I ENAMA
Primeiro
Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações

Mini-Curso II

Introdução às Equações Elípticas

Claudianor O. Alves
Universidade Federal de Campina Grande

Decania do CCMN/UFRJ – IM/UFRJ

Rio de Janeiro, 07-09 de novembro de 2007

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Departamento de Matemática e Estatística

Uma Introdução as Equações Elípticas

por

Claudianor Oliveira Alves

I ENAMA - UFRJ
Rio de Janeiro - Novembro de 2007

Para minha querida esposa Cláudia
e meus amados filhos Caio, Iago e Isaac.

Prefácio

Gostaria de agradecer a Comissão organizadora do I Enama pela oportunidade de ministrar o presente minicurso, em particular a Sandra Malta pela paciência em esperar pelos manuscritos. Uma outra pessoa que não poderia deixar de agradecer, é a colega Luciana Roze, que digitou boa parte do material aqui apresentado, sem a ajuda da mesma não teria conseguido finalizar estas notas.

Com relação ao minicurso, a nossa intenção é motivar a pesquisa na área de *Equações Diferenciais Parciais Elípticas*, que é uma área bastante interessante pois a mesma está relacionada a importantes problemas da Ciência e Tecnologia, e a Matemática usada para resolver algumas classes de tais equações é bastante sofisticada, para não dizer difícil. As referências aqui mencionadas não são muitas, mais acredito serem suficientes para um iniciante conhecer alguns resultados que hoje em dia são considerados básicos nesta linha de pesquisa. Tentamos mostrar diversas formas de atacar alguns problemas, desde o Método de Galerkin a Ação de Grupo Topológico sobre espaços de Banach. Os Métodos aqui tratados em sua maioria podem ser aplicados a alguns problemas envolvendo outros operadores, tais como, o operador p-Laplaciano Δ_p, o operador biharmônico Δ^2.

Rio de Janeiro, Novembro de 2007,

Claudianor Oliveira Alves

Sumário

Capítulo 1

Notações e Resultados Gerais

Neste capítulo faremos uma revisão dos principais resultados envolvendo espaços de Sobolev e Teoria de Regularidade (ver [1, 11]) envolvendo problemas elípticos.

1.1 Espaços de Sobolev e suas imersões

- $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\}$;

- $\|u\|_{H^1(\Omega)} = (\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |u|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (u \in H^1(\Omega))$;

- $H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$;

- (*Imersões de Sobolev*) Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, as seguintes imersões são contínuas:

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega), \ s \in [1, 2^*], \ N \geq 3, \ 2^* = \frac{2N}{N-2},$$

  e

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega), \ s \in [1, +\infty), \ N = 1, 2.$$

  Assim, existe $C > 0$ tal que

$$|u|_s \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}, \ \forall u \in H^1(\Omega)$$

  onde $| \ |_s$ denota a norma no espaço $L^s(\Omega)$.

- (*Imersões de Rellich*) Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, as seguintes imersões são compactas:

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega), \ s \in [1, 2^*), \ N \geq 3,$$

e

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega), \quad s \in [1, +\infty)\,, \; N = 1, 2.$$

Desta forma, se $\{u_n\} \subset H^1(\Omega)$ e $\|u_n\|_{H^1(\Omega)} \leq M \; \forall n \in \mathbb{N}$, existe $\{u_{n_j}\} \subset \{u_n\}$ e $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\Omega)$$

e

$$u_{n_j} \to u \text{ em } L^s(\Omega).$$

Nas convergências acima usamos o fato bem conhecido que o espaço $H^1(\Omega)$ é reflexivo .

- **Desigualdade de Poincaré**. Se Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, existe $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega |u|^2 \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

onde C é independente de u.

