabilization of the Wave Equation, J. Math. Pure et Appl., 69 (1990) , 33-54.

[3] LAGNESE, J. E. and LIONS, J. L., *Modelling Analysis and Control of Thin Plates,* RMA 6, Masson, Paris, (1988).

[4] MILLA MIRANDA, M. and MEDEIROS, L. A.,On a Boundary Value Problem for Wave Equation: Existence Uniqueness-Asymptotic Behavior, Rev. Mat. Apl. Universidad de Chile, 17 (1996) , 47-73

[5] STRAUSS, W. A., On Weak Solutios of Semilinear Hyperbolic Equations, An. Acad. Bras. Ciências, 42 (4) (1970) , 645-651.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edição N$^{\underline{0}}$ 1 Novembro 2007

REGULARIZAÇÃO ELÍPTICA E SOLUÇÕES PERIÓDICAS PARA A EQUAÇÃO NÃO LINEAR DO TELÉGRAFO

G. M. DE ARAÚJO*, S. B. MENEZES† & R. B. GUZMÁN‡

Resumo

Neste trabalho, investigamos e existência de soluções periódicas em t para a equação não linear do telégrafo

$$\begin{cases} w'' + w' - \Delta w + w + |w'|^{p-2}w' = f \text{ em } Q \\ w = 0 \text{ sobre } \Sigma \\ w(0) = w(T), \;\; w'(0) = w'(T) \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

onde w é a corrente eletrica , f é a densidade das forças externas e $Q = \Omega\times]0,T[$ é um cilindro com fronteira $\Sigma = \Gamma\times]0,T[$. Seguindo as idéias de Prodi [5], procuramos soluções para (0.1) do tipo

$$\begin{cases} w = u + u_0 \;\; u_0 \text{ independente de t} \\ \displaystyle\int_0^T u(t)\,dt = 0. \end{cases} \tag{0.2}$$

Substituindo w dado por (0.2) em (0.1), obtemos, derivando em relação a t

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u'' + u' - \Delta u + u + |u'|^{p-2}u' - f) = 0 \\ i)\; u(0) = u(T), \;\; ii)\; \displaystyle\int_0^T u(t)dt = 0, \; iii)\; u'(0) = u'(T). \end{cases} \tag{0.3}$$

Suponhamos que se possa encontrar u solução de (0.3). Note que u é solução de

$$u'' + u' - \Delta u + u + |u'|^{p-2}u' - f = g_0, \;\; g_0 \text{ independente de } t.$$

Desde que a solução u é conhecida, g_0 também é conhecida. Então, u_0 pode ser obtido como a solução do Problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u_0 + u_0 = -g_0 \\ u_0 = 0 \text{ sobre } \Gamma, \; \Gamma \text{ é a fronteira de } \Omega. \end{cases} \tag{0.4}$$

Portanto, nosso problema consiste em determinar u solução de (0.3). Isso será feito usando regularização eliptica. Para isso, introduzimos o espaço de Banach W e a forma forma linear $v \to \pi_\mu(u,v)$, dados respctivamente por

$$\begin{cases} W{=}\{v; v \in L^2(0,T;V), \, v' \in L^2(0,T;V) \cap L^p(Q), \, v'' \in L^2(0,T;H), \\ \displaystyle\int_0^T v(t)dt = 0, \; v(0) = v(T), \; v'(0) = v'(T) \qquad \text{e} \end{cases}$$

$$\pi_\mu(u,v) = \mu \int_0^T [(u'', v'') + (u', v') + (Au', v')]\,dt + \int_0^T (u'' + u' + Au + u + \gamma(u'), v')\,dt. \tag{0.5}$$

*UFPA, PA, Brasil, gera@ufpa.br
†UFPA, PA, Brasil, silvano@ufpa.br
‡UFPA, PA, Brasil, rogelio@ufpa.br

onde $-\Delta u = Au$ and $|u'|^{p-2}u' = \gamma(u')$. O operador $\mathcal{B}_\mu : W \to W'$ dado por $\pi_\mu(u,v) = (\mathcal{B}_\mu(u), v)$, $\mathcal{B}_\mu(u) \in W'$ é hemicontínuo, limitado, coercivo e estritamente monótono de $W \to W'$ e a forma linear é contínua sobre W. Isto implica que existe somente uma $u_\mu \in W$ tal que

$$\pi_\mu(u_\mu, v) = \int_0^T (f, v')\, dt \;\; \forall v \in W, \tag{0.6}$$

(veja Lions [1], Teorema 2.1, pg. 171). O Problema (0.6) é chamado de regularização elíptica do Problema (0.3). Para provar o Teorema 0.1 a seguir, mostra-se que a sucessão u_μ solução do Problema (0.6) converge para u solução do Problema (0.3) num certo sentido, em seguida, determina-se u_o como solução do Problema de Dirichlet (0.4). Iremos agora enunciar e dar uma idéia da demonstração do principal resultado do trabalho.

Teorema 0.1. *Seja Ω um conjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, $n \le 2, p > 2$, com fronteira regular Γ e $f \in L^{p'}(0,T; L^{p'}(\Omega))$. Então existe uma única função real $w = w(x,t)$, $(x,t) \in Q$, $w \in W$, tal que*

$$\begin{cases} w = u + u_0, \;\; u_0 \in H_0^1(\Omega) \\ u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \\ u' \in L^p(0,T; L^p(\Omega)) \end{cases}$$

e w satisfazendo (0.1).

Prova: *Existência* - Usando-se (0.5) e (0.6), obtém-se estimativas que permitem passar o limite no Problema (0.6) quando $\mu \to 0$, obtendo-se

$$\begin{cases} \int_0^T [(-u', v'') + (u', v') + (Au, v') + (u, v') + (\chi, v')]\, dt = \int_0^T (f, v')\, dt, \quad \text{for all } v \in W \\ i)\; u(0) = u(T), \;\; ii)\; \int_0^T u(t)dt = 0, \;\; iii)\; u'(0) = u'(T). \end{cases} \tag{0.7}$$

A dificuldade consiste na passagem ao limite no termo não linear $|u'_\mu|^{p-2}u'_\mu$, isto é, consiste em provar que $\chi = |u'|^{p-2}u'$. Tal dificuldade é contornada usando-se o método empregado por Lions [1], que consiste em introduzir-se uma regularização de u dada por $\widehat{v} = u * \rho_\nu * \rho_\nu$ onde, $(\rho_\nu) \in C^\infty(\mathbb{R})$ representa uma sucessão regularizante de funções periódicas pares em t, com suporte em $\left[-\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right]$. Observe que $\widehat{v} \in C^\infty(\mathbb{R}; V)$, $\widehat{v}' \in C^\infty(\mathbb{R}; L^p(\Omega))$, $\widehat{v}'' \in C^\infty(\mathbb{R}; H)$, $\widehat{v}$ e $\widehat{v}'$ periodica em t. Aliás, este método é também utilizado na obtenção da unicidade. Usando (0.7) com $\widehat{v}$ no lugar de v, mostra-se que $\int_0^T (\chi, u')\, dt = \int_0^T (f, u')\, dt$ quando $\rho \to \infty$. Introduz-se $X_\mu = \int_0^T (\gamma(u'_\mu) - \gamma(\varphi), u'_\mu - \varphi)\, dt + \mu \int_0^T [|u''_\mu|^2 + |u'_\mu|^2 + \|u'_\mu\|^2]\, dt + \int_0^T [|u'_\mu|^2\, dt \ge 0, \; \forall \varphi \in L^p(0,T; L^p(\Omega))$, ou ainda, $X_\mu = \int_0^T (f, u'_\mu)\, dt - \int_0^T (\gamma(\varphi), u'_\mu - \varphi) dt - \int_0^T (\gamma(u'_\mu), \varphi)\, dt \ge 0$, que converge para $\int_0^T (f, u')\, dt - \int_0^T (\gamma(\varphi), u' - \varphi)\, dt - \int_0^T (\chi, \varphi)\, dt = X \ge 0$. Usando aí o fato que $\int_0^T (\chi, u')\, dt = \int_0^T (f, u')\, dt$, obtém-se $\int_0^T (\chi - \gamma(\varphi), u' - \varphi)\, dt \ge 0$, $\forall \varphi \in L^p(0,T; L^p(\Omega))$. Da hemicontinuidade do operador $|\varphi|^{p-2}\varphi = \gamma(\varphi)$, segue que u é num certo sentido solução do Problema (0.3). $\square$

Referências

[1] LIONS, J. L. - *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéares.*, Dunod-Gauthier Villars, Paris, First edition, 1969.

[2]PRODI, G. - *Soluzioni periodiche dell'equazione delle onde com termine dissipativo non-lineare.*, Rend. Sem. Mat. Pandova, 35 (1965).

[3]BRÉZIS, H. - *Analyse Functionelle, Théorie et applications.*, ed. Masson, Paris 1983.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edition N$^{\underline{0}}$ 1 November 2007

ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF SOLUTION OF A WAVE EQUATION WITH DEGENERATED LOCAL DISSIPATION *

Yolanda Silvia Santiago Ayala †

Abstract

In this work, we study the existence of global solution and the asymptotic behaviour of the wave equation with dissipation , where initial condition satisfies the mth-order compatibility condition which allow us to obtain a more regular solution.
Assuming that a goes to zero at the boundary quickly enough so that there exist $p > 0$ and $C > 0$ such that

$$\forall \rho \in (0, \frac{R}{2}), \quad \int_{\rho}^{\frac{R}{2}} \frac{1}{b(r)^p} dr \leq C \frac{\rho}{b(\rho)^p} ,$$

and $m > \frac{N}{2}$, we get that the solution u of the evolution model:

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u + a(x) u_t &= 0 \text{ in } \Omega \times I\!R^+ \ \text{ with } \Omega := B_R(0) \,, && (0.1)\\ u &= 0 \text{ on } \partial\Omega \times I\!R^+ \,, && (0.2)\\ u(0) = u_0 \,,\ u_t(0) &= u_1 \,, && (0.3) \end{aligned}$$

verifies

$$E(t) \leq C(B^{-1}(\frac{1}{t}))^{\frac{2m}{N}} ,$$

where E denote the energy associated to the system (0.1)-(0.3) and B^{-1} denotes the inverse function of $B = I \cdot b$. We use the semigroup theory to prove the existence and uniqueness of solution to the problem (0.1)-(0.3), as well as its continuous dependency of initial data. Likewise, we study the regularity of this solution.
We make a complete study of certain integral inequalities. Also we prove that

$$\int_t^{\infty} f(\tau)^{1+\sigma} d\tau \leq C f(t) \quad \text{implies} \quad f(t) \leq \frac{C}{(1+t)^{\frac{1}{\sigma}}}$$

and introduce the following Lemma, which use to obtain our main result.

Lemma 0.1. *Let $E : I\!R^+ \to I\!R^+$ be a no increasing function and $\phi : I\!R^+ \to I\!R^+$ an strictly increasing C^1 function such that*

$$\phi(t) \longrightarrow +\infty \ \text{as} \ t \to +\infty. \tag{0.4}$$

Let us assume that there are $\sigma > 0$, $\sigma' > 0$ and $c > 0$ such that

$$\forall s \geq 1 \,, \quad \int_s^{+\infty} E(t)^{1+\sigma} \phi'(t) dt \leq c E(s)^{1+\sigma} + c \frac{E(s)}{\phi(s)^{\sigma'}} \,. \tag{0.5}$$

---

* *Mathematics Subject Classifications:* ..., ..., ...
Key words: wave equation, evolution model, decay of solution, asymptotic behaviour.
†Universidad Nacional Mayor de San Marcos , Facultad de Ciencias Matemáticas, Lima, Perú, ysantiagoa@unmsm.edu.pe

Then there exists $C > 0$ depending continuously on $E(1)$ satisfying

$$\forall t \geq 1 \,, \quad E(t) \leq \frac{C}{\phi(t)^{\frac{(1+\sigma')}{\sigma}}} \,. \tag{0.6}$$

Making use of the multiplicative techniques, we obtain important estimations. And by adapting the Conrad and Rao methods [2], we obtain the estimation which satisfies the hypothesis of the Lemma 0.1.

References

[1] Adams, R.A. - *Sobolev Spaces,* Academic Press, New York, (1975).

[2] Conrad and Rao - *Decay of solutions of wave equations in a star-shaped domain with nonlinear boundary feedback,* Asympt. Anal. 7 (1993), 159-177.

[3] Cortés, L. - *A note on resonant frequencies for a system of elastic wave equations,* Int. J. Math. Sci. 64, pp. 3485-3498, (2004).

[4] Ikawa, M. - *Mixed problems for hyperbolic equations of second order,* J. Math. Soc. Japan 20 (1968), 580-608.

[5] Kesavan, S. - *Topics in Functional Analysis and applications,* John Wiley & Sons, (1989).

[6] Komornik, V. - *Exact contollability and stabilization,* John Wiley & Sons, (1994).

[7] Martinez, P. -*Decay of solutions of the wave equation with a local highly degenerate dissipation,* Asymptotic Analysis 19 (1999) 1-17.

[8] Nakao, M. - *Decay of solutions of the wave equation with a local degenerate dissipation,* Israel J. of Maths 95 (1996),pp. 25-42.

[9] Pazy, A. - *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations,* Springer, New York, (1983).

[10] Renardy, M., Hrusa, W.J. and Nohel, J. A. - *Mathematical Problems in Viscoelasticity,* Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 35, John Wiley & Sons, Inc.,New York,(1987).

[11] Santiago, Y. - *Decaimiento exponencial de la solución débil de una ecuación de onda no lineal,* PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la UNMSM, Vol VIII Nro. 2, pp. 29-43, (2005).

[12] Santiago, Y. and Rivera, J. - *Global existence and exponential decay to the wave equation with localized frictional damping,* PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la UNMSM. Vol V. Nro. 2, Diciembre 2002, pp. 1-19.

[13] Santiago, Y. - *Una aplicación del Lema de Nakao,* Revista de los Departamentos de la Fac. CC. MM. de la UNMSM. Nro.2, (2005)

[14] Santiago, Y. and Cortés, L. - *About decay of solution of the wave equation with dissipation,* Proyecciones, Vol. 26, No. 1 pp. 37-71, May 2007

[15] Zuazua, E. - *Exponential decay for the semi-linear wave equation with locally distributed damping,* Comm. Partial Differential Equations 15 (1990), 205-235.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edição N$^{\underline{o}}$ 1 Novembro 2007

CONTROLE PARA UMA EQUAÇÃO HIPERBÓLICA NÃO REVERSÍVEL

W. W. BASTOS * & C. A. RAPOSO †

Resumo

1. Resumo: Nesta nota indicamos como alguns resultados recentes sobre decaimento de energia para a equação de onda com amortecimento indefinido (indefinite damping) podem ser utilizados para obter controlabilidade exata na fronteira para uma equação hiperbólica não reversível no tempo.

2. Introdução: A grande maioria dos resultados sobre controle exato para equação hiperbólica considera equação reversível no tempo, ou seja, invariante sob a mudança da variável independente t por $-t$. A dificuldade em lidar com uma equação não reversível no tempo é facilmente observada ao utilizar, por exemplo, o método de controle "Controlabilidade via Estabilização" de D. L. Russell. Aqui, explorando alguns resultados recentes de decaimento de energia para equação da onda com amortecimento indefinido e usando a construção de Russell [5] obtemos controle exato na fronteira para a equação $u_{tt} - u_{xx} + a(x)u_t = 0$ num domínio finito $\Omega = [0, l]$. O procedimento estende-se natualmente para dimensões superiores. Seja $a : [0, l] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e estritamente positiva em algum subconjunto de Ω com medida positiva. Assumiremos que função a possui extensão $\widetilde{a} \in L^\infty[0, L]$ para algum intervalo $[0, L]$, $L > l$, de tal forma que e a solução $v \in C(\mathbb{R}, H_0^1[0, L]) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2[0, T])$ da equação

$$v_{\tau\tau} - v_{xx} + (-1)\widetilde{a}(x)v_\tau = v_{\tau\tau} - v_{xx} - \widetilde{a}(x)v_\tau = 0$$

satisfaz, para τ suficientemente grande, a esimativa

$$(2.1) \qquad \|v(.,\tau)\|^2_{H^1(0,L)} + \|v_\tau(.,\tau)\|^2_{L^2(0,L)} \le |P(\tau)| \ \left[\|v(.,0)\|^2_{H^1(0,L)} + \|v_\tau(.,0)\|^2_{L^2(0,L)}\right]$$

onde $P(\tau)$ tem crescimento (no máximo) polinomial quando $\tau \longrightarrow \infty$. Segue de (2.1) que a solução $z \in C(\mathbb{R}, H_0^1[0, L]) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2[0, T])$ de $z_{tt} - z_{xx} + \widetilde{a}(x)z_t = 0$ satisfaz a estimativa

$$(2.2) \qquad \|z(.,0)\|^2_{H^1(0,L)} + \|z_t(.,0)\|^2_{L^2(0,L)} \le |P(T)| \ \left[\|z(.,T)\|^2_{H^1(0,L)} + \|z_\tau(.,T)\|^2_{L^2(0,L)}\right].$$

De fato; basta observar que $z(x, t) = v(x, T - \tau)$.

Teorema: Existe $T > 0$ tal que para todo $(u_0, u_1) \in H^1[0, l] \times L^2[0, l]$, $u_0 = 0$ em $x = 0$, existe $g \in L^2[0, T]$ tal que a solução de

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + a(x)u_t = 0 \text{ em } \ (0, l) \times (0, T), \\ u(0) = u_0 \ , \ u_t(0) = u_1 \text{ em } \ (0, l), \\ u = 0 \text{ em } \ x = 0, \\ Bu = g \text{ em } \ x = l. \end{cases}$$

satisfaz $u(T) = u_t(T) = 0$ em $[0, l]$. Aqui $Bu = u$ ou $Bu = u_x$.

3. Idéia da Prova: O ponto crucial da prova é fabricar extensão de (u_0, u_1) para $[0, L]$ de tal forma que a solução $\widetilde{u}$ da equação com os dados iniciais estendidos tenha estado final $\widetilde{u}(T) = \widetilde{u}_t(T) = 0$ em $[0, l]$. Tendo isto em vista, tomamos um par $(w_0, w_1) \in H^1[0, l] \times L^2[0, l]$, $w_0 = 0$ em $x = 0$ e passamos a uma simples extensão $(w_0, w_1) \in H_0^1[0, L] \times L^2[0, L]$. Em seguida resolvemos dois problemas mistos:

*UNESP, IBILCE, Rio Preto, SP, Brasil, waldemar@ibilce.unesp.br
†UFSJ, São João del-Rei, MG, Brasil, raposo@ufsj.edu.br

$$
(3.1)\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} + a_1(x)w_t = 0 \text{ em } (0,L)\times\mathbb{R}, \\ w(0) = w_0 \ , \ w_t(0) = w_1 \text{ em } (0,L), \\ w = 0 \text{ em } x = 0, L. \end{cases} \qquad (3.2)\begin{cases} z_{tt} - z_{xx} + a_2(x)z_t = 0 \text{ em } (0,L)\times\mathbb{R}, \\ z(T) = \theta w(T) \ , \ z_t(T) = \theta w_t(T) \text{ em } (0,L), \\ z = 0 \text{ em } x = 0, \ L. \end{cases}
$$

onde $T > 0$ será escolhido posteriormente, θ é uma função suave com $\theta = 1$ numa vizinhança de $[0,l]$ e nula para $x > L - \varepsilon$, a_1 é extensão de a para $[0,L]$ de tal forma que a solução de (3.1) decai exponencialmente e $a_2 = \widetilde{a}$. Assim, a solução de (3.2) tem crecimento polinomial, no sentido reverso, como na estimativa (2.2). Para o decaimento exponencial basta ter $a_1 \geq 0$ em $[0,L]$ (veja [1]). Agora defina $\widetilde{u} = w - z$ e observe que em $(0,l)\times\mathbb{R}$ $\widetilde{u}$ satisfaz $\widetilde{u}_{tt} - \widetilde{u}_{xx} + a(x)\widetilde{u}_t = 0$. Também: $\widetilde{u}(T) = \widetilde{u}_t(T) = 0$ em $[0,l]$. Se tivermos $\widetilde{u}(0) = u_0$ e $\widetilde{u}_t(0) = u_1$ em $[0,l]$ então definimos $u = \widetilde{u}|_{[0,l]\times[0,T]}$ e $g = B\ \widetilde{u}$, e concluímos a prova pois tal função u satisfará o problema misto do enunciado com o controle g que acabamos de definir. Precisamos resolver as equações $u_0 = w(0) - z(0)$ e $u_1 = w_t(0) - z_t(0)$ em $[0,l]$. Escrevendo $K_T(w_0,w_1) = (z(0), z_t(0))$ vemos que K_T é um operador linear limitado e as últimas equações são resumidas em

$$
(3.3) \qquad (u_0,u_1) = (w_0,w_1) - K_T(w_0,w_1) \text{ em } [0,l].
$$

Aplicando a estimativa (2.2) em $K_T(w_0,w_1)$ obtemos

$$
\|K_T(w_0,w_1)\| \leq |P(T)| \left[\|\theta w(T)\|^2_{H^1(0,L)} + \|\theta w_t(T)\|^2_{L^2(0,L)}\right] \leq C\,|P(T)| \left[\|w(T)\|^2_{H^1(0,L)} + \|w_t(T)\|^2_{L^2(0,L)}\right].
$$

Agora usando o decaimento exponencial da solução do problema (3.1) e continuidade da extenção usada no inicio obtemos

$$
\|K_T(w_0,w_1)\| \leq C\,|P(T)|\,e^{-\lambda T}[\|w(0)\|^2_{H^1(0,L)} + \|w_t(0)\|^2_{L^2(0,L)}] \leq \varphi(T)[\|w_0\|^2_{H^1(0,l)} + \|w_1\|^2_{L^2(0,l)}],
$$

onde $\varphi(T) \longrightarrow 0$, quando $T \longrightarrow \infty$. Logo, para $T > 0$ suficientemente grande K_T é contração em $H^1(0,l)\times L^2(0,l)$ e (3.3) pode ser resolvida para a variável (w_0,w_1) que levada no início da prova nos permite fabricar $\widetilde{u}$ e consequentemente a extensão $(\widetilde{u}(0), \widetilde{u}_t(0))$ de (u_0,u_1) desejada.$\blacksquare$

Observamos que a função $\widetilde{u} = w - z$ está em $H^1_{loc}([0,L]\times\mathbb{R})$ e por satisfazer $\widetilde{u}_{tt} - \widetilde{u}_{xx} \in L^2_{loc}([0,L]\times\mathbb{R})$ então possui traço $B\ \widetilde{u} = g \in L^2[0,T]$. O mesmo tipo de argumento permite considerar controle nas duas extremidades de $[0,l]$. Em [3] e [4] consideram a equação $z_{tt} - z_{xx} + \widetilde{a}(x)z_t = 0$ com $\widetilde{a}$ possivelmente negativo em partes do domínio $[0,L]$ e obtêm decaimento exponencial da energia. Assim, a estimativa (2.2), que bastou para nossos propósitos, poderá ser substituida por outras (já disponível na literatura) onde se tem decaimento de fato. As estimativas de decaimento apresentadas em [2], aparentemente, nos permitem estender o resultado acima para domínios em espaços de dimensão ≥ 1.

Referências

[1] Cox, S., Zuazua, E. - *The rate at which energy decays in a damped string.* Comm. Partial Differential Equations, 19 (1-2) 1994, 213-243.

[2] Liu, K., Rao, B., Zhang, X. - Stabilization of the wave equations with potential and indefinite damping. J. Math. Anal. Appl. 269 (2002) 747-769.

[3] Menz, G. - *Exponential Stability of Wave Equations with Potential and Indefinite Damping.* J. Differential. Equations (to appear).

[4] Rivera, J. E. M., Racke, R. - *Exponential Stability for Wave Equations with Non-dissipative Damping.* Nonlinear Anal. (to appear).

[5] Russell, D. L. - *A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations*, Stud. in Appl. Math, 52 (1973) 189-211.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edição N$^{\underline{o}}$ 1 Novembro 2007

MÉTODO PSEUDO ESPECTRAL DE CHEBYSHEV PARA SIMULAÇÃO DE PROPAGAÇÃO DE ONDAS COM CONDIÇÕES DE FRONTEIRA ABSORVENTES

FERMÍN S. V. BAZÁN *

Resumo

Informação: Problemas de propagação de ondas em domínios extensos, na prática são abordados restringindo-se o domínio para uma região delimitada por fronteiras artificiais, na qual constroem-se soluções aproximadas usando métodos numéricos. Neste trabalho apresentamos um método pseudo espectral para a simulação numérica de propagação de ondas bidimensionais [2-4] que generaliza um método pseudo espectral de Chebyshev para a propagação de ondas unidimensionais descrito [1]. Um aspecto crucial do processo é a escolha de condições de fronteira a amenizem reflexões indesejadas da solução para o interior do domínio [3]. Condições de fronteira desse tipo são ditas absorventes.

O modelo considerado é dado pela equação da onda bidimensonal linear com velocidade constante

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 \le x, y \le 1, \quad t > 0, \\ u(x,y,0) = f(x,y), \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases} \tag{0.1}$$

na qual incorporamos condições de fronteira absorventes de primeira e segunda ordens. As condições de fronteira absorventes de primeira ordem são dadas por

$$\begin{cases} u_t(0,y,t) - cu_x(0,y,t) = 0, & 0 \le y \le 1 \\ u_t(1,y,t) + cu_x(1,y,t) = 0, & 0 \le y \le 1 \\ u_t(x,0,t) - cu_y(x,0,t) = 0, & 0 \le x \le 1 \\ u_t(x,1,t) + cu_y(x,1,t) = 0, & 0 \le x \le 1 \end{cases} \tag{0.2}$$

e as de segunda ordem por:

$$\begin{cases} u_{tt} = c\, u_{xt} + \dfrac{c^2}{2} u_{yy}, & x = 0, \quad 0 \le y \le 1, \\ u_{tt} = -c\, u_{xt} + \dfrac{c^2}{2} u_{yy}, & x = 1, \quad 0 \le y \le 1, \\ u_{tt} = c\, u_{yt} + \dfrac{c^2}{2} u_{xx}, & y = 0, \quad 0 \le x \le 1, \\ u_{tt} = -c\, u_{yt} + \dfrac{c^2}{2} u_{xx}, & y = 1, \quad 0 \le x \le 1. \end{cases} \tag{0.3}$$

A idéia dos métodos propostos consiste em construir a partir do problema (0.1), um sistema de EDO's semi discreto da forma

$$\begin{cases} \bar{V}(t)_t = L_N \bar{V}(t) \\ V(0) = V_0 \end{cases} \quad \text{com } \bar{V}(t) = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{u}_t \end{bmatrix} \tag{0.4}$$

aproximando as derivadas espaciais u_{xx} e u_{yy} através do método pseudo espectral de Chebyshev (incorporando as condições de fronteira). E então resolver o sistema (0.4) através do método de Runge Kutta de quarta ordem.

Uma análise de estabilidade numérica da equação da onda bidimensional com condições de fronteiras absorventes nas fronteiras do domínio artificial foi realizada. Esta análise foi feita a partir do sistema (0.4) através da análise de estabilidade do método das linhas [6].

*Departamento de Matemática, CFM - UFSC, Brasil, fermin@mtm.ufsc.br

A qualidade dos resultados dos métodos propostos foram convenientemente ilustrados através de simulações numéricas, considerando condições de fronteira absorventes de primeira e de segunda ordem. Os dois esquemas foram comparados e conforme esperado, soluções numéricas mais precisas foram obtidas com a incorporação de condições de fronteira de segunda ordem. Os resultados são verificados através de exemplos numéricos. Apresentamos um estudo comparativo das vantagens encontradas no uso de diferentes discretizações.

Referências

[1] F. S. V. Bazán and P. C. Calegari, Chebyshev pseudospectral method for wave equation with absorbing boundary conditions that does not use a first order hyperbolic system, submetido.

[2] A. Gelb, Z. Jackiewicz, B. D. and Welfert (2002). Absorbing boundary conditions of the second order for the Pseudospectral Chebyshev methods for wave propagation. *J. of Scientific Computing*, **17**, Nos. 1-4, 501-512.

[3] L. Halpern, (1982). Absorbing boundary conditions for the discretization schemes of the one-dimensional wave equation. *Math. of Comput.* **38, no. 158**, 415-429.

[4] Z. Jackiewicz and R. A. Renaut, A note on stability of pseudospectral methods for wave propagations, *Comp. Appl. Math.*, vol. 143, pp. 127–139 (2002)

[5] Z. Jackiewicz, and R. A. Renaut (2002). A note on stability of pseudospectral methods for wave propagation. *Journal of Comp. and Appl. Math.* **143**, 127-139.

[6] S. C. Reddy and L. N. Trefethen, Stability of the method of lines, *Num. Math.*, **62** (1992), 235-267.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edição N$^{\underline{o}}$ 1 Novembro 2007

Aproximações quadráticas na otimização não linear na modelagem do processo de catalisação de polímeros

C. BECKER *, G. L. CROSSETTI † & R. P. PAZOS ‡

Resumo

Na construção de modelos matemáticos que surgem de experimentos em diversas áreas aparecem distribuições normais e aleatórias em torno a um modelo mais realista. Modelos de tipo Gaussiano são utilizados com eficiência. Neste trabalho se parte de um modelo desse tipo, visando efetuar uma aproximação quadrática na expansão da função gaussiana. Um problema de otimização não linear se aproxima por um problema de otimização quadrática com restrições quadráticas. Este enfoque foi utilizado na modelagem do processo de polimerisação de olefinas.

1 O Problema de Modelagem

Os seguintes estágios representam a metodologia para um desenvolvimento da caraterização de um sistema catalítico, sua modelagem, simulação e processo de otimização. Foram considerados dados experimentais do processo de polimerização do etileno usando um complexo diímico de Ni. As etapas foram (nessa ordem): Fase experimental, Coleta de dados, Análise correlação, Análise de regressão, Otimização e Consolidação. Os dados do chamado sistema NCSe aparecem por ensaios, onde figuram 8 parâmetros: concentração MAO (Al), concentração do agente catalisador (Ni), temperatura de polimerização (T), pressão do etileno (P), taxa entre as concentrações (Al/Ni), massa (M), atividade polimérica (Ativ) e peso molecular (PM).

A análise de correlação foi realizada, ver Hair et al. 2005 [4]. A matriz de correlação possui um papel destacável na caraterização estatística e no processamento de dados envolvendo diversas variáveis e um conhecimento aprofundado pode obter-se através da análise espectral: com a ajuda dos autovalores e autovetores, a diagonalização da matriz, além de aplicar filtros para otimização.

Diferentes modelos foram estudados tomando como variáveis preditoras Al, T, P e Al/Ni. As variáveis dependentes foram M, Ativ e PM, ver Almeida et al. [1].

2 Modelo de regressão Gaussiana e sua aproximação

Seja X o vetor em $\mathcal{X}$, o espaço preditor de dimensão n; V um vetor dado de n elementos, W uma matriz quadrada simétrica de ordem n, ver Vivarelli & Williams [5]. Então

$$Y(X) = A\, e^{-Q(X)} \tag{2.1}$$

onde $Q : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ representa uma função quadrática do vetor preditor X, por exemplo $Q(X) = \langle X, V \rangle + X^T W X$.

Em geral, para a formulação do modelo, deve ter-se em conta o nível de confiabilidade estatística de cada variável preditora. Agora, sua expansão de Taylor se escreve

$$Y(X) = A\left(1 - Q(X) + \frac{1}{2!}Q(X)^2 - \frac{1}{3!}Q(X)^3 + \dots\right). \tag{2.2}$$

En particular o modelo (2.2) será de tipo gaussiano se W for positiva definida.

* Universidade de Santa Cruz do Sul, Departamento de Matemática, Santa Cruz do Sul, RS, Brasil, camilabecker@ibest.com.br
† Universidade de Santa Cruz do Sul, Departamento de Fìsica e Química, Santa Cruz do Sul, RS, Brasil, geraldoc@unisc.br
‡ Universidade de Santa Cruz do Sul, Departamento de Matemática, Santa Cruz do Sul, RS, Brasil, rpazos@unisc.br

Observação 2.1. *A expansão de Taylor pode ser realizada em torno a um* X^* *conveniente, dependendo da análise dos dados. Com freqüência isto é realizado.*

3 Programa de Otimização quadrática com restrições quadráticas

Após a modelagem indicado na seção anterior, foram obtidas duas funções, uma para a Atividade, $At(\,\cdot\,)$, e outra para o Peso Molecular, $PM(\,\cdot\,)$. O problema a ser resolvido é o seguinte.

$$\begin{cases} \max\ At(T\,,\,P\,,\,Al/Ni) \\ \text{sujeita a} \\ PM(T\,,\,P\,,\,Al/Ni) = PM_0 \\ \text{com } (T\,,\,P\,,\,Al/Ni) \in \mathcal{X}^+ \end{cases} \tag{3.3}$$

onde PM_0 representa um valor fixo do Peso Molecular. En geral (3.3) resulta um problema não linear com restrições não lineares, cuja resolução nem sempre é simples. Mas se $At(\,\cdot\,)$ é um modelo (2.1), então pode ser aproximada pela expressão que resulta do truncamento até a ordem quadrática de (2.2), lo qual na prática representa uma boa simplificação. Análogas considerações podem ser efetuadas para a restrição $PM(\,\cdot\,)$. Desta forma, sejam $At_{\text{quad}}(\,\cdot\,)$ e $PM_{\text{quad}}(\,\cdot\,)$ as correspondentes aproximações quadráticas. O problema aproximado será:

$$\begin{cases} \max\ At_{\text{quad}}(T\,,\,P\,,\,Al/Ni) \\ \text{sujeita a} \\ PM_{\text{quad}}(T\,,\,P\,,\,Al/Ni) = PM_0 \\ \text{com } (T\,,\,P\,,\,Al/Ni) \in \mathcal{X}^+ \end{cases} \tag{3.4}$$

Observação 3.1. *Para resolver o problema (3.3) se usa o Método de Marquardt, que é muito eficiente, ou outro,* ver Arumugan 2003 [2]. *Para resolver (3.4) se utiliza o Método de Multiplicadores de Lagrange ou o Método da Descida Mais Rápida,* ver Freundt 2005 [3], *(neste caso reformulando apropriadamente o problema), si consideram-se as variáveis preditoras como variáves contínuas.*

O propósito deste trabalho é duplo:

- Analisar qual é o grau de aproximação da solução do problema (3.4) em relação à solução do problema (3.3).
- Estudar a sensibilidade de W_{At} e W_{PM}, matrizes associadas às formas quadráticas, e a correlação entre elas.

Referências

[1] ALMEIDA, P. D. F., PANTA PAZOS, R. E. e CROSSETTI, G. L. - *Otimização com vínculo na modelagem dos polímeros e a sensibilidade do método de multiplicadores de Lagrange*, XXIX Congresso de Matemática Aplicada e Computacional, Campinas, SP, 2006.

[2] ARUMUGAN, M. - *EMPRR: A High-dimensional EM-Based Piecewise Regression Algorithm*, dissertation in Computer Science, University of Nebraska, USA, 2003.

[3] FREUNDT, R. M. - *The Steepest Descent Algorithm for unconstraines optimization and a Bisection Linea-search Method*, Massachussetts Institute of Technology, USA, 2004.

[4] HAIR, J., ANDERSON, R., TATHAM, R. e BLACK, W. - *Análise Multivariada de Dados*, Editora Bookman, Porto Alegre, RS, 2005.

[5] VIVARELLI, F. and WILLIAMS, C. K. I. - *Discovering hidden features with Gaussian process regression*, Proceedings of the 1998 Conference on Advances in Neural Information Processing Systems II, MIT Press, USA, pp 613 - 619, 1999.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edição N$^{\underline{0}}$ 1 Novembro 2007

TIME-PERIODIC SOLUTIONS FOR A GENERALIZED BOUSSINESQ MODEL WITH DIRICHLET BOUNDARY CONDITIONS

J.L. Boldrini * & F. Guillén-González †

Abstract

The aim of this work is to prove existence of regular time-periodic solutions for a generalized Boussinesq model which includes both nonlinear diffusion for the equations of velocity and temperature, in the case of Dirichlet boundary conditions. This case was remained as an open problem in [1].

The main idea to prove such result is to obtain higher regularity (of $L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$-type) for temperature than for velocity (only of $L^2(0,T;H^2(\Omega))$-type). This contrasts with the argument of [1], for Neumann boundary conditions, where it was possible to obtain estimates in $L^2(0,T;H^3(\Omega))$ for the temperature. In the present work this last kind of estimate is impossible to be obtained, which requires a more complex argument to be done in order to obtain our results. We also remark that our arguments also works for the case of Neumann boundary conditions for the temperature.

Next, we describe the problem with some detail. Assume that $\Omega \subset R^N$ ($N = 2$ or 3) is a regular bounded domain, with the property of the $H^2(\Omega)$-regularity for the Stokes and Poisson problems. This paper is concerned with a partial differential problem governing the coupled mass and heat flow of a viscous incompressible fluid considering a generalized Boussinesq approximation by assuming that viscosity and heat conductivity are explicit functions depending on temperature (which is a much more natural condition that taking viscosity and heat conductivity as constants). The equations involved are

$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{u} - \nabla\cdot(\nu(\theta)\nabla\boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \nabla p = \alpha \boldsymbol{g}\theta + \boldsymbol{f}, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0, \\ \partial_t\theta - \nabla\cdot(k(\theta)\nabla\theta) + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\theta = h, \end{cases} \tag{0.1}$$

in $\Omega\times[0,\infty)$, where $\boldsymbol{u}(x,t)\in R^N$ is the velocity field at point $x\in\Omega$ and time $t\in[0,+\infty)$, $p(x,t)\in R$ is the (hydrostatic) pressure, $\theta(x,t)\in R$ is the temperature. The data are the following: $\boldsymbol{g}(x,t)\in R^N$ is the gravitational field; $\alpha>0$ is a constant associated to the coefficient of volume expansion; $\boldsymbol{f}(x,t)\in R^N$ is the external forces for the momentum system; $h(x,t)\in R$ is the resulting of external heat contribution, $\nu(\cdot): R\to R$ is the kinematic viscosity and $k(\cdot): R\to R$ is the thermal conductivity.

We will search for a triplet $\{\boldsymbol{u},p,\theta\}$ regular periodic solution of (0.1) in $\Omega\times[0,\infty)$, together the Dirichlet boundary conditions:

$$\boldsymbol{u} = 0, \qquad \theta = 0 \qquad \text{on } [0,\infty)\times\partial\Omega, \tag{0.2}$$

and the time periodic condition:

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}(T), \qquad \theta(0) = \theta(T) \qquad \text{in } \Omega. \tag{0.3}$$

It is important to remark that in general stationary solutions do not satisty the previous conditions since the external forces $\boldsymbol{f}$ and h are time-dependent given functions.

Moreover, the problem with nonhomogeneous boundary conditions can be treated in a similar manner, using adequate lifting functions to rewrite the problem (0.1)–(0.3).

*Universidade Estadual de Campina , Unicamp, SP, Brasil, boldrini@ime.unicamp.br
†Universidad de Sevilla, US-EDAN, Sevilla, Espanha, guillen@us.es

Existence and uniqueness of the initial value problem related to (0.1), was proved in the work of Lorca & Boldrini [2]. The stationary problem is studied by Lorca & Boldrini in [3] for bounded domains and by Notte-Cuello & Rojas-Medar in [6] for exterior domains. On the other hand, the work of Moretti et al. [4] is devoted to the existence of reproductive weak solutions in exterior domains. The classical Boussinesq model, where ν and k are positive constants, has been analyzed in great extent, see for instance, [5], [7].

The arguments used by Lorca & Boldrini in [2] in order to obtain regular solutions (and uniqueness) are not valid to find regular time periodic solutions since the initial conditions play a fundamental role. In [1], higher order estimates for the temperature than in [2] are obtained; namely in [2] $H^2(\Omega)$ regularity is obtained for velocity and temperature, and in [1] $H^3(\Omega)$ regularity for the temperature is obtained, hence a periodic condition for time derivative of temperature also holds, i.e. $\partial_t\theta(0) = \partial_t\theta(T)$. Nevertheless, the regularity obtained for the solution in [1] is not sufficient to prove uniqueness, because more regularity than $L^2(0,T;H^2(\Omega))$ for the velocity is necessary.

Our contribution in this paper is to obtain regular time periodic solution imposing small enough external forces $\boldsymbol{f}$ and h, but without smallness constraints on the gravity force $\boldsymbol{g}$.

Referências

[1] Climent-Ezquerra, B. Guillén-González, F. & Rojas-Medar, M.A. 2007 Time-periodic solutions for a generalized Boussinesq model with Neumann boundary conditions for temperature *Proc. R. Soc. A* **463**, 2153-2164. Doi:10.1098/rspa.2007.1867.

[2] Lorca, S.A. & Boldrini, J.L. 1999 The initial value problem for a generalized Boussinesq Model. *Nonlinear Analysis.* **36**, 457–480.

[3] Lorca, S.A. & Boldrini, J.L. 1996 Stationary solutions for generalized Boussinesq models. *J. Diferential Equations* **124**, no. 2, 389–406. .

[4] Moretti, A.C. Rojas-Medar, M.A. & Rojas Medar, M.D. 2002 Reproductive weak solutions for generalized Boussinesq models in exterior domains. *Mat. Contemp.* **23**, 119–137.

[5] Morimoto, H. 1992 Nonstationary Boussinesq equations. *J. Fac. Sci., Univ Tokyo, Sect., IA Math* **39**, 61–75.

[6] Notte-Cuello, E.A. & Rojas-Medar, M.A. 1998 Stationary solutions for generalized Boussinesq models in exterior domains. *Electron. J. Differential Equations* **22**.

[7] Óeda, K. 1988 On the initial value problem for the heat convection equation of Boussinesq approximation in a time-dependant domain. *Proc. Japan Acad. 64, Ser. A*, 143–146.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edition N$^{\underline{o}}$ 1 November 2007

The Schur property on preduals of spaces of holomorphic functions *

Geraldo Botelho † & Pilar Rueda ‡

Abstract

A locally convex space E is said to have the Schur property if weakly convergent sequences in E converge in the topology of E. In the context of Banach spaces the Schur property is quite rare, but it occurs more frequently among locally convex spaces (for example, semi-Montel spaces have the Schur property). The main aim of this paper is to characterize the Schur property on preduals of spaces of holomorphic functions by means of the Schur property on the symmetric projective tensor product of the domain space. To accomplish this task we first take a look at the Schur property in spaces with $\mathcal{S}$-absolute Schauder decompositions:

Theorem 0.1. *A locally convex space E with a $\mathcal{S}$-absolute Schauder decomposition $(E_n)_n$ has the Schur property if and only if each E_n has the Schur property.*

Our second tool is the following generalization to locally convex spaces of a result due to Lust [6] which asserts that the Schur property is stable under the formation of injective tensor products of Banach spaces:

Proposition 0.1. *Let E and F be locally convex spaces with E infrabarrelled. If E and F both have the Schur property, then the space $\mathcal{L}_{w^*}(E^*;F)$ of all weak*-to-weak continuous linear operators from E^* to F has the Schur property. In particular, the injective tensor product $E\hat{\otimes}_\varepsilon F$ has the Schur property.*

Before stating the main result it is worth mentioning that the two results above allow us to generalize results of Ryan [8, Theorem 3.3(b)] and González-Gutiérrez [4, Corollary 4.11] to the locally convex setting in the following fashion:

Proposition 0.2. *Let E and F be complex locally convex spaces. The following assertions are equivalent:*
(1) *E^* and F have the Schur property.*
(2) *The space $\mathcal{L}(E;F)$ of continuous linear operators from E to F has the Schur property.*
(3) *The space $\mathcal{L}(^nE;F)$ of continuous n-linear mappings from E^n to F has the Schur property for every n.*
(4) *The space $\mathcal{P}(^nE;F)$ of continuous n-homogeneous polynomials from E to F has the Schur property for every n.*
(5) *The space $\mathcal{H}_b(U;F)$ of holomorphic mappings of bounded type from U to F has the Schur property for every balanced open subset $U \subset E$.*
(6) *The space $\mathcal{H}_{wu}(U;F)$ of holomorphic mappings from U to F that are weakly uniformly continuous on U-bounded sets has the Schur property for every balanced open subset $U \subset E$.*

Let us fix some terminology in order to state the main theorem. Given an open subset $U \subseteq E$, $G(U)$ denotes the inductive predual of $\mathcal{H}(U)$ endowed with the τ_δ-topology (holomorphic functions on U can be canonically linearized through $G(U)$ - see [7]). $\hat{\otimes}_\pi^{n,s}E$ denotes the completed symmetric projective n-fold tensor product of E. A linear

* *Mathematics Subject Classifications:* 46G20, 46A04, 46A32.
Key words: Schur property, S-absolute decompositions, symmetric tensor products, preduals of spaces of holomorphic functions.
†Universidade Federal de Uberlândia, MG, Brasil, e-mail: botelho@ufu.br. Supported by CNPq.
‡Universidad de Valencia, Spain, e-mail: pilar.rueda@uv.es. Supported by MEC and FEDER.

operator is said to be *completely continuous* if weakly null sequences are sent onto norm null sequences. A locally convex space E is *stable* if it is topologically isomorphic to its square E^2 (ℓ_p-spaces, $1 \leq p < +\infty$, are stable).