- **Desigualdade de Hardy-Sobolev**. Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, ϕ uma autofunção positiva associada ao primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, $\tau \in [0,1]$ e $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1-\tau}{N}$. Então $\frac{u}{\phi^\tau} \in L^q(\Omega)$ e existe $C > 0$ tal que

$$\left| \frac{u}{\phi^\tau} \right|_q \leq C\|u\| \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Devido a desigualdade de Poincaré, podemos considerar em $H_0^1(\Omega)$ a norma

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

a qual é conhecida como a norma usual de $H_0^1(\Omega)$.

Ao longo destas notas, usaremos o símbolo (u, v) para denotar o produto interno associado a norma $\| \; \|$ em $H_0^1(\Omega)$, isto é,

$$(u, v) = \int_\Omega uv \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Exercícios.

1- Mostre que a desigualdade de Poincaré não vale em $H^1(\Omega)$.

2- Mostre que em $H_0^1(\Omega)$, as normas $\| \; \|$ e $\| \; \|_{H^1(\Omega)}$ são equivalentes.

1.2 O Operador Solução

Considere o seguinte problema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, \ \Omega \\ u &= 0, \ \partial\Omega \end{cases} \tag{P_L}$$

onde $f \in L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado.

Recorde que $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca para (P_L) se

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

ou ainda,

$$(u, v) = \varphi(v), \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{1.1}$$

onde $(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v$ e $\varphi(v) = \int_\Omega fv$.

Afirmação 1.1: $\varphi \in (H_0^1(\Omega))'$.

De fato, φ é linear e a continuidade segue usando a desigualdade de Hölder

$$|\varphi(v)| = \left| \int_\Omega fv \right| \le \int_\Omega |f||v| \le |f|_2 |v|_2 \le C|f|_2 \|v\|,$$

logo

$$|\varphi(v)| \le C\|v\|, \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

A igualdade em (1.1) segue imediatamente do Teorema da Representação de Riesz (ver [7]). Portanto, a existência e unicidade de solução fraca para (P_L) fica estabelecida.

Definição 1.1 O Operador Solução $S : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ é definido por $S(f) = u$ onde u é a única solução de (P_L).

O operador solução tem as seguintes propriedades:

1- $S : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ é linear contínuo.

2- O operador Solução pode ser visto de $L^2(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$, isto é, $S : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$

3- Segue das imersões compactas de Sobolev que $S : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é um operador compacto .

4- S é um operador positivo de $L^2(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$, isto é,

$$(S(f), f)_{L^2(\Omega)} \ge 0, \ \ \forall f \in L^2(\Omega).$$

5- Os autovalores de $S : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ são positivos.

6- O operador $S : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é simétrico, isto é, para quaisquer $f, g \in L^2(\Omega)$ temos $(S(f), g)_{L^2(\Omega)} = (f, S(g))_{L^2(\Omega)}$.

7- S admite uma sequência (μ_n) de autovetores com $\mu_n \to 0$ quando $n \to +\infty$ e $L^2(\Omega)$ possui uma base ortonormal total formada por autofunções.
8- μ é autovalor de $S \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{\mu}$ é autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Neste momento, destacamos duas importantes propriedades envolvendo o primeiro autovalor λ_1 de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, que são as seguintes:

- λ_1 é o único autovalor cuja as autofunções tem sinal definido.
- O autoespaço V_{λ_1} tem dimensão 1.

Exercícios.
1- Demonstre todas as propriedades do operador solução S mencionadas anteriormente.
2- Encontre os autovalores e autofunções do problema

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y, \ \ (0,1) \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

1.3 Uma Aplicação da Alternativa de Fredholm

Nesta seção pretendemos usar a Alternativa de Fredholm para encontrar uma condição necessária e suficiente, para garantir a existência de solução para uma classe de problemas elípticos.
Alternativa de Fredholm (ver [7])
Sejam E um espaço de Banach e $T : E \to E$ um operador linear e compacto. Então,

1. $N(I-T)$ tem dimensão finita;
2. $R(I-T)$ é fechado e $R(I-T) = N(I-T^*)^{\perp}$;
3. $N(I-T) = 0 \Leftrightarrow R(I-T) = E$;
4. $dimN(I-T) = dimN(I-T^*)$.