Theorem 0.2. *Assertions* (1)-(5) *below are equivalent for a complex locally convex space E:*
(1) *$G(E)$ has the Schur property.*
(2) *$G(U)$ has the Schur property for every balanced open subset $U \subset E$.*
(3) *$G(U)$ has the Schur property for some balanced open subset $U \subset E$.*
(4) *$\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E$ has the Schur property for all n.*
(5) *For every locally convex space F and every $f \in \mathcal{H}(E;F)$, its linearization $Tf: G(E) \longrightarrow F$ is completely continuous.*

Consider also the following conditions:
(6) *$\hat{\otimes}_\pi^{n} E$ has the Schur property for all n.*
(7) *E has the Schur property.*
Then, (1)-(6) are equivalent if E is stable and (1)-(7) are equivalent if E is nuclear and infrabarrelled.

In the proof we combine Theorem 0.1 with the fact, proved by Boyd [1, Proposition 4] (see also [3, Proposition 3.38]), that the spaces $(\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E)_n$ form a $\mathcal{S}$-absolute decomposition of $G(U)$.

Examples 0.1. (a) Fréchet-nuclear spaces are Fréchet-Montel and then have the Schur property [5, Proposition 11.5.1]. Hence any Fréchet-nuclear spaces fulfills conditions (1)-(7) of Theorem 0.2.

(b) Spaces belonging to a class larger than Fréchet-nuclear spaces fulfill conditions (1)-(5) of Theorem 0.2: let E be a Fréchet-Montel space with the $(BB)_\infty$ property of Dineen [2] (that Fréchet-nuclear spaces have the $(BB)_\infty$ property is a consequence of [3, Example 4.40(a)]). By [3, Proposition 1.35] we know that $\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E$ is a Fréchet-Montel space, hence has the Schur property, for every n. So, Theorem 0.2 assures that $G(U)$ has the Schur property for any balanced open subset U of E.

(c) As $\hat{\otimes}_\pi^{n,s} \ell_1$ is topologically isomorphic to $\hat{\otimes}_\pi^{n} \ell_1$ and the latter space is topologically isomorphic to ℓ_1, which has the Schur property, Theorem 0.2 yields that $G(U)$ has the Schur property for any balanced open subset U of ℓ_1.

References

[1] C. Boyd. *Distinguished preduals of spaces of holomorphic functions*, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid **6** (1993), no. 2, 221-231.

[2] S. Dineen. *Holomorphic functions and the BB-property*, Math. Scand. **74** (1994), 215-236.

[3] S. Dineen. *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Springer-Verlag, London, 1999.

[4] M. González and J. Gutiérrez. *Gantmacher type theorems for holomorphic mappings*, Math. Nachr. **186** (1997), 131-145.

[5] H. Jarchow. *Locally convex spaces*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1981.

[6] F. Lust. *Produits tensoriels injectifs d'espaces de Sidon*, Colloq. Math. **32** (1974), 285-289.

[7] J. Mujica and L. Nachbin. *Linearization of holomorphic mappings on locally convex spaces*, J. Math. Pures Appl. **71** (1992), 543-560.

[8] R. Ryan. *The Dunford-Pettis property and projective tensor products*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **35** (1987), no. 11-12, 785-792.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edition N$^{\underline{o}}$ 1 November 2007

An Asplund space with no Gâteaux smooth renorming *

C. BRECH †

Abstract

The purpose of this work is to present an example of an Asplund space with no Gâteaux smooth renorming (equivalent norm).

A Banach space is said to be an Asplund space if the dual of each separable closed subspace is separable. Asplund spaces play an important role in the renorming theory of Banach spaces. To illustrate this, let us introduce some notions, recall some results and formulate an important open problem of the domain, all of them related to our construction.

A real-valued function f on a Banach space X is said to be

- a bump function if it has bounded nonempty support;
- Gâteaux smooth at $x \in X$ if there exists $f'(x) \in X^*$ such that for each $h \in X$, $f'(x)(h) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t}$;
- Fréchet smooth at $x \in X$ if there exists $f'(x) \in X^*$ such that $\lim_{y\to 0} \frac{f(x+y)-f(x)-f'(x)y}{\|y\|} = 0$.

We say that a norm on a Banach space X is Gâteaux (resp. Fréchet) smooth if it is Gâteaux (resp. Fréchet) smooth at all x in the unit sphere of X.

Given a separable Banach space X, the following are equivalent:

(a) X admits a Fréchet smooth renorming;

(b) X admits a Fréchet smooth bump function;

(c) X is an Asplund space.

Day asked which of these relations remain true for nonseparable Banach spaces. Obviously $(a) \Rightarrow (b)$ and Ekeland and Lebourg showed in [1] that $(b) \Rightarrow (c)$. Haydon constructed in [2] a tree T such that $C_0(T)$ admits no Gâteaux smooth renorming. Asplund spaces of continuous functions have a nice characterization in topological language: given a compact space (resp. a locally compact space) K, $C(K)$ (resp. $C_0(K)$) is Asplund if and only if K is scattered, i.e., every subset contains a relatively isolated point. Since trees are always locally compact scattered spaces and Gâteaux smoothness is a weaker notion than Fréchet smoothness, Haydon's space is in particular an example of an Asplund space with no Fréchet smooth renorming, showing that $(c) \not\Rightarrow (a)$ in general. Whether (c) implies (b) or not is a famous open problem.

On the other hand, Haydon proved in [3] that for every tree T, $C_0(T)$ admits a Fréchet smooth bump function. So, hoping to disprove $(c) \Rightarrow (b)$ through a $C(K)$ space, we are forced to look into compact (or locally compact) scattered spaces which are not trees. One of the most important examples of such a space, which has been largely studied, is the Kunen space (see [6]). It is a locally compact scattered space K constructed under the continuum

* *Mathematics Subject Classifications:* 46B03, 46B26
Key words: Asplund space, Gâteaux differentiable renorming, Mazur intersection property

† Universidade de São Paulo, IME, SP, Brasil, kika@ime.usp.br & Université de Paris VII, Equipe de Logique, Paris, France, cbrech@logique.jussieu.fr. During the preparation of this work the author was supported by CNPq and CAPES.

hypothesis, such that $C_0(K)$ admits no Fréchet smooth renorming (see [4]). K being scattered, $C_0(K)$ is Asplund, so that it is a natural candidate to be analyzed. It is also known that it admits no renorming with the so called Mazur intersection property ([4]). However, despite the attempts, it is not known if it admits a Gâteaux smooth renorming or a Fréchet smooth bump function.

We want to present here an example (consistently constructed using forcing) of a locally compact scattered space K such that $C_0(K)$ (is Asplund and) admits no Gâteaux smooth renorming. Recall that Haydon's example has also these properties, but being a tree, it cannot have other pathological properties that ours has or may have. For instance, our example admits no renorming with the Mazur intersection property.

The space we study is the Banach space of continuous functions on K that vanish on the infinity, i.e., $C_0(K)$, where K is the locally compact scattered space constructed by Rabus [7] and further modified by Juhasz and Soukup in [5]. It is a generic construction of the space constructed by Ostaszewski using the diamond principle. In the mentioned papers, the space is analyzed from the topological point of view. We improve their methods to obtain the functional analytical properties. We also modify their space to obtain a similar one which still does not admit a Gâteaux smooth renorming neither a renorming with the Mazur intersection property and which contains no uncountable biorthogonal systems.

References

[1] EKELAND, I. AND LEBOURG, G. - *Generic Fréchet-differentiability and perturbed optimization problems in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 224 (1976) no. 2, pp. 193-216.

[2] HAYDON, R. - *A counterexample for several questions about scattered compact spaces*, Bull. London Math. Soc., 22 (1990) no. 3, pp. 261-268.

[3] HAYDON, R. - *Trees in renorming theory*, Proc. London Math. Soc., 78 (1999) no. 3, pp. 541-584.

[4] JIMÉNEZ SEVILLA, M. AND MORENO, J.P. - *Renorming Banach spaces with the Mazur interesection property*, Journal Func. Anal., 144 (1997), pp. 486-504.

[5] JUHÁSZ, I. AND SOUKUP, L. - *How to force a countably tight, initially ω_1-compact and noncompact space?*, Topology Appl. 69 (1996) no. 3, pp. 227-250.

[6] NEGREPONTIS, S. - *Banach spaces and topology*, Handbook of set-theoretic topology, pp. 1045-1142, 1984.

[7] RABUS, M. - *An ω_2-minimal Boolean algebra*, Trans. Amer. Math. Soc., 348 (1996) no. 8, pp. 3235-3244.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edição N$^{\underline{0}}$ 1 Novembro 2007

SOBRE UMA EQUAÇÃO BIHARMÔNICA NÃO LINEAR

C. S. Q. CALDAS, J. LIMACO & R. K. BARRETO *

Resumo

Nesta comunicação estudamos a existência de soluções em um domínio não cilíndrico $\widehat{Q}$ para a equação biharmônica:

$$\begin{array}{ll} a(x,t)\ u'' + \Delta(b(x,t)\ \Delta u) - c(x,t)\, M(||u||^2)\Delta u + \delta \Delta u' = 0 & \text{em } \widehat{Q} \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \widehat{\sum} \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x) & \text{em } \Omega_0 \end{array} \tag{0.1}$$

onde as derivadas em (0.1) são no sentido das distribuições, u' denota $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $M(x,t,\lambda)$, $a(x,t)$, $b(x,t)$ e $c(x,t)$ são funções a valores reais satisfazendo algumas hipóteses a ser fixadas depois. Os outros objetos de (0.1) são Δ e ∇ os quais denotam o operador de Laplace e o vetor gradiente respectivamente e finalmente ν é o vetor unitário normal exterior a $\widehat{\Sigma}$.

Considerando a perturbação $\delta u'$ no lugar de $\delta\, \Delta u'$, o problema (0.1) foi estudado por Límaco at al. [2] e [3] no caso cilíndrico, e pelos autores [1] no caso não cilíndrico com a mesma perturbação. Nos dois casos foi demonstrada a existência, unicidade para o caso cilíndrico, e decaimento considerando dados iniciais pequenos. Neste trabalho provamos a existência de soluções para (0.1) sem restrição sobre o tamanho dos dados iniciais. Nós usamos o método de penalização introduzida por Lions [4] e argumentos de compacidade.

Hipóteses e Resultado principal

As funções $a(x,t)$, $b(x,t)$ e $c(x,t)$ sao funções a valores reais defidas em $Q = \Omega \times (0,T)$ onde $\widehat{Q} \subset Q$. Nós consideramos as restrições de a, b e c a $\widehat{Q}$. As funções a, b e c satisfazem:

$$\begin{array}{l} a,\ b,\ a',\ b' \in L^\infty(\Omega \times (0,\infty)),\ c \in C_b^2(\overline{\Omega} \times (0,\infty)) \text{ onde} \\ C_b^2(\overline{\Omega} \times (0,\infty)) = \{c \in C^2(\overline{\Omega} \times (0,\infty))/c \text{ tem derivadas limitadas até a segunda ordem}\} \\ 0 < a_0 < a(x,t) < 1, \quad 0 < b_0 < b(x,t) < b_1, \quad 0 < k_0 < c(x,t) < k_1. \end{array} \tag{0.2}$$

$$M(x,t,\lambda) = c(x,t)\, M(\lambda), \quad M \in C^0([0,+\infty)) \quad \text{com} \quad M(\lambda) \geqslant 0, \text{ para todo } \lambda \geqslant 0. \tag{0.3}$$

Teorema 0.1. *Dado $u_0 \in H_0^2(\Omega_0)$, $u_1 \in L^2(\Omega_0)$. Então existe uma função real $u : \widehat{Q} \to \mathbb{R}$, tal que*

$$u \in L^\infty\left((0,T); H_0^2(\Omega_t)\right),$$
$$u' \in L^\infty\left((0,T); L^2(\Omega_t)\right),$$

satisfazendo

$$\begin{array}{l} -\displaystyle\int_Q a(x,t)\ u'(x,t)\phi'(x,t)\,dx\,dt - \int_Q a'(x,t)\ u'(x,t)\phi(x,t)\,dx\,dt + \int_Q b(x,t)\,\Delta u(x,t)\,\Delta\phi(x,t)\,dx\,dt \\ +\delta \displaystyle\int_Q \nabla u'(x,t) \nabla \phi(x,t)\,dx\,dt \quad + \int_Q c(x,t)\, M(||u||^2)\ \Delta u(x,t)\,\phi(x,t)\,dx\,dt = 0 \end{array} \tag{0.4}$$

para todo $\phi \in L^2(0,T; H_0^2(\Omega))$, $\phi' \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$, com $\phi(x,0) = \phi(x,T) = 0$, e dados iniciais $u(x,0) = \widetilde{u}_0(x)$, $u'(x,0) = \widetilde{u}_1(x)$ para todo $x \in \Omega$.

---

*Instituição Universidade Federal Fluminense , IM, RJ, Brasil, e-mail: gmacruz@vm.uff.br, jlimaco@vm.uff.br e rikaba@vm.uff.br
Esta comunição é apenas uma parte do trabalho feito pelos autores em [1].

Prova: Ela é feita usando o método de penalização introducido por Lions [4]. Para resolver o problema de penalização associado nós usamos o método de Faedo-Galerkin, o Teorema de Aubin-Lions e o Lema de Lions para passar ao limite no termo nao linear. Para maiores detalhes ver [1].

Referências

[1] CALDAS, C.S.Q., LIMACO, J., & BARRETO, R. K. *Beam evolution equation with variable coefficients in non-cylindrical domains*, Mathematical Methods in the Applied Sciences. (No prelo).

[2] LIMACO, J., CLARK, H. R. & FEITOSA, A. J. *Beam evolution equation with variable coefficients*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, Vol. 28 (2005), 457-478.

[3] LIMACO, J., CLARK, H. R. & MEDEIROS, L. A. *Remarks on nonlinear bi-harmonic evolution equations of Kirchhoff type in non-cylincrical domain*, International J. of Math. & Math. Sciences, No. 32(6), (2003), 2035-2052.

[4] LIONS, J. L. - *Une remarque sur les problèmes d' èvolution linéaires dans des domaines non cylindriques.*, Revue Roumaine de Math. Pures et Appliquèes, V. 9, (1964) 11-18.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edition N$^{\underline{o}}$ 1 November 2007

A NOTE ON FUNCTIONS WITH STRONGLY S-θ-CLOSED GRAPHS *

M.CALDAS †, S.JAFARI ‡ & R.K.SARAF §

Abstract

One of the most well-known notions and also an inspiration source is the notion of semiopen sets introduced by N. Levine [4] in 1963. In 1987 , Di Maio and Noiri[5] used this notion and the semiclosure of a set to introduce the concepts of semi-θ-open and semi-θ-closed sets which provide a formulation of semi-θ-closure of a set in a topological space. Mukherjee and Basu [6] continued the work of Di Maio and Noiri and defined the concepts of semi-θ-connectedness, semi-θ-components and semi-θ-quasi-components. Recently the authors [1, 2] have also obtained several new and important results and notions related to these sets. In this direction we shall introduce and study some properties of functions with strongly *semi*-θ-closed graphs by utilizing *semi*-θ-open sets and the *semi*-θ-closure operator.

Since we shall require the following know definitions and notations, we recall them:

Let (X, τ) be a topological space and S a subset of X. A subset S is said to be semi-open [4],if there exists an open set U such that $U \subset S \subset Cl(U)$. The complement of a semi-open set is said to be semi-closed. The intersection of all semi-closed sets containing S is called the semi-closure of S and is denoted by $sCl(S)$. The semi θ-closure of S [5], denoted by $sCl_\theta(S)$, is defined to be the set of all $x \in X$ such that $sCl(O) \cap S \neq \emptyset$ for every $O \in SO(X, \tau)$ with $x \in O$. A subset S is called semi-θ-closed if $S = sCl_\theta(S)$. The complement of a semi-θ-closed set is called semi-θ-open.

We mention here some results which are obtained:

Lemma 0.1. *Di Maio and Noiri [5]. Let A be a subset of a topological space (X, τ). If $A \in SO(X, \tau)$, then $sCl(A)$ is semi-regular and $sCl(A) = sCl_\theta(A)$.*

Definition 0.1. *function $f : X \to Y$ is said to be:*
(i) s-θ-irresolute if for each $x \in X$ and each $V \in S\theta O(Y, f(x))$, there exists $U \in S\theta O(X, x)$ such that $f(U) \subset V$.
(ii) quasi s-θ-irresolute if for each $x \in X$ and each $V \in S\theta O(Y, f(x))$, there exists $U \in S\theta O(X, x)$ such that $f(U) \subset sCl_\theta(V)$.

Theorem 0.1. *If $f : X \to Y$ is a function with a strongly semi-θ-closed graph, then for each $x \in X$, $f(x) = \cap\{sCl_\theta(f(U)) : U \in S\theta O(X, x)\}$.*

Theorem 0.2. *For a topological space (X, τ), the following are equivalent:*
(1) *(X, τ) is semi-θ-T_2;*
(2) *(X, τ) is semi-θ-T_1;*
(3) *(X, τ) is semi-θ-T_0.*

* *Mathematics Subject Classifications:* 54B05, 54C08.
Key words: semi-θ-open sets, semi-θ-T_1 spaces, semi-θ-T_2 spaces, s-θ-Urysohn spaces
† Departamento de Matematica , IM, RJ, Brasil, gmamccs@vm.uff.br
‡ College of Vestsjaelland South ,Slagelse, Denmark, e-mail jafari@stofanet.dk
§ Department of Mathematics , College, India

Theorem 0.3. *(1) If $f : X \to Y$ is s-θ-irresolute and Y is semi-θ-T_2, then $G(f)$ is strongly semi-θ-closed.*
(2) If $f : X \to Y$ is surjective and has a strongly semi-θ-closed graph $G(f)$, then Y is semi-θ-T_2.
(3) If $f : X \to Y$ is an injection and $G(f)$ is strongly semi-θ-closed, then X is semi-θ-T_1 or semi-θ-T_2.
(4) If $f : X \to Y$ is a bijective function with a strongly semi-θ-closed graph, then both X and Y are semi-θ-T_2.

Definition 0.2. *A topological space X is called:*
i) sθ-space if the union of any two semi-θ-closed sets is a semi-θ-closed set.
ii) X is called nearly sθ-compact (resp. a subset A of X is said to be nearly sθ-compact relative to X), if every semi-θ-open cover of X (resp. if every cover of A by semi-θ-open sets of X) has a finite subfamily such that the union of their semi-θ-closures covers X (resp. has a finite subfamily such that the union of their semi-θ-closures covers A).

Theorem 0.4. *(1) Let (X, τ) be a sθ-space. If Y is a nearly sθ-compact and semi-θ-T_2 space, then the function $f : X \to Y$ with a strongly semi-θ-closed graph $G(f)$ is quasi s-θ-irresolute.*
(2) Let (X, τ) be a sθ-space. If $f : X \to Y$ has a strongly semi-θ-closed graph $G(f)$, then it has the following property:
(P^*) *For every set F nearly sθ-compact relative to Y, $f^{-1}(F)$ is semi-θ-closed in X.*

Theorem 0.5. *(1) A sθ-Urysohn space is semi-θ-T_2.*
(2) If Y is sθ-Urysohn and $f : X \to Y$ is a quasi s-θ-irresolute injection, then X is semi-θ-T_2.
(3) If a bijection $f : X \to Y$ is semi-θ-open and X is sθ-Urysohn, then Y is sθ-Urysohn.
(4) If a bijection $f : X \to Y$ is semi-θ-open and X is semi-θ-T_2, then $G(f)$ is strongly semi-θ-closed.
(5) If $f : X \to Y$ is quasi s-θ-irresolute and Y is sθ-Urysohn, then $G(f)$ is strongly semi-θ-closed.

References

[1] CALDAS, M. AND JAFARI, S. - *On θ-semigeneralized closed sets in topology,* Kyungpook Math. J., 43 (2003), pp. 135-148.

[2] CALDAS, M. AND JAFARI, S. - *Some applications of semi-θ-open sets,* J. Egypt. Math. Soc., 11 (2003), pp. 73-81.

[3] CROSSLEY, S.G. AND HILDEBRAND, S.K. - *Semi-closure,* Texas J. Sci., 22 (1971), pp. 99-112.

[4] LEVINE, N. - *Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces,* Amer. Math. Monthly, 70 (1963), pp. 36-41.

[5] DI MAIO, G AND NOIRI, T. - *On s-closed spaces,* Indian J. Pure Appl. Math., 18(3)(1987), pp. 226-233.

[6] MUKHERJEE, M.N. AND BASU, C.K. - *On semi-θ-closed sets, semi θ-connectedness and some associated mappings,* Bull. Calcutta Math. Soc., 83 (1991), pp. 227-238.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edição N$^{\underline{o}}$ 1 Novembro 2007

MODELAGEM HIERÁRQUICA PARA A EQUAÇÃO DO CALOR EM UMA PLACA HETEROGÊNEA

A. C. CARIUS * & A. L. MADUREIRA †

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar a equação do calor estacionária em uma placa heterogênea tridimensional. Para obter os modelos em um domínio bidimensional, usamos uma técnica de redução de dimensão denominada Modelagem Hierárquica [1].

Considere uma placa tridimensional com espessura δ dada por $P^\delta = \Omega \times (-\delta, \delta)$, onde Ω é um domínio bidimensional limitado com fronteira Lipschitz. Seja $u^\delta \in H^1(P^\delta)$ a solução fraca do problema

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\left[\underline{\underline{A}}\,\underline{\nabla} u^\delta\right] &= f^\delta \qquad \text{em } P^\delta, \\ u^\delta &= 0 \qquad \text{em } \partial\Omega \times (-\delta, \delta), \\ \frac{\partial u^\delta}{\partial n} &= g^\delta \qquad \text{em } \Omega \times \{-\delta, \delta\}, \end{aligned} \tag{1}$$

onde $f^\delta : P^\delta \to \mathbb{R}$ e $g^\delta : \Omega \times \{-\delta, \delta\} \to \mathbb{R}$. A matriz $\underline{\underline{A}} : P^\delta \to \mathbb{R}^{3\times 3}_{SIM}$ é

$$\begin{pmatrix} \underset{\approx}{a}(\underset{\sim}{x}) & 0 \\ 0 & a_{33}(\underset{\sim}{x}) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$\underset{\approx}{a} : \Omega \to \mathbb{R}^{2\times 2}_{SIM}$ e $a_{33} : \Omega \to \mathbb{R}$, onde $\underset{\approx}{a}$ e a_{33} são funções ϵ-periódicas. Denotamos um ponto em P^δ por $\underline{x} = (\underset{\sim}{x}, x_3)$, com $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2) \in \Omega$. Da mesma forma denotamos $\underline{\nabla} = (\underset{\sim}{\nabla}, \partial_3) = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$, onde o operador ∂_i indica a derivada parcial na i-ésima direção. Também, $\partial_{ij} = \partial_i \partial_j$.

Usando Modelagem Hierárquica para aproximar a solução de (1), obtemos

$$\tilde{u}^\delta(\underset{\sim}{x}, x_3) = w_0(\underset{\sim}{x}) + w_1(\underset{\sim}{x}) x_3, \tag{3}$$

onde $w_0 \in H^1_0(\Omega)$ é a solução fraca de

$$\begin{aligned} -2\delta \operatorname{div}\left[\underset{\approx}{a}(\underset{\sim}{x}) \underset{\sim}{\nabla} w_0\right] &= \int_{-\delta}^{\delta} f^\delta(\underset{\sim}{x}, x_3)\; dx_3 + g^\delta(\underset{\sim}{x}, \delta) + g^\delta(\underset{\sim}{x}, -\delta) \qquad \text{em } \Omega, \\ w_0 &= 0 \qquad \text{em } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4}$$

e $w_1 \in H^1_0(\Omega)$ é a solução fraca de

$$\begin{aligned} -\frac{2\delta^3}{3} \operatorname{div}\left[\underset{\approx}{a}(\underset{\sim}{x}) \underset{\sim}{\nabla} w_1\right] + 2\delta a_{33}(\underset{\sim}{x}) w_1 &= \int_{-\delta}^{\delta} f^\delta(\underset{\sim}{x}, x_3) x_3\; dx_3 + \delta\left[g^\delta(\underset{\sim}{x}, \delta) - g^\delta(\underset{\sim}{x}, -\delta)\right] \qquad \text{em } \Omega, \\ w_1 &= 0 \qquad \text{em } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{5}$$

Observe que (4) depende de maneira não trivial da periodicidade ε de $\underset{\approx}{a}(\cdot)$, e que (5) depende de ε e δ simultaneamente.

Desenvolvemos uma expansão assintótica para u^δ e $\tilde{u}^\delta$ e mostramos que o erro de modelagem na norma H^1 é $O(\delta^{3/2})$ em um domínio escalonado.

*Laboratório Nacional de Computação Científica, LNCC, RJ, Brasil, carol@lncc.br
†Laboratório Nacional de Computação Científica, LNCC, RJ, Brasil, alm@lncc.br

Finalmente obtemos formulações numéricas para os problemas (4) e (5) usando Residual Free Bubbles (RFB) [4] e Multiscale Finite Element Method (MFEM) [2, 3].

Referências

[1] ALESSANDRINI, S. M., ARNOLD, D. N., FALK, R. S. AND MADUREIRA, A. L. - *Derivation and justification of plate models by variational methods.* Plate and shells (Quebec, QC, 1996), volume 21 of CRM Proc. Lecture Notes, pages 1–20. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[2] HOU, T. Y. AND WU, X.-H. - *A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media.* J. Comput. Phys., 134(1):169-189, 1997.

[3] HOU, T. Y., WU, X.-H. AND CAI, Z. - *Convergence of a multiscale finite element method for ellptic problems with rapidly oscillating coefficients.* Math. Comp., 68(227):913-943,1999.

[4] SANGALLI, G. *Capturing small scales in elliptic problems using a residual-free bubbles finite element method.* Multiscale Model. Simul., 1(3):485-503 (eletronic), 2003.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edição N$^{\underline{0}}$ 1 Novembro 2007

METODOLOGIAS DE ELEMENTOS FINITOS PARA PROBLEMAS DE TRANSPORTE REATIVO NÃO-LINEARES

R. G. S. Castro * & S. M. C. Malta †

Resumo

O estudo do transporte reativo de múltiplas espécies em meios porosos envolve um sistema de equações diferenciais parciais não-lineares convectivo-difusivo-reativo acopladas. Dependendo da natureza do meio poroso e das reações químicas e biológicas diferentes modelos podem ser usados. Considera-se aqui, em particular, o modelo introduzido em [1], que descreve o transporte de um subtrato de carbono orgânico (contaminante) c_2 na presença de uma população bacteriana aeróbica X_1, num domínio provido de oxigênio dissolvido (aceptor de elétrons) c_1. As equações para este sistema são dadas por:

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} + V\frac{\partial c_1}{\partial x} - D\frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + K_1(c_1, X_1)c_1 = f_1(c_2, X_1) \tag{0.1}$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} + V\frac{\partial c_2}{\partial x} - D\frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} + K_2(c_2, X_1)c_2 = f_2(c_1, X_1) \tag{0.2}$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial t} = \left[Y_i\left(\frac{V_m^i c_i}{I_b(K_h^i + c_i)}\right) - k_m\right]X_1 \tag{0.3}$$

As interpretações físicas e biológicas para os parâmetros das equações (0.1)-(0.3), assim como as condições de fronteira, condições iniciais e definições para as funções $K_i(c_i, X_i)$ e $f_i(c_i, X_i)$, $i = 1, 2$, podem ser encontradas em [1-2]. O modelo acima é mais preciso do que aqueles usualmente estudados na literatura (lineares). No entanto, as não linearidades e os acoplamentos presentes dificultam a obtenção de soluções analíticas. Portanto, aproximações numéricas precisas e robustas devem ser aplicadas para resolver os sistemas de equações resultantes, gerando soluções aproximadas fisicamente aceitáveis.

Neste trabalho é analisada a aplicação de duas metodologias de elementos finitos para resolver numericamente (0.1)-(0.3). Primeiramente, uma metodologia semi-discreta é utilizada, onde os métodos de elementos finitos estabilizados SUPG (Streamline Upwind Petrov Galerkin) e de diferenças finitas Euler Implícito são usados nas aproximações espaço e tempo separadamente, e então aplica-se um algoritmo iterativo associado ao método de Newton para a linearização e para o desacoplamento do sistema de equações [2]. Este procedimento é conhecido como aproximação semi-discreta. Em seguida, as variáveis espaço e tempo são aproximadas simultaneamente utilizando o método de elementos finitos Galerkin/mínimos quadrados espaço-tempo (GLS/ST) cuja formulação variacional está baseada no método de Galerkin descontínuo no tempo [4]. O sistema de equações algébricas não lineares resultante da discretização espaço-tempo é resolvida usando o algoritmo *preditor-multicorretor* que resulta em uma sequência de sistemas lineares.

Para comparar o desempenho das soluções obtidas, são mostrados simulações computacionais que ilustram cenários de interesse na contaminação de águas subterrâneas.

Referências

[1] KINDRED, S., CELIA, M. A. - *Contaminant transport and biodegradation 2. Conceptual model and test simulations*, Water Resources Research, **25** (1989), 1149-1159.

*Universidade Estadual do Norte Fluminense , UENF, RJ, Brasil, sanabria@uenf.br
†Laboratório Nacional de Computação Científica, LNCC, RJ, Brasil, smcm@lncc.br

[2] COUTO, P. R. L. - *Modelagem Computacional do Transporte de Contaminantes com Processos de Biodegradação e Sorção Física em um Meio Poroso Saturado*, Tese de Doutorado, Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, RJ, 2006.

[3] ROMEIRO, N. M. L., CASTRO, R. G. S. - *Linearização na Modelagem do Processo de Biodegradação,* XXVIII-CNMAC, SENAC, São Paulo,2005.

[4] CASTRO, R. G. S. - *Análise Numérica de Formulações de Elementos Finitos Espaço-Tempo para Escoamentos Miscíveis,* Tese de Doutorado, COPPE-UFRJ, 1999.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edition N$^{\underline{0}}$ 1 November 2007

ON SEMILINEAR WAVE EQUATION IN MOVING DOMAIN *

M. R. Clark† & A. O. Marinho‡ & A. T. Lourêdo §

Abstract

Let $\alpha : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ and $\beta : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ be two continuously differential functions such that:

$$\alpha(t) < \beta(t) \text{ for all } t \in [0, \infty).$$

We consider the sets Ω_t and the non cylindrical domain, contained in $\mathbb{R}^2$, defined by

$$\Omega_t = \{x \in \mathbb{R};\, \alpha(t) < x < \beta(t) \text{ for all } t \in [0, \infty)\};$$

$$Q_t = \left\{(x, t) \in \mathbb{R}^2;\, x \in \Omega_t \text{ for all } t \in [0, \infty)\right\}$$

We will investigate, in this work, the existence of weak solutions for the following non cylindrical mixed problem for a semilinear wave equations:

$$\left| \begin{array}{l} u_{tt}(x,t) - u_{xx} + |u_t(x,t)|^\rho u_t(x,t) = 0 \text{ on } Q_t, \\ u(\alpha(t), t) = u(\beta(t), t) = 0 \text{ for all } t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \;\; u_t(x, 0) = u_1(x) \text{ with } x \in \Omega_0, \end{array} \right. \tag{0.1}$$

where u is the transverse displacement, x is the spatial coordinate, t is the elapsed time and ρ is a positive real number satisfying appropriate conditions.

Non Cylindrical problems with increasing border or not, have been object of many authors. J.L. Lions in [7] and [6] introduced a method for attained of weak solutions for the equation of have

$$u'' - \Delta u + |u|^\rho u = 0 \;\; in \;\; Q_t,$$

where $\rho > 0$ and the domain Q_t increasing with the growth of the time t. This method was used by some authors in the attainment of solutions of some types of equations in Q_t, in the conditions above. It sees for example [7], [6], [5], [3], [4] and [1].

In domain whose border dependent of the time however is not increasing, the technique introduced by Lions [6] is not used!. To attack problems in such domains, the strategy is to transform the same into another equivalent one defined over a cylindrical domain whose sections are not dependent of the time. Note that, if (x, t) varies in the non cylindrical domain Q_t then the point $(y, t) \in \mathbb{R}^2$, where $y = \dfrac{x - \alpha(t)}{\gamma(t)} \in (0, 1)$ with $\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t)$, also varies in the cylindrical domain $Q = (0, 1) \times [0, \infty)$. Then, the diffeomorphism $\mathfrak{F} : Q_t \to Q$ with the $\mathfrak{F}(x, t) = (y, t)$, which justifies by the change of variable

$$v(y, t) = u(x, t)$$

---

*Mathematics Subject Classifications: $35L85$, $35L05$, $35L20$, $35L70$, $49A29$

Key words: Weak solutions, diffeomorphism, compactness.

†UFPI-DM, Teresina-PI-Brazil, mclark@ufpi.br
‡Partially supported by CNPq-Brazil, nagasak@ig.com.br
§UEPB-DME, C.Grande -PB-Brazil; Partially supported by Capes, aldotl@bol.com.br

transform the problem (0.1) in a equivalent problem:

$$\left| \begin{array}{l} v_{tt}(y,t) - \dfrac{1}{\gamma^2} v_{yy} + a_1(y,t)v_y + a_2(y,t)v_{yt} \ + a_3(y,t)v_{yy} + \\ |a_4(y,t)v_y(y,t) + v_t(y,t)|^\rho \left(a_4(y,t)v_y(y,t) + v_t(y,t)\right) = 0 \ \text{ on } \ Q, \\ v(0,t) = v(1,t) = 0 \ \text{ for all } \ t \geq 0, \\ v(y,0) = v_0(y), \ \ v_t(y,0) = v_1(y) \ \text{ with } \ y \in (0,1), \end{array} \right. \tag{0.2}$$

where

$$a_1(y,t) = \frac{1}{\gamma^2}\left[2\gamma'(\alpha' + y\gamma') - \gamma(\alpha'' + y\gamma'')\right], \ a_2(y,t) = -\frac{2}{\gamma}\left[(\alpha' + y\gamma')\right],$$

$$a_3(y,t) = \frac{1}{\gamma^2}\left[(\alpha' + y\gamma')\right]^2, \ a_4(y,t) = -\frac{1}{\gamma}\left[(\alpha' + y\gamma')\right]^2.$$

Thanks to change of variables above, the function u is a solution of mixed problem (0.1) if, and only if, v is a solution of (0.2).

To show the existence of solutions for problem (0.2) we will use the Faedo-Galerkin's method with a Hilbertian basis $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ of Sobolev spaces $H_0^1(\Omega)$ defined as solutions of the eigenvalue problem $((w_j, v)) = \lambda_j(w_j, v)$ for all $v \in H_0^1(\Omega)$ and $j \in \mathbb{N}$, where $((.,.))$ represents the scalar product in $H_0^1(\Omega)$. We assured here that, the nonlinearity of the problem (0.2) brings great difficulties, mainly to obtain the estimates necessary for to pass the limit in the approximated problem. The first estimates is obtain multiplying the approximated equation associated a (0.2) by $a_4(y,t)v_{my}(y,t) + v_{mt}(y,t)$. To second estimates we need derivable the equation approximated and we proceed with arguments analogues to first estimate.

References

[1] Clark, M.R.Existence of Solutions for a Nonlinear Hyperbolic-Parabolic Equations on Non Cylinder Domain. International Journal of Mathematics and mathematical Sciences,v.19, n.1, pp 151-160, 1996.

[2] Clark, M.R.; Clark, H.R.; Limaco, J.. Quasilinear equation in moving domain, Journal of Nonlinear Analysis, USA, 2005.

[3] Cooper, J.; Medeiros, L.A., The Cauchy Problem for nonlinear wave equations in domain with moving boundary, Annali de la Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. XXVL, Fasc. IV, 1972, 829-838.

[4] Inoue, A., Sur $Du + u^3 = f$ dans un domaine noncylindrique, J. Math. anal. Appl., 46, 1974, 777-819.

[5] Limaco, J., Existencia de soluciones para el sistema de Navier Stokes em un dominio cilindrico, Proceedings 33 Seminário Brasileiro de Análise, 1991, 169-181.

[6] Lions, J.L : Quelque (QUELQUES) Methodes des Resolution des Problèms aux Limites non Linéaires. Dunod, Paris (1969).

[7] Lions, J.L., Une remarke sur les problémes d'evolution nonlineàires dans les domines non cylindriques, Rev. Romaine Pure Appl. Math., 9, 1964, 11-18.

[8] Medeiros, L. A., Limaco, J., Kirchhoff-Carrier Elastic Strings in Non Cylindrical Domains, Port. Math. 56(4)(1999)465-500.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edition N$^{\underline{o}}$ 1 November 2007

Boundary Layer Solutions to a Nonlocal and Nonvariational Elliptic Problem *

Francisco Julio S.A. Corrêa †

Abstract

In this paper we will investigate questions of existence of solutions and boundary layer formation to the nonlocal and nonvariational elliptic problem

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} -a\left(x, |u|_q^q\right)\Delta u = \lambda f(u) & \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset I\!\!R^N (N \geq 1)$ is a bounded smooth domain, $f : I\!\!R \to I\!\!R$ and $a : \overline{\Omega} \times I\!\!R \to I\!\!R$ are $C^1 - functions$, $\lambda > 0$ is real parameter and $|u|_q^q = \displaystyle\int_\Omega |u|^q$ is the usual norm in $L^q(\Omega)$ with $1 \leq q < 2^*$ where 2^* is the critical Sobolev exponent:

$$2^* = \begin{cases} \frac{2N}{N-2} & \text{if } N \geq 3 \\ \infty & \text{if } N = 1, 2. \end{cases}$$

Problem (P_λ) is a generalization of some problems studied by some authors. For instance, Chipot [?], Chipot-Lovat ([?], [?]), Chipot-Rodrigues [?] and Corrêa [?], among others, study such a problem in case $a(\int_\Omega u)$ and u is a positive solution. Through this work we will assume the following assumptions on the $C^1 - functions$ $f : I\!\!R \to I\!\!R$ and $a : I\!\!R \to I\!\!R$:

$$(f_1) \qquad f'(0) > 0;$$

$$(f_2) \qquad \begin{cases} \text{There are numbers } \theta^- < 0 < \theta^+ \text{ such that} \\ f(\theta^-) = f(0) = f(\theta^+) = 0; \\ f(t) < 0 \text{ if } \theta^- < t < 0 \\ \text{and} \\ f(t) > 0 \text{ if } 0 < t < \theta^+; \end{cases}$$

$$(a_1) \qquad \begin{cases} \text{There are positive numbers } a_0 < a_\infty \text{ such that;} \\ 0 < a_0 \leq a(x,t) \leq a_\infty \text{ for all } (x,t) \in \Omega \times I\!\!R; \end{cases}$$

$$(a_2) \qquad \begin{cases} \text{For each } x \in \Omega \text{ the function} \\ a(x,\cdot) : I\!\!R \to I\!\!R \\ t \mapsto a(x,t) \\ \text{is non-increasing, i.e.} \\ t_1 < t_2 \Rightarrow a(x,t_1) \geq a(x,t_2) \end{cases}$$

* *Mathematics Subject Classifications:* 35K55,35J60,47J25
Key words: Nonlocal problem, Nonvariational problem, Boundary layer formation
† Faculdade de Matemática, ICEN-UFPA, PA, Brasil, fjsacorrea@gmail.com

Accordingly, to Chipot-Lovat ([**?**], [**?**]) such equations, with $q = 1$, arise in various physical situations. For instance, u could describe the density of a population - or temperature - subject to spreading. The diffusion coefficient a is then supposed to depend on the entire population in the domain rather than on the local density, i.e., movements are guided by considering the global state of the medium. An other explanation of the importance of such model lies in the fact that measurements - that serves to determine physical constants - are not made at a point but represent an average in a neighborhood of a point so that these physical constants depend on local averages.

When $q = 2$ we have an equation which appeared at the first time in Carrier [**?**] with the study of small transverse vibrations of an elastic stretched string.

It is worthwhile to say that in the aforementioned works the function a does not depend on x. At least to our knowledge, the present paper is the first one in which the dependence on x is considered in the stationary case.

By virtue presence of the nonlocal term $a(x, |u|_q^q)$, the problem (P_λ) is nonvariational. Because of this we use the method of sub and supersolution in order to obtain the solutions. Furthermore, we will show that there is a boundary layer formation like in De Figueiredo[**?**]. More precisely, we have the following result whose proof will appear in a forthcoming paper [**?**]:

Theorem 0.1. *Under assumptions $(f_1), (f_2), (a_1), (a_2)$ and $1 \le q < 2^*$, there is $\lambda^* > 0$ such that for each $\lambda \ge \lambda^*$ problem (P_λ) possesses two classical solutions*

$$\theta^- < u_\lambda^- < 0 < u_\lambda^+ < \theta^+.$$

Furthermore, for each compact $K \subset \Omega$

$$\lim_{\lambda \to \infty} u_\lambda^\pm = \theta^\pm \text{ for } x \in K,$$

where the convergence is uniform on the set K.

References

[1] G.F. Carrier, *On the non-linear vibration problem of the elastic string*, Quart. Appl. Math. 3(1945)157-165.

[2] M. Chipot, *Elements of nonlinear analysis*, Birkhäuser Advanced Texts(2000).

[3] M. Chipot & B. Lovat, *Some remarks on non local elliptic and parabolic problems*, Nonlinear Anal., 30(7)(1997)4619-4627.

[4] M. Chipot & B. Lovat, *On the asymptotic behaviour of some nonlocal problems*, Positivity(1999)65-81.

[5] M. Chipot & J.F. Rodrigues, *On a class of nonlocal nonlinear problems*, Math. Model. Numer. Anal. 26(3)(1992) 447-468.

[6] F.J.S.A. Corrêa, *On positive solutions of nonlocal and nonvariational elliptic problems*, Nonlinear Anal. 59(2004)1147-1155.

[7] F.J.S.A. Corrêa, *Boundary layer solutions to a nonlocal and nonvariational elliptic problem.* Work in progress.

[8] D.G. De Figueiredo, *On the existence of multiple ordered solutions for nonlinear eigenvalue problems*, Nonlinear Anal. TMA, 11(1987)481-492.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edição N$^{\underline{o}}$ 1 Novembro 2007

OPERADORES DE CONVOLUÇÃO EM ESPAÇOS DE APLICAÇÕES QUASE-NUCLEARES DE UM DADO TIPO E UMA DADA ORDEM

VINÍCIUS V. FÁVARO *

Resumo

Informação: Seja E um espaço de Banach. Em Fávaro [1], foram introduzidos os espaços de funções $(s; m(r,q))$-somantes de um dado tipo e uma dada ordem, definidas em E, e os espaços de funções $(s;(r,q))$-quase-nucleares de um dado tipo e uma dada ordem, definidas em E. Tais espaços são generalizações dos espaços definidos em Matos [5], utilizando os conceitos de polinômios $(s; m(r,q))$-somantes em zero e polinômios $(s;(r,q))$-quase-nucleares, sobre E. Os conceitos desses polinômios foram introduzidos em Matos [7]. Ainda em [1], foi provado que a transformada de Fourier-Borel identifica o dual do espaço de funções $(s;(r,q))$-quase-nucleares de um dado tipo e uma dada ordem, definidas em E, com o espaço de funções $(s'; m(r',q'))$-somantes de um correspondente tipo e uma correspondente ordem, definidas em E'.

No presente trabalho, introduziremos os operadores de convolução nos espaços de funções $(s;(r,q))$-quase-nucleares de um dado tipo e uma dada ordem, provaremos teoremas de divisão para funções $(s; m(r,q))$-somantes de um dado tipo e uma dada ordem e como conseqüência, provaremos teoremas de divisão envolvendo a transformada de Fourier-Borel. A partir desses resultados de divisão, provaremos resultados de existência e aproximação de soluções de equações de convolução nos espaços de funções $(s;(r,q))$-quase-nucleares de um dado tipo e uma dada ordem.

Enunciaremos abaixo os teoremas de aproximação e existência de soluções de equações de convolução que serão provados, mas para isso precisamos de algumas terminologias. $\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^nE)$ denota o espaço dos polinômios $(s;(r,q))$-quase-nucleares; $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ denota o espaço das funções inteiras $(s;(r,q))$-quase-nucleares de ordem k e tipo menor ou igual a A (no caso em que $A=0$, denotamos $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E) = Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,0}(E)$); $\mathcal{A}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}$ denota o conjunto de todos os operadores de convolução definidos sobre $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ (no caso em que $A=0$, denotamos $\mathcal{A}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0} = \mathcal{A}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,0}$).

Teorema 0.1. (a) *Se $k \in [1,+\infty]$ e $\mathcal{O} \in \mathcal{A}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}$, então o subespaço vetorial de $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$ gerado pelas soluções exponenciais polinomiais da equação homogênea $\mathcal{O}=0$, é denso no subespaço fechado de todas soluções da equação homogênea, isto é, o subespaço de $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)$ gerado por*

$$\mathcal{L} = \left\{P\exp\varphi; P \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^nE), n \in \mathbb{N}, \varphi \in E', \mathcal{O}(P\exp\varphi) = 0\right\}$$

é denso em

$$\mathcal{K} = \ker\mathcal{O} = \left\{f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E); \mathcal{O}f = 0\right\}.$$

(b) *Se $k \in [1,+\infty]$, $A \in (0,+\infty)$ e $\mathcal{O} \in \mathcal{A}^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}$ é de tipo zero, então o subespaço vetorial de $Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)$ gerado por*

$$\mathcal{L} = \left\{P\exp\varphi; P \in \mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}({}^nE), n \in \mathbb{N}, \varphi \in E', \mathcal{O}(P\exp\varphi) = 0\right\}$$

é denso em

$$\mathcal{K} = \ker\mathcal{O} = \left\{f \in Exp^k_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E); \mathcal{O}f = 0\right\}.$$

*IMECC-UNICAMP, Campinas, SP, Brasil, vvfavaro@ime.unicamp.br, pesquisa financiada pela FAPESP processos: 04/13520-3(doutorado) e 07/50811-4(pós-doutorado), vinculada ao projeto temático processo: 06/02378-7.

Teorema 0.2. (a) *Para* $k \in [1, +\infty]$, *se* $\mathcal{O} \in \mathcal{A}^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}$, $\mathcal{O} \neq 0$, *então*

$$\mathcal{O}\left(Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E)\right) = Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0}(E).$$

(b) *Para* $k \in [1, +\infty]$ *e* $A \in (0, +\infty)$, *se* $\mathcal{O} \in \mathcal{A}^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}$ *é de tipo zero e* $\mathcal{O} \neq 0$, *então*

$$\mathcal{O}\left(Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E)\right) = Exp^{k}_{\tilde{N},(s;(r,q)),0,A}(E).$$

Referências

[1] Fávaro, V. V. - *The Fourier-Borel transform between spaces of entire functions of a given type and order.* To appear.

[2] Gupta, C. - *Convolution Operators and Holomorphic Mappings on a Banach Space*, Séminaire d'Analyse Moderne, 2. Université de Sherbrooke. Sherbrooke, 1969.

[3] Malgrange, B. - *Existence et approximation des équations aux dérivées partielles et des équations des convolutions* . Ann. Inst. Fourier (Grenoble)**6** (1955/56), 271-355.

[4] Martineau, A. - *Équations différentielles d'ordre infini.* Bull. Soc. Math. France **95**(1967), 109-154.

[5] Matos, M. C. - *On the Fourier-Borel transformation and spaces of entire functions in a normed space*, in: Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory II (G. I. Zapata, ed.), pp. 139-170. North-Holland Math. Studies, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[6] Matos, M. C. - *On convolution operators in spaces of entire functions of a given type and order*, in: Complex Analysis, Functional Analysis and Approximation Theory (J. Mujica, ed.), pp. 129-171. North-Holland Math. Studies **125**, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[7] Matos, M. C. - *Absolutely Summing Mappings, Nuclear Mappings and Convolution Equations*, IMECC-UNICAMP, 2007. Web: http://www.ime.unicamp.br/~matos.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edition N$^{\underline{o}}$ 1 November 2007

Converse Lyapunov Theorems for Retarded Functional Differential Equations *

M. FEDERSON †

Abstract

The results we mention in this note are borrowed from [4]. We consider retarded functional differential equations and prove converse Lyapunov theorems for these equations concerning the classical concepts of Lyapunov stability and uniform asymptotic stability of the trivial solution.

In [3], the authors introduced new concepts of stability for retarded functional differential equations (RFDEs), namely variational stability and asymptotic variational stability, and established converse Lyapunov-type theorems for RFDEs concerning these new concepts. Such results apply for a very large class of RFDEs which can be described, for instance, by functions with many discontinuities.

In [4], we reduce the class of RFDEs so that the functions involved in the retarded system satisfy smooth conditions and, under these conditions, we prove the equivalence of the classical concepts of Lyapunov stability and uniform asymptotic stability and the corresponding concepts of variational stability and asymptotic variational stability of the trivial solution. These facts are achieved by means of the nonlinear variation-of-constants formula of Alekseev for RFDEs given in [7] and the theory of generalized ordinary differential equations. See [1] to [6]. Then we get converse Lyapunov theorems for RFDEs concerning the classical concepts of stability by applying the ideas in [3].

1 Converse Lyapunov theorems

We consider the following retarded system

$$\begin{cases} \dot{y}\,(t) = f(y_t, t), \\ y_{t_0} = \phi, \end{cases} \tag{1.1}$$

where $\phi \in C([-r,0],\mathbb{R}^n)$, $r \geq 0$, and $f(t,\psi)$ is a continuous function from an open subset Ω of $C([-r,0],\mathbb{R}^n) \times [t_0,+\infty)$ to $\mathbb{R}^n$ with continuous Fréchet derivative, f', with respect to ψ.

We assume that $f(0,t) = 0$ for every $t \in \mathbb{R}$ so that $y \equiv 0$ is a solution of (1.1).

Let I be an interval of the real line. We denote by $BV(I,X)$ the space of functions $f : I \to X$ which are locally of bounded variation, that is, for each compact interval $[a,b] \subset I$, the restriction of f to $[a,b]$, $f\big|_{[a,b]}$, is of bounded variation. In $BV([a,b],X)$, we consider the variation norm given by $\|f\| = \|f(a)\| + \mathrm{var}_a^b f$, where $\mathrm{var}_a^b f$ stands for the variation of f in the interval $[a,b]$.

Let $|\cdot|$ be a norm in $\mathbb{R}^n$.

Theorem 1.1. *If the trivial solution $y \equiv 0$ of the retarded differential equation* (1.1) *is Lyapunov stable, then for every $0 < a < c$, there exists a function $U : [t_0 - r, +\infty) \times E_a \to \mathbb{R}$, where $E_a = \{\psi \in C([-r,0],\mathbb{R}^n); \|\psi\| < a\}$, such that for every $x \in E_a$, the function $U(\cdot,\psi)$ belongs to $BV([t_0 - r,+\infty),\mathbb{R}) \cap C([t_0 - r,+\infty),\mathbb{R})$ and the following conditions hold:*

---

* *Mathematics Subject Classifications:* 34K20, 34D20

Key words: Lyapunov stability, variational stability, integral stability, stability by perturbations, converse theorems

†Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo-Campus de São Carlos, Caixa Postal 668, 13560-970 São Carlos SP, Brazil. E-mail: federson@icmc.usp.br

(i) $U(t,0)=0$, $t\in[t_0-r,+\infty)$;

(ii) $|U(t,\psi)-U(t,\overline{\psi})|\le\|\psi-\overline{\psi}\|$, $t\in[t_0-r,+\infty)$, $\psi,\overline{\psi}\in E_a$.

(iii) U *is positive definite along every solution* $y(t)$ *of the retarded equation* (1.1), *that is, there is a function* $b:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *of Hahn class such that*

$$U(t,y_t)\ge b(\|y_t\|),\quad (t,y_t)\in[t_0-r,+\infty)\times E_a;$$

(iv) *for all solutions* $y(t)$ *of* (1.1),

$$\dot{U}(t,y_t)=\limsup_{\eta\to 0_+}\frac{U(t+\eta,y_{t+\eta})-V(t,y_t))}{\eta}\le 0,$$

that is, the right derivative of U *along every solution* $y(t)$ *of* (1.1) *is non-positive.*

Theorem 1.2. *If the trivial solution* $y\equiv 0$ *of the retarded differential equation* (1.1) *is uniformly asymptotically stable, then for every* $0<a<c$, *there exists a function* $U:[t_0-r,+\infty)\times E_a\to\mathbb{R}$ *such that for every* $x\in E_a$, *the function* $U(\cdot,x)$ *belongs to* $BV^-([t_0-r,+\infty),\mathbb{R})\cap C([t_0-r,+\infty),\mathbb{R})$ *and the following conditions hold:*

(i) $U(t,0)=0$, $t\in[t_0-r,+\infty)$;

(ii) $|U(t,\psi)-U(t,\overline{\psi})|\le\|\psi-\overline{\psi}\|$, $t\in[t_0-r,+\infty)$, $\psi,\overline{\psi}\in E_a$.

(iii) U *is positive definite along every solution* $y(t)$ *of the retarded equation* (1.1), *that is, there is a function* $b:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *of Hahn class such that*

$$U(t,y_t)\ge b(\|y_t\|),\quad (t,y_t)\in[t_0-r,+\infty)\times E_a;$$

(iv) *for all solutions* $y(s)$ *of* (1.1) *defined for* $s\ge t$, *where* $y(t)=\psi\in E_a$, *the relation*

$$\dot{U}(t,y_t)=\limsup_{\eta\to 0_+}\frac{U(t+\eta,y_{t+\eta})-U(t,y_t)}{\eta}\le U(t,\psi)$$

holds.

References

[1] FEDERSON, M.; SCHWABIK, Š. - Generalized ODEs approach to impulsive retarded differential equations, *Differential and Integral Equations* 19(11), (2006), 1201-1234.

[2] FEDERSON, M.; SCHWABIK, Š. - A new approach to impulsive retarded differential equations: stability results. Pre-print.

[3] FEDERSON, M.; SCHWABIK, Š. - Stability for retarded functional differential equations, *Nonlinear Oscillations*, to appear.

[4] FEDERSON, M. - Converse Lyapunov Theorems for Retarded Functional Differential Equations. Pre-print.

[5] SCHWABIK, Š. - *Generalized Ordinary Differential Equations*, World Scientific, Series in Real Anal., vol. 5, 1992.

[6] SCHWABIK, Š. - Variational stability for generalized ordinary differential equations, *Časopis Pěst. Mat.* 109(4), (1984), 389-420.

[7] SHANHOLT, G. A. - A nonlinear variation-of-constants formula for functional differential equations, *Math. Systems Theory* 6, (1972/73), 343-352.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edição N$^{\underline{o}}$ 1 Novembro 2007

DECAIMENTO DOS AUTOVALORES DE OPERADORES INTEGRAIS COM NÚCLEOS POSITIVOS DEFINIDOS E SUAVES

J. C. FERREIRA [*] & V. A. MENEGATTO [†]

Resumo

Seja D um conjunto não vazio de $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$. Dizemos que a função $K : D \times D \to \mathbb{C}$ é um *núcleo positivo definido* quando a seguinte desigualdade é verdadeira

$$\sum_{i,j=1}^{n} \overline{c_i} c_j K(x_i, x_j) \geq 0,$$

quando $n \geq 1$, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset D$ e $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\} \subset \mathbb{C}$. Escrevemos $PD(D)$ para denotar a classe dos núcleos positivos definidos com domínio $D \times D$. No contexto de espaços de Hilbert, a seguinte formulação para o conceito acima é mais adequada. Em geral, ela não é equivalente à formulação anterior.

Assuma que D está munido da medida de Lebesgue usual. Um elemento de $L^2(D \times D)$ é um *núcleo L^2-positivo definido*, quando o operador integral associado é um operador positivo, ou seja, quando

$$\langle \mathcal{K}(f), f \rangle_{L^2(D)} = \int_D \left(\int_D K(x,y) f(y)\, dy \right) \overline{f(x)}\, dx \geq 0, \quad f \in L^2(D).$$

Denotamos a classe dos núcleos L^2-positivos definidos com domínio $D \times D$ por $L^2PD(D)$.

Um subconjunto D de $\mathbb{R}^m$ é dito ser *∂-mensurável* quando D é fechado, $\partial(D) = \partial(D^o)$ e $D^o \neq \emptyset$. O Teorema da Diferenciação de Lebesgue é o principal fator que justifica o teorema abaixo.

Teorema 0.1. *Se D é ∂-mensurável, então $L^2PD(D) \cap C(D \times D) \subset PD(D)$.*

Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}^m$. Se D é ilimitado, indicamos por $C_o(D)$ o conjunto das funções contínuas $f : D \to \mathbb{C}$ que se anulam no infinito, ou seja, que satisfazem $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$ em D. Se D for limitado definimos $C_o(D) = C(D)$.

Definição 0.1. *Seja D um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^m$. O conjunto $\mathcal{A}_o(D)$ é o subconjunto de $C_o(D \times D) \cap L^2PD(D)$ formado por todos os núcleos K para os quais a função $x \in D \mapsto K(x,x)$ é um elemento de $L^1(D)$.*

O teorema seguinte, cuja demonstração pode ser obtida utilizando métodos recentes introduzidos por Buescu em [1], contém em seu enunciado o clássico Teorema de Mercer.

Teorema 0.2. *Seja D um subconjunto ∂-mensurável de $\mathbb{R}^m$. Se $K \in \mathcal{A}_o(D)$, então valem as seguintes afirmações:*
(i) A imagem de $\mathcal{K}$ é um subconjunto de $C_o(D) \cap L^2(D)$;
(ii) K é representável por uma série $L^2(D \times D)$, absoluta e uniformemente convergente da forma

$$K(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \phi_n(x) \overline{\phi_n(y)}, \quad x, y \in D,$$

onde ϕ_n é autofunção do operador $\mathcal{K}$ associada ao autovalor não-negativo $\lambda_n(\mathcal{K})$. Além disso o operador $\mathcal{K}$ é compacto, auto-adjunto e possui representação na forma

$$\mathcal{K}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \langle f, \phi_n \rangle \phi_n, \quad f \in L^2(D),$$

[*] joseclaudineiferreira@gmail.com, FAPESP-Proc. 05/56694-4
[†] USP, ICMC, SP, Brasil, menegatt@icmc.usp.br

onde os autovalores estão ordenados em ordem não-crescente;
(iii) O operador $\mathcal{K}$ é nuclear (trace-class) e

$$tr(|\mathcal{K}|) = tr(\mathcal{K}) := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) = \int_D K(x,x)\,dx.$$

Utilizando o teorema anterior obtemos uma primeira informação sobre o decaimento dos autovalores de $\mathcal{K}$, a saber, que $\lambda_n(\mathcal{K}) = o(1/n)$ quando $n \to \infty$. A literatura nos fornece algumas estimativas melhores do que a citada acima para conjuntos compactos: veja por exemplo Kühn [5] que considera o caso de variedades diferenciáveis. Recentemente, Buescu [2] analisou generalizações de tais resultados no caso em que o núcleo K é um elemento de $\mathcal{A}_o(D)$ suficientemente suave e D é um intervalo fechado de $\mathbb{R}$. Outros resultados recentes sobre estimativas para os autovalores podem ser encontrados em Buescu [3,4]. Neste trabalho, generalizamos os resultados de Buescu [2] para o caso em que D é um subconjunto ∂-mensuravel de $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, demonstrando por exemplo o teorema abaixo. Vejamos uma definição antes dele.

Definição 0.2. *Sejam D um subconjunto de $\mathbb{R}^m$, $\alpha \in (0,1]$ e $s \geq 0$. Um núcleo $K : D \times D \to \mathbb{C}$ pertence à classe $Lip^{\alpha,s}(D)$ quando existem $\delta > 0$, $r_o \geq 1$, $M \geq 0$ e uma função localmente integrável $A : \mathbb{R}^m \to [0,+\infty]$ tais que*

$$|K(x,x) - K(x,y)| \leq A(x)|x-y|^{\alpha}, \quad x,y \in D, \quad |x-y| \leq \delta$$

e

$$\int_{[-r,r]^m} A(x)\,dx \leq Mr^s, \quad r \geq r_o.$$

Teorema 0.3. *Sejam D um subconjunto ∂-mensurável de $\mathbb{R}^m$ e $K \in \mathcal{A}_o(D) \cap Lip^{\alpha,s}(D)$.*
(i) Se

$$\int_{D\setminus[-r,r]^m} K(x,x)\,dx \leq \frac{C}{r^{\beta-m}}, \quad r > r_o,$$

onde $\beta > m$, $C \geq 0$ e $r_o \geq 1$, então

$$\lambda_n(\mathcal{K}) = O(n^{-1-\gamma/m}), \quad \gamma := \alpha\frac{\beta - m}{\beta - m + s + \alpha};$$

(ii) Se para cada $\beta > m$ exitem constantes $C = C(\beta)$ e $r_o = r_o(\beta) \geq 1$ tais que

$$\int_{D\setminus D_r} K(x,x)\,dx \leq \frac{C}{r^{\beta-m}}, \quad r > r_o,$$

então

$$\lambda_n(\mathcal{K}) = o(n^{-1-\theta/m}), \quad \theta \in [0,\alpha).$$

(iii) Se D é compacto ou o suporte de K é compacto, então

$$\lambda_n(\mathcal{K}) = O(n^{-1-\alpha/m}).$$

Referências

[1] BUESCU, J. - *Positive integral operators in unbounded domains*, J. Math. Anal. Appl., 296, No.1, 244-255 (2004).
[2] BUESCU, J. & PAIXÃO A.C.-*Eigenvalues of positive definite integral operators in unbounded intervals,* Positivity, 10, 627-646 (2006).
[3] BUESCU, J. & PAIXÃO, A.C.-*Eigenvalue distribution of positive definite kernels on unbounded domains*, Integral Equations and Operator Theory, Vol. 57, No.1, 19-41 (2007).
[4] BUESCU, J. & PAIXÃO, A.C.-*Eigenvalue distribution of Mercer-like kernels*, Math. Nachur. 280, No.9-10, 984-995 (2007).
[5] KÜHN, T. - *Eigenvalues of integral operators with smooth positive definite kernels*, Arch. Math., Vol.49, 525-534 (1987).

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edição N$^{\underline{0}}$ 1 Novembro 2007

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO QUASILINEAR COM DEPENDÊNCIA DO GRADIENTE VIA MÉTODO VARIACIONAL

G. M. FIGUEIREDO *

Resumo

Neste trabalho, vamos estudar a existência de solução positiva para o problema quasilinear

$$-\Delta_p u + |u|^{p-2}u = f(u, \nabla u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \quad u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \ , \ u > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \quad 1 < p < N. \tag{0.1}$$

O problema (**??**) não tem estrutura variacional devido a presença do gradiente. Por isso, em geral, esta classe de problemas é estudado, essencialmente, via métodos topológicos ou técnica de sub-supersolução, como pode ser visto em [13], [14], [15] e [17] e suas referências.

Num excelente artigo, de Figueiredo, Girardi e Matzeu [4], usando o Teorema do Passo da Montanha combinado com um argumento iterativo, mostraram a existência de solução para o problema (**??**), considerando $p = 2$ e num domínio limitado do $\mathbb{R}^N$.

Este artigo completa o estudo feito em [4], pois estamos considerando o caso $1 < p < N$ e o problema no $\mathbb{R}^N$. Além disso, aqui aparece uma dificuldade a mais: as imersões de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)$ com $2 \le s \le \dfrac{pN}{N-p}$ são contínuas mas não compactas e, portanto, é bem conhecido que, em geral, a condição Palais-Smale não ocorre para o funcional associado ao problema (**??**). Para contornar essa dificuldade, usaremos uma versão do Teorema do Passo da Montanha devido a Willem [16] e usaremos o método iterativo usado em [4].

Além do mais, alguns argumentos usados em [4] não puderam ser aplicados como, por exemplo, o argumento do tipo Boostrap para obter regularidade das soluções de um problema auxiliar e que proporcionaram estimativas que foram cruciais para a obtenção de solução do problema original, o qual, em geral, não é válido quando se trabalha com o operador p-Laplaciano. Contornamos esta dificuldade usando método de iteração de Moser [10] e argumentos que podem ser encontrados em [7].

Referências

[1] Brezis - *Analyse Fonctionelle. Thorie et aplications*, Paris, Masson(1987).
[2] H. Brezis e E. H. Lieb, - *A relation between pointwise convergence of functions and convergence functionals,*, Proc. Amer. Math. Soc. 8(1983)486-490.
[3] Di Benedetto E, - *$C^{1,\alpha}$ local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Analysis 7(1985)827-850.
[4] De Figueiredo D., Girardi M. e Matzeu M.- *Semilinear elliptic equations with dependence on the gradient via mountain pass techniques*, Differential Integral Equations, 17-(2004)119-126.
[5] Gilbard D. e Truginger N. S - *Elliptic partial differential equation of second order*, Springer-Verlag, 1998.
[6] Gonçalves A. J. V. e Alves C. O., - *Existence of positive solutions for m-Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ involving critical Sobolev exponents*, Nonlinear Analysis, Volume 32, Issue 1, March 1998, Pages 53-70.
[7] Gongbao Li. - *Some properties of weak solutions of nonlinear scalar field equations*, Annales Acad. Sci. Fenincae, series A. vol 14(1989)27-36.
[8] O. Kavian - *Introduction la thorie des points critiques et applicatons aux problemes elliptiques,*, Springer, Heidelberg (1983).

*Faculdade de Matemática - Ufpa, Pa, Brasil, giovany@ufpa.br

[9] Lions P. L., - *The concentration-compacteness principle in the calculus of variation. The locally compact case, part II*, Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineéaire 1 (1984), 223-283.
[10] Moser, J. - *A new proof de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. 13, 457-468(1960).
[11] Peral I., - *Multiplicity of solutions for the p-Laplacian*, Second School of Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations, ICTP-Trieste, 1997.
[12] Rabinowitz P. H, - *On a class of nonlinear Schrdinger equations*, Z. Angew Math. Phys. 43(1992)27-42.
[13] Ruiz D., e Suárez A.- *Existence and uniqueness of positive solution of a logistic equation with nonlinear gradient term*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 137A, 555566, 2007.
[14] Xavier J. B. M., - *Some existence theorems for equations of the form* $-\Delta u = f(x, u, \nabla u)$, Nonlinear Analysis, 15(1990)59-67.
[15] Wang X., e Dang Y., - *Existence of multiple solutions to nonlinear elliptic equations in nondivergece form*, J. Math. Anal. and Appl. 189 (1995),617-630.
[16] Willem M. - *Minimax Theorems*, Birkhuser, 1996.
[17] Yan Z., - *A note on the solvability in* $W^{2,p}(\Omega)$ *for the equation* $-\Delta u = f(x, u, \nabla u)$, Nonlinear Analysis, 24(1995) 1413-1416.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edition N$^{\underline{o}}$ 1 November 2007

SOLUTIONS OF THE KIRCHHOFF-CARRIER EQUATION IN BANACH SPACES *

R. IZAGUIRRE [†] & R. FUENTES [‡] & M. MILLA MIRANDA [§]

Abstract

This paper is concerned with the study of the existence of local solution of the problem

$$(*)\left|\begin{array}{l} Bu''(t)+M\left(\|u(t)\|_W^\beta\right)Au(t)=0,\ \text{in } V',t>0\\ u(0)=u_0\ \ ;u'(0)=u_1,\ (u^0\neq 0)\end{array}\right.$$

where V is a Hilbert space with dual V'; A and B symmetric linear operators from V into V' with $\langle Av,v\rangle\geq 0$ and $\langle Bv,v\rangle>0,\ v\neq 0$; W a Banach space with V continuously embedding in W; β a real number with $\beta\geq 1$ and $M(\xi)$ a function with $M(\xi)\geq 0,\ M(\|u^0\|_W^\beta)>0$ and smooth in a neighborhood of $\|u^0\|_W^\beta$.

The characterization of the derivative of the nonlinear term of the equation of (*) and the Arzela-Ascoli Theorem allow to obtain a solution u of (*) defined in $[0,T_0]$ where T_0 depends on u^0,u^1 and $M(\xi)$.

We comment our result. Let Ω be an open bounded set of $\mathbb{R}^n$. Consider the equation

$$(K)\quad u''(x,t)+\left(m_0+m_1\int_\Omega|\nabla u(x,t)|^2\,dx\right)(-\Delta u(x,t))=0,\ x\in\Omega,\ t>0$$

where $u'=\dfrac{\partial u}{\partial t}$ and m_0,m_1 are numbers with $m_0>0$ and $m_1\geq 0$.

Equation (K), in the case n=1 and Ω a finite open interval, was introduced by Kirchhoff [5] in the study of small transversal vibrations of the elastic stretched string. See also Lions [8].

Analyzing the same above phenomenon, Carrier [2] deduced the equation

$$(C)\quad u''(x,t)+\left(m_0+m_1\int_\Omega u^2(x,t)dx\right)(-\Delta u(x,t))=0,\ x\in\Omega,\ t>0$$

We formulate both equation (K) and (C) in an abstract framework. In fact, let H be a real separable Hilbert space whose scalar product and norm denoted, respectively,by (u,v) and $|u|$.

Consider A an unbounded self-adjoint linear operator of H with $A\geq\gamma I$, γ positive real number, such that its inverse $A^{-1}$is a compact operator of H. Consider also a real function $M(\xi)$ such that $M\in C^1$ and $M(\xi)\geq m_0>0,\ \xi\geq 0$. In these conditions we have the initial value problem:

$$(*)\left|\begin{array}{l} u''+M\left(\left|A^\theta u(t)\right|^2\right)Au(t)=0,t>0\\ u(0)=u_0\ ;u'(0)=u_1,\end{array}\right.$$

---

* *Mathematics Subject Classifications: 35L70, 35B35*

Key words: Kirchhoff-Carrier Equation; quasilinear hyperbolic equation; local solutions.

† Universidad Nacional Mayor de San Marcos, FM, Lima, PERU,

‡ Universidade Federal Fluminense, IM, RJ, Brasil, e-mail ricardof16@yahoo.com.br

§ Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM, RJ, Brasil, e-mail milla@im.ufrj.br

where θ is a real number with $0 \leq \theta \leq 1$.

Consider $u^0 \in D(A), u^1 \in D(A^{1/2})$ and $\theta = 1/2$. The existence of local solutions of (*) has been proved by Medeiros-Milla Miranda [9]. The degenerate case, that is, when $M(\xi) \geq 0$, has been studied by Ebihara [3] *et al.* and Arosio-Garavaldi [1]. The existence of local solutions of the equation

$$u''(x,t) + \frac{1}{\rho(x)} \left(m_0 + m_1 \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 \, dx \right) (-\Delta u(x,t)) = 0, \ x \in \Omega, \ t > 0$$

with $\rho(x) \geq \rho_0 > 0, \ x \in \Omega$, has been obtained by Frota [4] and Limaco [7] *et al.*. This equation with nonlinear term $\frac{1}{\rho(x)} \left(\int_\Omega u^2(x,t) dx \right) (-\Delta u(x,t))$ has been examinated by Larkin [6].

We generalize the above results. In fact, we consider a real separable Hilbert space V; $A, B : V \to V'$ symmetric linear operators (V' dual of V) with $\langle Av, v \rangle \geq 0$ and $\langle Bv, v \rangle > 0, \ v \neq 0$; a Banach space W such that V is continuously embedding in W; a real number β with $\beta \geq 1$; a vector u^0 belongs to W with $u^0 \neq 0$ and a function $M(\xi)$ with $M\left(\|u^0\|_W^\beta\right) > 0$ and $M(\xi)$ smooth in a neighborhood of $\|u^0\|_W^\beta$. In the conditions we study the existence of local solutions of the problem:

$$(**) \quad \left| \begin{array}{l} Bu'' + M\left(\|u(t)\|_W^\beta\right) Au(t) = 0, \text{ in } V', t > 0 \\ u(0) = u_0 \, ; u'(0) = u_1, \end{array} \right.$$

In our approach, we use the Galerkin approximations, the method of successive approximations and the Arzela-Ascoli Theorem. The key point is the verification that the derivative of $M\left(\|u(t)\|_W^\beta\right)$ work well in the computations of the estimates of the approximate solutions of the problem.

References

[1] AROSIO A. AND GARAVALDI S. - *Math. Appl. Science*, 14 (1991), 177-195.

[2] CARRIER G. F. - *On the non-linear vibration problem of the elastic string*, Quart. Appl. Math., 3 (1945), 157-165.

[3] EBIHARA Y., MEDEIROS L. A. AND MILLA MIRANDA M. - *Local solutions for a nonlinear degenerate hyperbolic equation*, Nonlinear analysis :TMA, 10 (1986), 27-40.

[4] FROTA C. L. - *Non local solutions of a nonlinear hyperbolic partial differential equation*, Portugaliae Mathematica, 51 (1994)

[5] KIRCHHOFF G. - *Vorlesunger ber Mechanik*, Teubner, Leipzig, 1883.

[6] LARKIN N. A. - *Global regular solution for the nonhomogeneous Carrier equation*, Mathematical Problems in Enginering, 8 (2002), 15-31.

[7] LIMACO J., CLARK H. R. AND MEDEIROS L. A. - *On damped Kirchhoff equation with variable coefficients*, J. Math. Anal. Appl., 307 (2005), 641-655.

[8] LIONS J. L. - *On some equations in boundary value problems of mathematical physics*, Contemporary Developmemt in Continuous Mechanics and Partial Differential Equations, G. de la Penha and L. A. Medeiros eds., North-Holland, London, 1978.

[9] MEDEIROS L. A. AND MIRANDA M. M. - *Solutions for the equation of nonlinear vibrations in Sobolev spaces of fractionary order*, Mat. Aplic. Comp., 6 (1987), 257-276.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edition N$^{\underline{0}}$ 1 November 2007

APPROXIMATION AND INTERPOLATION FROM SUBLATTICES OF WEIGHTED SPACES *

M. S. KASHIMOTO †

Abstract

We show that if a sublattice L of a weighted space is an interpolating family, then simultaneous approximation and interpolation is possible from L. The main tool is the Kakutani-Stone theorem for sublattices with weights [3]. As a consequence, we give a different proof of the result concerning simultaneous approximation and interpolation from dense vector sublattices of a weighted space.

We assume, unless stated otherwise, that X is a locally compact Hausdorff space and denote by $C(X)$ the space of all continuous real-valued functions on X.

Let us recall that a subset L of $C(X)$ is called a sublattice if $f, g \in L$ implies $f \wedge g \in L$ and $f \vee g \in L$, where $(f \wedge g)(x) = inf\{f(x), g(x)\}$ and $(f \vee g)(x) = sup\{f(x), g(x)\}$ for every $x \in X$.

An upper semicontinuous real-valued function f on X is said to *vanish at infinity* if for every $\varepsilon > 0$, the closed subset $\{ x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon \}$ is compact.

In what follows, we present the concept of *weighted spaces* as developed by Nachbin [2].

Let V be a set of non-negative upper semicontinuous functions on X. Each element of V is called a *weight*. We assume that V is directed, in the sense that, given $v_1, v_2 \in V$, there exist $\lambda > 0$ and $v \in V$ such that $v_1 \leq \lambda v$ and $v_2 \leq \lambda v$.

The set V is *p*ointwise strictly positive if for every $x \in X$, there is $v \in V$ such that $v(x) > 0$.

We denote by $CV_\infty(X)$, the vector subspace of $C(X)$ consisting of all functions f such that vf vanishes at infinity for each $v \in V$.

When $CV_\infty(X)$ is equipped with the locally convex topology ω_V generated by the seminorms

$$\begin{aligned} p_v : CV_\infty(X) &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ f &\mapsto sup\ \{ v(x)|f(x)| \mid x \in X \} \end{aligned}$$

for each $v \in V$, we call $CV_\infty(X)$ a *weighted space*.

A subset L of $CV_\infty(X)$ is an *interpolating family for* $CV_\infty(X)$ if given any nonempty finite subset $S \subset X$ and any $f \in CV_\infty(X)$, there exists $g \in L$ such that $g(x) = f(x)$ for all $x \in S$.

A subset L of $CV_\infty(X)$ has *property SAI* if for every $f \in CV_\infty(X)$, $v \in V$, $\varepsilon > 0$ and every nonempty finite subset S of X, there exists $g \in L$ such that $p_v(f - g) < \varepsilon$ and $f(x) = g(x)$ for all $x \in S$.

We need the Kakutani-Stone theorem for sublattices of weighted spaces which can be found in [3, Theorem 2].

Lemma 0.1. *Let X be a completely regular space and V be a pointwise strictly positive set of weights. Let L be a sublattice of $CV_\infty(X)$ and $f \in CV_\infty(X)$. Then f belongs to the closure of L in $CV_\infty(X)$ if and only if, for any $x, y \in X$ and $\varepsilon > 0$, there exists $g \in L$ such that*

$$|g(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ and } |g(y) - f(y)| < \varepsilon.$$

* *Mathematics Subject Classifications:* 41A65, 41A05 , 46E10
Key words: approximation, interpolation, sublattice
†Universidade Federal de Itajubá , DMC-ICE, MG, Brasil, kaxixi@unifei.edu.br

Now we establish the following result.

Theorem 0.1. *Let V be a pointwise strictly positive set of weights and L a sublattice of $CV_\infty(X)$. If L is an interpolating family for $CV_\infty(X)$, then L has property SAI.*

Corollary 0.1. *Let V be a pointwise strictly positive set of weights. If L is an ω_V-dense vector sublattice of $CV_\infty(X)$, then L has property SAI.*

Proof Since L is an ω_V-dense vector subspace of $CV_\infty(X)$, it follows that L is an interpolating family for $CV_\infty(X)$. The result now follows from Theorem 0.1. $\square$

$\cdots$

$\vdots$

References

[1] DEUTSCH, F. - *Simultaneous interpolation and approximation in linear topological spaces,* SIAM J. Appl. Math., 14 (1966), pp. 1180-1190.

[2] NACHBIN, L. - *Elements of Approximation Theory,* Van Nostrand, Princeton, NJ, 1967; reprinted by R. Krieger, 1976.

[3] NACHBIN, L. - *On the priority of algebras of continuous functions in weighted approximation*, Symposia Mathematica, Vol. XVII (1976), pp. 169-183.

[4] PROLLA, J. B. - *Approximation of Vector-Valued Functions,* Mathematics Studies, 25, North-Holland, Amsterdam 1977.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edition N$^{\underline{0}}$ 1 November 2007

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR DISPERSIVE EQUATIONS *

N. A. LARKIN †

Abstract

We consider odd-order evolution equations of dispersive type, [1, 2]:

$$u_t + uDu + (-1)^{l+1}D^{2l+1}u = 0$$

in $Q = (0,1)\times(0,T)$, $Q^- = (-\infty,0)\times(0,T)$, $Q^+ = (0,\infty,)\times(0,T)$, where l is a natural number, $T > 0$, $D^k = \frac{d^k}{dx^k}$. To set a correct initial boundary value problem, we prescribe initial data

$$u(x,0) = u_0(x)\; x \in (0,1) \,\text{or}\, x \in (-\infty,0) = R^- \,\text{or}\, x \in (0,\infty) = R^+.$$

Besides the initial data we must set boundary conditions at $x = 0$ and $x = 1$ for $x \in (0,1)$ or at $x = 0$ for $x \in R^+$ and $x \in R^-$ which are defined by the principal part of equation:

$$u_t + (-1)^{l+1}D^{2l+1}u = 0.$$

A correct set of boundary conditions guarantees that a corresponding initial boundary value problem is well-posed (it has a unique regular bounded solution) and that a different choice of numbers of boundary conditions may lead to ill-posed problems (nonexistence of solutions or non-uniqueness). To construct solutions , we use discretization of it with respect to time: let N be a natural number, then we define

$$h = \frac{|\,0,T\,|}{N},\; u^n(x) = u(x,nh),\; u^0(x) = u_0(x).$$

Substitution $u(x,t)$ by $u^n(x)$ and $u_t(x,t)$ by $\frac{u^n(x)-u^{n-1}(x)}{h}$ gives

$$\frac{u^n}{h} + (-1)^{l+1}D^{2l+1}u^n = \frac{u^{n-1}}{h} \equiv f(x), n = 1,...,N.$$

Since $u^0 = u_0(x)$, finding $u^1(x)$, we can find $u^2(x)$ etc. It is clear that we must set well posed boundary value problems for the stationary equation

$$dv + (-1)^{l+1}D^{2l+1}v = f(x), d > 0.$$

Since our goal here is not to write explicitly solutions, but to find out which boundary value problems are well-posed and which are ill-posed in $(0,1)$, R^+ or R^-, it is sufficient to construct a fundamental system of solutions for the linear homogeneous equation which are defined by the roots of the characteristic equation $d + (-1)^{l+1}\lambda^{2l+1} = 0$. It is easy to see that there is always one real root $\lambda_0 = (-1)^\beta d_0$ and $2l$ complex roots: $\lambda_j = d_0 \exp(i\pi\frac{\beta+2j}{2l+1}), j = 1,...2l$. If $l = 2s$, among them are l roots with positive real parts: and l roots with negative real parts. If $l = 2s+1$,

---

* *Mathematics Subject Classifications:* 35Q53, 35A05
Key words: dispersive equations,initial boundary value problems
† Instituição UEM, PR, Brasil, nlarkine@uem.br

then there are $l+1$ roots with positive real parts: and $l-1$ roots with negative real parts. Taking this into account, the general solution for $l = 2s$ reads

$$v(x) = C_0 \exp(d_0 x) + \sum_{j=1}^{\frac{l}{2}} \exp\{d_0[\cos(\frac{2\pi j}{2l+1})]x\}\{C_{1j} \cos[d_0(\sin(\frac{2\pi j}{2l+1}))x]$$

$$+C_{2j} \sin[d_0(\sin(\frac{2\pi j}{2l+1}))x]\} + \sum_{j=\frac{l}{2}+1}^{l} \exp\{d_0[\cos(\frac{2\pi j}{2l+1})]x\}\{C_{1j} \cos[d_0(\sin(\frac{2\pi j}{2l+1}))x] + C_{2j} \sin[d_0(\sin(\frac{2\pi j}{2l+1}))x]\}.$$

It is easy to see that $d_0 \cos(\frac{2\pi j}{2l+1}) > 0$ for $j = 1, ..., \frac{l}{2}$ and $d_0 \cos(\frac{2\pi j}{2l+1}) < 0$ for $j = \frac{l}{2} + 1, ..., l$.
When $l = 2s + 1$, we have

$$v(x) = C_0 \exp(-d_0 x) + \sum_{j=0}^{\frac{l-1}{2}} \exp\{d_0[\cos(\pi\frac{1+2j}{2l+1})]x\}\{C_{1j} \cos[d_0(\sin(\pi\frac{1+2j}{2l+1}))x] + C_{2j} \sin[d_0(\sin(\pi\frac{1+2j}{2l+1}))x]\}$$

$$+ \sum_{j=\frac{l-1}{2}+1}^{l-1} \exp\{d_0[\cos(\pi\frac{1+2j}{2l+1})]x)\}\{C_{1j} \cos[d_0(\sin(\pi\frac{1+2j}{2l+1}))x] + C_{2j} \sin[d_0(\sin(\pi\frac{1+2j}{2l+1}))x]\}$$

with $d_0 \cos(\pi\frac{1+2j}{2l+1}) > 0,\ j = 0, ..., \frac{l-1}{2}$ and $d_0 \cos(\pi\frac{1+2j}{2l+1}) < 0,\ j = \frac{l-1}{2}, ..., l-1$.
Since we seek bounded solutions in R^+, R^-, $(0,1)$, then analysing the formulas above, we can resume

Lemma 0.1. *Well-posed initial boundary value problems on R^+, R^- and (0,1) have the following set of boundary conditions:*
1. l conditions at $x = 0$, while $x \in R^+$, $t > 0$.
2. $l + 1$ conditions at $x = 0$, while $x \in R^-$, $t > 0$.
3. l conditions at $x = 0$ and $l + 1$ conditions at $x = 1$ while $x \in (0, 1)$, $t > 0$.

References

[1] KAWAHARA, T. - *Oscillatory solitary waves in dispersive media,* J. Phys. Soc. Japan. 33 (1972) pp. 260–264.

[2] KORTEWEG ,D., DE VRIES, G. - *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves,* Philos. Mag. 39 (1895), pp. 422-443.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edição N$^{\underline{0}}$ 1 Novembro 2007

MODOS DE VIBRAÇÃO DA MEMBRANA ELÍPTICA E PROBLEMAS DE STURM-LIOUVILLE ACOPLADOS

FLÁVIO A. LEMOS * & ARMANDO G. M. NEVES †

Resumo

Informação: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ uma região cuja fronteira $\partial\Omega$ é uma elipse. Nosso problema é encontrar soluções não-triviais periódicas no tempo $\Psi(x,y,t) = \phi(x,y)e^{i\omega t}$ para a equação da onda $\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = c^2\,\Delta\Psi$, com $(x,y) \in \Omega$ e obedecendo à condição de Dirichlet homogênea $\Psi(x,y,t) = 0$ para $(x,y) \in \partial\Omega$. Fisicamente, pode-se imaginar que existe uma membrana elástica ocupando a região Ω, com sua borda $\partial\Omega$ fixada, e que procuramos soluções em que todos os pontos da membrana vibrem com a mesma freqüência ω. As funções $\phi(x,y)$ são chamadas modos normais de vibração da membrana. É fácil ver que $\Delta\phi(x,y) = -\frac{\omega^2}{c^2}\,\phi(x,y)$, de modo que os ω estão relacionados a autovalores do laplaciano em Ω com condições de Dirichlet homogêneas em $\partial\Omega$, sendo ϕ as autofunções correspondentes.

O problema acima foi inicialmente estudado por Mathieu em [7]. Ao contrário do problema análogo em que Ω é um disco, cujas soluções são bem conhecidas [2], consideramos que o problema dos modos normais de vibração de uma membrana elíptica ainda não está completamente esclarecido.

Para estudar o problema, Mathieu introduziu coordenadas elípticas (ξ,η), definidas por

$$x = h\cosh\xi\cos\eta, \qquad y = h\,\mathrm{senh}\,\xi\,\mathrm{sen}\,\eta\ , \tag{0.1}$$

onde h é a metade da distância entre os focos da elipse, e aplicou o método de separação de variáveis, obtendo as equações

$$G''(\eta) + (a - 2q\cos(2\eta))G(\eta) = 0 \tag{0.2}$$

e

$$F''(\xi) - (a - 2q\cosh(2\xi))F(\xi) = 0\ , \tag{0.3}$$

conhecidas respectivamente como equação de Mathieu e equação de Mathieu modificada. A constante a é a constante da separação de variáveis, enquanto o parâmetro q está relacionado à freqüência ω e vale

$$q = \frac{h^2\omega^2}{4c^2}\ . \tag{0.4}$$

Da geometria das coordenadas e da condição de Dirichlet homogênea sobre $\partial\Omega$ obtêm-se as condições de contorno a serem aplicadas às funções F e G: condições de período 2π para G

$$G(0) = G(2\pi), \qquad G'(0) = G'(2\pi) \tag{0.5}$$

e para F, em alguns casos

$$F'(0) = 0, \qquad F(\xi_0) = 0 \tag{0.6}$$

e em outros,

$$F(0) = 0, \qquad F(\xi_0) = 0\ . \tag{0.7}$$

Se α é o comprimento do semi-eixo maior de $\partial\Omega$, então ξ_0 em (0.6) e (0.7) é dado por $\xi_0 = \mathrm{arc}\,\cosh\alpha/h$.