Vamos considerar o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + f, \ \ \Omega \\ \quad\ u &= 0, \ \ \partial\Omega \end{cases} \qquad (PL)_\lambda$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $f \in L^2(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pergunta: Quais as hipóteses sobre λ e f que garantem a existência (ou não existência) de solução para o problema $(PL)_\lambda$?

Para responder a pergunta acima devemos observar primeiro que u é solução de $(PL)_\lambda$ se, e somente se, $u - \lambda S(u) = g$, onde $g = S(f)$.

De fato, u é solução de $(PL)_\lambda$ se, e somente se,

$$S(\lambda u + f) = u \Leftrightarrow u - \lambda S(u) = g,\ g = S(f).$$

Se $\lambda = 0$, o problema sempre tem solução. Vamos supor $\lambda \neq 0$ e assim, u é solução de $(PL)_\lambda$ se, e somente se

$$u - Tu = g,$$

com

$$T = \lambda S.$$

Se $\lambda \neq \lambda_j\ \forall j \in \mathbb{N}$, temos

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \neq \mu_j,\ \forall j \in \mathbb{N},$$

o que implica

$$N(\mu I - S) = \{0\}.$$

Segue da Alternativa de Fredholm que a equação

$$u - Tu = g,$$

tem solução única para cada $g \in L^2(\Omega)$.

Supondo que $\lambda = \lambda_j$ para algum $j \in \mathbb{N}$ e recordando que nosso caso

$$R(I - T) = N(I - T)^\perp,$$

pois $T = T^*$ (S é simétrico), temos que o problema $(PL)_\lambda$ tem solução se, e somente se, $g = S(f)$ é ortogonal (em $L^2(\Omega)$) a todas as autofunções associadas ao autovalor λ_j, isto é, para toda $\phi_j \in V_{\lambda_j}$

$$(S(f), \phi_j)_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Assim,

$$\int_\Omega \nabla\phi_j \nabla S(f) = \lambda_j \int_\Omega S(f)\phi_j = 0,\ \ \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

ou seja,

$$(S(f), \phi_j) = 0.$$

Mas,

$$\begin{cases} -\Delta(S(f)) &= f,\ \Omega \\ S(f) &= 0,\ \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

o que implica,

$$\int_\Omega \nabla S(f)\nabla\varphi = \int_\Omega f\varphi, \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega)$$

e portanto

$$(f, \phi_j)_{L^2(\Omega)} = 0,$$

mostrando que o problema elíptico tem solução se, e somente se, $f \in (V_{\lambda_j})^\perp$ em $L^2(\Omega)$.

1.4 Uma aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach

Nesta seção pretendemos usar o Teorema do Ponto Fixo de Banach para encontrar solução para uma classe de problemas elípticos.

Teorema do ponto fixo de Banach. (ver [12]) Se X é um espaço de Banach e $T : X \to X$ uma contração, existe $x_0 \in X$ tal que $T(x_0) = x_0$. Além disso, tal ponto fixo é único.

Pretendemos usar o teorema acima, para estudar a existência de solução para o seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u &=& f(x,u), \;\; \Omega \\ u &=& 0, \;\; \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{P_1}$$

Por uma solução fraca de (P_1), entendemos como sendo uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ que verifica

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega f(x,u)v, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Teorema 1.1 *Se $f : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua limitada e Lipschitziana na segunda variável, isto é, existem $M_1, M_2 > 0$ verificando*

$$|f(x,t)| \leq M_1 \;\; \forall t \in \mathbb{R}, \;\; \forall x \in \Omega$$

e

$$|f(x,t) - f(x,s)| \leq M_2|t-s| \;\; \forall s,t \in \mathbb{R}, \;\; \forall x \in \Omega$$

e se $\|S\|M_2 < 1$, onde $\|S\|$ denota a norma do operador solução $S : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, o problema (P_1) tem uma solução. Além disso, tal solução é única.