Os problemas (0.3)-(0.6) ou (0.3)-(0.7) serão chamados de problema de Sturm-Liouville radial. Da teoria de Sturm-Liouville, sabe-se que para cada $q \in \mathbb{R}$, (0.3)-(0.6) possui solução não-trivial se $a = A_m(q)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$

*Unimontes, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Brasil, e-mail flavioal@gmail.com
†UFMG, Depto. de Matemática, Brasil, e-mail aneves@mat.ufmg.br

Similarmente, para cada $q \in \mathbb{R}$, (0.3)-(0.7) possui solução não-trivial se $a = B_m(q)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$. Também o problema de Sturm-Liouville (0.2)-(0.5) possui solução não-trivial se $a = a_n(q), n = 0, 1, 2 \ldots$ e se $a = b_n(q), n = 1, 2 \ldots$. Os $a_n(q)$ e $b_n(q)$ são os chamados números característicos de Mathieu [6, 8].

A dificuldade no problema dos modos normais de vibração da membrana elíptica é a necessidade de se encontrar pares (a, q) em que tanto um dos problemas radiais quanto o problema angular possuam simultaneamente solução não-trivial. Dizemos que os problemas de Sturm-Liouville radial e angular estão acoplados.

Nosso trabalho consiste em apresentar a demonstração da existência de modos normais de vibração para a membrana elíptica através da prova, para cada possível par (m, n), de que as equações

$$A_m(q) = a_n(q) \tag{0.8}$$

e

$$B_m(q) = b_n(q) \tag{0.9}$$

possuem soluções positivas em q. Para tal, provamos inicialmente que as funções $A_m(q), B_m(q), a_n(q), b_n(q)$ são todas contínuas, na verdade analíticas reais. As ferramentas a serem usadas aí são um teorema sobre analiticidade de soluções de EDOs lineares, a versão analítica do teorema da função implícita, teoria de Sturm-Liouville e resultados sobre a equação de Mathieu. Conhecendo ainda as propriedades assintóticas quando $q \to \infty$ para essas funções, a existência de soluções para (0.8) e para (0.9) seguirá da aplicação do teorema do valor intermediário.

O cálculo de freqüências para os modos normais de vibração da membrana elíptica e mesmo ilustrações gráficas desses modos têm sido assunto para vários trabalhos, alguns bastante recentes [5, 3, 1, 4, 9]. Nesses trabalhos usa-se grande variedade de métodos e alguma discordância com relação aos resultados ainda subsiste. Em todos eles, a existência dos modos normais foi obtida experimentalmente modo a modo ao encontrar-se solução numérica para alguma equação. Até onde sabemos, nosso resultado é o único em que a existência dos modos normais é provada de maneira geral para todos os modos, sem o recurso à solução numérica de equações.

Referências

[1] G. Chen, P. J. Morris e J. Zhou, *Visualization of special eigenmode shapes of a vibrating elliptical membrane*, SIAM Review 36 (1994), 453.

[2] R. V. Churchill, *Série de Fourier e Problemas de Valores de Contorno*, Guaranabara Dois, Rio de Janeiro - RJ (1978).

[3] R. Hettich, E. Haaren, M. Ries, G. Still, *Accurate numerical approximations of eigenfrequencies and eigenfunctions of elliptical membranes*, Z. Angew. Math. Mech. 67 (1987), 589.

[4] V. Heuveline, *On the computation of a Very Large Number of Eigenvalues for Selfadjoint Elliptic Operators by Means of Multigrid Methods*, J. Comp. Phys. 184, (2003), 321.

[5] J. B. Keller e S. I. Rubinow, *Asymptotic Solution of Eigenvalue Problems*, Ann. Phys. 9, 24 (1960).

[6] N. W. McLachlan, *Theory and Application of Mathieu Functions*, Oxford University Press, 1951.

[7] E. Mathieu, *Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique*, Jounal de Liouville 13 (1868), 137.

[8] A. G. M. Neves, *Upper and Lower Bounds on Mathieu Characteristic Numbers of Integer Orders*, Communications on Pure and Applied Analysis 3(3) (2004), 447.

[9] H. B. Wilson e R. W. Scharstein, *Computing elliptic membrane high frequencies by Mathieu and Galerkin methods*, J. Eng. Math. **57** (2007), 41.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edição N$^{\underline{o}}$ 1 Novembro 2007

CONTROLE DA EQUAÇÃO DA VIGA UNIDIMENSIONAL COM TORÇÃO

L. LEÓN * & R. FUENTES † & E. ZUAZUA ‡

Resumo

Neste trabalho, estudamos o controle na fronteira do modelo clássico de Kirchhoff unidimensional para vigas finas com torção $\gamma > 0$, que se encontra apoiada nos extremos. A solução da equação linear que resulta deste modelo, descreve as vibrações de uma viga, onde os efeitos de torção transversal são desprezados. Ressaltamos que este mesmo problema com dados iniciais mais regulares foi tratado por Komornik [2], e o caso particular quando $\gamma = 0$ pode-se consultar León [3].

1 Problema

Assim, para $\gamma > 0$ consideremos

$$u'' - \gamma\, \partial_x^2 u'' + \partial_x^4 u = 0 \quad \text{em} \quad Q = I \times (0,T) \tag{1.1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad t \in (0,T) \tag{1.2}$$

$$\partial_x^2 u(0,t) = 0, \quad \partial_x^2 u(1,t) = \nu \quad t \in (0,T) \tag{1.3}$$

$$u(x,0) = u^0(x), \;\; u'(x,0) = u^1(x) \quad x \in I, \tag{1.4}$$

onde u é o deslocamento e $\nu = \nu(t)$ é uma função real positiva que representa o controle que atua sobre uma parte da fronteira lateral de Q. A derivada temporal é representada por $'$.

O problema de controle exato para a equação (1.1) consiste em provar que: Para $T > T_0$ e dados iniciais $(u^0, u^1) \in F = H_0^1(0,1) \times H^{-1}(0,1)$, existe um controle $\nu \in L^2(0,T)$, tal que $u = u(x,t,\nu)$ é solução de (1.1) e

$$u(x,T,\nu) = u'(x,T,\nu) = 0.$$

2 Resultados

Para resolver o problema de controle exato empregamos o método H.U.M. As estimativas prévias, tais como a observabilidade, são obtidas após um estudo acerca do comportamento do "gap"via séries de fourier.

Consideremos o problema adjunto

$$\psi'' - \gamma\, \partial_x^2 \psi'' + \partial_x^4 \psi = 0 \tag{2.5}$$

$$\psi(0,t) = \psi(1,t) = 0 \tag{2.6}$$

$$\partial_x^2\, \psi(0,t) = \partial_x^2\, \psi(1,t) = 0 \tag{2.7}$$

$$\psi(x,0) = \psi^0(x), \;\; \psi'(x,0) = \psi^1(x), \tag{2.8}$$

com dados iniciais $(\psi^0, \psi^1) \in F = H_0^1(0,1) \times H^{-1}(0,1)$.

*Instituição Universidade Estadual do Norte Fluminense, LCMAT, RJ, Brasil, lalm@uenf.br
†Universidade Federal Fluminense, IM, RJ, Brasil, e-mail ricardof16@yahoo.com.br
‡Universidad Autónoma de Madrid, Departamento. de Matemáticas, Madrid, España, e-mail enrique.zuazua@uam.es

Em Komornik [1] prova-se que o espaço W^α que resulta de completar $Z = ger[\cup Z_k]$ onde $Z_k = span[\sin(k\pi x)]$ com a norma $\|v\|_\alpha^2 = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} (\lambda_k)^{4\alpha}\,|v_k|^2_{L^2(0,1)}$ é denso em $H_0^1(0,1)$, $L^2(0,1)$ e $H^{-1}(0,1)$. Logo, é possível identificar num sentido topológico e algébrico, os espaços:

$$W^{1/4} = H_0^1(0,1),\ W^0 = L^2(0,1),\ W^{-1/4} = H^{-1}(0,1).$$

Assim, se $(\psi^0, \psi^1) \in F$ existe uma única solução u de (2.5) que satisfaz que:

$$\psi \in C([0,T]; W^{1/4}) \cap C^1([0,T]; W^{-1/4}) \cap C^2([0,T]; W^{-3/4}); \tag{2.9}$$

$$E^\gamma(t) = E^\gamma(0) = \frac{1}{2}\Big\{\|u^0\|_1^2 + (1+\gamma)\|u^1\|_{-1}^2\Big\}. \tag{2.10}$$

Uma generalização da desigualdade de Ingham dada em S. Jaffard and S. Micu [5], e o comportamento do "gap"assintótico que tende a uma constante nós garante o seguinte resultado de observabilidade.

Teorema 2.1. *Para todo $T > 2\sqrt{\gamma}$, existem as constantes $C = C(T) > 0$ e $c = c(T)$, tal que*

$$c \int_0^T |\partial_x\, \psi(1,t)|^2\, dt \le E^\gamma(0) \le C \int_0^T |\partial_x\, \psi(1,t)|^2\, dt, \tag{2.11}$$

para toda ψ é solução de (2.5) com dados $(\psi^0, \psi^1) \in F$.

Definição 2.1. *Para todo $T > T_0 = 2\sqrt{\gamma}$ e $(u^0, u^1, \nu) \in H_0^1(0,1) \times H^{-1}(0,1) \times L^2(0,T)$, diremos que $u = u(x,t) \in C([0,T], H_0^1(0,1)) \cap C^1([0,T], H^{-1}(0,1))$ é uma solução por transposição de (1.1) se para todo $s \in [0,T]$ e $(\psi^0, \psi^1) \in H_0^1(0,1) \times H^{-1}(0,1)$,*

$$\langle (u'(s), -u(s)), \big(B_\gamma\varphi(s), B_\gamma\varphi'(s)\big)\rangle_{F'\times F} = \langle (u^1, -u^0), (B_\gamma\varphi^0, B_\gamma\varphi^1)\rangle_{F'\times F} + \int_0^s \nu\, \partial_x\, \varphi(1,t)\, dt, \tag{2.12}$$

onde $B_\gamma = I - \gamma\partial_x^2$ e $\varphi \in C^4(\bar{Q})$ que satisfaz (2.5).

Fazendo uso da definição 2.1 e do teorema 2.1 temos os seguintes resultados:

Teorema 2.2. *Para todo $(u^0, u^1) \in H_0^1(0,1) \times H^{-1}(0,1)$ e $\nu \in L^2(0,T)$, o problema (1.1) possui uma única solução u obtida por Transposição.*

Teorema 2.3. *Para todo $T > 2\sqrt{\gamma}$ e $(u^0, u^1) \in H_0^1(0,1) \times H^{-1}(0,1)$, o problema (1.1) é exatamente controlável. Além disso, o controle $\nu = -\partial_x\psi \in L^2(0,T)$.*

Referências

[1] KOMORNIK V. - *Exact controllability and stabilization: the multiplier method*, Masson and John Wiley, RAM 36, 1994.

[2] KOMORNIK V. - *Contrôllabilité Exacte en temps minimal de quelques modèles de plaques*, C.R. Acad. Sci Paris, t. 307, Serie I, pp 471-474, 1988.

[3] LEÓN M., L. - *Controle Exato da Equação da Viga 1-D Semi-discretizada no Espaço por Diferenças Finitas*, Tese de D.Sc; IM, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2001.

[4] LIONS, J.L. - *Contrôlabilité exacte, stabilisation et perturbations de systèmes distribués.*, Tome 1, Masson, RMA 8. Paris, 1988.

[5] STEPHANE JAFFARD AND SORIN MICU -*Estimates of the constants in generalized Ingham's inequality and applications to the control of the wave equation. Asymptot. Anal., 28(3-4):181–214, 2001.*

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edition N$^{\underline{o}}$ 1 November 2007

On a Parabolic Strongly Nonlinear Problem on Manifolds *

Osmundo A.Lima† & Alexandro O. Marinho‡ & Aldo T. Lourêdo §

Abstract

Let Ω be a bounded open set of $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ with smooth boundary Γ. We consider $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ a partition of Γ,that is, $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, with Γ_0 and Γ_1 having positive Lebesgue measure and with $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$.
Let ν be the outward normal to Γ and for $T > 0$ a real number. We denote by $Q = \Omega \times (0,T)$ the cylinder of the $\mathbb{R}^{n+1}$.

This work is dedicated to solve following strongly nonlinear boundary problem:

$$(*) \left| \begin{array}{lc} \mathcal{A}u = 0 & \text{in} \quad Q = \Omega \times (0,T) \\ u = 0 & \text{on} \quad \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0,T) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i + |u|^\rho u = f & \text{on} \quad \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{on } \Gamma, \end{array} \right. \tag{0.1}$$

where $\mathcal{A}$ is the pseudo Laplacian operator, that is,

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} & : & W_0^{1,p}(\Omega) & \rightarrow & W^{-1,p'}(\Omega), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \\ & & w & \mapsto & \mathcal{A}w \end{array} \tag{0.2}$$

with $\mathcal{A}w = -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial w}{\partial x_i}\Big), \quad 2 < p < \infty$. By ρ is a positive real number satisfying appropriate conditions.

As the solution of system depends on x and t and the equation $(*)$ does not have temporal derivative of the function u, this system is not Cauchy-Kovalevsky type.

This problem associated to evolution equation on lateral boundary, with $p = 2$, was study in Araruna-Antunes-Medeiros [1] and Domingos-Cavalcante [4], both motivated by the idea applied in Lions ([6], pp. 134), which consists to reduce the problem in a model of mathematical physics on the manifolds Σ_1. Also, Araruna-Araujo in [2] studied the system $(*)$ in your form more simple, that is, $p = 2$. Recently, O.A.Lima, A.T.Louredo and A.O.Marinho has been researching in Partial Differential Equations involving the pseudo Laplacian operator [9]. In this work we use the technical due to Lions [6], which transforms the system $(*)$ in a Cauchy-Kovalevsky type one by means of a suitable perturbations in the equation $(*)_1$. The solution of $(*)$ is obtained as limit of this perturbed problem.

For $p > 2$, the nonlinearity of the operator $\mathcal{A}$ brings great difficulties, mainly to obtain the concept of solution, in the passage to the limit, to work with the trace application and immersion in spaces $W^{s,p}$, $s \in \mathbb{R}$(For this we consult Něcas [5]) and to obtain a estimative for derived of the approximate function(Here we use strongly the proprieties of the trace application). Finally all this difficulties will be overcome through careful handling of the proprieties of

* *Mathematics Subject Classifications:* $35L85$, $35L05$, $35L20$, $35L70$, $49A29$
Key words: Weak solutions, manifolds, monotonic operator, compactness.
†UEPB-DME, C.Grande -PB-Brazil, osmundo@hs24.com.br
‡Partially supported by CNPq-Brazil, nagasak@ig.com.br
§UEPB-DME, C.Grande -PB-Brazil; Partially supported by Capes, aldotl@bol.com.br

the operator $\mathcal{A}$. Is worthwhile to mention that, all results in this work extend to the operator $Au = |\Delta u|\Delta u$ with the due care.

In this work we use the technical due to Lions [6], which transforms the system $(*)$ in a Cauchy-Kovalevshy type, that is,

$$(**)\quad \left|\begin{array}{lr} \varepsilon\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \mathcal{A}u_\varepsilon = 0 & \text{in}\quad Q = \Omega \times (0,T) \\ u_\varepsilon = 0 & \text{on}\quad \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0,T) \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\nu_i + |u_\varepsilon|^\rho u_\varepsilon = f & \text{on}\quad \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0,T) \\ u_\varepsilon(x,0) = w_0(x) & x \in \Omega, \end{array}\right.$$

where $w_0 = \gamma^{-1}u_0 \in V_0$ and $\varepsilon > 0$. The solution of $(*)$ is obtained as limit of the perturbed problem $(**)$. The perturbed problem is resolved by Galerkin method with one base for $V_0 = \{v \in W^{1,p}(\Omega); v|_{\Gamma_0} = 0\}$ and using by argument of motonotonic and compacity.

References

[1] Araruna, F.D., Antunes, G. O. & Medeiros, L.A.: Semilinear Wave Equation on Manifolds, Annales de la Faculté des Science de Toulouse, XI(1), 2002, pp. 7-18.

[2] Araruna, F.D: On an Evolution Problem on Manifolds. Proceedings of $62^{\underline{o}}$ Seminário Brasileiro de Análise, UNIRIO, Rio de Janeiro-Brasil 2006.

[3] Brezis, H: Analyse Fonctionelle-theorie et Applications. Masson, Paris (1983).

[4] Cavalcanti, M.M. and Domingos Cavalcanti, V.N., On Solvability of Solutions of Degenerate Nonlinear Equations on Manifolds, Diferential and Integral Equation, 13(10-12), 2000, pp. 1445-1458.

[5] J. Necas, Les Méthodes Directes en Théorie des Équations Elliptiques, Masson, Pars, 1967.

[6] Lions, J.L : Quelque Methodes des Resolution des Problém̀s aux Limites non Lineaires. Dunod, Paris (1969).

[7] Lions, J.L. & Magenes, E., Problèmes aux Limites Non Homogenes et Applications, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, vol. 1, 1968.

[8] Medeiros, L. A. and Miranda M.M., Introdução a os Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1993.

[9] O.A.Lima, A.T.Louredo & A.M. Oliveira : Weak solutions for a strongly-coupled nonlinear system, Electronic Journal of Differential Equations. Vol. 2006, No. 130, pp. 1-18.

[10] Segal, I. : Nonlinear partial differential equations in quantum field theory. Proc. Symb. Appl. Math. A.M.S, (1965), $210-226$.

[11] Sobolev, S.L.: Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics, AMS, 1963.

[12] Temam, R.: Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis, North Holland, 1979.

[13] Yosida, K.: Fnctional Analysis, Springer Verlag, 1965.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edition N$^{\underline{0}}$ 1 November 2007

HIERARCHIC CONTROL IN NON CYLINDRICAL DOMAIN *

J. LÍMACO [1], H. R. CLARK [1, 2] & L. A. MEDEIROS [3]

Abstract

In this paper we investigate hierarchic control in non cylindrical domains following the ideas of Diaz & Lions [1]. The environment problem treated by them could be the same treated here but with the domain Ω and the $N+1$ sub-domains $\mathcal{O}, \mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_N$ of Ω having moving boundaries. The state equation is defined by an operator with coefficients not regular, that is, are bounded measurable functions. In this case to apply arguments of approximate controllability we need of the theorem of unique continuation of Yu Ymanuvilov & Yamamoto [2].

We also analyzed the results of Lions [3] in which he introduced the Stackelberg's optimization for solution of a state linear equation of parabolic type. In this Lions' work is considered two controls: v_1 acting in the interior of an open non-empty subset Ω of $\mathbb{R}^n$ which is called *leader*, and v_2 which is called *follower* with action on the lateral boundary Σ of the cylinder $Q = \Omega \times]0, T[$, $T > 0$. Similar questions were investigated by Lions [4] for a linear hyperbolic equation, in which was studied the Stackelberg's optimization with a control v acting on a part Σ_0 of the lateral boundary Σ of Q, being v given by composition of the leader v_1 with the follower v_2.

In the present work we address a state equation of parabolic type with L^∞ coefficients in a non-cylindrical domain $\widehat{Q}$ which is the union of deformations of a fixed subset Ω of $\mathbb{R}^n$ by using a diffeomorphism $\mathcal{T}(x,t)$. Approximated controllability was introduced by Lions [5], see also Lions [7]. The Lions ideas about approximated controllability were largely developed by Zuazua [8], [9] among others.

We summarize this work as follows: we formulate the problem in the non cylindrical domain $\widehat{Q}$ namely,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - \Delta \hat{u} + \hat{a}(x,t)\hat{u} + \vec{\hat{b}}(x,t)\cdot \nabla \hat{u} = \hat{v}\widehat{\chi} + \sum_{i=1}^{N} \hat{w}_i \widehat{\chi}_i \quad \text{in} \quad \widehat{Q}_T,\\
&\hat{u} = 0 \quad \text{in} \quad \widehat{\Sigma}_T,\\
&\hat{u}(0) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_0.
\end{aligned}
\tag{0.1}
$$

Associate with the unique solution of the state problem (0.1) we consider the cost functionals defined by

$$
\widehat{J}_i(\hat{v}, \hat{w}_1, \cdots, \hat{w}_N) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_{it}} |\hat{w}_i(x,t)|^2 \, dxdt + \frac{\alpha_i}{2} \left|\hat{\rho}_i \left[\hat{u}(T, \hat{v}, \hat{w}) - \hat{u}^T\right]\right|^2_{L^2(\Omega_T)}, \tag{0.2}
$$

where by $\hat{u}^T$ we denote an objective state to be reached; $\hat{w} = (\hat{w}_1, \cdots, \hat{w}_N)$; α_i is for each i a positive constant, and $\hat{\rho}_i = \hat{\rho}_i(x)$ are smooth real valued functions defined in $\overline{\Omega}_T$ such that $\hat{\rho}_i(x) \geq 0$, $\rho_i(x) = 1$ in open domains $\widehat{G}_i \subset \Omega_T$.

The followers $\hat{w}_i$ assume that the leader has been making a choice $\hat{v}$. Thus, they tray to find a Nash equilibrium for their costs $\widehat{J}_1, \cdots, \widehat{J}_N$ defined in (0.2). It means that they look for local controls $\hat{w}_1, \cdots, \hat{w}_N$ which depend on $\hat{v}$ and they minimize their costs $\widehat{J}_i$, that is

$$
\widehat{J}_i(\hat{v}, \hat{w}_1, \cdots, \hat{w}_{i-1}, \hat{w}_i, \hat{w}_{i+1}, \cdots, \hat{w}_N) \leq \widehat{J}_i(\hat{v}, \hat{w}_1, \cdots, \hat{w}_{i-1}, \widetilde{\mathbf{w}}_\mathbf{i}, \hat{w}_{i+1}, \cdots, \hat{w}_N) \tag{0.3}
$$

for all $\widetilde{\mathbf{w}}_\mathbf{i} \in L^2(\widehat{\mathcal{O}}_i \times (0,T))$. The controls $\hat{w} = (\hat{w}_1, \cdots, \hat{w}_N)$ are called Nash equilibrium for the costs $\widehat{J}_1, \cdots, \widehat{J}_N$.

* *Mathematics Subject Classifications:* 35K55, 35K40.

Key words: Hierarchic control, Stackelberg-Nash strategy, Non-cylindrical domain

[1] Universidade Federal Fluminense, IM, RJ, Brasil
[2] Corresponding author: hclark@vm.uff.br
[3] Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM, RJ, Brasil, lmedeiros@abc.org.br

Reducing these problems in other equivalent ones in cylindrical domain Q_T, we establish, on appropriate hypotheses, the following results:

1. Existence and uniqueness of a Nash equilibrium - The existence of a unique Nash equilibrium for the functional $\widehat{J}_i$ defined in (0.2) it is established by means of the

Theorem 0.1. *If $\alpha_i = \alpha$ for $i = 1, \cdots, N$ and there exist real constants K_0, K_1 such that $0 < K_0 \leq |\delta_t(y)| \leq K_1$ in Q_T and*

$$n\alpha C_T^2 K_1 \max_{i,\, j=1,\cdots,N} |\rho_i - \rho_j|_{L^\infty(\Omega)} |\rho_i|_{L^\infty(\Omega)} = \gamma_0 < K_0,$$

then there exists a unique Nash equilibrium for (0.3).

2. Approximate controllability - The *approximate controllability* for the state equation (0.1) is shown supposing $v \in L^2(\mathcal{O}_T)$. Therefore, we will prove that the solution $u(y, T, v, w)$ of the state problem (0.1) generate a set dense in $L^2(\Omega)$. Thus, we will have the approximate controllability with $u^T \in L^2(\Omega_t)$, cf. Lions [5]. In other words, we are able to show that:

Theorem 0.2. *Let $v \in L^2(\mathcal{O}_T)$ be. Assuming the result of Theorem 0.1, then the set of functions solution $u(\cdot, T, v, w(v))$ of (0.1) is dense in $L^2(\Omega_T)$.*

References

[1] Diaz, J. I. & Lions, J. L., *On the approximate controllability of Stackelberg-Nash strategies. Ocean Circulation and Polution Control - Mathematical and numerical investigations*, ed. by J. I. Diaz, Springer (2005).

[2] Imanuvilov, O. Y., & Yamamoto, M. *On Carleman inequalities for parabolic equations in Sobolev spaces of negative order and exact controllability for semilinear parabolic equations*, University of Tokyo, Komaba, Tokyo, Japan, November (1998).

[3] Lions, J. L., *Some methods in Mathematical Analysis of systems and control*, Science Press Beijing and Gordon and Breach Sc. Publ. New York, (1981).

[4] Lions, J. L., *Hierarchic Control*, Proc. Ind. Acad. Sci. (Math. Sci.), vol. 104, nº1, February (1994), pp. 295-304.

[5] Lions, J. L., *Remarks sur la controllabilité approché*, Jornadas Hispano Francesas, Octobre (1990), pp. 77-87.

[6] Lions, J. L., *Some remarks on Stackelberg's optimization*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, vol. 4, nº4 (1994), pp. 477-487.

[7] Lions, J. L., *Remarks on approximate controlability*, J. d'Anakysis Mathematiques, vol. 50, (1992), pp. 103-116.

[8] Zuazua, E., *Some problems and results on the controllability of partial differential equations*, Progress in Mathematics, vol. 169, (1998) Birkhäuser Verlag Basel-Switzerland, pp. 276-311.

[9] Zuazua, E., *Controlability of partial differential equations and its semi-discrete approximations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, vol. 8, No. 2 April (2002) pp. 469-513.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edição N$^{\underline{o}}$ 1 Novembro 2007

ANÁLISE NUMÉRICA PARA UMA EQUAÇÃO DE ONDAS COM DISSIPAÇÃO LOCALIZADA

C. O. LOPES * & M. A. RINCON †

Resumo

Neste trabalho, estamos interessados na existência e unicidade de soluções e na estabilização da energia de um problema de contorno que modela a equação de ondas, na presença de uma dissipação localizada num domínio unidimensional. Além disso, para a obtenção da solução numérica, aplicamos o Método de Elementos Finitos na variável espaço utilizando como função base um polinômio linear por partes, associado ao Método de Diferenças Finitas para a evolução na variável tempo. Algumas implementações numéricas são apresentadas com seus respectivos gráficos, com o objetivo de mostrar a eficácia do método.

Nos últimos anos, o estudo de modelos matemáticos relacionados a estruturas flexíveis sujeitas à vibração tem sido consideravelmente estimulado pelo número crescente de questões de interesse prático. Dentre esses modelos, podemos destacar aqueles relacionados à engenharia estrutural moderna que requerem mecanismos de controle ativos para estabilizar estruturas intrinsecamente instáveis ou que possuem um amortecimento natural muito fraco. No presente trabalho, estamos interessados no estudo do modelo que descreve as vibrações transversais de uma corda finita de comprimento L, fixa nos seus extremos e sujeita a uma força axial. A posição $u(x,t)$ de um ponto x da corda, num instante t, deve satisfazer

$$, \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + a(x)u_t = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad 0 < x < L, \\ \end{cases} \tag{0.1}$$

onde $a(x) > 0, \quad \forall x \in [0, L]$. A energia associada ao modelo é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (u_t^2 + u_x^2) dx, \tag{0.2}$$

e verificamos através de um cálculo direto que

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\int_0^L a(x) u_t^2 dx,$$

ou seja, que a energia $E(t)$ é decrescente.

Nessas condições, podemos dizer que (0.1) tem uma natureza dissipativa, e o termo $a(x)u_t$ funciona como um mecanismo de controle (dissipação) e poderia ser forte o suficiente para estabilizar a energia associada à (0.2).

Nosso objetivo principal é tratar as seguintes questões:

1 Existência e Unicidade de Soluções

Tomando dados iniciais $u_0 \in H_0^1(0, L)$ e $u_1 \in L^2(0, L)$, utilizaremos o método de Faedo-Galerkin para mostrar que (0.1) possui uma única solução fraca; ou seja, que existe uma única função u satisfazendo

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u_t(t), \varphi) + (u_x, \varphi_x) + (a(x)u_t, \varphi) = 0 \quad , \quad \forall \varphi \in H_0^1(0, L) \text{ em } \mathcal{D}'(0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad , \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \end{cases} \tag{1.3}$$

*UFRJ, IM, RJ, Brasil, cristinaolemos@gmail.com
†UFRJ, IM, RJ, Brasil, e-mail rincon@dcc.ufrj.br

2 Decaimento Exponencial da Energia

Mostraremos que $E(t)$ decai exponencialmente a zero quando $t \to \infty$. Este resultado é obtido via funcional de Lyapunov, ou seja, construindo um funcional $\mathcal{L}(t)$ proporcional à $E(t)$, cuja derivada é negativa e proporcional a ele mesmo

$$c_1\mathcal{L}(t) \leq E(t) \leq c_2\mathcal{L}(t),$$

com c_1 e $c_2 > 0$, e

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -c\mathcal{L}(t) \ \ , \ \ c > 0,$$

donde obtemos que

$$E(t) \leq \beta E(0)e^{-ct} \ \ , \ \ \beta > 0 \ , \ c > 0.$$

Devido ao caráter introdutório dessa parte do trabalho, consideraremos $a(x) > a_0 > 0$.

3 Aproximações numéricas

É conhecido que quando o modelo contínuo original apresenta determinadas propriedades assintóticas, estas podem ser perdidas ao introduzirmos discretização. Esse fenômeno já foi observado em MÜNCH [1] e TÉBOU [2], e nesse trabalho visamos a obtenção de esquemas discretos que preservam as propriedades do modelo contínuo; ou seja; cuja energia associada tenha decaimento exponencial e que convirja em uma topologia adequada.

Todos os resultados teóricos como existência, unicidade e comportamento assintótico são fundamentais para a implementação de métodos numéricos.

Apresentamos a Análise Numérica do problema associando os seguintes métodos (ver em LIU [3]):

- Método de Elementos Finitos

  Através do Método de Faedo-Galerkin, projetamos o problema (0.1) em subespaços de dimensão finita. Assim, procuramos a solução aproximada $u_m(x,t)$ num subespaço $V_m = [\varphi_1, \varphi_2, ...\varphi_m]$ de $H_0^1(0,L)$, que pode ser escrita como combinação linear dos vetores dessa base. As funções base φ_i que utilizamos neste trabalho são lineares por partes. Fazendo alguns cálculos, chegamos a um sistema linear de Equações Diferenciais Ordinárias, cujo vetor incógnita é $d(t)$.

- Método de Diferenças Finitas

  A partir do sistema de EDO encontrado, utilizamos o método da diferença central, onde obtemos um algoritmo para calcular as soluções d(t) para cada tempo, e assim encontrar a solução aproximada.

Referências

[1] MÜNCH, A. & PAZOTO, A. F., *Uniform Stabilization of a Viscous Numerical Approximation for a Locally Damped Wave Equation*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 13 (2), pp 265 - 293, 2007.

[2] TÉBOU, L. R. T. & ZUAZUA, E., *Uniform Exponential Long Time Decay for the Space Semi-discretization of a Locally Damped Wave Equation Via an Artificial Numerical Viscosity*, Numer. Math., 95 (3), pp 563-598, 2003.

[3] LIU, I-Shih, & RINCON, M. A., *Introdução ao Método de Elementos finitos: Análise e Aplicação* IM / UFRJ, 2^a edição (2001).

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edition N$^{\underline{o}}$ 1 November 2007

ON A NONLINEAR BOUNDARY FLOW PROBLEM FROM POPULATION GENETICS: EXISTENCE AND REGULARITY *

G. F. MADEIRA †

Abstract

In this talk we approach the results of [9] concerning the following heat equation with nonlinear boundary condition occuring in population genetics

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u \quad \text{in} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= \lambda s(x) f(u) \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \end{aligned} \tag{0.1}$$

which decribes the changes of gene frequence in a population contemplating flow of genes throughout the smooth boundary of a domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. The gene frequence at time t and position $x \in \overline{\Omega}$ is $u(x,t)$, $\lambda > 0$ is a parameter, the nonlinear reaction at the boundary represents the effects of natural selection and is such that the C^2-function $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfies

- $f > 0 \quad \text{in} \quad (0,1)$,
- $f(0) = 0 = f(1)$,
- $f'(0) > 0, \; f'(1) < 0$.

The boundary weight function $s : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ verifies

- $s(\cdot) \in C^{1,\theta}(\partial\Omega) \quad \text{for} \quad 0 < \theta < 1$,
- $s(\cdot)$ changes sign in $\partial\Omega$,
- $\displaystyle\int_{\partial\Omega} s(x)\, d\mathcal{H}^{n-1} < 0$,

where $\mathcal{H}^{n-1}$ denotes the $(n-1)$-dimensional Hausdorff measure. The model of selection-migration considering the effects of gene flows and natural selection performing within a region was introduced by R. A. Fisher, [5], and studied by several authors, for instance, [3, 4, 6, 8, 10] and references therein.

Our first task is to prove that the parabolic problem above generates a nonlinear dynamical system in a suitable phase-space, namely,

$$\mathfrak{X} := \Big\{ v \in H^1(\Omega) : 0 \leq v(x) \leq 1 \text{ a.e. } x \in \Omega \Big\}$$

which is also a gradient system and then the knowledge of the equilibrium solutions is crucial because all solutions of (0.1) approach the set of equilibrium solutions when t is large. Using the results of [1] (see also [2]), this is got proving

Theorem 0.1. *The set $\mathfrak{X}$ is positively invariant to the nonlinear dynamical system generated by* (0.1) *in* $H^1(\Omega)$.

---

* *Mathematics Subject Classifications:* 35K55, 35K60, 35J60, 35J65, 35B65, 35B50, 37L05.
Key words: Semilinear parabolic problems, Semilinear elliptic problems, Nonlinear boundary conditions, population genetics.
† Universidade Federal de São Carlos, DM, SP, Brasil, gfmadeira@dm.ufscar.br

The choice of the phase-space is justified by the physical characteristics of the model that demands initial data and evolution taking values on the interval $[0,1]$ because u is a gene frequence.

Straight away, we address the questions of existence and regularity of nontrivial equilibrium solutions of (0.1). The trivial equilibrium solutions of (0.1) are $u \equiv 0$ and $u \equiv 1$, the zeros of f in $[0,1]$. We prove when the parameter $\lambda > 0$ is not small the existence of a nontrivial equilibrium solution of (0.1), which is a solution in $\mathfrak{X}$ of the elliptic problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= \lambda s(x) f(u) \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \end{aligned} \tag{0.2}$$

by using the direct method of the Calculus of Variations. Precisely, we prove

Theorem 0.2. *Under hypothesis above, problem* (0.1) *has a nontrivial equilibrium solution for* $\lambda > 0$ *not small.*

Finally, we establish that weak solutions of (0.2), not necessarily being equilibrium solutions of (0.1) when assume, for example,

- $f, f' \in L^\infty(\mathbb{R})$

are actually classical solutions, specifically, in the class $C^{2,\theta}(\overline{\Omega})$ for some $0 < \theta < 1$. The proof relies on a bootstrap argument connected with a regularity result from the L^p-theory of nonhomogeneous elliptic boundary value problems found in [7]. The result concerning regularity proved is

Theorem 0.3. *Let* $u \in H^1(\Omega)$ *be a weak solution of* (0.2) *and assume the last hypothesis. Then, u is a classical solution of* (0.2)*, that is,* $u \in C^{2,\theta}(\overline{\Omega})$ *for some* $0 < \theta < 1$.

References

[1] ALIKAKOS, N. D. - *Regularity and asymptotic behavior for the second order parabolic equation with nonlinear boundary conditions in L^p*, J. Diff. Eqns., 39 (1981), pp. 311-344.

[2] CARVALHO, A. N., OLIVA, S. M., PEREIRA, A. L. AND RODRÍGUEZ-BERNAL, A. - *Attractors for parabolic problems with nonlinear boundary conditions*, J. Math. Anal. Appl., 207 (1997), 409-461.

[3] BROWN, K. J. AND LIN, S. S. - *On the existence of positive eigenfunctions for an eigenvalue problem with indefinite weight function*, J. Math. Anal. Appl., 75 (1980), pp. 112-120.

[4] BROWN, K. J., LIN, S. S. AND TERTIKAS, A. - *Existence and nonexistence of steady-state solutions for a selection-migration model in population genetics*, J. Math. Biol., 27 (1989), pp. 91-104.

[5] FISHER, R. A. - *Gene frequencies in a cline determined by selection and diffusion*, Biometrics, 6 (1950), pp. 353-361.

[6] FLEMING, W. H. - *A selection-migration model in population genetics*, J. Math. Biol., 2 (1975), pp. 219-233.

[7] GRISVARD, P. *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Pitman, London (1985).

[8] HENRY, D. - *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, 2nd Print., Lect. Notes in Math. 840, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[9] MADEIRA, G. F. - *Existence and regularity for a nonlinear boundary flow problem of population genetics,* Submitted.

[10] SAUT, J. C. AND SCHEURER, B. - *Remarks on a non linear equation arising in population genetics*, Comm. Part. Diff. Eqns., 3 (1978), pp. 907-931.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edition N$^{\underline{o}}$ 1 November 2007

Periodic Solutions for Nonlinear Beam Equation *

Alexandro O. Marinho †

Abstract

In this Lecture we investigate existence and uniqueness of periodic solution in t, for the nonlinear beam equation:

$$L(w) = w' + \Delta^2 w + |w'|^{p-2} w',$$

in a bounded open set Ω of $\mathbb{R}^n$. O method to be employed is the elliptic regularization as J.L.Lions [5] and techniques of monotonous operators as Browder [2]. The previous idea can be found in G.Prodi [10]. For the method, see also J.Leray-J.L.Lions [4].

By Ω we represent a bounded open set of $\mathbb{R}^2$ with C^2 boundary Γ. We consider the cylinder $Q = \Omega \times (0, T)$, $T > 0$, with lateral boundary $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. We will investigate existence and uniqueness of solution for the periodic problem:

$$\left| \begin{array}{l} w'' + \Delta^2 w + |w'|^{p-2} w' = f \text{ in, } Q, \ p > 2 \\ w = \dfrac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \Sigma \\ w(0) = w(T), \ \ w'(0) = w'(T). \end{array} \right. \tag{0.1}$$

Note that $w = w(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$, w' is derivative with respect to t and Δ^2 the square of Laplace operator Δ. All derivatives are in the sense of distributions, as Brezis [3].

We define the concept of solution for (0.1) and we prove, by elliptic regularization and properties of monotonous operator, the existence and uniqueness of solution for (0.1). We employ arguments of Agmon [1]. In fact, as I cannot apply the energy method, Prodi [10] proposed to investigate solutions of (0.1) of the following type:

$$\left| \begin{array}{l} w = u + u_0 \\ u_0 \ \textit{independent of } t \\ \displaystyle\int_0^T u(s) ds = 0, \ \textit{the average of } u \textit{ on } [0, T] \textit{ is zero} \end{array} \right. \tag{0.2}$$

Thus, substituting w defined by (0.2) in (0.1) we obtain:

$$u'' + \Delta^2 u + |u'|^{p-2} u' = f - \Delta^2 u_0, \tag{0.3}$$

which contains a new unknown u_0, but u_0 is independent of t, by definition (0.2).

To eliminate u_0 in (0.3), we derivable with respect t. Therefore, we change the problem in the following:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(u'' + \Delta^2 u + |u'|^{p-2} u'\right) = \dfrac{df}{dt} \ \textit{in } Q \\ \displaystyle\int_0^T u(s) ds = 0 \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ \textit{on} \ \sum \\ u(0) = u(T), \ u'(0) = u'(T) \text{ in } \Omega. \end{array} \right. \tag{0.4}$$

---

* *Mathematics Subject Classifications:* 74H45, 35L05, 35L20

Key words: Periodic, biharmonic, wave equation, elliptic regularization.

† Supported by CNPq-Brazil, alexandromarinhooliveira@hotmail.com

Suppose we obtained u satisfying (0.4). By $(0.4)_1$ we have

$$\frac{d}{dt}\left(u'' + \Delta^2 u + |u'|^{p-2}u' - f\right) = 0,$$

what implies that u must be solution of the following problem:

$$\left|\begin{array}{l} u'' + \Delta^2 u + |u'|^{p-2}u' - f = g_0 \ in\ Q \\ g_0 \ independent\ of\ t \in (0,T), \end{array}\right.$$

plus the other conditions as in (0.4).

We know g_0 and we obtain u_0, trough Agmon [1], as the solution of the linear Dirichlet problem:

$$\left|\begin{array}{l} \Delta^2 u_0 = g_0 \ in\ \Omega \\ u_0 = \dfrac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0 \, on \, \Gamma. \end{array}\right.$$

Therefore, $w = u + u_0$ is the periodic solution of (0.1) which we were looking for. We need to justify the heuristic procedure adapted above. If we do it, everything will be in order.

References

[1] S.Agmon - The L^p approach to the Dirichlet problem I - Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, (1959), pp $405 - 448$.

[2] F.E.Browder-Problems Non Linéares, Press de L'Universite de Montreal, 1966.

[3] H. Brezis. Analyse Fuctionelle(Theorie and Applications), Masson, Paris 1983.

[4] J.Leray - J.L. Lions - Quélques Résults de Visik sur les Problémes Elliptiques non Linéaires par les méthodes de Minty-Browder. Bull. Soc. Math. France, 93, 1965, pp. 97 107.

[5] J.L.Lions- Equations Differenhelles Operationelles dans des Espaces de Hilbert, CIME, Verena 1963.

[6] J.L.Lions- Quelques Méthodes de Résolution des Problémes aux Limites Non Linéaires. Dunod, Paris, 1969(Nouvelle Présentation Dunod 2002).

[7] J.L. Lions - Sur Certaines Équations Paraboliques Non Linéaires. Bull. Soc. Math. France, 93, 1965, pp. 155 175.

[8] L.A. Medeiros - F.D.Araruna - G.O.Antunes - Regularização Elítica, IMUFRJ- Rio de Janeiro 2002.

[9] L.A.Medeiros - Applications of Monotony Method. IM-UFRJ - Rio de Janeiro 2005.

[10] G.Prodi - Soluzioni Periodiche de l'equazioni della onde con terme dissipative non lineare - Rend. Sem. Mat. Padova (35) (1968) pp $38 - 49$.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edição N$^{\underline{0}}$ 1 Novembro 2007

INTEGRAL DE KURZWEIL PARA FUNÇÕES A VALORES EM UM ESPAÇO DE RIESZ: TEOREMAS DA CONVERGÊNCIA UNIFORME

G. A. MONTEIRO *

Resumo

Este trabalho se originou do estudo de [3] e [4], onde encontramos a extensão da integral de Kurzweil para funções definidas em um intervalo fechado e limitado da reta e a valores em um espaço de Riesz. Nosso objetivo aqui é apresentar teoremas que relacionam a convergência uniforme de uma seqüência de funções Kurzweil integráveis e a convergência da seqüência formada pelas respectivas integrais.

Um espaço de Riesz X é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial provido de uma relação de ordem parcial $\leq$ compatível com sua estrutura de espaço vetorial e tal que $(X, \leq)$ é um reticulado. Dizemos que X é um espaço de Riesz Dedekind σ-completo se todo subconjunto não vazio, enumerável e limitado superiormente admite supremo.

B. Riečan, em [3], ao introduzir o conceito de integral de Kurzweil para funções a valores em um espaço de Riesz comenta sobre uma técnica que consiste em utilizar seqüências duplas para substituir o epsilon que aparece, no caso real, quando queremos transmitir uma idéia de proximidade. Essas seqüências duplas são chamadas (D)-seqüências. Dizemos que uma seqüência dupla limitada $(a_{ij})_{ij}$ de elementos de um espaço de Riesz X é uma (D)-seqüência, se para todo $i \in \mathbb{N}$, a seqüência $(a_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$ é não-crescente e $a_{ij} \searrow 0$ quando $j \to \infty$.

No que segue, trabalharemos com funções $f \in X^{[a,b]}$, onde $[a,b]$ é um intervalo de $\mathbb{R}$ e X é um espaço de Riesz Dedekind σ-completo fracamente σ-distributivo, isto é, X é um espaço de Riesz Dedekind σ-completo tal que

$$\bigwedge_{\varphi\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \left(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)} \right) = 0\,, \qquad \text{para toda } (D)\text{-seqüência } (a_{ij})_{ij} \text{ de elementos de } X.$$

Dizemos que uma função $f \in X^{[a,b]}$ é Kurzweil integrável em $[a,b]$ se existe $L \in X$ satisfazendo:

existe uma (D)-seqüência $(a_{ij})_{ij}$ de elementos de X de modo que,
para toda $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ existe $\delta = \delta(\varphi) \in {\mathbb{R}_+}^{[a,b]}$ tal que

$$\left| \sum_{\Pi} f - L \right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}\,, \quad \text{para toda } \Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta)\,. \tag{1}$$

O conjunto $\mathcal{A}_{[a,b]}(\delta)$ consiste de todas as partições Π de $[a,b]$, com $\Pi := \{(I_k, \alpha_k)\}_{k\in\Lambda}$, $\Lambda \subset \mathbb{N}$ finito, tais que $I_k \subset \,]\alpha_k - \delta(\alpha_k)\,,\, \alpha_k + \delta(\alpha_k)[$, para todo $k \in \Lambda$. O elemento $\sum\limits_{\Pi} f$ denota a soma de Riemann de f em relação a partição Π, ou seja, $\sum\limits_{k\in\Lambda} f(\alpha_k)\, m(I_k)$, onde m é a medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$.

O elemento L que verifica a condição (1) é único, será denotado por $\displaystyle\int_a^b f$ e chamado de integral de Kurzweil de f em $[a,b]$. Esse conceito de integral de Kurzweil, no caso em que o espaço de Riesz é o conjunto dos números reais, é equivalente ao conceito de integral de Riemann generalizada ([2]; Teorema 2.1.14).

Para nosso objetivo consideraremos o conceito de (o)-convergência para seqüências de elementos de X e o conceito de convergência uniforme para seqüências de elementos de $X^{[a,b]}$. Mais precisamente, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de elementos de X, $x \in X$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de elementos de $X^{[a,b]}$ e $f \in X^{[a,b]}$, dizemos que

*Universidade Federal de São Carlos, Departamento de Matemática, DM - UFSCar, São Carlos, SP, Brasil, giselle@dm.ufscar.br

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (o)-converge para x, e escrevemos $x_n \xrightarrow{o} x$, se existe uma seqüência não-crescente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X tal que

$$a_n \searrow 0 \qquad \text{e} \qquad |x_k - x| \leq a_k \ , \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}\,,$$

e dizemos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f, e escrevemos $f_n \xrightarrow{u} f$, se existe uma seqüência não-crescente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X tal que

$$a_n \searrow 0 \qquad \text{e} \qquad |f_k(x) - f(x)| \leq a_k \ , \quad \text{para quaisquer } \ x \in [a,b] \ \text{ e } \ k \in \mathbb{N}\,.$$

O conceito de (o)-convergência e o conceito de convergência uniforme são equivalentes, no caso em que $X = \mathbb{R}$, aos de convergência e convergência uniforme usuais em $\mathbb{R}$, respectivamente.

De posse desses conceitos enunciamos o Teorema da Convergência Uniforme encontrado em [4] que nos motivou a obter o Teorema 2.

Teorema 1. *Sejam X um espaço de Riesz Dedekind σ-completo fracamente σ-distributivo, $f \in X^{[a,b]}$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de $X^{[a,b]}$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, f_k é Kurzweil integrável em $[a,b]$. Se $f_n \xrightarrow{u} f$ e f é limitada, então f é Kurzweil integrável em $[a,b]$ e*

$$\int_a^b f_n \ \xrightarrow{o} \ \int_a^b f\,. \tag{2}$$

No Teorema 1, a hipótese de f ser limitada nos trouxe uma certa preocupação, uma vez que, no contexto de funções Riemann generalizada integráveis, apenas a convergência uniforme da seqüência de funções é suficiente para garantir (2) ([1]; p. 117). Isso nos motivou a buscar condições que fornecessem (2) sem assumir f limitada. Estudando a técnica de aproximação que utiliza de (D)-seqüências nos foi possível obter o teorema a seguir, cuja prova pode ser encontrada em [2]. A partir desse resultado alcançamos nosso objetivo, ou seja, obtivemos como corolário o Teorema da Convergência Uniforme no contexto de funções Riemann generalizada integráveis.

Teorema 2. *Sejam X um espaço de Riesz Dedekind σ-completo fracamente σ-distributivo, $f \in X^{[a,b]}$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de elementos de $X^{[a,b]}$ satisfazendo*

1. *f_k é Kurzweil integrável em $[a,b]$, para todo $k \in \mathbb{N}$;*
2. *existe uma (D)-seqüência $(a_{ij})_{ij}$ de elementos de X de modo que, para todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se que, dada qualquer $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ existe $\delta_k = \delta_k(\varphi) \in {\mathbb{R}_+}^{[a,b]}$ tal que*

$$\left|\sum_{\Pi} f_k - \int_a^b f_k\right| \leq \bigvee_{i=1}^{\infty} a_{i\varphi(i)}\,, \quad \textit{para toda } \Pi \in \mathcal{A}_{[a,b]}(\delta_k)\,.$$

Se $f_n \xrightarrow{u} f$, então f é Kurzweil integrável em $[a,b]$ e $\displaystyle\int_a^b f_n \ \xrightarrow{o} \ \int_a^b f\,.$

Este trabalho é parte da Dissertação de Mestrado ([2]) escrita sob orientação da Profa. Dra. Roseli Fernandez, Instituto de Matemática e Estatística, IME-USP, São Paulo, Brasil.

Referências

[1] BARTLE, R.: *A modern theory of integration,* Graduate Studies in Mathematics, AMS, 2001.

[2] MONTEIRO, G. A.: *Integral de Kurzweil para funções a valores em um espaço de Riesz - uma introdução,* Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

[3] RIEČAN, B.: *On the Kurzweil integral for functions with values in ordered spaces I,* Acta Math. Univ. Comenian. **56-57** (1990), 75-83.

[4] RIEČAN, B.–VRÁBELOVÁ, M.: *On the Kurzweil integral for functions with values in ordered spaces II,* Math. Slovaca **43** (1993), 471-475.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edition N$^{\underline{0}}$ 1 November 2007

DECAY OF SOLUTIONS OF THE WAVE EQUATION IN NONCYLINDRICAL DOMAINS *

M.MILLA MIRANDA †

Abstract

Let $\mathcal{O}_1$ and $\mathcal{O}_0$ be two open bounded sets of $\mathbb{R}^n$ with $\mathcal{O}_0$ strictly contained in $\mathcal{O}_1$. Without loss of generality we can consider that the null vector of $\mathbb{R}^n$ belongs to $\mathcal{O}_0$. By Γ_1 and Γ_0 are represented the respective boundaries of $\mathcal{O}_1$ and $\mathcal{O}_0$. We consider the open bounded set $\Omega = \mathcal{O}_1 \backslash \overline{\mathcal{O}_0}$. Denote by $\nu(y)$ the unit exterior normal vector at $y \,\epsilon\, \Gamma, \Gamma$ boundary of Ω.

Let $k(t)$ be a smooth real function defined on $[0, \infty[$ with $0 < k_0 \leq k(t) \leq k_1 < \infty$ for all $t \epsilon [0, \infty[$. With Ω and $k(t)$ we construct the following sets :

$$\Omega_t = \{x = k(t)y \; ; \; y \epsilon \Omega\} \, , \, t \epsilon [0, \infty[$$

The boundary Γ_t of these sets is constituted by the disjoint parts Γ_{0t} and Γ_{1t}. Denote by ν_t the unit exterior normal vector on Γ_{1t}. Introduce the noncylindrical domain

$$\hat{Q} = \bigcup_{0<t<\infty} \Omega_t \times \{t\}.$$

We study the boundary stabilization and the decay of solutions of the wave equation defined in $\hat{Q}$

The existence of global solutions for semilinear wave equation defined in noncylindrical domains with Dirichlet boundary conditions was studied by various authors, among of them, we can mention Lions[5], Medeiros[6], Bardos and Cooper[1], Cooper and Medeiros[2], Kozhanov and Larkin[3] and Limaco and Medeiros[4].

In what follows, we introduce the necessary notations and hypotheses in order to state our main result. Denote by $V(\Omega_t)$ the Hilbert space

$$V(\Omega_t) = \{u \epsilon H^1(\Omega_t) \, ; \, u = 0 \text{ on } \Gamma_{0t}\} \, , \, t \epsilon [0, \infty[$$

equipped with the usual scalar product. By $m(x)$ represent the function $m(x) = x \, , \, x \,\epsilon\, \mathbb{R}^n$ and by $\xi.\psi$ the scalar product of the vectors ξ, ψ of $\mathbb{R}^n$. Consider the function $\hat{\delta}(x,t) = x.\nu(x/k(t))$, $(x,t) \in \hat{\Sigma}_1 = \bigcup_{0<t<\infty} \Gamma_{1t} \times \{t\}$

We assume the following hypotheses:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_0 \text{ and } \Gamma_1 \text{ are of class } C^2; \\
&y.\nu(y) \leq 0, \text{ for all } y \,\epsilon\, \Gamma_0 \text{ and } y.\nu(y) \geq \tau_0 > 0 \, , \text{ for all } y \,\epsilon\, \Gamma_1; \\
&0 \leq k'(t) \leq M_0 \, , \, |k''(t)| \leq N_0 k'(t) \, , \text{for all } t \,\epsilon\, [0, \infty[
\end{aligned}$$

where the constants M_0 and N_0 depend on n, k_0, k_1 and R, $R = max\{||y||; y \,\epsilon\, \overline{\Omega}\}$.

In the above conditions we have the following result:

Theorem. Consider $u^1 \,\epsilon\, L^2(\Omega_0)$ and $u^0 \,\epsilon\, V(\Omega_0)$ if $k'(0) = 0$ or $u^0 \,\epsilon\, H_0^1(\Omega_0)$ if $k'(0) \neq 0$. Then there exists a unique function u in the class

$$\begin{aligned}
&u \,\epsilon\, C^0([0, \infty[; V(\Omega_t)) \bigcap L^\infty(0, \infty; V(\Omega_t)), \\
&u' \,\epsilon\, C^0([0, \infty[; L^2(\Omega_t)) \bigcap L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega_t))
\end{aligned}$$

---

* *Mathematics Subject Classifications: 35L20,35B35,93D15*
Key words: wave equation, boundary stabilization, noncylindrical domains
† IM-UFRJ, RJ, Brasil, milla@im.ufrj.br

such that

$$\begin{array}{l} u'' - \Delta u = 0 \quad \text{in} \quad L^\infty(0,\infty; V'(\Omega_t)), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_t} + \frac{k'}{k}(m.\nu_t)u' + \hat{\delta}[u' + \frac{k'}{k}(m.\nabla u)] = 0 \ \text{ in } L^2(0,\infty; L^2(\Gamma_{1t})), \\ u(0) = u^0 \, , \, u'(0) = u^1. \end{array}$$

Furthermore,

$$\hat{E}(t) \leq C\hat{E}(0)e^{-\frac{1}{3}\sigma t} \text{ ,for all } t \geq 0$$

where

$$\hat{E}(t) = \int_{\Omega_t} u'^2(x,t)\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_t} [\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}]^2 \, dx \, , \, t \,\epsilon\, [0,\infty[$$

The constant $\sigma > 0$ depends on n, k_0, k_1, τ_0 and R.

Proof: First we solve the problem in the cylinder $Q = \Omega \times [0,\infty[$ (see Milla Miranda[7]) and then in $\hat{Q}$.

References

[1] BARDOS, C. AND COOPER, J. - *A nonlinear wave equation in a time dependent domain*, J. Math. Anal Appl., 42 (1973), pp. 29-60.

[2] COOPER, J. AND MEDEIROS, L.A. - *The Cauchy problem for nonlinear wave equation in domain with moving boundary* , Annali della Scuola Normale Superior di Pisa, 26 (1972), pp.829-838.

[3] KOZHANOV, A.I. AND LARKIN, N.A. -*On solvability of boundary value problems for the wave equation with a nonlinear dissipation in noncylindrical domains*, Siberian Math. J., 42 (2001), pp.1062-1081.

[4] LIMACO, J, AND MEDEIROS,L.A. -*Vibrations of elastic membranes with moving boundaries*, Nonlinear Analysis, 45 (2001), pp.363-382.

[5] LIONS,J.L. -*Une remarque sur les problèmes d'évolution non linéaires dans des domaines non cylindriques* , Rev. Roumanie Math. Pure Appl., 9 (1964), pp.11-18.

[6] MEDEIROS, L.A. -*Nonlinear wave equation in domains with variable boundary*, Arch.Rat.Mech.Anal., 47 (1972), pp.47-58.

[7] MILLA MIRANDA, M. -*Exponential decay of solutions of a second order pde*, submitted to publication

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edição N$^{\underline{o}}$ 1 Novembro 2007

Método de elementos finitos de Galerkin descontínuo para problemas de acoplamento de equações elípticas

Igor Mozolevski *

Resumo

Os exemplos mais tradicionais de análise de problemas multifísicos (problemas cuja modelagem envolve modelos físicos diferentes em diferentes partes do domínio considerado) incluem problemas de acoplamento de equações (sistemas de equações) em derivadas parciais elípticas de ordens diferentes. Como exemplo, mencionamos o problema de acoplamento do sistema de equações de Navier – Stokes com a equação de Darcy [**?**],[**?**],[**?**], que aparece em problemas de simulação de reservatórios de petróleo. Outro exemplo tem sua origem na mecânica de estruturas, onde em modelagem de acoplamento de placas com membranas (típico para sistemas acústicos) aparecem problemas de acoplamento de equações de Kirchhoff ou Reissner-Mindlin com a equação da membrana [**?**].

Os métodos de decomposição de domínio são os métodos mais freqüentemente usados na resolução numérica de problemas de acoplamento de equações em derivadas parciais de ordens diferentes. Por estes métodos, a solução do problema de acoplamento é reduzida ao sucessivo processo de solução de subproblemas de valores de fronteira locais alternando as condições de Dirichlet e Neumann na interface.

Nesta trabalho será introduzida a formulação de uma versão *hp* do método de elementos finitos de Galerkin descontínuo para resolução numérica do problema de acoplamento de equações elípticas de ordens diferentes. Esta formulação é baseada no método de Nitshe e permite implementar as condições de interfácio de uma maneira fraca [**?**]. Desenvolvemos uma análise de estimativas *a priori* para o erro do método e apresentamos os resultados de simulações numéricas que confirmam as taxas de convergência teoricamente preditas.

Referências

[1] E. Burman and P. Hansbo. A unified stabilized method for Stokes and Darcy equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics 198 (2007) 35–51*, 198(15):35–51, 2007.

[2] P. Gervasio. Homogeneous and heterogeneous domain decomposition methods for plate bending problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 194:4321 – 4343, 2005.

[3] W. Layton, F. Schieweck, and I. Yotov. Coupling fluid flow with porous media flow. *SIAM J. Num. Anal.*, 40:2195–2218, 2003.

[4] E. Miglio, A. Quarteroni, and F. Saleri. Coupling of free surface and groundwater flows. *Computers & Fluids*, 32:73–83, 2003.

[5] B. Riviére. Analysis of a discontinuous finite element method for the coupled stokes and darcy problems. *Journal of Scientific Computing, Volumes 22 and 23, June 2005*, 22–23:479–500, 2005.

*Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil, Igor.Mozolevski@mtm.ufsc.br

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edição N$^{\underline{0}}$ 1 Novembro 2007

Operadores de extensão de aplicações multilineares ou polinômios homogêneos

J. Mujica e P. L. Kuo

Resumo

O problema de estender funções holomorfas em um espaço de Banach E a um espaço de Banach maior F foi estudado por primeira vez por Aron e Berner [1]. Eles provaram que cada função holomorfa de tipo limitado em E se estende a uma função holomorfa de tipo limitado no bidual E'' de E. Para atingir seu objetivo eles construíam operadores de extensão para os espaços de aplicações multilineares e usaram as séries de Taylor para estender funções holomorfas.

Seguindo uma idéia de Nicodemi [3], P. Galindo, D. García, M. Maestre e J. Mujica [2] definiram uma seqüência de operadores $R_m : L(^mE) \to L(^mF)$ a partir de um operador arbitrário $R_1 : E' \to F'$. Por esse motivo os operadores R_m são chamados de operadores de Nicodemi. Quando $R_1 : E' \hookrightarrow E'''$ é o mergulho canônico, segue que os operadores $R_m : L(^mE) \to L(^mE'')$ coincidem com os operadores de Aron-Berner.

Se G é um espaço de Banach, então cada seqüência $R_m : L(^mE) \to L(^mF)$ induz de maneira natural uma seqüência $\widetilde{R_m} : L(^mE; G') \to L(^mF; G')$. Se $R_1 : E' \hookrightarrow E'''$ é o mergulho canônico, então os operadores $\widetilde{R_m}$ coincidem também com os operadores de Aron-Berner no caso de aplicações multilineares com valores vetoriais.

Os operadores $R_m : L(^mE) \to L(^mF)$ induzem de maneira natural operadores $\widehat{R}_m : \mathcal{P}(^mE) \to \mathcal{P}(^mF)$. De maneira análoga os operadores $\widetilde{R_m} : L(^mE; G') \to L(^mF; G')$ induzem operadores $\widehat{\widetilde{R}}_m : \mathcal{P}(^mE; G') \to \mathcal{P}(^mF; G')$.

Um dos objetivos deste trabalho é estudar a hereditariedade dos operadores de Nicodemi, ou seja, estudar as propriedades das aplicações multilineares e polinômios homogêneos que são preservadas pelos operadores de Nicodemi. Por exemplo, se A é uma aplicação multilinear simétrica, de tipo finito, nuclear, compacta ou fracamente compacta, então R_mA ou $\widetilde{R_m}A$ tem a mesma propriedade? E se P é um polinômio homogêneo de tipo finito, nuclear, compacto ou fracamente compacto, então $\widehat{R}_mP$ ou $\widehat{\widetilde{R}}_mP$ tem a mesma propriedade?

Além disso, observamos que se $\varphi : E \to F$ um isomorfismo, então

$$C_\varphi : Q \in \mathcal{P}(^mF) \to Q \circ \varphi \in \mathcal{P}(^mE)$$

é um isomorfismo também, ou seja, cada isomorfismo entre E e F induz um isomorfismo entre $\mathcal{P}(^mE)$ e $\mathcal{P}(^mF)$ para todo $m \in \mathbb{N}$, onde C_φ conhecido como operador de composição. Surge uma curiosidade depois dessa observação: Cada isomorfismo entre os duais E' e F' de dois espaços de Banach E e F induz também um isomorfismo entre $\mathcal{P}(^mE)$ e $\mathcal{P}(^mF)$? J. C. Díaz e S. Dineen são os primeiros pesquisadores que estudaram esse problema. Em [2], eles mostraram se E' e F' são isomorfos, e E' possui a propriedade de Schur e a propriedade de aproximação, então $\mathcal{P}(^mE)$ e $\mathcal{P}(^mF)$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$. Este resultado foi desenvolvido e melhorado em artigos mais recentes. S. Lassalle e I. Zalduendo mostraram em [4] que se E' e F' são isomorfos, e E e F são simetricamente Arens-regular, então $\mathcal{P}(^mE)$ e $\mathcal{P}(^mF)$ são isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$. Motivados por esse resultado em [4], estudamos os seguintes problemas: Se E' e F' são isomorfos, então $\mathcal{P}(^mE)$ e $\mathcal{P}(^mF)$ são isomorfos? Se E' e F' são isomorfos, então os espaços de polinômios homogêneos de tipo finito (respectivamente nuclear, compacto, fracamente compacto) definido em E e F com valores escalares são isomorfos também? Se a resposta for positiva, o mesmo resultado vale no caso de polinômios homogêneos com valores vetoriais? Por processo lógico, começamos sempre a pesquisa a partir de aplicações multilineares.

Referências

[1] R. Aron, P. Berner - *A Hahn - Banach extension theorem for analytic mappings*, Bull. Soc. Math. France 106 (1978), 3-24.

[2] J. C. Díaz, S. Dineen - *Polynomials on stable spaces*, Ark. Mat. 36(1998), 87-96.

[3] P. Galindo, D. García, M. Maestre, J. Mujica - *Extension of multilinear mapping on Banach spaces*, Studia Math. 108 (1994), 55-76.

[4] S. Lassalle, I. Zalduendo - *To what extent does the dual Banach space E' determine the polynomials over E ?*, Ark. Mat. 38 (2000), 343-354.

[5] O. Nicodemi - *Homomorphisms of algebras of germs of holomorphic functions, in: Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory*, S. Machado (ed.), Lecture Notes in Math. 843, Springer, Berlin, 1981, 534-546.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edition N$^{\underline{o}}$ 1 November 2007

A SCHOTTKY-TYPE THEOREM FOR STARLIKE DOMAINS IN BANACH SPACES *

JORGE MUJICA † & PAULA TAKATSUKA ‡

Abstract

We show that if U is a starlike domain in a Banach space E and $\mathcal{F}$ is a family of holomorphic functions on U that omit two distinct values and is bounded at the origin, then $\mathcal{F}$ is uniformly bounded on each U-bounded set.

1 Introduction

Let E be a complex Banach space and let $\mathcal{H}(U)$ denote the vector space of all holomorphic functions on an open subset U of E.

In a recent paper Paula Takatsuka used the classical Schottky Theorem to prove that, for each $0 < \alpha < \infty$ and $0 < \beta < 1$, there is a constant $c(\alpha, \beta) > 0$ such that, given a Banach space E (or even a locally convex space E), a point $x_0 \in E$ and a balanced open set $U \subset E$, if $f \in \mathcal{H}(x_0 + U)$ is a function that omits the values 0 and 1 and satisfies $|f(x_0)| \leq \alpha$, then $|f(x)| \leq c(\alpha, \beta)$ for every $x \in x_0 + \beta U$. See Takatsuka ([5], Corollary 14).

In Section 2 we establish that if $U \subset E$ is a starlike domain and $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(U)$ is a family of holomorphic functions that omit the values 0 and 1 and is bounded at the origin, then $\mathcal{F}$ is uniformly bounded on each U-bounded set. In particular, $\mathcal{F}$ is contained and bounded in $\mathcal{H}_b(U)$, the space of all holomorphic functions of bounded type on U.

In Section 3 we obtain that if $U \subset E$ is a connected open set and $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(U)$ is a family of holomorphic functions that omit the values 0 and 1 and is bounded at some point, then $\mathcal{F}$ is uniformly bounded on each ball which lies strictly inside U. In particular, $\mathcal{F}$ is contained and bounded in $\mathcal{H}_d(U)$, the space of holomorphic functions recently studied by Dineen and Venkova [2].

We refer to the books of Dineen [1] or Mujica [4] for background information on infinite dimensional complex analysis.

2 A Schottky-type theorem in starlike domains

A set $U \subset E$ is said to be *starlike* if $\lambda x \in U$ for all $x \in U$ and $\lambda \in [0, 1]$. U is said to be x_0-*starlike* if the set $U - x_0$ is starlike, that is, $(1 - \lambda)x_0 + \lambda x \in U$ for all $x \in U$ and $\lambda \in [0, 1]$. If U is x_0-balanced, then U is x_0-starlike. If U is convex, then U is x_0-starlike for each $x_0 \in U$.

If $U \subset E$ is open and $x \in U$, let $d_U(x)$ denote the distance from $x \in U$ to the boundary of U, that is:

$$d_U(x) = \sup \{r > 0 : B(x, r) \subset U\}.$$

Theorem 2.1. *Let U be a starlike open subset of a Banach space and let:*

$$U_n := \{x \in U : \|x\| < n \quad \text{and} \quad d_U(x) > 1/n\}$$

* *Mathematics Subject Classifications:* 46G20, 46E50.
Key words: Banach space, balanced domain, starlike domain, holomorphic function, holomorphic function of bounded type.
†IMECC-UNICAMP, Campinas, SP, Brasil, mujica@ime.unicamp.br
‡IMECC-UNICAMP, Campinas, SP, Brasil, e-mail paulatakatsuka@gmail.com

for every $n \in \mathbb{N}$. Then for each $0 < \alpha < \infty$, there is a sequence $\{c_n(\alpha)\}_{n=1}^{\infty}$ of positive constants such that, given a function $f \in \mathcal{H}(U)$ that omits the values 0 and 1, and satisfies $|f(0)| \leq \alpha$, then:

$$|f(x)| < c_n(\alpha) \text{ for all } x \in U_n \text{ and } n \in \mathbb{N}.$$

Corollary 2.1. *Let U be an x_0-starlike open subset of a Banach space and let:*

$$U_n := \{x \in U : \|x - x_0\| < n \quad \text{and} \quad d_U(x) > 1/n\}$$

for every $n \in \mathbb{N}$. Then for each $0 < \alpha < \infty$, there is a sequence $\{c_n(\alpha)\}_{n=1}^{\infty}$ of positive constants such that, given a function $f \in \mathcal{H}(U)$ that omits the values 0 and 1, and satisfies $|f(x_0)| \leq \alpha$, then:

$$|f(x)| < c_n(\alpha) \text{ for all } x \in U_n \text{ and } n \in \mathbb{N}.$$

A set $A \subset U$ is said to be *U-bounded* if A is bounded in E and there exists $\varepsilon > 0$ such that $A + B(0, \varepsilon) \subset U$. Each U_n is U-bounded and each U-bounded set is contained in some U_n. $\mathcal{H}_b(U)$ denotes the space of all $f \in \mathcal{H}(U)$ which are bounded on all U-bounded sets. We endow $\mathcal{H}_b(U)$ with the topology of uniform convergence on all U-bounded sets. Then we easily get the following corollary:

Corollary 2.2. *Let U be an x_0-starlike open subset of a Banach space and let $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(U)$ be a family of functions that omit two distinct values. If the family $\mathcal{F}$ is bounded at the point $x_0 \in U$, then $\mathcal{F}$ is a bounded subset of $\mathcal{H}_b(U)$.*

3 A Schottky-type theorem in arbitrary domains

Theorem 3.1. *Let U be a connected open subset of a Banach space and let $x_0 \in U$. Let $0 < \alpha < \infty$. Then for each $a \in U$ and $0 < r < d_U(a)$, there is a constant $c(a, r, \alpha) > 0$ such that, given a function $f \in \mathcal{H}(U)$ that omits the values 0 and 1, and satisfies $|f(x_0)| \leq \alpha$, then:*

$$|f(x)| \leq c(a, r, \alpha) \text{ for all } x \in B(a, r).$$

Following [2] we denote by $\mathcal{H}_d(U)$ the space of all $f \in \mathcal{H}(U)$ which are bounded on all balls $B(a, r)$, with $a \in U$ and $0 < r < d_U(a)$. We endow $\mathcal{H}_d(U)$ with the topology of uniform convergence on all such balls. Clearly $\mathcal{H}_b(U) \subset \mathcal{H}_d(U) \subset \mathcal{H}(U)$, and Dineen and Venkova [2] have given examples where $\mathcal{H}_b(U) = \mathcal{H}_d(U)$ and where $\mathcal{H}_b(U) \neq \mathcal{H}_d(U)$. We then get the following corollary:

Corollary 3.1. *Let U be a connected open subset of a Banach space and let $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(U)$ be a family of functions that omit two distinct values. If the family $\mathcal{F}$ is bounded at some point $x_0 \in U$, then $\mathcal{F}$ is a bounded subset of $\mathcal{H}_d(U)$.*

References

[1] Dineen, S., *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Springer-Verlag, 1999.

[2] Dineen, S. and Venkova, M., *Extending bounded type holomorphic mappings on a Banach space*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **297**, 645–658 (2004).

[3] Mujica, J. and Takatsuka, P., *A Schottky-type theorem for starlike domains in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **135**, no.4, 1141–1144, (2007).

[4] Mujica, J., *Complex Analysis in Banach Spaces*, North-Holland Mathematics Studies **120**, Amsterdam, 1986.

[5] Takatsuka, P., *Normal families of holomorphic functions on infinite dimensional spaces*, Port. Math. (NS), **63**, no. 3, 351–362, (2006).

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edição N$^{\underline{0}}$ 1 Novembro 2007

FUNÇÕES HOLOMORFAS FRACAMENTE CONTÍNUAS EM ESPAÇOS DE BANACH SEPARÁVEIS COM A PROPRIEDADE DE APROXIMAÇÃO LIMITADA *

J. MUJICA † & D. M. VIEIRA ‡

Resumo

Neste trabalho provamos, entre outros resultados, que todo domínio pseudoconvexo U em um espaço de Banach separável com a propriedade de aproximação métrica é o domínio de existência de uma função holomorfa em U fracamente uniformemente contínua em cada bola estritamente contida em U. Com isso generalizamos resultados apresentados em [6].

Em 1911 Levi [4] propôs a questão de quando todo domínio pseudoconvexo em $\mathbb{C}^n$ seria o domínio de existência de uma função holomorfa. Em 1942 Oka [9] resolveu este problema para $n = 2$, e somente em 1953-1954 Oka [10], Bremermann [1] e Norguet [7] resolveram o problema para n arbitrário.

Desde sua solução, novas versões do Problema de Levi foram naturalmente aparecendo. Em 1972 Gruman e Kiselman [2] resolveram o Problema de Levi no caso de espaços Banach com uma base de Schauder, e logo depois Noverraz [8] estendeu tal resultado para o caso de espaços de Banach separáveis com a propriedade de aproximação limitada.

A chave para passar de espaços de Banach com base de Schauder para espaços de Banach com a PAL (Propriedade de Aproximação Limitada) é o seguinte teorema, devido a Pelczynsky [11] e de maneira independente por Johnson, Rosenthal e Zippin [3].

Teorema 1. *Seja E um espaço de Banach separável com a PAL. Então E é topologicamente isomorfo a um subespaço complementado de um espaço de Banach com uma base de Schauder monótona.*

Voltando ao Problema de Levi, estivemos interessados em determinar quando cada domínio pseudoconvexo em espaços de Banach com base de Schauder seria o domínio de existência de uma função holomorfa com certas propriedades de continuidade fraca. Em [6] apresentamos o seguinte resultado.

Teorema 2. *Seja E um espaço de Banach com uma base de Schauder monótona, e seja U um aberto pseudoconvexo de E. Então U é o domínio de existência de uma função $f \in \mathcal{H}_{wud}(U)$,*

onde $\mathcal{H}_{wud}(U)$ denota a álgebra de todas as funções holomorfas $f \in \mathcal{H}(U)$ que são fracamente uniformemente contínuas em cada bola $B(x; r)$, com $x \in U$ e $0 < r < d_U(x)$.

Em seguida obtivemos uma pequena porém interessante melhora do Teorema 2, generalizando-o para espaços de Banach com base de Schauder assintoticamente monótonas. Com efeito, se E é um espaço de Banach com uma base de Schauder $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, dizemos que a base é *monótona* se a sequência das normas das projeções canônicas $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ satisfaz $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| \leq 1$. Já uma base é chamada *assintoticamente monótona* quando $\limsup_{n\to\infty} \|T_n\| \leq 1$.

É claro que toda base monótona é assintoticamente monótona. No entanto, se por um lado as bases monótonas são um tanto especiais, as bases assintoticamente monótonas podem ser encontradas em qualquer espaço de Banach. De fato, uma análise da prova de [Teorema 1.a.5, 5] implica no seguinte e interessante resultado.

*Pesquisa parcialmente financiada por FAPESP Projeto 06/02378-7

Mathematics Subject Classification: 46G20, 32E30, 32E40

†IMECC-UNICAMP, mujica@ime.unicamp.br
‡IMECC-UNICAMP, danim@ime.unicamp.br

Teorema 3. *Todo espaço de Banach de dimensão infinita contém um subespaço fechado, também de dimensão infinita, com uma base de Schauder assintoticamente monótona.*

A partir de então iniciamos a tentativa de generalizar o Teorema 2 para espaços de Banach com a PAL, usando o Teorema 1. No entanto esta tentativa mostrou-se frustada. De fato, ao se trabalhar com funções holomorfas w-contínuas em *bolas*, é necessário tomar um maior cuidado com a norma da projeção fornecida pelo Teorema 1. Na tentativa de obter uma melhor estimativa para a projeção, obtivemos o resultado seguinte, que é uma melhora quantitativa do Teorema 1. Este resultado também está sendo apresentado neste Encontro.

Teorema 4. *Todo espaço de Banach separável com a propriedade de aproximação métrica é isometricamente isomorfo a um subespaço* 1*-complementado de um espaço de Banach com uma base de Schauder assintoticamente monótona.*

Em linhas gerais, a propriedade de aproximação métrica (PAM) é um refinamento da propriedade da aproximação limitada. De fato, todo espaço de Banach com a PAM tem a PAL. De posse deste teorema, foi possível então generalizar o Teorema 2 para o caso de espaços de Banach separáveis com a PAM, que enunciamos a seguir.

Teorema 5. *Seja E um espaço de Banach separável com a propriedade de aproximação métrica, e seja U um aberto pseudoconvexo de E. Então U é o domínio de existência de uma função $f \in \mathcal{H}_{wud}(U)$.*

Outros resultados de [6] também puderam ser generalizados para o caso de espaços de Banach separáveis com a PAM.

Referências

[1] H. BREMERMANN - *Über die Äquivalenz der pseudokonvexen Gebiete und der Holomorphiegebiete im Raum von n komplexen Veränderlichen*, Math. Ann. 128 (1954), 63-91.

[2] L. GRUMAN E C. KISELMAN - *Le problème de Levi dans les espaces de Banach à base*, C. R. Acad. Sci. Paris 274 (1972), 1296-1299.

[3] W. B. JOHNSON, H. P. ROSENTHAL E M. ZIPPIN - *On bases, finite dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces*, Israel J. Math. 9 (1971), 488-506.

[4] E. LEVI - *Sulle ipersuperfici dello spazio a 4 dimensioni che possono essere frotiera del campo di esistenza di una funzioni analitica di due variabili complesse*, Ann. Mat. Pura Appl. (3) 18 (1911), 69-79.

[5] J. LINDENSTRAUSS E L. TZAFRIRI - *Classical Banach Spaces I*, Springer, Berlin, 1977.

[6] J. MUJICA E D. M. VIEIRA - *Weakly continuous holomorphic functions on pseudoconvex domains in banach spaces.* Atas do 64^o Seminário Brasileiro de Análise, São Paulo, SP, Novembro 2006.

[7] F. NORGUET - *Sur les domaines d'holomorphie des functions uniformes de plusieurs variables complexes*, Bull. Soc. Math. France 82 (1954), 137-159.

[8] P. NOVERRAZ - *Pseudo-Convexité, Convexité Polynomiale et Domaines d'Holomorphie en Dimension Infinie*, North-Holland Mathematics Studies 3, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[9] K. OKA - *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, VI. Domaines pseudoconvexes*, Tohoku Math. J. 49 (1942), 15-52.

[10] K. OKA - *Sur les fonctions de plusieurs variables, IX. Domaines finis sans point critique intérieur*, Japan. J. Math. 27 (1953), 97-155.

[11] A. PELCZYNSKI - *Any separable Banach space with the bounded approximation property is a complemented subspace of a Banach space with a basis*, Studia Math. 40 (1971), 239-243.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edition N$^{\underline{0}}$ 1 November 2007

The bounded approximation property and Schauder bases in Banach spaces *†

JORGE MUJICA ‡ & DANIELA M. VIEIRA §

Abstract

A Banach space E is said to have the λ-*bounded approximation property* if for each compact set $K \subset E$ and each $\epsilon > 0$, there is a finite rank operator $T \in L(E;E)$ such that $\|T\| \leq \lambda$ and $\|Tx - x\| \leq \epsilon$ for every $x \in K$. E is said to have the *bounded approximation property* if E has the λ-bounded approximation property for some $\lambda \geq 1$. E is said to have the *metric approximation property* if E has the 1-bounded approximation property.

A sequence $(e_n) \subset E$ is said to be a *Schauder basis* if every $x \in E$ can be uniquely written as a convergent series $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$, with $(\xi_n) \subset \mathbb{K}$, the scalar field. Let $(T_n) \subset L(E;E)$ denote the sequence of canonical projections, that is $T_n x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$ for every $x = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j \in E$. Let c denote the *basis constant*, and let c_a denote the *asymptotic basis constant*, that is

$$c = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| \quad \text{and} \quad c_a = \limsup_{n\to\infty} \|T_n\|.$$

A Schauder basis is said to be *monotone* if $c = 1$, and is said to be *asymptotically monotone* if $c_a = 1$. Clearly every monotone basis is asymptotically monotone, but while monotone bases are rather special, asymptotically monotone bases can be found everywhere. Indeed an examination of the proof of a classical result of Mazur (see [2], Theorem 1.a.5) shows the following theorem.

Theorem 1. *Every infinite dimensional Banach space contains a closed, infinite dimensional subspace with an asymptotically monotone Schauder basis.*

Our main result is the following theorem.

Theorem 2. *Let E be a separable Banach space with the λ-bounded approximation property. Then for each $\epsilon > 0$ there is a Banach space F with a Schauder basis such that E is isometrically isomorphic to a 1-complemented subspace of F and, moreover, the sequence (T_n) of canonical projections in F has the properties*

$$c = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| \leq \lambda + \epsilon \quad \textit{and} \quad c_a = \limsup_{n\to\infty} \|T_n\| \leq \lambda.$$

Corollary 1. *Every separable Banach space with the metric approximation property is isometrically isomorphic to a 1-complemented subspace of a Banach space with an asymptotically monotone Schauder basis.*

Theorem 2 is a sharp quantitative version of a classical result obtained independently by Pelczynski [5] and by Johnson, Rosenthal and Zippin [1]. The proof of Johnson, Rosenthal and Zippin gives the estimate $c \leq 16\lambda$, whereas

*Research partially supported by FAPESP, Brazil, Project 06/02378-7.
†*Mathematics Subject Classifications:* 46B15, 46B28.
Key words: Banach space, bounded approximation property, Schauder basis
‡IMECC, UNICAMP, Caixa Postal 6065, 13083-970, Campinas, SP, Brazil, mujica@ime.unicamp.br
§IMECC, UNICAMP, Caixa Postal 6065, 13083-970, Campinas, SP, Brazil, danim@ime,unicamp.br

the proof of Pelczynski, which is reproduced also in the book of Lindenstrauss and Tzafriri (see [2], Theorem 1.e.13), gives the estimate $c \leq 5\lambda$. Our proof is a refinement of the proof of Pelczynski.

A detailed proof of Theorem 2 can be found in [4]. Theorem 2 is also used in [4] to extend some recent results for holomorphic functions on Banach spaces with a Schauder basis (see [3]) to the realm of separable Banach spaces with the bounded approximation property.

References

[1] W. Johnson, H. Rosenthal, M. Zippin, *On bases, finite dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces,* Israel J. Math. 9 (1971), 488-506.

[2] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I,* Springer, Berlin, 1977.

[3] J. Mujica, D. M. Vieira, *Weakly continuous holomorphic functions on pseudoconvex domains in Banach spaces,* preprint.

[4] J. Mujica, D. M. Vieira, *Schauder bases and the bounded approximation property in separable Banach spaces*, preprint.

[5] A. Pelczynski, *Any separable Banach space with the bounded approximation property is a complemented subspace of a Banach space with a basis,* Studia Math. 40 (1971), 239-243.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edition N$^{\underline{0}}$ 1 November 2007

DUALITY RELATION BETWEEN $\tau(p;q)$-SUMMING AND $\sigma(p)$-NUCLEAR MAPPINGS *

XIMENA MUJICA †

Abstract

In this work we extend the concepts of τ-summing and σ-nuclear operators presented by Pietsch in his book Operator Ideals, to polynomials and holomorphic mappings as well as duality relation theorems between $\tau(p)$-summing and $\sigma(p)$-nuclear polynomials and holomorphic mappings.

This article is based on part of my PhD thesis at UNICAMP, supervised by professor M. Matos.

In [3] we extended to n-linear mappings the concepts of τ-summing and σ-nuclear operators and obtained a duality relation between them. Now we extend those concepts to polynomials, in the most natural way, obtaining the following theorem:

Theorem 0.1. *If E, F are Banach spaces, E' has the λ-bounded approximation property, F is reflexive and $p \geq 1$, then the spaces*

$$\mathcal{P}_{\tau(p)}(^nE'; F') \quad and \quad [\mathcal{P}_{\sigma(p)}(^nE; F)]'$$

are isometrically isomorphic.

This theorem's proof is analogous to the n-linear case, and we ask ourselves if it can be extended to a non reflexive space F. Next we extend those concepts to holomorphic mappings as follows:

Definition 0.1. *Let E, F be complex Banach spaces, and an entire function $f \in \mathcal{H}(E;F)$, with Taylor series at $\xi \in E$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\hat{d}^n f(\xi)(x-\xi)$. We say that f is $\sigma(p)$-nuclear holomorphic mapping of bounded type from E to F if*

(i) $\frac{1}{n!}\hat{d}^n f(0) \in \mathcal{P}_{\sigma(p)}(^nE; F)$ *for every* $n = 0, 1, 2, \ldots$;

(ii) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n!}\|\hat{d}^n f(0)\|_{\sigma(p)}\right)^{1/n} = 0$.

We write $f \in \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E;F)$.

Definition 0.2. *Given an entire function $f \in \mathcal{H}(E;F)$, we say it is a $\tau(p)$-summing holomorphic mapping of exponential type, if:*

(i) $\hat{d}^n f(0) \in \mathcal{P}_{\tau(p;q)}(^nE; F)$ *for all* $n = 0, 1, 2, \ldots$;

(ii) *there are constants $C \geq 0$ and $\rho > 0$ such that*

$$\|\hat{d}^n f(0)\|_{\tau(p;q)} \leq C\rho^n, \ \textit{for all } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

---

* *Mathematics Subject Classifications:* Primary: 47B10, Secondary: 47L20.

Key words: duality, summing, nuclear, holomorphic mappings.

† Departamento de Matemática, Universidade Federal do Paraná, 81531-990 Curitiba, PR, Brasil, xmujica@gmail.com.

We shall denote this mappings' set by $\mathcal{E}xp_{\tau(p;q)}(E;F)$

By defining a *convolution operator* on $\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)$, definig the *Borel transform* $\hat{\varphi}$ of a functional $\varphi \in [\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)]'$, and following similar proofs to those Gupta used in [1], we can prove that

Theorem 0.2. *Let E be a Banach space, E' with the λ-bounded approximation property. For every $\varphi \in [\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)]'$, $\hat{\varphi}$ is a $\tau(p)$-summing holomorphic mapping of exponential type in E', and the mapping*

$$\begin{array}{cccc} \beta: & [\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)]' & \rightarrow & \mathcal{E}xp_{\tau(p)}(E') \\ & \varphi & \mapsto & \hat{\varphi} \end{array}$$

establishes an isomorphism of algebras .

References

[1] GUPTA, C. P., *Convolution Operators and Holomorphic Mappings on a Banach Space* , Département de Mathématiques, Université de Sherbrooke, 1969.

[2] MUJICA, X., *Aplicações $\tau(p;q)$-somantes e $\sigma(p)$-nucleares*, Tese de Doutorado, UNICAMP, 2006 (web: http://libdigi.unicamp.br/document/?code=vtls000378266).

[3] MUJICA, X., *Duality between $\tau(p)$-Summing and $\sigma(p)$-nuclear mappings* in Atas do 60^o Seminário Brasileiro de Análise, vol. 2, UERJ, 2004.

[4] PIETSCH, A., *Operator Ideals*, North Holland, Amsterdam, 1980.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edition N$^{\underline{o}}$ 1 November 2007

On a Timoshenko system in a moving boundary domain

V. NARCISO *

Abstract

In this article we prove the existence and uniqueness of the local solution for the Timoshenko system with two dissipations distributed in the whole domain. The system is given by:

$$\left| \begin{array}{l} \rho_1 u_{tt} - k(u_x - \psi)_x + u_t = 0 \\ \rho_2 \psi_{tt} - \omega \psi_{xx} + k(u_x - \psi) + \psi_t = 0 \end{array} \right. \quad \text{in } \ Q_t \tag{0.1}$$

in a increasing noncylindrical domains $Q_t \subset \mathbb{R}^2$.