Demonstração. Definindo o operador $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ dado por

$$T(v) = S(f(.,v)) \;\; \forall v \in L^2(\Omega),$$

observe que para todo $v \in L^2(\Omega)$, $f(.,v) \in L^2(\Omega)$ e

$$|T(u) - T(v)|_2 = |S(f(.,u)) - S(f(.,v))|_2 = |S(f(.,u) - f(.,v))|_2$$

onde $|\;\;|_2$ denota a norma em $L^2(\Omega)$.

Da continuidade do operador solução,

$$|T(u)-T(v)|_2 \leq \|S\||f(.,u)-f(.,v)|_2 \leq \|S\|M_2|u-v|_2.$$

Desde que por hipótese $\|S\|M_2 < 1$, podemos concluir que T é uma contração e pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe $u \in L^2(\Omega)$ verificando

$$T(u) = u \Longleftrightarrow S(f(.,u)) = u.$$

Segue da igualdade acima e da definição de operador solução S que $u \in H_0^1(\Omega)$ e que u é a solução procurada. ■

1.5 Teoria da Regularidade

Vamos considerar a seguinte classe de problemas elípticos

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u), \ \ \Omega \\ \quad u &= 0, \ \ \partial\Omega \end{cases} \tag{P_1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, f é uma função de classe $C^1(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfazendo

$$|f(x,t)| \leq c_1 + c_2|t|^p, \ \ \forall x \in \Omega \ \text{ e } \ t \in \mathbb{R}$$

onde $p \in (1, 2^* - 1)$ se $N \geq 3$ e $p \in (1, +\infty)$ se $N = 1, 2$, onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$.

Teorema de Agmon, Douglas e Niremberg (ADN). (ver [2])
Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave, $f \in L^r(\Omega)$ com $r > 1$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x), \ \ \Omega \\ \quad u &= 0, \ \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_L}$$

Então $u \in W^{2,r}(\Omega)$ e existe $C > 0$ (independente de u) tal que

$$\|u\|_{W^{2,r}(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^r}.$$

O teorema acima afirma que dado $f \in L^r(\Omega)$ existe uma única solução $u \in W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)$ do problema (P_L). Além disso, vale também a seguinte afirmação

$$f \in W^{k,r}(\overline{\Omega}) \Rightarrow u \in W^{k+2,r}(\overline{\Omega}).$$

Teorema de Schauder. (ver [16])
Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave e $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Então existe $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x), \ \ \Omega \\ \quad u &= 0, \ \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso, existe $C > 0$ (independente de u) tal que

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\|f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$$

Observação 1.1: No Teorema de Schauder vale a seguinte afirmação

$$f \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \Rightarrow u \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

1.5.1 Regularidade das autofunções - Parte I

Seja $\phi \in H_0^1(\Omega)$ uma autofunção associada a um autovalor λ_j, isto é,

$$\begin{cases} -\Delta\phi &= \lambda_j\phi, \ \Omega \\ \phi &= 0, \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Sabemos que $\phi \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, isto é, $\phi \in L^2(\Omega)$, logo por (ADN) $\phi \in W^{2,2}(\Omega)$.

Recordando que vale a imersão contínua

$$W^{k,r}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}), \ \text{para} \ k \approx \infty \tag{1.2}$$

temos por (ADN) que

$$\phi \in W^{2,2}(\Omega) \Rightarrow \phi \in W^{4,2}(\Omega) \Rightarrow \phi \in W^{6,2}(\Omega) \Rightarrow ... \Rightarrow \phi \in W^{k,2}(\Omega), \ \forall k \geq 1,$$

consequentemente, por (1.2),

$$\phi \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Usando a teoria clássica de Schauder,

$$\phi \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \Rightarrow \phi \in C^{3,\alpha}(\overline{\Omega}) \Rightarrow \phi \in C^{5,\alpha}(\overline{\Omega}) \Rightarrow ... \Rightarrow \phi \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}), \quad \forall k \geq 1,$$

mostrando que

$$\phi \in C^{\infty}(\overline{\Omega}).$$

1.5.2 Regularidade das autofunções- Parte II.

Sabemos que $\phi \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, isto é, $\phi \in L^2(\Omega)$, logo por (ADN) $\phi \in W^{2,2}(\Omega)$.