We impose the following initial and boundary conditions

$$\left| \begin{array}{l} u(x,0) = u_0(x), \ u_t(x,0) = u_1(x) \\ \psi(x,0) = \psi_0(x), \ \psi_t(x,0) = \psi_1(x) \end{array} \right. \quad \text{in } \ \Omega_0 =]\alpha(0), \beta(0)[\tag{0.2}$$

$$u = \psi = 0 \ \text{ em } \ \Sigma_t. \tag{0.3}$$

The functions $\alpha, \beta : [0,T] \to \mathbb{R}$ are twice continously differentiable with $\alpha(t) < \beta(t), \ \forall t \in [0,T]$. The noncylindrical domain $Q_t \subset \mathbb{R}^2$ and lateral boundary Σ_t are given by

$$Q_t = \bigcup_{0 \leq t < T}]\alpha(t), \beta(t)[\times \{t\} \ \text{ and } \ \Sigma_t = \bigcup_{0 < t < T} \{\alpha(t), \beta(t)\} \times \{t\}.$$

The noncylindrical domain Q_t means that the beam at rest is model by the interval $[\alpha(0), \beta(0)]$ and its ends change in time according the functions α and β, due to instance by temperature variation.

The idea of proof is to transform the noncylindrical problem into another problem in a cylindrical domain by using a suitable change of variable

$$y = \frac{x - \alpha}{\gamma}$$

with $\gamma = \beta - \alpha$. Using the Faedo-Galerkin method and compactness arguments we obtain results of the existence and uniqueness of the local solution.

References

[1] Bisognin, E., *Pertubation of Kirchhoff-Carrier's operator by Lipschitz functions*, Proceedings of XXXI Bras. Sem. of Analysis, Rio de Janeiro, 1992.

[2] D'ancona, P. & Spagnolo, S., *Nonlinear pertubation of the Kirchhoff-Carrier equation*, Univ.Pisa Lectures Notes, 1992.

[3] Frota, C. L., Cousin, A. T. & Larkin, N. A., *Existence of solutions and decay for the Carrier equation with dissipative term*, Differential and Integral Equation, Vol.12(1999), No. 04, pp. 453-489.

[4] Hosoya, M. & Yamada, Y., *On some nonlinear wave equations II - global existence and energy decay of solutions*, J. of the Fac. of Sci. (Tokio University), Vol. 38, N$^{\underline{o}}$ 2, (1991), pp. 239-250.

*Instituição: ICMC - USP, SP, Brasil, vnarciso@icmc.usp.br

[5] Larkin, N. A., *Global regular solutions for the nonhomogeneous Carrier Equation*, Mathematical Problems in Eingineering, Vol. 8, 2002(2002), pp. 15-31.

[6] Medeiros, L. A., *Nonlinear wave equations in domains with variable boundary*, Arch. Rotional Mech. Anal., 47 (1972), pp. 47-58.

[7] Medeiros, L. A., Ferrel, J. L. and Menezes, S. B., *Vibrations of elastict strings: Mathematical Aspects, Part Two*, Journal of Computational Analysis and Applications, Vol. 4, No. 3, July 2002 pp. 211 - 263.

[8] Pohozhaev, S. L., On a Class of quasilinear hyperbolic equations, Mat. Sbornic 96 (138)(1)(1975), 152-166 (Mat. Sbornic 25(1)(1975), 145-158, english translation).

[9] Rabelo, T., *Decay of solutions of a nonlinear hyperbolic system in noncylindrical domains*, Internat. J. Math. and Math. Sci., Vol. 17, Nº 4 (1994), pp. 561-570.

[10] Timoshenko, S., Young, D. and Weaver, W., *Vibration problems in engineering,* John Wiley, N. Y., (1974).

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edição N$^{\underline{0}}$ 1 Novembro 2007

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA NÃO-LOCAL COM CONDIÇÃO DE FRONTEIRA DE NEUMANN

R. G. NASCIMENTO *

Resumo

Neste trabalho, mostraremos um resultado de existência de solução fraca para a seguinte classe de problemas não-locais

$$\begin{cases} -\left[M\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)\right]^{p-1} \Delta_p u = f(u) + \rho(x) \ \text{ em } \ \Omega, \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \ \text{ em } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 1)$ é um domínio limitado e regular, $1 < p < N$, η denota a normal exterior em $\partial\Omega$, Δ_p é o operador p-Laplaciano dado por $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas satisfazendo as seguintes hipóteses:

(C_1) f é k-periódica com $\displaystyle\int_0^k f(s)ds = 0$.

(M) Existe $m_0 > 0$ tal que $M(t) \geq m_0$, para todo $t \geq 0$,

e $\rho \in L^q(\Omega)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, verificando

(C_2) $\displaystyle\int_\Omega \rho = 0$.

Este artigo foi motivado em um estudo feito em [7], onde foi dado um princípio de mínimo, cuja grande utilidade é a situação onde o funcional associado ao problema não é coercivo. Como aplicação, o autor mostrou a existência de solução para o problema

$$-\Delta u = f(u) + \rho \text{ em } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Neste trabalho completamos os estudos feitos em [7] nos seguintes aspectos: estamos estudando um problema não-local e portanto alguns argumentos não puderam ser repetidos, como por exemplo, a convergência da seqüência minimizante. Por outro lado, pelo fato de estarmos trabalhando com o operador p-Laplaciano algumas estimativas foram necessárias e que não aparecem em [7].

Problemas não-locais tem sido estudado por diversos autores entre eles podemos citar [1],[3],[4],[10], [11] e suas referências onde técnicas diferentes foram usadas. Do ponto de vista variacional, essa classe de problemas foi estudado por [2], [5] e [6]. Em todos esses trabalhos, a condição de fronteira é de Dirichlet, enquanto estamos considerando a condição de fronteira de Neumann. Portanto, o nosso resultado é novo mesmo para $p = 2$.

O problema (0.1) é uma generalização da equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M(\|u\|^p)\Delta u = f(u) \text{ em } \Omega$$

o qual teve seu estudo motivado em uma generalização do modelo clássico de Kirchoff que apareceu pela primeira vez em [9].

*Universidade Federal do Pará, Campus de Abaetetuba, Pa, Brasil, rubia@ufpa.br

No presente trabalho consideraremos $W^{1,p}(\Omega)$ e $L^p(\Omega)$ espaços de Banach com normas dadas, respectivamente, por

$$\|u\|_{1,p} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p + \int_\Omega |u|^p\right)^{1/p} \ \text{ e } \ |u|_p = \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{1/p}.$$

Observemos que o espaço de Banach $X = W^{1,p}(\Omega)$ pode ser decomposto da seguinte maneira: $X = X_0 \oplus X_1$, onde $X_1 =< 1 >$ é o espaço das funções constantes, o qual pode ser identificado com $\mathbb{R}$ e $X_0 = \{v \in X; \int_\Omega v = 0\}$ que é denominado espaço das funções em X com média zero. Demonstraremos que a desigualdade de Poincaré é válida para as funções de X_0, isto é, temos o seguinte lema:

Lema 0.1. *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_\Omega |v|^p \leq C \int_\Omega |\nabla v|^p, \ \textit{para todo } v \in X_0.$$

Usaremos técnicas variacionais para demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 0.1. *Suponhamos que as hipóteses (C_1),(C_2) e (M) sejam válidas, onde $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e $\rho \in L^q(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então o problema (0.1) possui uma solução fraca $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$.*

Por uma solução fraca do problema (0.1) entendemos uma função $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$M\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right) \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v = \int_\Omega f(u)v + \int_\Omega \rho v, \ \text{para todo } v \in W^{1,p}(\Omega).$$

Associado ao problema (0.1) temos o funcional energia $\Phi : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi(u) = \frac{1}{p}\widehat{M}\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right) - \int_\Omega F(u) - \int_\Omega \rho u, \ \text{para todo } u \in W^{1,p}(\Omega)$$

em que

$$\widehat{M}(t) = \int_\Omega [M(s)]^{p-1} ds \ \text{ e } \ F(t) = \int_0^t f(s)ds.$$

Referências

[1] C.O. Alves e F.J.S.A. Corrêa, *On existence of solutions for a class of problem involving a nonlinear operator*, Comm. Appl. Nonlinear Anal., Vol. 8 (2)(2001)43-56.

[2] C.O. Alves, F.J.S.A. Corrêa e T.F Ma, *Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type*, Comput. Math. Appl., 49(2005)85-93.

[3] M. Chipot e B. Lovat, *Some remarks on nonlocal elliptic and parabolic problems*, Nonlinear Anal., Vol. 30(1997)4619-4627.

[4] M. Chipot e J.F. Rodrigues, *On a class of nonlocal nonlinear problems*, RAIRO Modélisation Math. Anal. Numér., Vol. 26(1992)447-467.

[5] F.J.S.A. Corrêa e G. M. Figueiredo, *On the existence of positive solution for an elliptic equation of Kirchhoff type via Moser iteration Method*, Bound. Value Probl.;v. 2006, n. 00, p. ID 79679-10, 2006.

[6] F.J.S.A. Corrêa e G. M. Figueiredo, *On an elliptic equation of p-Kirchhoff-type via variational methods*, Bull. Austral. Math. Soc., Vol. 74 (2006)263-277

[7] D.G. Costa, *VIII Escola Latino-Americana de Maemática,*IMPA, Rio de Janeiro,1986.

[8] I. Ekeland, *On the variational principle,*J. Math. Anal.Appl.,47 (1974)324-353.

[9] G. Kirchhoff, *Mechanik, Teubner, Leipzig,* 1883.

[10] T. F. Ma, *Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type*, Nonlinear Anal., Vol. 63 (2005)1967-1977.

[11] T. F. Ma e J. E. Muñoz Rivera *Positive solutions for a nonlinear nonlocal elliptic transmission problem*, Appl. Math. Lett., 16 (2)(2003)243-248.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edition N$^{\underline{o}}$ 1 November 2007

EIGENFREQUENCIES AND EIGENMODES OF THE ELLIPTIC MEMBRANE AS INTERSECTION POINTS BETWEEN CURVES IN THE PLANE OF PARAMETERS: NUMERICAL RESULTS AND CLASSIFICATION OF EIGENMODES *

ARMANDO G. M. NEVES †

Abstract

Mathieu [6] came up to the equations

$$G''(\eta) + (a - 2q\cos(2\eta))G(\eta) = 0 \tag{0.1}$$

and

$$F''(\xi) - (a - 2q\cosh(2\xi))F(\xi) = 0 \ , \tag{0.2}$$

bearing his name in 1868 when applying the separation of variables method to the study of vibrations of an elliptic membrane. In the above equations, a is the constant appearing in the separation on variables and q is a parameter related to the frequency of the eigenmode.

The problem of calculating eigenfrequencies and eigenmodes of an elliptic membrane is important in some applications [10, 8, 1]. As a consequence, it has been considered by many authors [5, 3, 2, 4, 9] with very different approaches such as WKB approximation, optimization, truncated series, multigrid and Galerkin methods. Although there is in general good agreement among results, some methods fail in detecting particular modes.

In this meeting, F. A. Lemos will present a work in collaboration with myself in which existence of eigenmodes and calculation of eigenfrequencies for the elliptic membrane is reduced to proving existence of intersections between curves in the plane of parameters a and q. In the present work we will show that this approach leads naturally to an efficient numerical method for calculating the eigenfrequencies of the elliptic membrane. In order to obtain good numerical results we need some method for calculating Mathieu characteristic numbers, e.g. the one in [7], and some traditional method for integrating ODEs, e.g. Runge-Kutta. It turns out that numerical accuracy in both methods can be easily improved, resulting in improved accuracy in the eigenfrequencies.

As another consequence of thinking of eigenmodes as intersection points of curves, we will see that classification of modes as whispering gallery, bouncing ball or focusing types [2, 9] will follow in a natural way from the position of the intersection point in the plane. Whispering gallery modes are the ones in which the intersection point lies in the region in which the Mathieu characteristic numbers a_n and b_n are almost coincident. Bouncing ball modes are the ones in which the intersection point lies in the region where a_n is almost coincident with b_{n+1}. Finally, focusing modes occur in the transition between the regions of whispering gallery and bouncing ball modes. We will also qualitatively see how location of these modes in the plane depends on the eccentricity of the ellipse.

* *Mathematics Subject Classifications:* 34B30, 34B60
Key words: Eigenvalues of the laplacian, Mathieu equation, Elliptic membrane
†UFMG, Depto. de Matemática, MG, Brasil, aneves@mat.ufmg.br

References

[1] M. Aunola, *The discretized harmonic oscillator: Mathieu functions and a new class of generalized Hermite polynomials*, J. Math. Phys. **44** (2003), 1913.

[2] G. Chen, P. J. Morris, J. Zhou, *Visualization of special eigenmode shapes of a vibrating elliptical membrane*, SIAM Review **36** (1994), 453.

[3] R. Hettich, E. Haaren, M. Ries, G. Still, *Accurate numerical approximations of eigenfrequencies and eigenfunctions of elliptical membranes*, Z. Angew. Math. Mech. **67** (1987), 589.

[4] V. Heuveline, *On the computation of a Very Large Number of Eigenvalues for Selfadjoint Elliptic Operators by Means of Multigrid Methods*, J. Comp. Phys. **184**, (2003), 321.

[5] J. B. Keller, S. I. Rubinow, *Asymptotic Solution of Eigenvalue Problems*, Ann. Phys. **9** (1960), 24.

[6] E. Mathieu, *Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique*, Jounal de Liouville **13** (1868), 137.

[7] A. G. M. Neves, *Upper and Lower Bounds on Mathieu Characteristic Numbers of Integer Orders*, Communications on Pure and Applied Analysis **3**(3) (2004), 447.

[8] M. Schneider, J. Marquardt, *Fast computation of modified Mathieu functions applied to elliptical waveguide problems*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech. **47** (1999), 513.

[9] H. B. Wilson, R. W. Scharstein, *Computing elliptic membrane high frequencies by Mathieu and Galerkin methods*, J. Eng. Math. **57** (2007), 41.

[10] S. Zhang, Y. Shen, *Eigenmode sequence for an elliptical waveguide with arbitrary ellipticity*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech. **43** (1995), 227.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edition N$\underline{o}$ 1 November 2007

Solitary waves for a class of quasilinear Schrödinger equations with concave and convex terms *

João Marcos do Ó † & Uberlandio Severo ‡

Abstract

In this work we are concerned with *quasilinear Schrödinger equations* of the form

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\Delta\psi + W(x)\psi - \eta(|\psi|^2)\psi - \kappa\left[\Delta\rho(|\psi|^2)\right]\rho'(|\psi|^2)\psi, \tag{0.1}$$

where $\psi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, κ is a real constant, $W : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ is a given potential and $\rho,\ \eta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ are suitable functions. Quasilinear equations of form (**??**) appear naturally in mathematical physics and have been derived as models of several physical phenomena corresponding to various types of nonlinear term ρ. Here we consider the case where $\rho(s) = s$, which was used for the superfluid film equation in plasma physics by Kurihara in [**?**]. Considering $\kappa > 0$, our special interest is in the existence of *solitary wave solutions*, that is, solutions of type

$$\psi(t,x) = \exp(-iEt)u(x),$$

where $E \in \mathbb{R}$ and $u > 0$ is a real function. It is well known that ψ satisfies (**??**) if and only if the function $u(x)$ solves the following equation of elliptic type with the formal variational structure

$$-\Delta u + V(x)u - \kappa\left[\Delta\left(u^2\right)\right]u = \eta(u), \quad u > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{0.2}$$

where $V(x) := W(x) - E$ is the new potential, η is the new nonlinearity and without loss of generality we assume $\kappa = 1$.

We were motivated by several recent mathematical studies on the existence of solutions for (**??**). Among others we refer to [**?**], [**?**] and [**?**]. The approach proposed here is in the spirit of [**?**] and based on a global variational point of view. Using a variational framework based in a suitable Orlicz space, we find sufficient conditions for existence of positive solutions for quasilinear equations of the form

$$-\Delta u + V(x)u - \left[\Delta(u^2)\right]u = \lambda|u|^{q-2}u + |u|^{r-2}u, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N), \tag{P_λ}$$

where $\lambda \geq 0$, $N \geq 3$ and the potential V is continuous, uniformly positive and satisfies an appropriate integrability assumption.

Semilinear elliptic problems in bounded domains involving concave and convex terms have been studied extensively in the last years and little has been done for this type of problems in $\mathbb{R}^N$. We do not know of any results for quasilinear Schrödinger equations like (**??**) involving a combination of concave and convex terms.

In order to deal with the concave term and to obtain a compact embedding result, we make the following assumptions on the potential V:
(V_1) The function $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ is continuous and uniformly positive, that is, $\inf_{x\in\mathbb{R}^N} V(x) > 0$;

* *Mathematics Subject Classifications:* 35J20, 35J60, 35Q55
Key words: Schrödinger equations; solitary wave solutions, variational methods, mountain–pass theorem, Orlicz spaces.
† Departamento de Matemática–UFPB, 58059-900, João Pessoa–PB Brazil, e-mail:jmbo@mat.ufpb.br
‡ Departamento de Matemática–UFPB, 58059-900, João Pessoa–PB Brazil, e-mail:uberlandio@mat.ufpb.br

(V_2) The function V^{-1} belongs to $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Here, $H^1(\mathbb{R}^N)$ denotes the Sobolev space modeled in $L^2(\mathbb{R}^N)$ with its usual norm

$$\|u\|_{1,2} := \left(\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2\right)^{1/2}$$

and $2^* := 2N/(N-2)$ is the critical exponent of Sobolev. The following theorem contains our main result:

Theorem 0.1. *Suppose that assumptions* $(V_1) - (V_2)$ *hold,* $1 < q < 2$ *and* $4 < r < 22^*$. *Then there exist constants* $\lambda_0, C_0 > 0$ *such that for all* $\lambda \in [0, \lambda_0]$ *problem (**??**) possesses a positive solution* $u_\lambda \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *such that* $\|u_\lambda\|_{1,2} \leq C_0$. *Moreover, for* $\lambda = 0$ *the solution* u_0 *is of least energy and there exist constants* $M,\ \xi > 0$ *such that*

$$u_0(x) \leq Me^{-\xi|x|} \quad \textit{for all} \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

In this work we complement and improve the main results in [**?**] and [**?**], in the sense that we are considering a more general class of nonlinearities which also include a combination of convex and concave terms. A main difficulty in treating this class of quasilinear Schrödinger equations in $\mathbb{R}^N$ is the possible lack of compactness besides the concave term. Moreover, there is no natural functions spaces for the associated energy functional to be well defined and this is due to the super-critical growth condition on the nonlinearity. The function space used in [**?**] and the method in [**?**] cannot be applied directly to handle this class of nonlinearities. To overcome these difficulties that has arisen from these features we present a different approach based in a appropriate Orlicz space. It was crucial in our argument the fact that this function space considered in our approach can be embedded into the usual Lebesgue spaces $L^s(\mathbb{R}^N)$ for $1 \leq s \leq 2^*$ as well as into the Sobolev space $H^1(\mathbb{R}^N)$.

The underling idea for proving Theorem **??**: The formal variational functional associated to (**??**) is not well defined, for example, in usual subspaces of $H^1(\mathbb{R}^N)$. Motivated by the argument used in [**?**], we use the change of variable $v = f^{-1}(u)$, where f is defined by

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{(1+2f^2(t))^{1/2}} \qquad \text{on} \quad [0,+\infty) \\ f(-t) &= -f(t) \qquad\qquad\quad \text{on} \quad (-\infty, 0], \end{aligned}$$

to reformulate the problem obtaining the semilinear equation

$$-\Delta v = f'(v)[\lambda|f(v)|^{q-2}f(v) + |f(v)|^{r-2}f(v) - V(x)f(v)], \tag{M_λ}$$

which has an associated functional well-defined and Gateaux-differentiable in a suitable Orlicz space. This functional satisfies the geometric hypotheses of the mountain-pass theorem and the Palais-Smale compactness condition. We achieve the existence result by using a version of the mountain–pass theorem which is a consequence of the Ekeland Variational Principle. Moreover, we can see that if v_λ is a solution of (**??**) then $u_\lambda = f(v_\lambda)$ is a solution of (**??**).

References

[1] M. Colin and L. Jeanjean, *Solutions for a quasilinear Schrödinger equation: a dual approach.* Nonlinear Anal. **56**, (2004), 213–226.

[2] J. M. do Ó, O. Miyagaki and S. Soares, *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations: the critical exponential case*, Nonlinear Anal. **67**, (2007), 3357-3372.

[3] S. Kurihura, *Large-amplitude quasi-solitons in superfluids films.* J. Phys. Soc. Japan **50** (1981), 3262–3267.

[4] J. Liu, Y. Wang and Z.-Q. Wang, *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations II.* J. Differential Equations **187** (2003), 473–493.

[5] P. H. Rabinowitz, *On a class of nonlinear Schrödinger equations*, Z. Angew Math. Phys., 43 (1992), 272–291.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edition N$^{\underline{o}}$ 1 November 2007

When every multilinear mapping is multiple summing *

Geraldo Botelho † & Daniel Pellegrino ‡

Abstract

Multiple summing multilinear mappings between Banach spaces have been proved to be a very important and very useful nonlinear generalization of the ideal of absolutely summing linear operators (see [1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12]). This class was introduced, independently, by Matos [4] (under the terminology *fully summing multilinear mappings*) and Bombal, Peréz-García and Villanueva [1]. The original methods and deep results due to Peréz-García [7], which were a source of inspiration to us in this paper, have played a crucial role in the development of the theory.

A coincidence situation for multiple summing mappings is a situation in which every n-linear mapping from $E_1 \times \cdots \times E_n$ to F, where $E_1, \ldots, E_n$ and F are fixed Banach spaces over $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, is multiple $(q; p_1, \ldots, p_n)$-summing for some numbers $q, p_1, \ldots, p_n$. It happens that the condition enjoyed by multiple summing mappings is a very restrictive one, so coincidence situations are supposed to be very rare. Nevertheless, some situations like that are known and in this work we prove some more. Such multilinear concidence theorems are usually proved with the help of linear coincidence situations. In this paper we give a unified treatment to this approach, in the sense that we identify general linear conditions from which multilinear coincidences will follow. In this fashion we obtain new multilinear coincidence situations as well as generalizations and simplifications of some known ones.

For definitions and notation we refer to [3, 4, 7, 12].

Our main result establishes the conditions from which several (known and new) coincidence theorems will follow.

Theorem 1. Let $p, r \in [1, q]$ and let F be a Banach space. By $B(p, q, r, F)$ we mean the collection of all Banach spaces E such that

$$\mathcal{L}(E; F) = \Pi_{q;p}(E; F) \text{ and } \mathcal{L}(E; \ell_q(F)) = \Pi_{q;r}(E; \ell_q(F)).$$

Then, for every $n \geq 2$,

$$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F) = \Pi^n_{q;r,\ldots,r,p}(E_1, \ldots, E_n; F)$$

whenever $E_1, \ldots, E_n \in B(p, q, r, F)$.

As applications of Theorem 1, we obtain some well-known results and some new coincidence results, that we list below:

Corollary 1. If $E_1, \ldots, E_n$ are arbitrary Banach spaces and $q \geq 2$, then

$$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K}) = \Pi^n_{q;1,\ldots,1,q}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K}) \text{ and}$$

$$\pi_{q;1,\ldots,1,q}(A) \leq C_q(\ell_q)^{n-1}\|A\| \text{ for every } A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K}).$$

Corollary 2. If $E_1, \ldots, E_n$ are $\mathcal{L}_1$-spaces and $2 \leq r < q$, then

$$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K}) = \Pi^n_{q;r,\ldots,r,q}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K}).$$

* *Mathematics Subject Classifications:* 46G25, 47B10

Key words: multiple summing, Banach spaces, absolutely summing, multilinear mappings

† Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, 38.400-902 - Uberlândia, Brazil, e-mail: botelho@ufu.br. Supported by CNPq Grant 202162/2006-0

‡ Departamento de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, 58.051-900 - João Pessoa, Brazil, e-mail: dmpellegrino@gmail.com. Supported by CNPq Grants 471054/2006-2 and 308084/2006-3.

Corollary 3. If $E_1, \ldots, E_n$ are $\mathcal{L}_\infty$-spaces and $q > r, q > 2$, then

$$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K}) = \Pi^n_{q;r,\ldots,r,q}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K}).$$

Next general result also provides interesting results for multiple summing mappings in $\mathcal{L}_1$-spaces.

Theorem 2. Let $r \geq s$. If $\mathcal{L}(\ell_1; F) = \Pi_{r;s}(\ell_1; F)$, then

$$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F) = \Pi^n_{r;\,\min\{s,2\}}(E_1, \ldots, E_n; F)$$

for every $n \in \mathbb{N}$ and any $\mathcal{L}_1$-spaces $E_1, \ldots, E_n$.

Corollary 4. Let $1 \leq p \leq 2$, $r \geq p$ and let F be a Banach space. The following assertions are equivalent:

(a) $\mathcal{L}(\ell_1; F) = \Pi_{r;p}(\ell_1; F)$.

(b) $\mathcal{L}(^n\ell_1; F) = \Pi^n_{r;\,p}(^n\ell_1; F)$ for every $n \in \mathbb{N}$.

(c) $\mathcal{L}(^n\ell_1; F) = \Pi^n_{r;\,p}(^n\ell_1; F)$ for some $n \in \mathbb{N}$.

Corollary 5. Let $E_1, \ldots, E_n$ be $\mathcal{L}_1$-spaces and $1 \leq q < +\infty$. Then

$$\mathcal{L}(E_1 \ldots, E_n; \ell_q) = \Pi^n_{r;p}(E_1 \ldots, E_n; \ell_q)$$

if either

(a) $q < 2$, $r \geq q^*$ and $p = 2$, where $\frac{1}{q} + \frac{1}{q^*} = 1$, or

(b) $q > 2$, $r \geq q$ and $p = 2$, or

(c) $q = 2$ and $1 \leq p \leq r \leq 2$.

References

[1] F. Bombal, D. Peréz-García and I. Villanueva. *Multilinear extensions of Grothendieck's theorem*, Quart. J. Math. **55** (2004), 441-450.

[2] A. Defant and K. Floret. *Tensor norms and operator ideals*, North-Holland Mathematical Studies 174, North-Holland, 1993.

[3] J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge. *Absolutely summing operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[4] M. C. Matos. *Fully absolutely summing mappings and Hilbert-Schmidt opertors*, Collect. Math. **54** (2003), 111-136.

[5] M. C. Matos and D. Pellegrino. *Fully summing mappings between Banach spaces*, Studia Math. **178** (2007), 47-61.

[6] D. Pellegrino and M. Souza. *Fully summing multilinear and holomorphic mappings into Hilbert spaces*, Math. Nachr. **278** (2005), 877-887.

[7] D. Peréz-García. *Operadores multilineales absolutamente sumantes*, Thesis, Univ. Complutense de Madrid, 2003.

[8] D. Peréz-García. *The inclusion theorem for multiple summing operators*, Studia Math. **165** (2004), 275-290.

[9] D. Peréz-García and I. Villanueva. *Multiple summing operators on Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **285** (2003), 86-96.

[10] D. Peréz-García and I. Villanueva. *Multiple summing operators on $C(K)$ spaces*, Ark. Mat. **42** (2004), 153-171.

[11] A. Pietsch. *Ideals of multilinear functionals*, Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and Their Applications in Theoretical Physics, 185-199, Teubner-Texte, Leipzig, 1983.

[12] M. Souza. *Aplicações multilineares completamente absolutamente somantes*, Thesis, Univ. Estadual de Campinas, 2003.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edição N$^{\underline{o}}$ 1 Novembro 2007

RESULTADOS DE ESTABILIDADE DE LYAPUNOV DE SISTEMAS DINÂMICOS DESCONTÍNUOS

I. S. PENA [*] & G. N. SILVA [†] & L. A. F. OLIVEIRA [‡]

Resumo

Introdução É comum no processo de modelagem de vários sistemas tais como sistemas dinâmicos híbridos, sistemas de eventos discretos, sistemas com efeitos de impulso, surgirem sistemas dinâmicos que possuem deslocamentos que não são contínuos com relação ao tempo, chamados sistemas dinâmicos descontínuos (SDD). Os resultados obtidos do estudo desses sistemas eram inicialmente aplicados à sistemas de dimensão finita, mas recentemente surgiram trabalhos que apresentam resultados para sistemas dinâmicos gerais de dimensão finita e para várias classes de sistemas de dimensão infinita, como em [2] e [3].
Neste trabalho apresentamos resultados de estabilidade no sentido de Lyapunov que podem ser aplicados à várias classes de SDD, e que podem garantir a estabilidade de alguns sistemas dinâmicos contínuos para os quais os resultados clássicos não se aplicam. Em nosso trabalho, como em [3], os resultados apresentados têm um ganho significativo com o fato de serem exigidas condições menos restritivas para as usuais funções de Lyapunov, tornando-os menos conservativos e facilitando consideravelmente suas aplicações.

Usamos a quádrupla $\{\mathbb{R}^+, X, A, S\}$ para denotar um sistema dinâmico em que $\mathbb{R}^+$ denota o tempo, X denota o espaço estado, $A \subset X$ denota o espaço dos estados iniciais e S denota a família dos deslocamentos. Para todo deslocamento $y(\cdot, y_o, t_o) \in S$, tem-se $y(t_o, y_o, t_o) = y_o \in A$ e $y(t, y_o, t_o) \in X$ para todo $t \geq t_o$. O trabalho é desenvolvido para um espaço de Banach X de dimensão finita ou infinita e os resultados são estabelecidos para o ponto de equilíbrio $0 \in A \subset X$, no entanto, eles podem ser facilmente estendidos para conjuntos invariantes $M \subset A$ em que X é um espaço métrico. Para simplificar, assumimos a existência de soluções par ao sistema S.

Notação Por todo o trabalho, tomamos $\mathbb{R}^+ = [0, \infty[$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$. Sejam X e Z espaços de Banach e $||\cdot||$ a norma nesses espaços, seja A um operador definido no domínio $D(A) \subset X$ com imagem em Z, usamos $||A||$ para denotar sua norma. Para uma aplicação $f : X \to Z$, a notação $f \in C[X, Z]$ indica que f pertence ao conjunto das aplicações contínuas de X em Z. Além disso, $I : X \to X$ denota o operador identidade em X.

Definição 0.1. *Dizemos que uma função $\psi \in C[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+]$ pertence à classe K se $\psi(0) = 0$ e se ψ é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$. Se $\psi \in K$ e $\lim_{r\to\infty} \psi(r) = r$, dizemos que ψ pertence à classe $K\mathbb{R}$.*

Teorema 0.1. *Para o sistema $\{\mathbb{R}^+, X, A, S\}$ suponha que exista uma função $V : U \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ e funções ψ_1, $\psi_2 \in K$, definidas em $\mathbb{R}^+$, tais que*

$$\psi_1(||x||) \leq V(x, t) \tag{0.1}$$

para todo $(x, t) \in U \times \mathbb{R}^+$, sendo $U \subset X$ uma vizinhança da origem $0 \in X$, e

$$V(y(\tau_k, y_o, t_o), \tau_k) \leq \psi_2(||y(\tau_k, y_o, t_o)||), \quad \forall\ y_o \in U,\ k \in \mathbb{N} \tag{0.2}$$

(a) Suponha que exista uma vizinhança $W \subset U$ da origem $0 \in X$ tal que para todo deslocamento $y(\cdot, y_o, t_o)$ de S, com $y_o \in W$, $y(t, y_o, t_o) \in U$ para todo $t \geq t_o$, e $V(y(t, y_o, t_o), t)$ é contínua para todo $t \geq t_o$, exceto no conjunto de descontinuidades $E_1 = \{\tau_1, \tau_2, ...\}$, o qual é assumido ser fechado, discreto e ilimitado. Suponha ainda que

[*] Instituição Unesp, São José do Rio Preto, SP, Brasil, penamat@yahoo.com.br. Bolsista de mestrado da CAPES.
[†] Instituição Unesp, São José do Rio Preto, SP, Brasil, gsilva@ibilce.unesp.br
[‡] Instituição Unesp, Ilha Solteira, SP, Brasil, lafo@mat.feis.unesp.br

$V(y(\tau_k, y_o, t_o), \tau_k)$ é não-crescente para todo $y_o \in W$ e todo $k \in \mathbb{N}$, e que existe uma função $h \in C[R^+, R^+]$, independente de $y(\cdot, y_o, t_o)$, tal que

$$\left.\begin{array}{l} h(0) = 0 \\ V(y(t, y_o, t_o), t) \leq h(V(y(\tau_k, y_o, t_o), \tau_k)), \quad t \in]\tau_k, \tau_{k+1}[, \ k \in \mathbb{N}. \end{array}\right\} \tag{0.3}$$

então o equilíbrio $y = 0$ de S é uniformemente estável;

(b) Se além das hipóteses dadas em (a), existe uma função $\psi_3 \in K$ definida em $\mathbb{R}^+$ tal que

$$DV(y(\tau_k, y_o, t_o), \tau_k) \leq -\psi_3(||y(\tau_k, y_o, t_o)||) \tag{0.4}$$

para todo $y_o \in W$, $k \in \mathbb{N}$, sendo

$$DV(y(\tau_k, y_o, t_o), \tau_k) := \frac{1}{\tau_{k+1} - \tau_k}\left[V(y(\tau_{k+1}, y_o, t_o), \tau_{k+1}) - V(y(\tau_k, y_o, t_o), \tau_k)\right]$$

então o equilíbrio $y = 0$ de S é uniformemente assintoticamente estável.

(c) Suponha que todas as hipóteses na parte (a) e (b) são válidas com $\psi_1(r) = c_1 r^b$, $\psi_2(r) = c_2 r^b$ e $\psi_3(r) = c_3 r^b$, sendo c_1, c_2, c_3 e b constantes positivas. Além disso, suponha que a função h de (0.3) satisfaz

$$h(r) = o(r^q) \quad com \ r \to 0$$

ou seja, $\lim_{t \to 0} \frac{h(r)}{r^q} = 0$, para alguma constante positiva q. Então o equilíbrio $y = 0$ de S é exponencialmente estável.

Observamos que diferentemente da usuais funções de Lyapounov, não é exigido neste teorema que a função $V(x, t)$ seja decrescente pata todo $t \geq t_o$, basta que seja não-crescente nos pontos $\tau_k \in E_1 \cup \{\tau_o\}$ e que no interior do intervalo $]\tau_k, \tau_{k+1}[$ ela satisfaça uma certa limitação (dada por (0.3)), propiciando um ganho considerável nas aplicações. Além disso, esses resultados são mais abrangentes que os resultados da teoria clássica de estabilidade para sistemas dinâmicos contínuos, como mostrado em [1], onde prova-se que o exemplo abaixo possui uma função $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ nas condições do teorema acima, mas não é possível encontrar uma tal função nas condições estabelecidas na teoria clássica de Lyapunov.

Exemplo 0.1. *Seja $\{\mathbb{R}^+, X, A, S\}$ um SDD com $X = A = \mathbb{R}$ e $y(\cdot, y_o, t_o) \in S$ dado por*

$$y(t, y_o, t_o) = \begin{cases} \frac{y_o}{2^k} + (t - t_o)\frac{y_o}{2^k}, & se \ \ t \in [t_o + 2k, t_o + 2k + 1]; \\ \frac{y_o}{2^{k-1}} + 1.5(t - t_o - 2k - 1)\frac{y_o}{2^k}, & se \ \ t \in [t_o + 2k + 1, t_o + 2(k + 1)], \end{cases} \tag{0.5}$$

para cada par $(y_o, t_o) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ e todo $t_o \geq 0$. Para cada par $(y_o, t_o) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ existe um único deslocamento $y(\cdot, y_o, t_o) \in S$ que é definido e contínuo para todo $t \geq t_o$. Além disso $y = 0$ é um ponto de equilíbrio de S. Tomamos então $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dada por $V(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e para todo deslocamento $y(\cdot, y_o, t_o)$, escolhemos o conjunto $E_1 = \{\tau_1, \tau_2, ... : \tau_k = t_o + 2k, k = 1, 2, ...\}$. Assim, por (0.5) temos $V(y(\tau_k, y_o, t_o)) = \left|\frac{y_o}{2^k}\right|$, e $V(yo(t, y_o, t_o)) \leq 2V(y(\tau_k, y_o, t_o))$ para todo $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k \in \mathbb{N}$. Portanto as hipóteses (a) e (b) do Teorema 0.1 são satisfeitas, logo $\{S, \{0\}\}$ é uniformemente assintoticamente estável.

Referências

[1] HOU, L., MICHEL, A. N., - *Unifying theory for stability of continuous, discontinuous, and discrete-time dynamical systems*, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, vol. 1, pp. 154-172, 2007.

[2] MICHEL, A. N., HU, B., - *Toward a stability theory of general hybrid dynamical systems*, Automatica, vol. 35, pp. 371-384, 1999.

[3] MICHEL, A. N., WANG, K. W., HU, B. - *Qualitative theory of dynamical systems*, Marcel Dekker, New York, 2001.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edition N$^{\underline{o}}$ 1 November 2007

Critical Elliptic Systems crossing high eigenvalues *

Fábio Rodrigues Pereira[†] & Daniel C. de Morais Filho[‡§]

Abstract

In this paper we study multiple solutions for the system of elliptic equations

$$\begin{cases} -\Delta u = au + bv + \dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta} {u_+}^{\alpha-1} {v_+}^{\beta} + t\phi_1 + f_1, & \Omega \\ -\Delta v = cu + dv + \dfrac{2\beta}{\alpha+\beta} {u_+}^{\alpha} {v_+}^{\beta-1} + r\phi_1 + g_1, & \Omega \\ u = v = 0, & \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded smooth domain; $\alpha, \beta > 1$ are real constants, $\alpha + \beta = 2^*$, with $2^* = \frac{2N}{N-2}, N \geq 3$; $s_+ = max\{s, 0\}$, $f_1, g_1 \in L^s(\Omega)$, the pair $(t, r) \in \mathbb{R}^2$, $\int_\Omega f_1\phi_1 = \int_\Omega g_1\phi_1 = 0$. $t\phi_1 + f_1, r\phi_1 + g_1 \in L^s(\Omega)$ for some $s > N$ and ϕ_1 the positive normalized eigenfunction associated to λ_1.

When $b = c$, the eigenvalues of the matrix A shall be denoted by μ_1 and μ_2.

1 Main Results

Our main results are

Theorem 1.1. *(Existence of a negative solution)*
Let us suppose that

$$\det(\lambda_1 I - A) > 0, \tag{1.2}$$

$$(\lambda_j - a)(\lambda_j - d) - bc \neq 0,\ \forall\ j = 2, 3, \ldots, \tag{1.3}$$

$$b,\ c, \lambda_1 - a,\ \lambda_1 - d < 0. \tag{1.4}$$

Then, for each $F_1 = (f, g) \in (L^s(\Omega))^2$, $s > N$, there exists $(\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\tau_1, \tau_2) > 0$, such that, if $(t, r) \geq (\tau_1, \tau_2)$, system (0.1) has a negative solution (u_{rt}, v_{rt}).

Theorem 1.2. *(Existence of a second solution)*
Let A be a symmetric matrix $(b = c)$.
In addition to conditions (1.2), (1.3) and (1.4) let us assume that $\alpha + \beta = 2^*$, $N > 6$ and that

$$\lambda_k < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{k+1}. \tag{1.5}$$

Then system (0.1) has another solution.

---

* *Mathematics Subject Classifications:* 35J50, 35B33
Key words: Ambrosetti-Prodi type problems; systems of elliptic equation; critical Sobolev exponents

[†]Departamento de Matemática - ICE, Universidade Federal de Juiz de Fora, CEP 36036-330, Juiz de Fora, Minas Gerais, Brazil, e-mail: fpereira@ice.ufjf.br.
[‡]Departamento de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Campina Grande CX. Postal 10044, CEP 58109-970, Campina Grande - PB, Brazil, Dmec-Uepb. e-mail: daniel@dme.ufcg.edu.br

[§]The first author was partially supported by CNPq-Brazil, Instituto do Milênio em Matemática-IM-AGIMB and CNPq/PADCT under grant 620017/2004-0. Both are supported by Projeto Universal/Cnpq, grant 472281/2006-2.

Our results are characterized as Ambrosetti-Prodi type results. Since the pioneering work on the subject (see [2]), these problems have been investigated in many different directions. For a survey on the scalar case we recommend [8] and the references therein

References

[1] C. O. ALVES, D. C. DE MORAIS FILHO and M. A. SOUTO, *On Systems of Equations Involving Subcritical or Critical Sobolev Exponents*, Nonlinear Analysis, 42, (2000), 771-787.

[2] A. AMBROSETTI and G.PRODI, *On the inversion of some differential mappings with singularities between Banach spaces*, Ann. Mat. Pura. Appl., 93, (1972), 231-246.

[3] H. BRÉZIS and E. LIEB, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of integrals*, Proc. Amer. Math. Soc., 88, (1983), 486-490.

[4] H. BRÉZIS and L. NIRENBERG, *Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents*, Comm. Pure App. Math., XXXVI, (1983), 437-477.

[5] K. C. CHANG, *Ambrosetti-Prodi type results in Elliptic Systems*, Nonlinear Analysis, 51, (2002), 553-566.

[6] D. G. COSTA and C. A. MAGALHÃES, *A Variational Approach to Subquadratic Pertubations of Elliptic Systems*, J. Diff. Equations, 111, (1994), 103-122.

[7] D. G. COSTA and C. A. MAGALHÃES, *A Variational to noncooperative Elliptic Systems*, Nonlinear Analysis, 25, *n.* 7,(1995), 699-715.

[8] D. G. de FIGUEIREDO, *Lectures on boundary value problems of the Ambrosetti-Prodi type*, 12º Seminário Brasileiro de Análise, (October 1980), 232-292.

[9] D. G. de FIGUEIREDO, *On the Superlinear Ambrosetti-Prodi Problem*, MRC Tech. Rep 2522, May, (1983).

[10] D. G. de FIGUEIREDO and J. YANG, *Critical Superlinear Ambrosetti-Prodi Problems*, Top. Methods in Nonlinear Analysis,14, *n.* 1, (1999), 59-80.

[11] D. C. de MORAIS FILHO, *A Variational Approach to an Ambrosetti-Prodi type Problem for a System of Elliptic Equations*, Nonlinear Analysis, 26, *n*º 10, (1996), 1655-1668.

[12] F.R. PEREIRA, Doctoral Thesis, *Problemas do tipo Ambrosetti-Prodi para sistemas envolvendo expoentes críticos e subcríticos*, Universidade Estadual de Campinas, Brazil (2005).

[13] D. C. de MORAIS FILHO & M.A. S. SOUTO, *Systems of p-laplacean equations involving homogeneous nonlinearities with critical Sobolev exponents degrees*, Commun. in Partial Differential Equations, 24 (7&8), (1999), 1537-1553.

[14] J. MAWHIN and M. WILLEM, *Critical Point theory and Hamiltonian Systems*, Appl. Math. Sci. 74, Springer, New York-Berlin-Heidelberg-London-Paris-Tokyo, (1989).

[15] G. TALENTI, *Best constants in Sobolev inequality*, Annali de Mat., 110, (1987), 353-372.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edition N$^{\underline{o}}$ 1 November 2007

DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR A MODEL OF ELECTROMAGNETOELASTIC INTERACTION *

V.I.PRIIMENKO † & M.P.VISHNEVSKI ‡

22.08.2007

Abstract

The theory of electromagnetoelasticity is concerned with the interacting effects of an externally applied electromagnetic field on the elastic deformations of a solid body. This theory is being fastly developed because of the possibilities of its extensive practical applications in diverse fields such as geophysics, optics, acoustic, damping of acoustic waves in the magnetic field and so on. For instance, while discussing the propagation of the seismic waves from the earth's mantle to its core, Cagniard (1952) suggested that the existence of the earth's magnetic field may be taken into consideration for explaining certain phenomena concerning these waves. Knopoff (1955) attempted to determine the effects of the magnetic field on the propagation of elastic waves on a geophysical scale. Though his conclusion that magnetic effects are very small may not be of much interest in seismic waves, his paper certainly gives an impetus to the theoretical development of this subject. For a more profound acquaintance with the modern state of the theory of electromagnetoelastic interactions the reader is referred to two volumes of Eringen and Maugin (1990).

Following to Dunkin and Eringen (1963) we can form the following system to describe electromagnetoelastic interactions in an electrically conducting elastic body subjected to a mechanical load

$$\sigma \mathbf{E} + \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \times \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H},$$

$$\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0, \qquad \nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) = 0,$$

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \mu \nabla \times \mathbf{H} \times \mathbf{H},$$

where Hooke's law states that in an elastically isotropic solid the elastic stress tensor $\mathbf{T}$ is linearly related to the elastic strain tensor $\mathbf{S}$ according to the law

$$\mathbf{T} = \lambda \, tr \, \mathbf{S} \cdot I + 2\kappa \, \mathbf{S}.$$

Here I is the 3×3-identity matrix, and

$$\mathbf{S} : \; S_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\Big), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

---

* *Mathematics Subject Classifications:* 35M20, 35Q72, ...