Observe que $\frac{1}{2} - \frac{2}{N} \leq 0$ se, e somente se, $N \leq 4$ e neste caso,

$$W^{2,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \ \forall q \in [1, +\infty),$$

o que implica

$$\phi \in L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, +\infty)$$

logo, por (ADN)

$$\phi \in W^{2,q}(\Omega), \quad \forall q \in [1, +\infty)\,.$$

Escolhendo q de maneira que $1 > \frac{N}{q}$, temos

$$W^{2,q}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}),\ \ 0 < \alpha < 1 - \frac{N}{q}.$$

Logo, pela teoria clássica de Schauder $\phi \in C^{3,\alpha}(\overline{\Omega})$, e repetindo o estudo feito anteriormente vamos concluir que

$$\phi \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}), \quad , \forall k \geq 1$$

e portanto $\phi \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$.

Suponhamos agora que $\frac{1}{2} - \frac{2}{N} > 0$, usando as imersões de Sobolev

$$W^{2,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{q^*}(\Omega),$$

onde $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{2} - \frac{2}{N} \Rightarrow q^* = \frac{2N}{N-4}$. Desta forma, $\phi \in L^{q^*}(\Omega)$ e por (ADN) $\phi \in W^{2,q^*}(\Omega)$.

Note que $\frac{1}{q^*} - \frac{2}{N} \leq 0$ é equivalente a $5 \leq N \leq 8$, e nesta situação

$$W^{2,q^*}(\Omega) \hookrightarrow L^{s}(\Omega), \quad \forall s \in [1, +\infty)\,.$$

Assim,

$$\phi \in L^{s}(\Omega) \quad \forall s \in [1, +\infty)$$

e por (ADN)

$$\phi \in W^{2,s}(\Omega)\ \ \forall s \in [1, +\infty)\,.$$

Escolhendo s suficientemente grande, temos

$$W^{2,s}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}),\ \ 0 < \alpha < 1 - \frac{N}{s},$$

mostrando que $\phi \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega},)$ de onde segue da teoria clássica de Schauder que $\phi \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$. Se $\frac{1}{q^*} - \frac{2}{N} > 0$, devemos ter

$$W^{2,q^*}(\Omega) \hookrightarrow L^{q^{**}}(\Omega),$$

onde $\frac{1}{q^{**}} = \frac{1}{q^*} - \frac{2}{N}$, ou seja,

$$\frac{1}{q^{**}} = \frac{1}{2} - \frac{2}{N} - \frac{2}{N} = \frac{N-8}{2N} \Leftrightarrow q^{**} = \frac{2N}{N-8}.$$

Desta forma, $\phi \in L^{q^{**}}(\Omega)$ e por (ADN), $\phi \in W^{2,q^{**}}(\Omega)$.

Neste caso $\frac{1}{q^{**}} - \frac{2}{N} \leq 0 \Leftrightarrow 9 \leq N \leq 12$, logo pelas imersões de Sobolev

$$W^{2,q^{**}}(\Omega) \hookrightarrow L^{t}(\Omega), \quad \forall t \in [1, +\infty)\,,$$

ou seja,

$$\phi \in L^t(\Omega) \ \ \forall t \in [1, +\infty)\,.$$

Aplicando novamente (ADN),

$$\phi \in W^{2,t}(\Omega) \quad \forall t \in [1, +\infty)\,.$$

Fixando t suficientemente grande, temos

$$W^{2,t}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}), \ \ 0 < \alpha < 1 - \frac{N}{t},$$

mostrando que $\phi \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, e pela teoria clássica de Schauder teremos $\phi \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$.

Repetindo este argumento, é possível mostrar que fazendo apenas um número finito de interações, obtemos a regularidade de ϕ.

1.5.3 Regularidade para problemas subcríticos.

Usando as ideias utilizadas na demostração da regularidade das autofunções, desejamos mostrar a regularidade de uma classe mais geral de problemas elípticos (ver [15]), mais precisamente do tipo

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u & = & f(x,u), \ \ \Omega \\ u & = & 0, \ \ \partial\Omega \end{array} \right. \tag{P_2}$$

onde

$$|f(x,t)| \leq C_1 + C_2|t|^p. \tag{1.3}$$

com $0 < p < \frac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$ e $1 < p < +\infty$ se $N = 1, 2$.

O crescimento assumido em (1.3) é conhecido como **Crescimento Subcrítico**.

Se considerarmos a função $\widetilde{f}(x) = f(x, u(x))$ temos

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u & = & \widetilde{f}(x), \ \ \Omega \\ u & = & 0, \ \ \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{1.4}$$

Observe que $\widetilde{f} \in L^{\frac{2^*}{p}}$ onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$, $(N \geq 3)$ pois,

$$|\widetilde{f}|^{\frac{2^*}{p}} \leq (C_1 + C_2|u(x)|^p)^{\frac{2^*}{p}} \leq (C_1^{\frac{2^*}{p}} + C_2^{\frac{2^*}{p}}|u(x)|^{2^*})2^{\frac{2^*}{p}}.$$

Assim,

$$\int_{\Omega} |\widetilde{f}|^{\frac{2^*}{p}} dx < +\infty,$$

pois $u \in L^{2^*}(\Omega)$. Usando (ADN), temos que $u \in W^{2,\frac{2^*}{p}}(\Omega)$.

Se $\frac{p}{2^*} - \frac{2}{N} \leq 0$,

$$W^{2,\frac{2^*}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega), \ \ \forall s \in [1, +\infty)\,.$$

Fixando $s > Np$

$$W^{2,\frac{2^*}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega),$$

de onde segue que $u \in L^s(\Omega)$ e $\widetilde{f} \in L^{\frac{s}{p}}(\Omega)$. Logo por (ADN)

$$u \in W^{2,\frac{s}{p}}(\Omega),$$

e pelas imersões de Sobolev

$$W^{2,\frac{s}{p}}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}), \ \ 0 < \alpha < 1 - \frac{pN}{s}.$$

Assumindo como hipótese $f(.,u(.)) \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ vamos ter $\widetilde{f} \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, logo pelas estimativas de Schauder $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Suponhamos agora que $\frac{2^*}{p} - \frac{2}{N} > 0$. Segue das imersões de Sobolev

$$W^{2,\frac{2^*}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^{t_1}(\Omega),$$

onde $\frac{1}{t_1} = \frac{p}{2^*} - \frac{2}{N}$. Desta forma, $u \in L^{t_1}(\Omega)$. Repetindo os argumentos anteriores, vamos obter $\widetilde{f} \in L^{\frac{t_1}{p}}(\Omega)$ e por (ADN)

$$u \in W^{2,\frac{t_1}{p}}(\Omega).$$

Se $\frac{p}{t_1} - \frac{2}{N} \leq 0$, tem-se

$$W^{2,\frac{t_1}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega), \quad \forall s \in [1, +\infty).$$