Key words: Nonlinear elctromagnetoelasticy system,Direct problem, Inverse problem

†Instituição ... , UENF, LENEP, RJ, Brasil, and IM SB RAS, Russia slava@lenep.uenf.br
‡Instituição ..., UENF, LCMAT, RJ, Brasil, IM SB RAS, Russia mikhail@uenf.br

U is the displacement of the elastic body, **H** is the total (primary and induced) magnetic field, **E** is the electric field. The coefficients ϵ, μ are the electric permitivity and magnetic permeability, λ, κ are the Lamè elastic coefficients, correspondingly, and ρ is the density of the body. Let all the vectors be functions of $x_3 \equiv z$ and t only, and independent of the x_1 and x_2 coordinates. We assume that the displacement vector **U** has the components $(0, 0, U_3)$. Under such assumptions for the case $\rho = \text{const}, \mu = \text{const}, \lambda = \lambda(z), \kappa = \kappa(z), \sigma = \sigma(z)$ we can form the following non-dimensional model system (cf. [**?**])

$$u_{tt} = (\nu^2 u_z)_z - p(h_1 h_{1z} + h_2 h_{2z}) + f, \quad h_{kt} = (rh_{kz})_z - (h_k u_t)_z - (rj_k)_z,\ k = 1, 2,$$

where h_1, h_2, u are dimensionless analogues of the functions H_1, H_2, U_3, $r^{-1} = \mu L V_0 \sigma$ is the magnetic Reynolds number, $p = \mu H_0^2 \rho^{-1} V_0^{-2}$, $v = \sqrt{(\lambda + 2\kappa)/\rho V_0^2}$ is dimensionless velocity and magnetic field, respectively. Consider the propagation of electromagnetoelastic waves in the presence of the external elastic and electromagnetic sources. Choosing the suitable orientation of these sources we can assume that $r(z), \nu(z)$ are positive piecewise smooth functions and $f(z,t), j_k(z,t), k = 1, 2$, are piecewise smooth functions (dimensionless analogues of the electromagnetic and elastic sources), discontinuous at the points $z = z_m, m = 1, 2, \ldots, n$, $-l < z_1 < z_2 < \cdots < z_n < l$; p is a positive number.

The following first initial boundary-value problem is considered for equations with the initial data

$$u(z, 0) = u_0(z),\ u_t(z, 0) = u_1(z),\ z \in \Omega, \quad h_k(z, 0) = h_{k0}(z),\ k = 1, 2,\ z \in \Omega,$$

and the boundary conditions

$$u(-l, t) = u(l, t) = 0,\ t \in (0, T), \quad h_k(-l, t) = h_k(l, t) = 0,\ k = 1, 2,\ t \in (0, T).$$

At the jump points $z_m, m = 1, 2, \ldots, n$, the following compatibility conditions are valid

$$[h_k] = [u] = 0, \quad [r(h_{kz} - j_k)] = \left[\nu^2 u_z\right] = 0, k = 1, 2\,.$$

The symbol $[v]$ denotes the jump of the function v as it passes through z_m. For this problem we proof the existence and uniqueness theorem.

Inverse problem.

Consider inverse problem of the determination of a set of the functions

$$h_k : \overline{Q}_T \to \mathcal{R}, k = 1, 2, \quad u : \overline{Q}_T \to \mathcal{R}, \quad \phi : [0, T] \to \mathcal{R}$$

satisfying equations above and additional information

$$\int_\Omega \eta(z)(h_1 h_{1z} + h_2 h_{2z})\, dz = -\frac{1}{2} \int_\Omega \eta_z (h_1^2 + h_2^2)\, dz = \psi(t), \quad t \in [0, T],$$

where $\eta\ in\ H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \eta(z) f(z, t)\, dz \geq \eta_0 > 0, \quad t \in [0, T],$$

and the functions $r, \nu, f, j_k, k = 1, 2$, the constant p and the initial data $u_0, u_1, h_{k0}, k = 1, 2$, satisfy conditions in direct problem.

Main result.

For inverse problem existence and uniqueness theorem holds.

References

[1] PRIIMENKO, V. I. AND VISHNEVSKII M. P. - *An inverse problem for a coupled system of equations of electromagnetoelasticity,*, J. Inv. Ill-Posed Problems, 13(3), (2005), pp. 277-301.

[2] PRIIMENKO, V. I. AND VISHNEVSKII M. P. - *An initial boundary-value problem for model electromagnetoelasticity system*, J. Differential Equations 235(1), (2007), pp. 31-55.

I ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edition N$^{\underline{0}}$ 1 November 2007

TRANSMISSION PROBLEM FOR WAVES WITH FRICTIONAL DAMPING *

C. A. RAPOSO † & W. D. BASTOS ‡

Abstract

A number of authors have studied the wave equation with dissipation. We mention for example, the work of Zuazua [6] where it was obtained the uniform rate of decay of the solution for a large class of nonlinear wave equation with frictional damping acting in the whole domain. In this direction, the natural question that raises is about the rate of decay when the dissipation is effective only in a part of the domain. It is the purpose of this investigation, at least in part, to answer this question. We consider the wave propagation over a body consisting of two different type of materials. This is a transmission (or diffraction) problem. It happens frequently in applications where the domain is occupied by several materials, whose elastic properties are different, joined together over the whole of a surface. From the mathematical point of view a transmission problem for wave propagation consists on a hyperbolic equation for which the corresponding elliptic operator has discontinuous coefficients. Even though we consider a case of space dimension one and linear equations with constant coefficients, the problem studied here is interesting by its own. Existence, regularity, as well as the exact controllability for the transmission problem for the pure wave equation was studied in [2]. The transmission problem for viscoelastic waves was studied by Rivera and Oquendo [5] who proved the exponential decay of solution using regularity results of the Volterra's integral equations and regularizing properties of the viscosity. The asymptotic behavior for a coupled system of equations of waves was studied by Raposo et all [3] by the same method used in this paper.

Let k_1, k_2 and α be positive real numbers and $0 < L_0 < L$. The system considered here is

$$\begin{aligned} u_{tt} - k_1 u_{xx} + \alpha u_t &= 0, \quad x \in (0, L_0),\ t > 0, \\ v_{tt} - k_2 v_{xx} &= 0, \quad x \in (L_0, L),\ t > 0, \end{aligned}$$

satisfying the boundary conditions

$$u(0,t) = v(L,t) = 0, \quad t > 0,$$

the transmission conditions

$$u(L_0,t) = v(L_0,t), \quad k_1 u_x(L_0,t) = k_2 v_x(L_0,t), \quad t > 0,$$

and initial conditions

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u^0(x), \quad u_t(x,0) = u^1(x), \quad x \in (0, L_0), \\ v(x,0) &= v^0(x), \quad v_t(x,0) = v^1(x), \quad x \in (L_0, L). \end{aligned}$$

---

* *Mathematics Subject Classifications:* 35B35, 35B40, 35L05, 35L20
Key words: Exponential stabilty, dissipative system, wave equations, transmission problem.
†UFSJ, DEMAT, MG, Brasil, e-mail: raposo@ufsj.edu.br
‡UNESP, IBILCE, SP, Brasil, e-mail: waldemar@ibilce.unesp.br

The notations used throughout this work are the standard ones. For instance H^m, $L^2 = H^0$, $W^{m,p}$ and $W^{m,\infty}$ denote the usual Sobolev Spaces (see Adams [1]). By $\mathcal{V}$ we denote the space

$$\mathcal{V} := \{(u,v) \in H^1(0,L_0) \times H^1(L_0,L) \,:\, u(0) = v(L) = 0,\ u(L_0) = v(L_0)\}$$

which together with the inner product

$$\langle (u^1,v^1)\,,\,(u^2,v^2)\rangle := \int_0^{L_0} u_x^1 u_x^2\,dx + \int_0^{L_0} v_x^1 v_x^2\,dx$$

is a Hilbert Space. The energy associated in each part is

$$\begin{aligned} E_1(t) &= \frac{1}{2}\int_0^{L_0} [|u_t|^2 + k_1|u_x|^2]\,dx, \\ E_2(t) &= \frac{1}{2}\int_{L_0}^{L} [|v_t|^2 + k_2|v_x|^2]\,dx. \end{aligned}$$

We denote $E(t) = E_1(t) + E_2(t)$ the total energy.

We are mainly concerned with the asymptotic properties. The main result of this paper is Theorem 1 which shows that the solution of the transmission problem decays exponentially to zero as time goes to infinity, no matter how large is the difference $L - L_0$. The approach we use consists of choosing appropriate multipliers to build a functional of Lyapunov for the system. With a view toward proving the main result of this paper we formulate and prove a series of five lemmas. They will provide some technical inequalities which play fundamental role in the proof of Theorem 1. The complete article [4] is available on line in http://www.emis.de/journals/EJDE/index.html.

Theorem 1 *The total energy $E(t)$ satisfy*

$E(t) \leq E(0)\,C\,e^{-w\,t}$, for all $t > 0$, where C and w are constant independent of the initial data and of t.

References

[1] ADAMS, R. A. - *Sobolev Spaces,* Academic Press, New York, 1975.

[2] LIONS, J. L. - *Contrôlabilité Exacte Pertubations et Stabilisation de Systèmes Distribués.* Collection RMA - Tomo 1, Masson , Paris, 1998.

[3] RAPOSO, C. A., BASTOS, W. D., SANTOS, M. L. - *A Transmition Problem for Timoshenko System.* Computational and Applied Mathematics, 26, 2, (2007), pp. 01-20.

[4] RAPOSO, C. A., BASTOS, W. D. - *Transmission Problem for Waves with Frictional Damping.* Electronic Journal of Differential Equations, 60, (2007), pp. 01-10.

[5] RIVERA, J. E. M., OQUENDO. H. P. - *The transmission Problem of Viscoelastic Waves.* Acta Applicandae Mathematicae, 60, 1, (2000), pp. 1-21.

[6] ZUAZUA, E. - *Stability and Decay for a Class of Nonlinear Hyperbolic Problems.* Asymptotical Analysis, 1, (1988), pp. 161-185.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edição N$^{\underline{o}}$ 1 Novembro 2007

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO FRACA PARA UMA CLASSE DE SISTEMAS POSITONES/SEMIPOSITONES ELÍPTICOS QUASE LINEARES

R.S. Rodrigues * & O.H. Miyagaki †

Resumo

Castro, Hassanpour e Shivaji em [2], e também diferentes autores, focaram suas atenções em uma classe de problemas, chamados de problemas semipositones, da forma

$$-\Delta u = \lambda f(u) \text{ em } \Omega \text{ e } u = 0 \text{ on } \partial\Omega,$$

onde Ω é um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^N$, λ é um parâmetro positivo e $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e monótona satisfazendo as condições $f(0) < 0$, $\lim\limits_{s\to\infty} f(s) = +\infty$ e a condição sublinear no infinito, a saber, $\lim_{s\to\infty} f(s)/s = 0$. Os problemas semipositones foram motivados pelo trabalho de Keller e Cohen em [6], onde os autores estudaram um problema positone, isto é, a não linearidade envolvida no problema de Dirichlet é uma função monótona não negativa.

Ainda no caso escalar, García e Peral em [4] provaram que o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2}u & \text{em } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

não possui solução fraca, exceto a trivial, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno. Enquanto o problema com perturbação crítica

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2}u + |u|^{p^*-2}u & \text{em } \Omega, \\ \quad u \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

tem uma solução fraca para todo $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, onde Ω é um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^N$, $1 < p^2 \leq N$ e $p^* = Np/(N-p)$ denota o expoente crítico de Sobolev. A principal dificuldade que temos neste tipo de problema é a falta de compacidade da inclusão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$. Recordamos que os problemas envolvendo o expoente crítico de Sobolev originaram-se de um trabalho pioneiro devido a Brezis e Nirenberg [1] que tratou o caso $p = 2$.

O interesse em estudar sistemas decorre do grande número de aplicações que além das aplicações já conhecidas para o caso escalar, por exemplo, em mecânicas dos fluidos, problemas de reação-difusão, elasticidade não linear, extração de petróleo, astronomia, glaciologia, etc, os sistemas envolvem outros fenômenos, como os modelos de competição em dinâmica populacional, ver [3] e suas referências. Tecnicamente, os sistemas variacionais se comportam, em um certo sentido, como no caso escalar. Mas, é claro que, existem dificuldades adicionais provenientes da ação mútua das variáveis u e v, por exemplo, a possibilidade de existir semi-soluções, ou seja, soluções fracas do tipo $(u, 0)$ e $(0, v)$, veja [5] e e suas referências.

O primeiro resultado que apresentaremos estuda a existência de solução fraca para o sistema elíptico quase linear envonvendo singularidades, do tipo

$$\begin{cases} -div(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= \lambda |x|^{-(a+1)p+c_1} f_1(x,u,v) & \text{em} & \Omega, \\ -div(|x|^{-bq}|\nabla v|^{q-2}\nabla v) &= \lambda |x|^{-(b+1)q+c_2} f_2(x,u,v) & \text{em} & \Omega, \\ u = v &= 0 & \text{em} & \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

*Universidade Federal de São Carlos, SP, Brasil, e-mail: rodrigosrodrigues@ig.com.br
†Universidade Federal de Viçosa, MG, Brasil, e-mail: olimpio@ufv.br

onde Ω é um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^N$ com $0 \in \Omega$, $1 < p, q < N$, $0 \leq a < (N-p)/p$, $0 \leq b < (N-q)/q$, $c_1, c_2 > 0$, λ é um parâmetro positivo e $f_1, f_2 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas.

Teorema 0.1. *Suponha que* $f_1, f_2 : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são funções contínuas, não decrescentes nas variáveis* s, t *e satisfazem*

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f_1(x,s,t)}{s^{p-1}} = 0 \text{ uniformemente em } (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R},$$
$$\lim_{t\to\infty} \frac{f_2(x,s,t)}{t^{q-1}} = 0 \text{ uniformemente em } (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R},$$
$$\lim_{(s,t)\to\infty} f_i(x,s,t) = \infty, \text{ para } i = 1, 2.$$

Então, existe um parâmetro λ_0 *suficientemente grande tal que o sistema* (0.1) *possui uma solução fraca, onde cada componente é positiva, para cada* $\lambda \geq \lambda_0$.

Teorema 0.2. *Suponha que* $(a+1)p - c_1 = (b+1)q - c_2$ *e* $f_1, f_2 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são funções contínuas satisfazendo*

$$|f_1(x,s,t)s| \leq k_1|s|^p + k_2|t|^q \text{ e } |f_2(x,s,t)t| \leq k_3|s|^p + k_4|t|^q,$$

para todos $s, t \in \mathbb{R}$ *e todo* $x \in \Omega$, *onde* k_1, k_2, k_3, k_4 *são números reais positivos. Então, existe um parâmetro* λ_0 *positivo tal que o sistema* (0.1) *não possui solução fraca, exceto a trivial, para cada* $0 < \lambda < \lambda_0$.

Como conseqüência do teorema 0.2 o sistema (0.1) com $f_1(x,u,v) = \theta|u|^{\theta-2}|v|^\delta u$, $f_2(x,u,v) = \delta|u|^\theta|v|^{\delta-2}v$, $(a+1)p - c_1 = (b+1)q - c_2$, $c_1, c_2 > 0$, $\theta, \delta > 1$ e $\theta/p + \delta/q = 1$ não possui solução fraca, exceto a trivial, para todo $\lambda > 0$ suficientemente pequeno.

Nós usaremos uma versão do teorema do passo da montanha junto com alguns argumentos usados em [1], para estabelecer algumas condições sobre a existência de solução fraca para o sistema elíptico envolvendo o expoente crítico de Hardy-Sobolev, da forma

$$\begin{cases} -div(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= \lambda\theta|x|^{-(a+1)p-c}\, u^{\theta-1}v^\delta + \mu\alpha|x|^{-e_1p^*}u^{\alpha-1}v^\gamma \text{ em } \Omega, \\ -div(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= \lambda\delta|x|^{-(a+1)p-c}\, u^{\theta}v^{\delta-1} + \mu\gamma|x|^{-e_1p^*}u^{\alpha}v^{\gamma-1} \text{ em } \Omega, \\ u = v &= 0 \qquad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.2}$$

onde Ω é um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^N$ com $0 \in \Omega$, $1 < p < N$, $0 \leq a < (N-p)/p$, $a \leq e_1 < a+1$, $d_1 = 1 + a - e_1$, $p^* = Np/(N - d_1p)$, λ e μ parâmetros positivos e $\alpha, \gamma, \theta, \delta > 1$ satisfazendo

$$\tfrac{\theta}{p} + \tfrac{\delta}{q} = \tfrac{\alpha}{p^*} + \tfrac{\gamma}{p^*} = 1.$$

Teorema 0.3. *Suponha que* $0 < c \leq (N-p-ap)/(p-1)$. *Então, existe* $\lambda_0 > 0$ *tal que o sistema* (0.2) *possui uma solução fraca, onde cada componente é não trivial e não negativa, para cada* $0 < \lambda < \lambda_0$ *e* $\mu > 0$

Referências

[1] H. Brezis, L. Nirenberg- *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983) 437-477.

[2] A. Castro, M. Hassanpour, R. Shivaji- *Uniqueness of non-negative solutions for a semipositone problems with concave nonlinearity*, Commun. Partial Diff. Eqns. 20 (1995) 1927-1936.

[3] J. Fleckinger, R. Pardo, F. Thélin- *Four-parameter bifurcation for a p-laplacian system*, Electronic J. Diff. Eqns., 2001 (2001) (06), 1-15.

[4] J.P. García Azorero, I. Peral Alonso- *Existence and nonuniqueness for the p−laplacian: Nonlinear eigenvalues*, Comm. Partial Diff. Eqns. 12 (1987) 1389-1430.

[5] P. Han- *Multiple positive solutions of nonhomogeneous elliptic systems involving critical Sobolev exponents*, Nonlinear Anal., Vol. 64 (2006), 869-886.

[6] H.B. Keller, D.S. Cohen- *Some positone problems suggested by nonlinear heat generation*, J. Math. Mech. 16 (1967) 1361-1376.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edition N$^{\underline{o}}$ 1 November 2007

STAR-SHAPE SOURCE RECONSTRUCTION IN THE HELMHOLTZ EQUATIONS-FREQUENCY PARAMETER LIMIT *

N. C. ROBERTY , L. A. M. ROBERTO † & C. J. S. ALVES ‡

Abstract

The direct Helmholtz source problem consists in finding u_λ given a boundary input $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ and a source distribution f that verifies the Helmholtz-Dirichlet problem :

$$(P_{\lambda,g,f}) \begin{cases} \Delta u_\lambda + \lambda u_\lambda = f, & \text{in } \Omega; \\ u_\lambda = g, & \text{on } \Gamma. \end{cases} \tag{0.1}$$

It is well known that this direct problem is well posed with unique solution $u_\lambda \in H^1(\Omega)$. The inverse source problem consists in by knowing the Cauchy data in the boundary Γ, that is the Dirichlet to Neumann map in at least one Dirichlet datum g, to recover the source f. This problem has been studied for generic sources by [2] who shown that it is useless to change the input Dirichlet data g. The unique information available is given by only one measurement, say, Neumann boundary measurements

$$\partial_n u = g^n \tag{0.2}$$

corresponding to $g = 0$. One type of sources that can be uniquely reconstructed with Neumann boundary measurements $\partial_n u = g^n$ when $\lambda = 0$, which corresponds to Poisson equation with the Laplace operator Δ, are star-shaped characteristic sources.The proof is given by a celebrated Novikov's uniqueness theorem that dates back 1938. In this work we shown that this result can be extended for the Helmholtz equation in Problem $P_{\lambda,g,f}$, that is when $\lambda \neq 0$ is a complex number. The case in which $\lambda_0 > \lambda > 0$, real, is not an eigenvalue of the Laplacian, corresponds to the Helmholtz equation, and the case $\lambda < 0$, real, corresponds to the modified Helmholtz equation. Here λ_0 is the superior bond in the frequency that allows unique source reconstruction.

Reciprocity functional

The reciprocity functional for the Dirichlet-Poisson Problem depends only on boundary values of the solution and its properties are derived from elementary properties of the Green' theorem. Let v_λ in be the space of Helmholtz functions $H_\lambda(\Omega) = \{f \in H^2(\Omega) : (\Delta + \lambda)f = 0\}$. The reciprocity functional for the Cauchy data in the Helmholtz Dirichlet problem (0.1), (0.2) is [2]

$$R_f^\lambda(v) = \int_\Gamma (v g_\kappa^n - g\partial_n v) ds, (v \in H_\lambda(\Omega)) \tag{0.3}$$

It is a direct consequence of Green's theorem

$$R_f^\lambda(v) = \int_\Gamma (v\partial_n u_\lambda - u_\kappa \partial_n v) ds = \int_\Omega (v\Delta u_\lambda - u_\lambda \Delta v) dx = \int_\Omega f v dx.$$

* *Mathematics Subject Classifications:* 65N21, 35J05, 31A25
Key words: inverse source problem, Poisson equation, Helmholtz equation
† Instituição Programa de Engenharia Nuclear, COPPE-UFRJ, RJ, Brasil, nilson@con.ufrj.br.br
‡ Instituição Departamento de Matemaítica, IST-UTL, LIS, Portugal, e-mail calves@math.ist.utl.pt

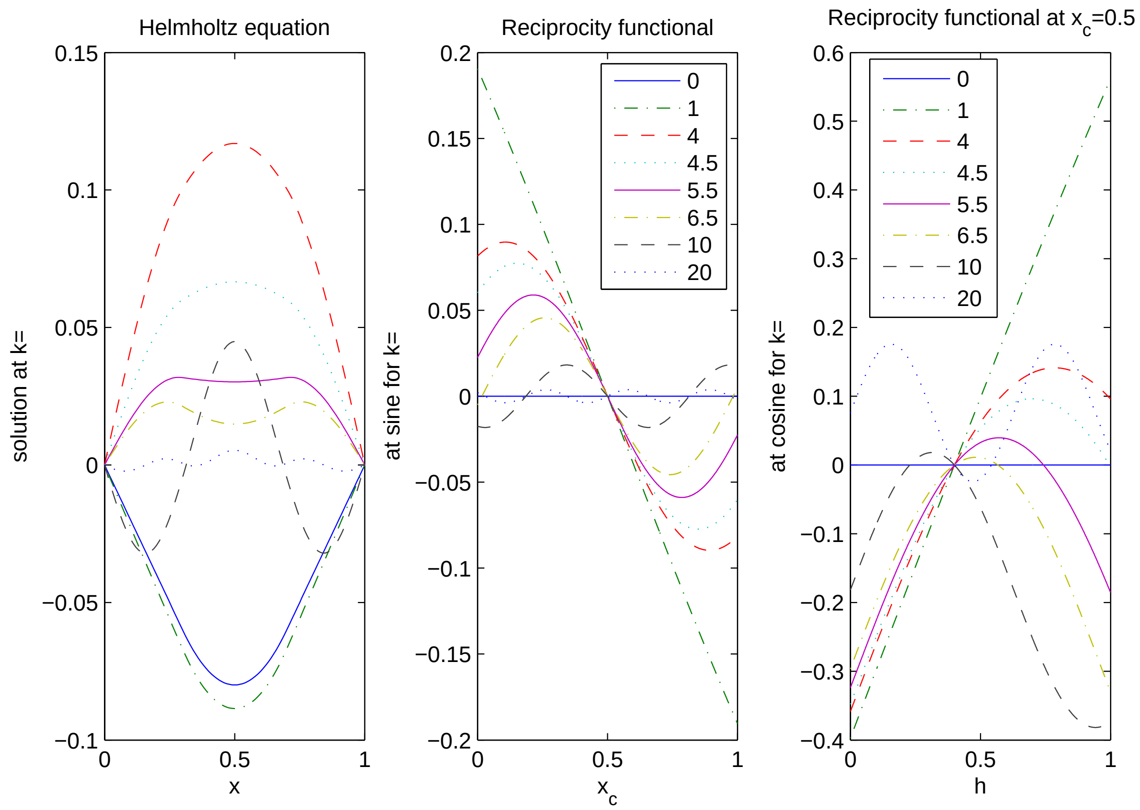

Figure 1: Slab Helmholtz equation solutions for $\sqrt{\lambda} = k = 0, 0.1, 0.5, 1, 5, 7, 10, 20$. Reciprocity functional at a sine function for different centroid values. The same at a cosine function for centroid equal to 0.5 and different interval values.

The reciprocity functional can be calculate for different test functions $v_\lambda \in H_\lambda(\Omega)$ using the Cauchy data of the Helmholtz Dirichlet problem or alternatively by the source function. We explore in [1] this result to established a system of nonlinear integral equations for the source reconstruction inverse problem.

Numerical Simulations We have implemented a computer program for simulation of the direct problem and generation of syntectic data to be used in the reconstruction problem in one, two and three dimensional situations. The numerical experiments test the uniqueness of the reconstruction for different values of the frequency in the Helmholtz equation. In figure 1 the a interval characteristic source with centroid $x_c = 0.5$ and interval $h = 0.4$ in the Helmholtz equation for $\sqrt{\lambda} = k = 0, 0.1, 0.5, 1, 5, 7, 10, 20$ is showed. It can be proof that the centroid can be directly determined by using the boundary data. Its value may be used in the Reciprocity functional at the cosine function for the determination of the value of the interval of the characteristic one-dimensional source.

References

[1] ROBERTY, N. C. AND ALVES, C. J. - *On the identificaton of star shape sources from boundary using a reciprocity functional,* Inverse Problems in Science and Engineering(2007), to appear.

[2] EL BADIA, A. AND HA DUONG, T. - *Some remarks on the problem of source identification from boundary measurements,* Inverse Problems, 14 (1998), pp. 883-891.

[3] NOVIKOFF, P. N. - *Sur le probleme inverse du potentiel,* Dokl. Akad. Nauk, 18 (1938), pp. 165–168.

[4] ISAKOV, V., I. - *Inverse problems for partial diferential equations*, Springer-Verlag,New York,USA, 1998.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edição N$^{\underline{0}}$ 1 Novembro 2007

MODELO NUMÉRICO DO TRANSPORTE DE POLUENTES DE PROCESSOS BIOQUÍMICOS COM TERMOS FONTES NÃO-LINEARES E LINEARIZADOS

N. M. L. ROMEIRO, C. A. LADEIA * & R. G. S. CASTRO †

Resumo

A água tratada por processos físicos, biológicos e químicos lançada em corpos de água como rios, lagos, etc, recebem, hoje, diferentes tratamentos. Muitos aspectos, detalhados, dos processos que ocorrem não são conhecidos. Sabe-se que, simultaneamente as circunstâncias aeróbicas e anaeróbicas ocorrem em diferentes partes do domínio. Assim, matematicamente o problema consiste em um sistema de equações de advecção-difusão-reação, totalmente acoplado por causa dos termos não-lineares das reações que modelam os processos bioquímicos. Para isto, neste trabalho, o modelo ASM1 - *Activated Sludge Model*, no 1: Henze et al. [1], que refere-se a um modelo envolvendo dez (10) equações, será utilizado como o modelo complexo de reações. Alguns exemplos serão usados para verificar o desempenho numérico da aproximação, assim como a linearização utilizada no modelo. A característica chave do modelo linearizado obtido é que mantém todas as variáveis de estado assim como a sua interpretação biológica, utilizando um tempo baixo de computação: Romeiro et al. [2].
Os modelos acoplados não-lineares e linearizados são resolvidos usando o método dos elementos finitos (MEF) estabilizados na sua formulação semi-discreta, sujeito a condições iniciais e de fronteira. Isto é, a variável espacial é discretizada usando o método dos elementos finitos *Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin* (SUPG), e a variável temporal é discretizada usando o método trapezoidal generalizado Crank-Nicolson, que é um método implícito incondicionalmente estável com precisão de segunda ordem: Books et al. [3].
As equações diferenciais que governam os sistemas acoplados não-lineares de advecção-difusão-reação de transporte de poluentes em uma dimensão podem ser descritas na seguinte forma compacta

$$[\mathbf{R}]\frac{\partial}{\partial t}\{\mathbf{C}\} + u\frac{\partial}{\partial x}\{\mathbf{C}\} - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{\mathbf{C}\} = -[\mathbf{K_{NL}}] \tag{0.1}$$

onde $[\mathbf{R}]$ é a matriz diagonal quadrada dos termos de retardamento; $\{\mathbf{C}\}$ é o vetor coluna que descreve a concentração das espécies; $[\mathbf{K_{NL}}]$ é o vetor coluna que corresponde as somas dos termos dos processos não-lineares, descritos por expressões do tipo Monod: Henze et al. [1], Essaid et al. [4], Celia et al. [5], Salvage et al. [6], e que dependem de $\{\mathbf{C}\}$; u refere-se ao coeficiente de advecção e D é o coeficiente de dispersão.

Neste trabalho, as concentrações das dez espécies, que serão transportadas no modelo numérico do transporte de poluentes de processos bioquímicos com termos fontes não-lineares e linearizados são: matéria orgânica solúvel (S_S), matéria orgânica particulada (X_S), biomassa heterotrófica (X_{BH}), biomassa autotrófica (X_{BA}), oxigênio dissolvido (S_o), matéria particulada proveniente do decaimento da biomassa (X_p), nitrato (S_{no}), nitrogênio amoniacal (S_{nh}), nitrogênio orgânico solúvel (S_{nd}), nitrogênio orgânico particulado (X_{nd}).

Uma das equações do sistema que será estudada, referente às equações do modelo de transporte de poluentes de processos bioquímicos com termos fontes não-lineares do modelo ASM1, é:

*Univeridade Estadual de Londrina, UEL, PR, Brasil, nromeiro@uel.br, cibele.mat.uel@yahoo.com.br
†Universidade Estadual do Norte Fluminense, UENF, RJ, Brasil, sanabria@uenf.br

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial S_S}{\partial t} + u\frac{\partial S_S}{\partial x} - D\frac{\partial^2 S_S}{\partial x^2} = &- \frac{\mu_H}{Y_H}\frac{S_S}{(K_S+S_S)}\left[\frac{S_o}{(K_{oH}+S_o)} + \eta_g\frac{K_{oH}}{(K_{oH}+S_o)}\frac{S_{no}}{(K_{no}+S_{no})}\right]X_{BH} \\
&+ k_h\frac{X_{BH}}{(K_x X_{BH}+X_S)}\left[\frac{S_o}{(K_{oH}+S_o)} + \eta_h\frac{K_{oH}}{(K_{oH}+S_o)}\frac{S_{no}}{(K_{no}+S_{no})}\right]X_S
\end{aligned} \tag{0.2}
$$

sendo μ_H a taxa de crescimento aeróbica de X_{BH}, Y_H o ganho heterotrófico de X_{BH}, K_S a constante de meia saturação de S_S pelo crescimento aeróbico de X_{BH}, K_{oH} a constante de meia saturação de S_o pelo crescimento aeróbico de X_{BH}, K_{no} a constante de meia saturação de S_{no} pelo crescimento anaeróbico de X_{BH}, k_h a taxa de hidrólise, η_H o fator de correção da hidrólise em condições anaeróbicas e η_g o fator de correção do crescimento em condições anaeróbicas. A equação linearizada, utilizando a primeira ordem da expansão em série de Taylor nos termos reativos não-lineares do modelo ASM1 do transporte de poluentes é:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial S_S}{\partial t} + u\frac{\partial S_S}{\partial x} - D\frac{\partial^2 S_S}{\partial x^2} = &- \frac{\tilde{a}}{Y_H}\Big[\tilde{o}_H(a_1\bar{X}_{BH}\bar{S}_o S_S + a_2\bar{S}_S\bar{S}_o X_{BH} + a_3\bar{X}_{BH}\bar{S}_S S_o) \\
&+ \eta_g\tilde{o}_N(b_1\bar{X}_{BH}\bar{S}_{no}S_S + b_2\bar{S}_S\bar{S}_{no}X_{BH} + b_3\bar{X}_{BH}\bar{S}_S S_{no} + b_4\bar{X}_{BH}\bar{S}_S\bar{S}_{no})\Big] \\
&+ \tilde{b}\Big[\tilde{o}_H(c_1\bar{X}_{BH}\bar{S}_o X_S + c_2\bar{X}_S\bar{S}_o X_{BH}) + \eta_h\tilde{o}_N(d_1\bar{X}_{BH}\bar{S}_{no}X_S + d_2\bar{S}_S\bar{S}_{no}X_{BH} \\
&+ d_3\bar{X}_{BH}\bar{X}_S S_{no} + d_4\bar{X}_{BH}\bar{X}_S\bar{S}_{no})\Big]
\end{aligned} \tag{0.3}
$$

sendo:

$$
\tilde{a} = \mu_H\frac{1}{(K_S+\bar{S}_S)}; \quad \tilde{o}_H = \frac{1}{(K_{oH}+\bar{S}_o)}; \quad \tilde{o}_N = \frac{K_{oH}}{(K_{oH}+\bar{S}_o)}\frac{1}{(K_{no}+\bar{S}_{no})}; \quad \tilde{b} = \frac{k_h}{(K_x\bar{X}_{BH}+\bar{X}_S)};
$$

$$
a_1 = \frac{K_S}{(K_S+\bar{S}_S)}; \quad a_2 = 1; \quad a_3 = -\frac{K_S}{(K_S+\bar{S}_S)}; \quad b_1 = \frac{K_S}{(K_S+\bar{S}_S)}; \quad b_2 = 1; \quad b_3 = \frac{K_{no}}{(K_{no}+\bar{S}_{no})};
$$

$$
b_4 = -\frac{K_S}{(K_S+\bar{S}_S)} - \frac{K_{no}}{(K_{no}+\bar{S}_{no})}; \quad c_1 = \frac{k_h\bar{X}_{BH}}{(K_x\bar{X}_{BH}+\bar{X}_S)}; \quad c_2 = \frac{\bar{X}_S}{(K_x\bar{X}_{BH}+\bar{X}_S)};
$$

$$
d_1 = \frac{k_h\bar{X}_{BH}}{(K_x\bar{X}_{BH}+\bar{X}_S)}; \quad d_2 = \frac{K_x\bar{X}_S}{(K_x\bar{X}_{BH}+\bar{X}_S)}; \quad d_3 = \frac{K_{no}}{(K_{no}+\bar{S}_{no})}; \quad d_4 = -\frac{K_{no}}{(K_{no}+\bar{S}_{no})}.
$$

Detalhes do procedimento empregado nesta técnica podem ser verificados em Romeiro et al. [2]. Quanto a variável referente a concentração do oxigênio dissolvido (S_o), está foi considerada no modelo como uma variável adicional de entrada, ou sejá, os termos não-lineares que envolvem S_o não são linearizados.

Referências

[1] HENZE, M., GRADY C. P. L., GUJER et al. - *Activated Sludge Model, no 1.*, IAWQ, London, 1987.

[2] ROMEIRO, N. M. L., CASTRO, R. G. S., MALTA, S. M. C., LANDAU, L. - *A Linearization Technique for Multiple Species Transport Equations Coupled with Non-Linear Kinetics.* Transport in Porous Media, Publicado Online, http://dx.doi.org/10.1007/s11242-006-9081-4, 2007.

[3] BOOKS A., HUGHES T. J. R. - *Streamline upwind Petrov-Galerkin formulations for convection-dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations.* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.; 32:199-259, 1982.

[4] ESSAID, H. I., BEKINS B. A., - *BIOMOC: A Multispecies Solute-Transport Model with Biodegradation.* CH. I. U. S. Geological Survey, Water-Resources Investigations Report 974022, 1997.

[5] CELIA, M. A., KINDRED J. S. - *Contaminant transport and biodegradation 1: A numerical model and test simulations.* Water Resour Res; 25:149-1159, 1989.

[6] SALVAGE, K. M., YEH G. T. - *Development and application of the numerical model of kinetic and equilibrium microbiological and geochemical reactions (BIOMKEMOD).* Journal of Hydrology; 209:27-52 1998.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edition N$^{\underline{o}}$ 1 November 2007

A STABLE EXPLICIT METHOD FOR CONVECTION-DIFFUSION EQUATIONS *

V. RUAS † & P. R. TRALES ‡

Abstract

An explicit scheme for time-dependent convection-diffusion problems is presented. It is shown that convenient bounds for the time step value ensure L^∞ stability, in both space and time, for piecewise linear finite element discretizations in any space dimension. Numerical results further certify the good performance of the scheme.

More precisely, this work deals with numerical methods based on variational formulations such as the finite element method, to solve the convection-diffusion equations recalled below.

Find a scalar valued function $u(\mathbf{x}, t)$ defined in Ω, a bounded open subset of $\Re^N$ with boundary $\partial\Omega$, for $N = 1, 2$ or 3, for every time t, $0 < t < +\infty$, such that,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla u - \nu \Delta u = f \ ; \text{ in } \Omega \times (0, \infty) \\ u = g \ ; \text{ on } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u = u^0 \ ; \text{ in } \Omega \text{ for t} = 0 \end{cases}$$

where ν is a positive constant and $\mathbf{a}$ is a given convective velocity. The data f and g are respectively, a given forcing function belonging to $L^\infty[\Omega \times (0, \infty)]$, and a prescribed boundary value in $L^\infty[\partial\Omega \times (0, \infty)]$. We assume that $u^0 \in L^\infty(\Omega)$, and that for every i, $i = 1, 2, \ldots, N$, and for every $t \in (0, \infty)$, $\mathbf{a}_i(\cdot, t) \in L^\infty(\Omega)$.

We focus here on largely dominant convection, that is, the case where $\nu << ||\mathbf{a}||_{\infty,\Omega}$.

In this framework, since the late eighties, the most widespread manner to deal numerically with this problem has been the use of stabilizing procedures based on the space mesh parameter. Among them the streamline upwind Petrov-Galerkin (SUPG) technique introduced by Hughes & Brooks (cf. [1]) is one of the most popular.
As far as time time-dependent problems are concerned, it turns out that the time step plays a better stabilizing role, provided a formulation well suited to the equations to be solved is employed. A good illustration of this assertion in the case of the time-dependent Navier-Stokes equations can be found in [3].
As we should stress, stabilizing approaches to deal with dominant convection introduced much earlier, were aimed at generating discretization matrices of the positive type. Among them lie the upwinding scheme due to Tabata [4]. In his technique, for a given node the integral corresponding to the convective term is computed only in the element(s) situated upwind of this node, with respect to the local convective velocity.
The strategy adopted in this work relies upon the use of suitable quadrature formulae to compute matrix coefficients,

---

* *Mathematics Subject Classifications:* 65N30, 76Dxx, 76Rxx, 78M10

Key words: convection, diffusion, explicit, finite elements, stable, time-dependent.

†UFF, Pesquisador visitante da FAPERJ no Departamento de Análise, IM-UFF, Niterói, Brasil, ruas_v@yahoo.com.br
‡UFF, Professor Associado do Departamento de Análise, IM-UFF, Niterói, Brasil, paulotrales@im.uff.br

according to the term of the equations obtained after space and time discretizations. Here a space discretization with piecewise linear finite elements is performed, combined with a classical explicit backward Euler scheme for the time integration. Then using a technique inspired by [2], we derive our explicit scheme. Our main theoretical result states that the numerical solution is stable in the L^∞-norm in both space and time, with no need to add SUPG-like stabilizing terms to the approximate problem, provided the time step is bounded by the space mesh parameter multiplied by a suitable mesh-independent constant that we specify. Numerical examples with known exact solution are also given, in order to illustrate the adequacy of the whole numerical approach.

References

[1] BROOKS, A.N. AND HUGHES, T.J.R. - *The streamline upwind/Petrov-Galerkin formulation for convection dominated flows with particular emphasis on the Navier-Stokes equations,* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 32 (1982), pp. 199-259

[2] RUAS, V. - *A quasilinear finite element method for solving transient problems with a consistent diagonal mass matrix,* Matemtica Aplicada e Computacional, 3-2 1982, 113-130

[3] RUAS, V. AND BRASIL JR., A.P. - *Explicit solution of the incompressible Navier-Stokes equations with linear finite elements,* Applied Mathematics Letters, 20 (2007), pp. 1005-1010

[4] TABATA, M. - *Uniform convergence of the upwind finite element approximation for semilinear parabolic problems,* Journal of Mathematics of the Kyoto University, 18-2 (1978), pp. 327-351

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edição N$^{\underline{0}}$ 1 Novembro 2007

Multiplicidade de soluções positivas para um sistema Hamiltoniano não-homogêneo

E.M. dos Santos * †

Resumo

Em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com fronteira regular e com $N \geq 1$, consideramos o sistema Hamiltoniano

$$\begin{cases} -\Delta u &= v^p + \epsilon f(x) \text{ em } \Omega \\ -\Delta v &= u^q + \epsilon g(x) \text{ em } \Omega \\ u, v &> 0 \text{ em } \Omega \\ u, v &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}, \tag{0.1}$$

onde ϵ é um parâmetro positivo, as potências p e q também são positivas e as funções $f, g \in C^1(\overline{\Omega})$, não simultaneamente identicamente nulas, satisfazem a condição de positividade

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} -\Delta u_* &= f(x) \text{ em } \Omega \\ -\Delta v_* &= g(x) \text{ em } \Omega \\ u_*, v_* &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \implies u_*, v_* \geq 0 \text{ em } \Omega.$$

Existem duas hipérboles importantes para o estudo do sistema acima. A primeira delas é dada por

$$p\,q = 1,$$

que determina a superlinearidade de (0.1) quando $p\,q > 1$, e a segunda é a hipérbole crítica

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = 1 - \frac{2}{N},$$

que por sua vez determina a criticalidade do mesmo.

Neste trabalho, mostramos que:

- Se $p\,q > 1$ e $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno então (0.1) admite ao menos uma solução. Se $p\,q > 1$ e $p, q \geq 1$ então o sistema (0.1) não possui solução para ϵ grande o bastante.

- Se $f \equiv 0$ e se (0.1) é superlinear e subcrítico, isto é,

$$p\,q > 1 \;\text{ e }\; \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > 1 - \frac{2}{N}$$

então (0.1) admite no mínimo duas soluções para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

- Se $f \equiv 0$, $N \geq 3$, $\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{q+1} = 1 - \dfrac{2}{N}$ e além disso, p satisfaz

$$\begin{cases} N = 3,4,5,6: \; p < \dfrac{N}{N-2} \\ N = 7, \cdots, 12: \; \dfrac{1}{2} < p < \dfrac{N}{N-2} \\ N \geq 13: \dfrac{N+6}{2N-6} \leq p < \dfrac{N}{N-2} \end{cases},$$

então (0.1) admite no mínimo duas soluções para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

*IMECC-UNICAMP, Campinas - SP, Brasil, ederson@ime.unicamp.br
†Este trabalho recebeu apoio financeiro da FAPESP

As técnicas utilizadas para obtenção de nossos resultados são: Método de subsolução e supersolução; Minimização de funcionais; Um Teorema de Representação de Riesz para alguns espaços de Sobolev; Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz [1]; Princípio de Concentração de Compacidade de P.L. Lions [9].

Referências

[1] A. Ambrosetti, P.H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applicattions.* Journal of Functional Analysis 14 (1973), 349-381.

[2] H. Brézis, L. Nirenberg, *A Minimization Problem with Critical Sobolev Exponent and Nonzero Data*, in Symmetry in Nature, Scuola Norm. Sup. Pisa (1989), 437-477.

[3] D.G. de Figueiredo, J.-P. Gossez, P. Ubilla, *Multiplicity results for a family of semilinear elliptic problems under local superlinearirty and sublinearity.* J. Eur. Math. Soc. 8, 269-286.

[4] D.G. de Figueiredo, B. Ruf, *Elliptic Systems with Nonlinearities of Arbitrary Growth.* Mediterr. J. Math. 1 (2004), 417-431.

[5] J.M. do Ó, P. Ubilla , *A multiplicity result for a class of superquadratic Hamiltonian systems.* Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2003(2003), No. 15, 1-14.

[6] P. Han, Z. Liu, *Multiple positive solutions of strongly indefinite systems with critical Sobolev exponents and data that change sign.* Nonlinear Analysis 58 (2004), No 1-2, 229-243.

[7] J. Hulshof, R.C.A.M. Van der Vorst, *Differential Systems with Strongly Indefinite Variational Structure.* Journal of Functional Analysis 114 (1993), 32-58.