Portanto

$$u \in L^s(\Omega) \quad \forall s \in [1, +\infty),$$

e assim,

$$u \in W^{2,\frac{s}{p}}(\Omega), \quad \forall s \in (p, +\infty)$$

Fixando $s > Np$,

$$W^{2,\frac{s}{p}}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}), \ \ 0 < \alpha < 1 - \frac{Np}{s},$$

e portanto, $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Usando os resultados da teoria clássica de Schauder podemos concluir que $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Se $\frac{p}{t_1} - \frac{2}{N} > 0$,

$$W^{2,\frac{t_1}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^{t_2}(\Omega),$$

com $\frac{1}{t_2} = \frac{p}{t_1} - \frac{2}{N}$. Prosseguindo, encontramos $u \in L^{t_2}(\Omega)$, $\widetilde{f} \in L^{\frac{t_2}{p}}(\Omega)$, e por (ADN)

$$u \in W^{2,\frac{t_2}{p}}(\Omega).$$

Se $\frac{p}{t_2} - \frac{2}{N} \leq 0$ devemos ter

$$W^{2,\frac{t_2}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega), \ \ \forall s \in [p, +\infty)\,,$$

o que implica

$$u \in L^s(\Omega), \quad \forall s \in [s, +\infty)\,,$$

e assim,

$$u \in W^{2,\frac{s}{p}}(\Omega), \quad \forall s \in (p, +\infty)\,.$$

Repetindo os mesmos argumentos usados até o presente momento, vamos encontrar $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

De maneira geral, vamos encontrar

$$\frac{1}{t_j} = \frac{p}{t_{j-1}} - \frac{2}{N},$$

e assim

$$\frac{1}{t_1} = \frac{p}{2^*} - \frac{2}{N},$$

e

$$\frac{1}{t_2} = \frac{p}{t_1} - \frac{2}{N} = p(\frac{p}{2^*} - \frac{2}{N}) - \frac{2}{N} = \frac{p^2}{2^*} - \frac{2(p+1)}{N},$$

logo,

$$\frac{1}{t_3} = \frac{p}{t_2} - \frac{2}{N} = \frac{p^3}{2^*} - \frac{2(p+1)p}{N} - \frac{2}{N} = \frac{p^3}{2^*} - \frac{2}{N}(p^2+p+1)$$

e

$$\frac{1}{t_4} = \frac{p}{t_3} - \frac{2}{N} = \frac{p^4}{2^*} - \frac{2p(p^2+p+1)}{N} - \frac{2}{N} = \frac{p^4}{2^*} - \frac{2}{N}(p^3+p^2+p+1).$$

No caso geral, vamos ficar com

$$\frac{1}{t_j} = \frac{p^j}{2^*} - \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{j-1} p^k = \frac{p^j}{2^*} - \frac{2}{N}(\frac{p^j-1}{p-1}) = (\frac{1}{2^*} - \frac{2}{N(p-1)})p^j + \frac{2}{N(p-1)}.$$

Uma vez que,

$$\frac{1}{2^*} - \frac{2}{N(p-1)} < 0 \Leftrightarrow p < \frac{N+2}{N-2},$$

temos que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{p}{t_j} - \frac{2}{N} < 0,$$

mostrando que a interação finaliza após número finito de passos.

Observaçã 1.2: O argumento bootstrap também pode ser utilizado para outras classe de problemas elípticos, em particular para uma classe de sistemas do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u &=& f(x,u,v), \ \ \Omega \\ -\Delta v &=& g(x,u,v), \ \ \Omega \\ u, v &=& 0, \ \ \partial\Omega \end{cases} \tag{P_3}$$

Capítulo 2

O Método de Galerkin

Neste Capítulo pretendemos mostrar a existência de solução para a seguinte classe de problemas singulares

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{u^\gamma}, & \Omega \\ u > 0, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases} \tag{P_4}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $N \geq 2$ e $0 < \gamma < 1$. O Método que utilizaremos é conhecido como o **Método de Galerkin**.

2.1 Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Começamos esta seção enunciando o Teorema do ponto Fixo de Brouwer cuja demonstração pode ser encontrada em [12].