[8] J. Hulshof, R.C.A.M. Van der Vorst, *Asymptotic behavior of ground states.* Proc. American Math. Soc. vol. 124 n. 8 (1996), 2423-2431.

[9] P.L. Lions, *The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations (The limit case, Part I.).* Revista Matemática Iberoamericana Vol.1 n.1 (1985), 145-201.

[10] G. Tarantello, *On nonhomogeneous elliptic equations involving critical Sobolev exponent.* Ann. Inst. Henri Poincarè, Vol. 9, n. 3, (1992), 281-304.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edição N$^{\underline{0}}$ 1 Novembro 2007

EQUAÇÃO DE BURGERS DISSIPATIVA COM FRONTEIRA MÓVEL

A. SILVA * & M. A. RINCON † & H. R. CLARK ‡

Resumo

Nosso objetivo é estudar teoricamente a Equação de Burgers unidimensional em um domínio com fronteiras móveis, verificando a existência, unicidade e o comportamento de soluções. Aplicaremos o Método dos Elementos Finitos usando base de funções B-Splines e Diferenças Finitas para o tempo e assim obter soluções numéricas aproximadas para o problema. Simulações numéricas serão mostradas.

Introdução: A Equação de Burgers não linear definida em domínio cilíndrico pode ser usada para modelo de dinâmica dos fluidos como modelo simplificado para turbulências, na formação de ondas de choque e propagação de ondas solitárias. Um problema associado a Equação de Burgers dissipativa com fronteira móvel é modelado por

$$\left|\begin{array}{l} u_t(x,t) + u_x(x,t) + u(x,t)\,u_x(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \text{ em } Q_t, \\ u(\alpha(t),t) = u(\beta(t),t) = 0 \text{ para } t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \;\text{ em } \Omega_0, \end{array}\right. \tag{0.1}$$

onde α e β são funções reais positivas e o domínio não cilíndrico $Q_t \subset \mathbb{R}^2$ é definido por

$$Q_t = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T); x \in \Omega_t\} \;\text{ e }\; \Omega_t = \{x \in \mathbb{R};\; \alpha(t) < x < \beta(t)\}.$$

Existência e unicidade de soluções: A existência e unicidade de soluções do problema misto (0.1) é mostrada por meio de uma mudança de variável de modo que o problema (0.1) seja transformado em um domínio cilíndrico cujas secções não dependam do tempo t. Para fazer a transformação considere a função f definida em Q_t com valores em $Q = \Omega \times [0,+\infty)$, onde $\Omega = (0,1)$, é tal que

$$f(x,t) = \left(\frac{x-\alpha(t)}{\gamma(t)},\; t\right) \quad \text{onde } \gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t).$$

Considere as seguintes hipóteses sobre α e β:

$$\begin{array}{l} \bullet\;\; H_1 : \alpha',\; \alpha'',\; \beta',\; \beta'' \in L^1(0,+\infty) \\ \bullet\;\; H_2 : \exists \gamma_0 > 0 \text{ tal que } \gamma(t) \geq \gamma_0 \text{ para todo } t \geq 0. \end{array} \tag{0.2}$$

Usando o difeomorfismo f, o problema (0.1) é transformado num problema cilíndrico dado por:

$$\left|\begin{array}{l} v_t(y,t) + a(y,t)\,v_y(y,t) + \dfrac{1}{\gamma(t)}\,v(y,t)\,v_y(y,t) - \dfrac{1}{\gamma^2(t)}v_{yy}(y,t) = 0 \;\text{ em } Q, \\ v(y,0) = v_0(y) \;\text{ em } \Omega = (0,1), \\ v(0,t) = v(1,t) = 0 \;\text{ para todo } t \geq 0, \end{array}\right. \tag{0.3}$$

onde o coeficiente $a(y,t)$ é definido por

$$a(y,t) = \frac{1}{\gamma(t)}\Big[1 - \big(\alpha'(t) + y\gamma'(t)\big)\Big].$$

*UFRJ , IM, RJ, Brasil, alesilva@ufrj.br
†UFRJ, IM, RJ, Brasil, rincon@dcc.ufrj.br
‡UFF, IM, RJ, Brasil, hclark@vm.uff.br

Teorema 1. Se $u_0 \in H_0^1(\Omega_0)$, α e β satisfizerem as hipóteses em (0.2), então existe uma função $u : Q_t \to \mathbb{R}$, solucão do problema (0.1), satisfazendo as seguintes condições:

$$\begin{aligned} &u \in L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega_t)) \cap L^2(0,\infty; H_0^1(\Omega_t)) \\ &u' \in L^2(0,\infty; H^{-1}(\Omega_t)) \end{aligned}$$

A solução u é verificada no sentido de $L^2(0,\infty; H_0^1(\Omega_t))$.

Teorema 2. Se $v_0 \in H_0^1(0,1)$, α e β satisfizerem as hipóteses (0.2), então existe uma função $v : Q \to \mathbb{R}$, solucão do problema (0.3), satisfazendo as seguintes condições:

$$\begin{aligned} &v \in L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,\infty; H_0^1(\Omega)) \\ &v' \in L^2(0,\infty; H^{-1}(\Omega)) \end{aligned}$$

A solução v do problema é verificada no sentido de $L^2(0,\infty; H_0^1(\Omega_t))$.

Método dos Elementos Finitos: Multiplicando a primeira equação do Problema (0.3) por $w \in H_0^1(\Omega)$ e integrando em $\Omega = (0,1)$, obtém-se

$$\int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t} w dy + \int_0^1 a(y,t)\frac{\partial v}{\partial y} w dy + \frac{1}{\gamma(t)}\int_0^1 v\frac{\partial v}{\partial y} w dy - \frac{1}{\gamma^2(t)}\int_0^1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} w dy = 0 \qquad (0.4)$$

Seja $V^m = [\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m]$ um subespaço de $H_0^1(\Omega)$ formado pelos m primeiros vetores base do espaço $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Se $v^h(y,t) \in V^m$, então

$$v^m(y,t) = \sum_{i=1}^m d_i(t)\varphi_i(y) \in V^m$$

Substituindo em (0.4), definindo as matrizes

$$A = \int_0^1 \varphi_i(y)\varphi_j(y)dy, \qquad B = \int_0^1 a(y,t)\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(y)\varphi_i(y)\, dy, \qquad E = \int_0^1 \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j(y)}{\partial y} dy$$

e o Tensor de 3^a ordem $B_{ikj} = \displaystyle\int_0^1 \varphi_i(y)\frac{\partial \varphi_k(y)}{\partial x}\, \varphi_j(y)dy$, e usando o procedimento de linearização do Tensor e o Método de Crank-Nicolson obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned} &\left(2A + \left(B + \frac{1}{\gamma(t)}\widehat{B}_{ij}(t) + \frac{1}{\gamma^2(t)}E\right)\Delta t\right) d^{n+1} \\ &\quad = \left(2A - \left(B + \frac{1}{\gamma(t)}\widehat{B}_{ij}(t) + \frac{1}{\gamma^2(t)}E\right)\Delta t\right) d^n, \qquad n = 0,1,\cdots. \end{aligned}$$

onde $\widehat{B}_{ij} = \widehat{B}_{ij}(t_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^m B_{ijk} d_n^k$.

Usando as funções B-Splines para gerar V^m, podemos calcular as matrizes e depois resolver o sistema linear e encontrar soluções aproximadas do problema.

Referências

[1] BRÉZIS, H. - *Analise Fonctionnelle. Théorie et applications.*, Dunod-Gauthier Villars, Paris, 1999.

[2] HUGLES, T. J. R. - *The finite Element Method Linear Static and Dynamic finite Element Analisys.*, Prentice Hall, 1987.

[3] GOLUB, G. H.; ORTEGA, J.M. - *Scientific computing and Differential Equations - An Introduction to Numerical Methods.*, Academic Press, 1992.

[4] LIU, I-SHI; RINCON, M.A. - *Introdução ao Método dos Elementos Finitos. Análise e Aplicações.*, Editora IM/UFRJ, 2001.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edição N$^{\underline{0}}$ 1 Novembro 2007

HOMOGENEIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA COM CONDIÇÕES DE DIRICHLET RELAXADAS

J. S. SOUZA[1], & J. Q. CHAGAS[2]

Resumo

Neste trabalho, estudamos a homogeneização da equação da onda

$$u'' - Au = f,$$

onde A é um operador elíptico linear de segunda ordem com coeficientes mensuráveis limitados em Ω. Consideramos uma seqüência de problemas de evolução com condições de Dirichlet lineares da forma

$$\begin{cases} u_\varepsilon'' - \operatorname{div}(A^\varepsilon D u_\varepsilon) = f \text{ em } Q_\varepsilon = \Omega^\varepsilon \times (0,T),\ T > 0 \\ u_\varepsilon = 0 \text{ em } \Sigma_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon \times (0,T),\ \Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon(x,0) = u_\varepsilon^0(x) \text{ e } u_\varepsilon'(x,0) = u_\varepsilon^1(x) \text{ em } \Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{0.1}$$

onde as matrizes A^ε e os domínios variáveis Ω^ε dependem do parâmetro ε. (Ou mais geralmente, consideramos uma seqüência de problemas de Dirichlet relaxados, definidos por medidas positivas, para operadores elípticos lineares de segunda ordem sob a forma de divergência com matrizes de coeficientes também variáveis). Os conjuntos Ω^ε, abertos, são todos contidos em um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, fixo, aberto e limitado, e as matrizes A^ε, definidas sobre Ω com coeficientes mensuráveis, são coercivas e limitadas. O processo de homogeneização consiste em estudar o comportamento das soluções u^ε quando ε tende para zero.

No caso especial onde $\Omega^\varepsilon = \Omega$, existe uma subseqüência, ainda denotada por (A^ε), e uma matriz A^0, chamada de H-limite de (A^ε), tal que para cada $f \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$, as soluções v^ε dos problemas

$$\begin{cases} v^\varepsilon \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ {v_\varepsilon}'' - \operatorname{div}(A^\varepsilon D v^\varepsilon) = f, \text{ em } L^\infty(0,T;\mathcal{D}'(\Omega)), \end{cases}$$

convergem fracamente em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ para a solução v^0 de

$$\begin{cases} v^0 \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ v_0'' - \operatorname{div}(A^0 D v^0) = f, \text{ em } L^\infty(0,T;\mathcal{D}'(\Omega)), \end{cases}$$

e satisfazem também

$$A^\varepsilon D v^\varepsilon \rightharpoonup A^0 D v^0, \text{ fracamente em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega,\mathbb{R}^n)).$$

Sem fazer qualquer outra hipótese adicional sobre os conjuntos abertos Ω^ε, prova-se que existe uma subseqüência, ainda denotada por (Ω^ε), tal que para cada $f \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$, as soluções u^ε de (0.1) convergem para a solução u do problema

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega u'' D y dx - \int_\Omega A^0 D u D y dx + \int_\Omega u y d\mu^0 = < f, y >, \text{ em } Q = \Omega \times (0,T),\ T > 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall\ y \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega,\mu^0)), \\ u(x,0) = u^0(x) \text{ e } u'(x,0) = u^1(x) \text{ em } \Omega, \\ u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega,\mu^0)), \end{cases} \tag{0.2}$$

[1]Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, UFSC, SC, Brasil, jsouza@mtm.ufsc.br
[2]Departamento de Matemática e Estatística, UEPG, PR, Brasil, jocemarchagas@gmail.com

onde μ^0 pertence a $\mathcal{M}_0^+(\Omega)$, uma classe de medidas de Borel não negativas que tendem para zero sobre qualquer conjunto de capacidade zero, mas que podem assumir o valor $+\infty$ sobre alguns subconjuntos de Ω.

Problemas do tipo (0.2) são chamados de problemas de Dirichlet relaxados, e têm sido estudados para descrever os limites das soluções de (0.1), quando as matrizes A^ε não dependem de ε. Por outro lado, problemas do tipo (0.1) podem ser escritos como problemas de Dirichlet relaxados por considerar as medidas μ^ε, definidas por:

$$\mu^\varepsilon(B) = \begin{cases} 0, \text{ se } cap(B\backslash\Omega^\varepsilon) = 0, \\ +\infty, \text{ caso contrário.} \end{cases} \tag{0.3}$$

Pode-se considerar não somente o problema de Dirichlet (0.1) referente às medidas μ^ε definidas em (0.3), mas num caso mais geral, estudar uma seqüência de problemas de Dirichlet com medidas arbitrárias $\mu^\varepsilon \in \mathcal{M}_0^+(\Omega)$.

Referências

[1] Dal Maso, G.; Garoni, A. - *New results on the asymptotic behaviour of Dirichlet problems in perforated domains*, Math. Models Methods Appl. Sci. 4, (1994), 373-407.

[2] Dal Maso, G.; Murat, F. - *Comportament asymptotique et correcteurs pour des problèmes de Dirichlet lineáires avec des opérateurs et des domaindes qui varient simultainément*, Ann. I. H. Poincaré - AN 21 (2004) 445-486.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edição N$^{\underline{o}}$ 1 Novembro 2007

APPROXIMATION OF THE ANGULAR FLUX FOR CERTAIN RANDOM-MEDIUM TRANSPORT MODELS

M. THOMPSON [*], E. W. LARSEN [†], M. T. DE VILHENA[†], L. BEDIN[‡]

Abstract

In this work results are presented for velocity-averaged solutions of transport equations with fast variation in the absorption and scattering cross-section, including homogenization for 3-dimensional problems involving 1-D spatial heterogeneities. We deal with some particular cases including sub-critical problems in finite regions and with two problems defined in a band $[-X, X] \times \mathbb{R}^2$, involving 1-D spatial heterogeneities, the first using results of [2] and the second under diffusion type hypotheses, using more classical techniques. In the subcritical case the results neither involve periodicity nor stochasticity but merely the fast spatial variation of the absorption cross-section and local scattering cross-section kernel. More precisely, consider the transport equation in a finite convex region $V \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$T\psi \;=\; (\Omega \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \sigma_t(\rho) - \sigma_s(\rho)K)\psi = q(\rho), \quad \mathbf{x} \in V, \tag{0.1}$$

together with the vacuum boundary condition $\psi = 0$ on $\Gamma_- = \{(\mathbf{x}, \Omega),\ n(\mathbf{x}) \cdot \Omega < 0\}$, where $n(\mathbf{x})$ is the outward normal to ∂V and $\Omega \in S^2$ (the unit sphere in $\mathbb{R}^3$), $(K\psi)(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} \psi(\mathbf{x}, \Omega) d\Omega$, $\rho = \mathbf{x}/\epsilon$, $\epsilon > 0$ and we set $V_\epsilon = \epsilon^{-1}V$, $\sigma_t(\rho) = \overline{\sigma}_t + \sigma'_t(\rho)$, $\sigma_s(\rho) = \overline{\sigma}_s + \sigma'_s(\rho)$, $q(\rho) = \overline{q} + q'(\rho)$, $\overline{\sigma}_t = \overline{\sigma}_s + \overline{\sigma}_a$, $\sigma'_t = \sigma'_s + \sigma'_a$. We suppose as well as that there exist constants, σ_t^-, σ_t^+, σ_s^+ such that $0 < \sigma_t^- \le \sigma_t \le \sigma_t^+$, $\sigma_s \le \sigma_s^+$ and $\frac{\sigma_s^+}{\sigma_t^-} < 1$, with positive constants $\overline{\sigma}_t$, $\overline{\sigma}_s$. Let $\widehat{f}(\mathbf{x}) = \int_{S^2} f(\mathbf{x}, \Omega) d\Omega = \langle f(\mathbf{x}, .)\rangle$ and suppose that $\|\sigma'_a\|_{L^r(V_\epsilon)} = O(\epsilon^{-\beta})$, $\|q'\|_{L^2(V_\epsilon)} = O(\epsilon^{-\beta})$, $\beta > 0$, and $\widehat{q} \in L^p(V)$, $1/p + 1/r = 1$, $p > 3$. Consider the solution ψ_0 of (0.1) corresponding to σ'_t, σ'_s, $q' = 0$. A standard calculation shows that the integrated flux $\varphi_0 = \widehat{\psi}_0$ satisfies the equation $\varphi_0 - \frac{\overline{\sigma}_s}{4\pi} F_V^{\overline{\sigma}_t} \varphi_0 = F_V^{\overline{\sigma}_t} \overline{q}$, where $F_V^\lambda h = \int_V \frac{e^{-\lambda|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} h(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$. Writing F_V^λ as F^λ and $F_V^{\overline{\sigma}_t}$ as F (F_∞ correspond to $V = \mathbb{R}^3$) and using a variational calculation we see that $\lambda_V = \|F\| \uparrow \|F_\infty\|$ and $\|F_\infty\| = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\overline{\sigma}_t|z|}}{|z|^2} d\mathbf{z} = 4\pi \int_0^\infty e^{-\overline{\sigma}_t r} dr = \frac{4\pi}{\overline{\sigma}_t}$, using a standard result on convolution operators. It follows that $\frac{\overline{\sigma}_s}{4\pi}\lambda_V = \frac{\overline{\sigma}_s}{4\pi}\|F\| < \frac{\overline{\sigma}_s}{4\pi}\|F_\infty\| = \frac{\overline{\sigma}_s}{4\pi}\frac{4\pi}{\overline{\sigma}_t} < 1$ and $\left(I - \frac{\overline{\sigma}_s}{4\pi}F\right)^{-1} \in B(L^2(V), L^2(V))$. So that, we have $\varphi_0 = \left(I - \frac{\overline{\sigma}_s}{4\pi}F\right)^{-1} F\overline{q}$ and the following asymptotic approximation can be established

Teorema 0.1. *Suppose that there exist σ_t^-, σ_t^+, $0 < \sigma_t^- < \sigma_t^+$, $\frac{\sigma_s^+}{\sigma_t^-} < 1$ and that σ_t, σ_s, q satisfy $\widehat{q} \in L^2(V)$, $\|\sigma'_t\|_{L^r(V)}$, $\|\sigma'_s\|_{L^r(V)} = O(\epsilon^{-\beta})$, $0 \le \beta < 3/r$, $1/r + 1/p = 1/2$, $\|q'\|_{L^r(V)} = O(\epsilon^{-\beta})$, then $\widehat{\psi}(\mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x}) + O(\epsilon^{3/2-\beta})$ in the L^2 norm and φ_0 is the solution of $\varphi_0 - \frac{\overline{\sigma}_s}{4\pi} F_V^{\overline{\sigma}_t} \varphi_0 = F_V^{\overline{\sigma}_t} \overline{q}$.*

Considering the one dimensional case, with fast variation in the homogeneous stochastic absorption cross-section and scattering kernel, we have obtained the following homogenization result

Teorema 0.2. *Suppose that $\sigma_t(\rho, \omega)$, $\sigma_s(\rho, \omega)$, $q(\rho, \omega)$ are one-dimensional homogeneous stochastic with mixing action and that $\sqrt{\epsilon}\eta(\epsilon)^{-1} = o(1)$. In the case of q we assume that the behavior is $O(\tau^{-\alpha})\overline{k}(\mathbf{x})$, $\overline{k} \in L^2(V)$. Assume also that $\sigma_t - \sigma_s \ge \eta(\epsilon) > 0$; $\overline{q} \le const$, $|\sigma'_\rho| \le const$, $|\sigma'_s| \le const$, then with ψ_0 given by*

$$\Omega \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\psi_0 + \overline{\sigma}_t\psi_0 - \overline{\sigma}_s K\psi_0 = \overline{q}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in [-X, X] \times \mathbb{R}^2,\ \Omega \in S^2, \quad \psi_0|_{\Gamma_-} = 0.$$

the following asymptotic estimate holds for the solution ψ of (0.1): $[\|\psi - \psi_0\|] = o\left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{\eta(\epsilon)}\right) = o(1)$ as $\epsilon \downarrow 0$.

[*]Universidade Federal do Rio Grande do Sul, IM, RS, Brasil, thompson@mat.ufrgs.br, vilhena@mat.ufrgs.br
[†]University of Michigan, Department of Nuclear Engineering and Radiological Sciences, Ann Arbor, edlarsen@umich.edu
[‡]Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Matemática, SC, Brasil, luciano@mtm.ufsc.br

In some unpublished lectures E. Larsen has given a formal asymptotic expansion for a random band transport problem leading to an anisotropic diffusion. This heuristic derivation can be justified using standard arguments (see [5], [3]) and a appropriate diffusion formulation (see [1]) leading to

$$\epsilon\Omega \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\psi + \sigma_t(\rho, w)\psi = \sigma_s(\rho, w)K\psi + \epsilon^2 q(\rho, \mathbf{x}, w),\ \mathbf{x} \in V = [-X, X] \times \mathbb{R}^2,\ \Omega \in S^2,\ \psi|_{\Gamma^\epsilon_-} = 0. \tag{0.2}$$

We take the following hypothesis on σ_t, σ_s, q. $D2$, in part, reflects the diffusion approximation

D1 $\sigma_t(\rho, w)$, $\sigma_s(\rho, w)$, $q(\rho, \mathbf{x}, w)$ are one-dimensional ergodic homogeneous stochastic processes, $q(\rho, \mathbf{x}, w) = \overline{q}(\mathbf{x})(1 + q'(\rho, w))$, $E(q'(0, .)) = 0$.

D2 $\sigma_s(\rho, w) = \sigma_t(\rho, w) - \epsilon^2\sigma_a(\rho, w)$, $\sigma_t(\rho, w) = \overline{\sigma}_t(1 + \frac{dg_t(\rho,w)}{d\rho}) = \overline{\sigma}_t + \sigma'_t$, $E(D_1\widetilde{g}_t) = 0$.

D3 $\overline{\sigma}_a = E(\sigma_a(0, .)) > 0$, $\|D_1\widetilde{g}_t(.)\|_{L^2(A,P)} \leq \alpha < 1$, $|\sigma'_a(\rho, w)| \leq (1/2)|\overline{\sigma}_a|$, $|\sigma'_t| \leq (1/2)\overline{\sigma}_t$.

The usual two-scale formulation lead us to the equations

$$\epsilon\Omega \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\psi + \mu\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \sigma_t(\rho) = \sigma_s(\rho)K\psi + \epsilon^2 q(\rho, \mathbf{x}, w),\ \psi|_{\Gamma_-} = 0,\ \mathbf{x} \in V,\ \Omega \in S^2.$$

A formal attempt to solve the above equation by an asymptotic series in ϵ: $\psi = \psi_0 + \epsilon\psi_1 + \epsilon^2\psi_2 + ...$ leads to a sequence of equations $\mathcal{L}\psi_n = \mu\frac{\partial\psi_n}{\partial\rho} + \sigma_t(\rho)\psi_n - \sigma_t(\rho)K\psi_n = -\Omega\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\psi_{n-1} - \sigma_a(\rho)K\psi_{n-2}$ setting conveniently $\psi_{-1} = \psi_{-2} = 0$. The zero order term leads to $\psi = \psi_0(\mathbf{x})$, $\psi_0|_{\partial V} = 0$. The next equation has the form $\mathcal{L}\psi_1 = -\Omega \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\psi_0$ with a particular solution given by $\psi_1 = -\psi_1^j\frac{\partial\psi_0}{\partial x_j}$ where $\mathcal{L}\psi_1^j = \Omega_j$, $\Omega_1 = \mu = \cos\theta$, $\Omega_2 = \eta = \sqrt{1-\mu^2}\cos\phi$, $\Omega_3 = \zeta = \sqrt{1-\mu^2}\sin\phi$. Following an idea of Larsen we propose $\psi_1^1 = \frac{\mu}{\overline{\sigma}_t} - g_t(\rho)$, $\psi_1^2 = h(\rho, \mu, w)\eta$, $\psi_1^3 = h(\rho, \mu, w)\zeta$, where $\mu\frac{\partial h}{\partial\rho} + \sigma_t h = 1$. We seek a solution of h in the form $h(\rho, \mu, w) = T_\rho\widetilde{h}(\mu, w)$, such that $\widetilde{\mathcal{L}}\widetilde{h} = i\mu D_1\widetilde{h} + \overline{\sigma}_t\widetilde{h} + \widetilde{\sigma'_t} * \widetilde{h} = \widetilde{1}$ in the space $L^2(S \times A, d\Omega dP)$, and obtain the following result

Teorema 0.3. *Suppose that the absorption and scattering coefficients together with the source satisfy the hypothesis D1 to D3. Then the solution of the transport problem (0.2) is approximated by the solution of the anisotropic diffusion problem* $-\langle E(\Omega_i\partial_i\widetilde{\psi}_1^j)\rangle\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x_i\partial x_j} + \overline{\sigma}_a\psi_0 = \overline{q}$, $\widetilde{\psi} \in D(\widetilde{\mathcal{L}})$ *as* $\epsilon \downarrow 0$ *in norm on* $L^2(V, S^2, A)$.

References

[1] Dautray, R., and Lions, J. L. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, vol. 6. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[2] Dumas, L., and Golse, F. Homogenization of transport equations. *SIAM J. Appl. Math. 60* (2000), 1447–1470.

[3] Larsen, E. W. Asymptotic derivation of the atomic mix diffusion model for 1-d random diffusive media. *Proccedings* 18^{th} *International Congress on Transport Theory* (2003), 129–132.

[4] Mokhtar-Kharroubi, M. *Mathematical Topics in Neutron Transport Theory.* World Scientific, Singapore, 1997.

[5] Papanicolaou, G., and Varadhan, S. R. S. Boundary value problems with rapidly oscillating random coefficients. In *Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, Random Fields* (Esztergom, Hungria, 1979), vol. 27, pp. 835–873.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edition N$^{\underline{o}}$ 1 November 2007

SOBRE A EQUAÇÃO DE BENJAMIN-BONA-MAHONY

R. VALE [1], M. A. RINCON [2] & J. LÍMACO [3]

Resumo

Neste trabalho estudamos existência, unicidade, assim como Análise Numérica da Equação de Benjamin-Bona-Mahony em domínios cilíndricos e não cilíndricos. Os primeiros resultados de existência e unicidade de soluções em domínios não cilíndricos foram estabelecidos em [2]. Trabalhos em análise numérica para esse problema, não são conhecidos pelos autores. Para encontrar numericamente uma solução, aplicaremos o método de Elementos Finitos, usando splines cúbicas como função base para a variável espacial e o método de Diferenças Finitas para a variável temporal.

Consideramos domínios não cilíndricos da forma

$$\hat{Q} = \Big\{(x,t) \in \mathbb{R}^2; \alpha(t) < x < \beta(t), \quad \forall t \geq 0\Big\},$$

onde

$$\alpha,\ \beta \in \mathcal{C}^2([0,T];\mathbb{R}), \qquad \alpha(t) < \beta(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Queremos determinar uma solução $u : \widehat{Q} \to \mathbb{R}$ satisfazendo:

$$\begin{cases} u_t + (u+u^2)_x - u_{xxt} = 0, \quad \text{em } \widehat{Q} \\ u(x,\, t) = 0, \quad \text{em } \sum \\ u(x,\, 0) = u_0(x) \quad \forall x \in [\alpha(0), \beta(0)]. \end{cases} \tag{0.1}$$

Resultado de existência e unicidade para o problema (0.1) foi estabelecido pelo seguinte teorema:

Teorema 0.1. *Dado* $u_0 \in H_0^1(\Omega_0) \cap H^2(\Omega_0)$ *existe uma única função* $u : \widehat{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$*, satisfazendo*

$$u \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega_t)),$$

$$u_t \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega_t))$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\widehat{Q}} u_t \phi \, dxdt + \int_{\widehat{Q}} (u+u^2)_x \phi \, dxdt + \int_{\widehat{Q}} u_{xt} \phi_x \;\; dxdt = 0, \quad \forall \phi \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega_t)) \\ u(x,\, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in (\alpha(0), \beta(0)). \end{cases}$$

A demonstração deste teorema consiste em transformar o problema (0.1) mediante a mudança de variáveis $u(x,\, t) = v(y,t)$, onde $y = \Big(\dfrac{x-\alpha(t)}{\gamma(t)}\Big)$ com $\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t)$ num problema equivalente em domínios cilíndricos dado por:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{\partial(v+v^2)}{\partial y} - \dfrac{1}{\gamma^2}\dfrac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial t} - \dfrac{(\alpha' + \gamma' y)}{\gamma}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{2\gamma'}{\gamma^3}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{(\alpha' + \gamma' y)}{\gamma^3}\dfrac{\partial^3 v}{\partial y^3} = 0 \quad \text{em} \quad Q, \\ v(0,\, t) = v(1,\, t) = 0 \quad \forall\, t \geq 0, \\ v(y,\, 0) = v_0(y) \quad \text{em} \quad \Omega = (0,\, 1), \end{cases} \tag{0.2}$$

onde $Q = (0,1) \times (0,T)$.

A demonstração de existência e unicidade do problema (0.1) ou equivalentemente para o problema (0.2) pode ser encontrada em [2].

[1] Corresponding author:renata.dovale@bol.com.br
[2] Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM, RJ, Brasil
[3] Universidade Federal Fluminense, IM, RJ, Brasil, jlimaco@vm.uff.br

1 Método de Elementos Finitos

Multiplicando a equação (0.2) por $w \in H_0^1(\Omega)$, integrando em Ω e fazendo alguns cálculos, obtemos a seguinte formulação variacional,

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t} w - b_1(t) \int_0^1 v \frac{\partial w}{\partial y} + 2b_1(t) \int_0^1 v \frac{\partial v_h}{\partial y} w + b_2(t) \int_0^1 \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \frac{\partial w}{\partial y} + \int_0^1 a_1(y,t) v \frac{\partial w}{\partial y} \\ + \quad &\frac{\partial a_1(y,t)}{\partial y} \int_0^1 vw - \frac{\partial a_2(y,t)}{\partial y} \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} - \int_0^1 a_2(y,t) \frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

onde,

$$a_1(y,t) = \frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma}, \quad a_2(y,t) = \frac{\alpha' + \gamma' y}{\gamma^3}, \quad b_1(t) = \frac{1}{\gamma}, \quad b_2(t) = \frac{1}{\gamma^2}, \quad b_3(t) = \frac{2\gamma'}{\gamma^3} \tag{1.4}$$

1.1 Método de Faedo - Galerkin e Aproximação

Seja V_m o subespaço gerado por $[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m]$, onde $\varphi_i, i \in \mathbb{N}$ são os m primeiros vetores do espaço $V = H_0^1(\Omega)$. Restringindo a equação (1.3) no subespaço V_m e tomando em particular $w = \varphi_k \in V_m$ obtemos o seguinte sistema não linear de equações diferenciais ordinárias na variável $d(t) = (d_1(t), ..., d_m(t))$.

$$\begin{cases} \Big(A + b_2(t)E\Big)d'(t) + \Big(- b_1(t)B + D + \dfrac{\partial a_1(y,t)}{\partial y} A - \dfrac{\partial a_2(y,t)}{\partial y} E - C\Big) d(t) + 2b_1(t) B_{ijk}\, d^2(t) = 0 \\ d(0) = d_0 \end{cases} \tag{1.5}$$

onde

$$A = \int_0^1 \varphi_i(y)\varphi_k(y)dy, \qquad B = \int_0^1 \varphi_i(y) \frac{\varphi_k}{\partial y}(y) dy, \qquad C = \int_0^1 a_2(y,t) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2}(y) \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}(y) dy$$

$$D = \int_0^1 a_1(y,t)\varphi_i(y) \frac{\varphi_k}{\partial y}(y) dy, \qquad E = \int_0^1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(y) \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}(y) dy, \qquad B_{ijk} = \Big(\varphi_i(y) \frac{\partial \varphi_j(y)}{\partial y} \, , \, \varphi_k\Big)$$

Usando o procedimento de linearização do tensor juntamente com o método de Crank-Nicolson em (1.5), obtemos o seguinte método iterativo: Para $n = 0, 1, \cdots$

$$\begin{aligned} &\left((A + b_2^n E) + \Big(- b_1^n B + 2b_1^n \widehat{B} + D + \frac{\partial a_1^n(y)}{\partial y} A - \frac{\partial a_2^n(y)}{\partial y} E - C\Big) \frac{\Delta t}{2} \right) d^{n+1} = \\ &\qquad \left((A + b_2^n E) - \Big(- b_1^n B + 2b_1^n \widehat{B} + D + \frac{\partial a_1^n(y)}{\partial y} A - \frac{\partial a_2^n(y)}{\partial y} E - C\Big) \frac{\Delta t}{2} \right) d^n, \end{aligned} \tag{1.6}$$

onde $\widehat{B} = \widehat{B}_{ki}^n = \Big(B_{ijk} d_j^n\Big)$. Usando B-splines como base do subespaço V_m, podemos calcular as matrizes e então resolvendo o sistema linear encontramos uma solução aproximada para o problema.

Referências

[1] VALE, R *Análise numérica da equação de Benjamin - Bona - Mahony* / Tese de Mestrado : UFRJ/IM, 2006.

[2] BARRETO, R.K., Caldas, C. S. Q., Gamboa, R e Limaco, J., *On the Rosenau and Benjamin, Bona, Mahony equations in domains with moving Boundary* Eletronic J.of Differential Equations, $n^o 35$, (2004), 12.

[3] MEDEIROS, L. A. & MILLA, M. M. A., *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais.* Textos de Métodos Matemáticos, N° 25 IM-UFRJ, Rio de Janeiro (1993).

[4] RINCON, M.A, Liu, I.S. *Introdução ao Método de Elementos finitos: Análise e Aplicação* IM / UFRJ, 2^a edição (2001)

[5] SOUZA, B.S; Rincon M.A; Limaco J *Numerical Method , Existence and Uniqueness for Thermoelasticity System with moving boundary* Computational & Applied Mathematics, vol 24 , $439 - 460$ (2005)

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edição N$^{\underline{o}}$ 1 Novembro 2007

RESOLUÇÃO DE UM MODELO BIFÁSICO EM RESERVATÓRIOS PELO MÉTODO DA ATUALIZAÇÃO DE UMA COLUNA DA INVERSA DO JACOBIANO

M. C. ZAMBALDI * & F. MARCONDES †

Resumo

Neste trabalho empregamos uma forma de correção das matrizes Jacobianas que surgem nos sistemas não lineares de um modelo bifásico em reservatórios de petróleo. Em simulações usuais vários sistemas não lineares devem ser resolvidos. No processo de linearização centenas de sistemas lineares aparecem. O método que propomos evita o cálculo explicito do Jacobiano em cada iteração não linear e proporciona uma economia sensível na resolução dos sistemas lineares subjacentes. O método apresenta um desempenho robusto em termos da qualidade da solução e proporciona rapidez na obtenção da mesma.

As equações do modelo bifásico

O modelo aqui considerado representa um modelo bifásico (óleo/água) em simulação de reservatórios cujos detalhes podem ser obtidos em Palagi [5].

Assumindo que existam duas fases imiscívies no reservatório óleo (o) e água (w) e desprezando os efeitos gravitacionais e de pressão capilar, a equação de conservação volumétrica para a fase p pode ser escrita por

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi\frac{S_p}{B_p}\right) = \nabla[\lambda_p \nabla P] + \overline{q}_p,$$

em que ϕ é a porosidade, B_p é o fator de formação volumétrica da fase p, P é a pressão, $\overline{q}_p$ é a vasão volumétrica por unidade de volume e λ_p é a mobilidade na fase p, definida por

$$\lambda_p = K\frac{K_{rp}}{\mu_p B_p},$$

em que K é a permeabilidade absoluta do reservatório, K_{rp} é permeabilidade relativa e μ_p é a viscosidade da faze p.

Escrevendo a equação principal para as fazes óleo e água têm-se três incógnitas (S_o, S_w and P) e duas equações. Para o fechamento do modelo empregamos a equação de conservação global da massa, dada por

$$S_w + S_o = 1.$$

Para a discretização das equações usamos a técnica de volumes finitos em malhas de Voronoi. Consiste num processo de integração das equações no volume de controle bem como no tempo. Como consequência, temos uma sequência de sistemas não lineares evolutivos. Detalhes podem ser obtidos em Palagi [5].

Problemas desta natureza são em geral abordados por linearizações seguidas da utilização de métodos iterativos lineares (Greenbaum [2]). Isso porque os sistemas algébricos emergentes são grandes e esparsos. Nestes casos técnicas de precondicionamento entre outras têm um papel importante no desempenho da metodologia.

*UFSC, SC, Brasil, zambaldi@mtm.ufsc.br
†UFCE, CE, Brasil, marcondes@emc.ufce.br

Métodos de atualização do Jacobiano

Os métodos Quase-Newton (Dennis e Schnabel [1]) evitam o cálculo da matriz Jacobiana a cada iteração. Quando são implementados com técnicas de memória limitada (Martinez e Zambaldi [4]), é possível obter uma economia significativa na resolução dos sistemas lineares.

Suponha que tenhamos isoladamente um sistema de equações algébricas não lineares:

$$F(x) = 0 \; ; \qquad F : I\!R^n \rightarrow I\!R^n \, .$$

Nesses métodos obtêm-se a direção, a partir de um ponto x_k, por

$$d_k = B_k^{-1} F(x_k) \, ,$$

em que B_k é uma aproximação para o Jacobiano de F em x_k. O novo iterado é então obtido por $x_{k+1} = x_k + d_k$. Umas das formas de atualização simplificada para a matriz inversa do Jacobiano é dada por:

$$B_k^{-1} = (I + u_{k-1} s_{k-1}^t) \ldots (I + u_0 s_0^t) B_0 \, ,$$

em que os vetores u_l e s_l, $l = 0, \ldots k-1$, são obtidos de forma que duas aproximações tenham correções de posto um e de forma que a diferença entre elas seja de apenas uma coluna. As matrizes em geral devem satisfazer as chamadas equações secantes dos métodos Quase-Newton (Dennis e Schnabel [1]).

A expressão acima faz que a resolução dos sistemas não lineares seja bastante simplificada, contrariamente ao que ocorre usualmente nas iterações Newtonianas.

Mostramos, por meio de simulações de casos representativos na literatura de modelos bifásicos em reservatórios de petróleo, que a metodologia apresenta resultados robustos e compatíveis que aqueles obtidos por métodos usuais.

Referências

[1] DENNIS, J. E. JR.; SCHNABEL, R. B. - *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations.*, SIAM Philadelphia, 1996.

[2] GREENBAUM, A. - *Iterative Methods for Solving Linear Systems.* SIAM Philadelphia, 1997.

[3] MARCONDES F., ZAMBALDI M. C. AND MALISKA C. R. - *Inexact Newton Methods applied to two-phase flows in porous media using unstructured voronoi meshes* Far East J. of Applied Mathematics V. 14 (2), pp 179-195, 2004.

[4] MARTINEZ J. M., AND ZAMBALDI M. C. - *An Inverse-Column Updating Methods for Solving Large-Scale Nonlinear Systems of Equations*

[5] PALAGI C. - *Generalization and applecation of Voronoi grid to model flow in heterogeneous reservoirs.* Ph. D. Thesis, Stanford University, 1992.

ENAMA - Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações
UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Edition N$^{\underline{o}}$ 1 November 2007

On the Singular Limit of an Abstract Plate Equation *

Victor Rafael Cabanillas Zannini †

Abstract

In this work, we consider the nonlinear abstract plate model

$$\begin{cases} \mu u_{tt} + \delta u_t + A^{\alpha} u + M\left(\left\|A^{\frac{\beta}{2}} u\right\|^2\right) A^{\beta} u + Lu = f \\ \\ u(0) = u_0 \quad , \quad u_t(0) = u_1 \end{cases} \tag{1}$$

on a separable Hilbert space H. We assume the following hypothesis

$(H1)$ $\alpha \geq 2\beta > 0$

$(H2)$ $u_0 \in D\left(A^{\frac{\alpha}{2}}\right),\ u_1 \in H,\ f \in H$

$(H3)$ $M \in C^1(\mathbb{R}^+)$ and $\mathcal{M}(z) = \displaystyle\int_0^z M(\xi)\, d\xi \geq -az - b$ where $0 \leq a < \lambda_1$, $b \in \mathbb{R}$ and λ_1 is the first eigenvalue of the operator A.

As showed in [3], when $(H1) - (H3)$ are fulfilled, problem (1) has a unique weak solution u in the class

$$u \in C\left([0,T]; D\left(A^{\frac{\alpha}{2}}\right)\right) \cap C^1([0,T]; H)$$

If in addition to the hypothesis $(H1) - (H3)$ stated above we assume further that

$(H4)$ there exists positive constants $\gamma,\ a_1,\ a_2$ and a_3 such that $M(z) - a_1 \displaystyle\int_0^z M(s)\, ds \geq a_2 z^{1+\gamma} - a_3$

$(H5)$ there exists $0 \leq \theta < \dfrac{\beta}{2}$ and $C > 0$ such that

$$\|Lu\| \leq C \left\|A^{\frac{\beta}{2}+\theta} u\right\| \ , \ \ \forall\, u \in D\left(A^{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$(H6)$ for some $\sigma > 0$ we have

$$f \in D(A^{\sigma}), \quad LD(A^{\sigma}) \subset D(A^{\sigma}), \quad \|A^{\sigma} Lu\| \leq C \left\|A^{\frac{\alpha}{2}} u\right\|$$

Then the dynamical system $(\mathcal{H}, S_t)$ generated by (1) with $f(t) \equiv f \in H$ is dissipative and possesses a global attractor $\mathcal{A}$ of a finite fractal dimension. This attractor is a connected compact set in $\mathcal{H}$ and is bounded in the space $\mathcal{H}_{\sigma} = D\left(A^{\frac{\alpha}{2}+\sigma}\right) \times D(A^{\sigma})$ where $\sigma > 0$ is defined by $(H6)$. Here $\mathcal{H} = D\left(A^{\frac{\alpha}{2}}\right) \times H$. See [3].

* *Key words:* plate equation, singular limit, global attractor, dynamical system

†Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima-Perú, vcabanillasz@unmsm.edu.pe

The main question discussed in this work is the asymptotic behaviour of the solution to problem (1) for the case when the inertial forces are small with respect to the medium resistance forces $\mu \ll \delta$. Formally, this assumption leads to a quasistatic statement of problem (1)

$$\begin{cases} \delta u_t + A^{\alpha} u + M\left(\left\|A^{\frac{\beta}{2}} u\right\|^2\right) A^{\beta} u + Lu = f \\ \\ u(0) = u_0 \quad , \quad u_t(0) = u_1 \end{cases} \tag{2}$$

Here we prove that the global attractor of problem (1) is close to the global attractor of the dynamical system generated by equation (2) in some sense.

More precisely, if $M \in C^2(\mathbb{R}^+)$ and the hypothesis $(H4) - (H6)$ are fulfilled then the relation

$$\lim_{\mu \to 0} \sup \left\{ dist_{\mathcal{H}}(y, \mathcal{A}^*) \,;\; y \in \mathcal{A}_{\mu} \right\} = 0$$

is valid, where $\mathcal{A}_{\mu}$ is a global attractor of the dynamical system generated by problem (1), and

$$\mathcal{A}^* = \left\{ (z_0; z_1) \,;\; z_0 \in \mathcal{A},\; z_1 = -A^{\alpha} z_0 - M\left(\left\|A^{\frac{\beta}{2}} z_0\right\|^2\right) A^{\beta} z_0 - L z_0 + f \right\}$$

where $\mathcal{A}$ is a global attractor of problem (2).

The asymptotic behaviour of the solution to problem (1) is obtained as consequence of several previous lemmas. A exponential decay rate for u_t and u_{tt} is obtained.

References

[1] Boutet de Monvel L., Chueshov I. D. Non-linear oscillations of a plate in a flow gas. C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I, Vol. 322, 1002-1006. 1996.

[2] Cabanillas Zannini, V. R. Análisis de un sistema de Petrovsky abstracto vía EDO. PESQUIMAT. Vol. VIII – N^0 1 – 2005.

[3] Cabanillas Zannini, V. R. Global Attractors for an Abstract Plate Equation. Atas 62 Seminário Brasileiro de Análise. 2005.

[4] Chueshov, I., Lasiecka, I. Attractors for Second-Order Evolution Equations with a Nonlinear Damping, J. of Dynamics and Differential Equations, Volume 16, N^0 2, 469-512. 2004.

[5] Lions, J. L. *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites nonlinéaires.* Dunod. Paris, 1969.

[6] Temam, R. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics.* Springer-Verlag, New York. 1988.

[7] Zeidler, E. *Nonlinear Functional Analysis*, Vol. II/B, Springer-Verlag. 1986.