Teorema 3.1 *Seja $f : \overline{B}_r(x) \to \overline{B}_r(x)$ com $\overline{B}_r(x) \subset \mathbb{R}^N$ uma função contínua. Então, existe $z \in \overline{B}_r(x)$ tal que $f(z) = z$, isto é, f tem um ponto fixo z em $\overline{B}_r(0)$.*

Uma importante consequência do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer é o seguinte resultado

Lemma Fundamental (ver [14])
Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ uma função contínua com $\langle f(x), x\rangle \geq 0$, para todo x verificando $|x| = R > 0$. Então, existe $z_0 \in \overline{B}_r(0)$ tal que $f(z_0) = 0$.

Demonstração. A demonstração do Lema será feita por contradição. Suponha que $f(x) \neq 0 \, \forall x \in \overline{B}_r(0)$, e defina a função $g : \overline{B}_r(0) \to \overline{B}_r(0)$ dada por

$$g(x) = \frac{-R}{|f(x)|} f(x).$$

Observe que g verifica $g(\overline{B}_r(0)) \subseteq \overline{B}_r(0)$, pois

$$|g(x)| = \Big|\frac{-R}{|f(x)|}f(x)\Big| = \frac{R}{|f(x)|}|f(x)| = R \text{ e com isso } g(x) \in \overline{B}_r(0).$$

Além disso, g é contínua, pois f é contínua por hipótese. Portanto, pelo Teorema do Ponto fixo de Brouwer, a função g tem um ponto fixo em $\overline{B}_r(0)$. Seja x_0 tal ponto fixo, isto é, $x_0 = g(x_0)$. Desta forma,

$$|x_0| = |g(x_0)| = R > 0.$$

Por outro lado,

$$R^2 = |x_0|^2 = \langle x_0, x_0\rangle = \langle x_0, g(x_0)\rangle = \left\langle x_0, \frac{-R}{|f(x)|}f(x)\right\rangle = \frac{-R}{|f(x)|}\langle x_0, f(x_0)\rangle$$

Desde que, por hipótese ,

$$\langle x_0, f(x_0)\rangle \geq 0$$

temos que

$$0 < R^2 = \frac{-R}{|f(x)|}\langle x_0, f(x_0)\rangle \leq 0,$$

o que é um absurdo. Portanto, existe $z_0 \in \overline{B}_r(0)$ tal que $f(z_0) = 0$. ■

2.2 Teorema envolvendo Sub-solução e supersolução.

Nesta seção definiremos sub-solução e super-solução para uma classe de problemas elípticos e vamos enunciar sem demonstrar um teorema de Ambrosetti, Brézis & Cerami [5] , o qual é crucial para mostrar a existência e unicidade do problema singular apresentado no início deste capítulo.

Definição 2.3 *Considere o problema*

$$\begin{cases} -\Delta v = f(v), & \Omega \\ v > 0, & \Omega \\ v = 0, & \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

Dizemos que uma função $v_1 \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma sub-solução para o problema (2.1), se v_1 satisfaz:

$$\begin{cases} -\Delta v \leq f(v), & \Omega \\ v > 0, & \Omega \\ v = 0, & \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

Da mesma forma, dizemos que uma solução v_2 é uma super-solução para o problema (2.1), se v_2 satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta v \geq f(v), & \Omega \\ v > 0, & \Omega \\ v = 0, & \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

Teorema 2.2 *Considere $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ uma função tal que $t^{-1}f(t)$ é decrescente pata $t > 0$. Sejam v_1 and v_2 satisfazendo (2.2) and (2.3). Então, $v_2 \geq v_1$ em Ω.*

2.3 Existência de solução para o problema singular

Para cada $\epsilon > 0$ fixado, considere o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{(\epsilon+|u|)^\gamma}, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases} \tag{P_ϵ}$$

Um importante fato que temos a destacar é que cada solução clássica u_ϵ do problema (P_ϵ) é estritamente positiva em Ω, isto é,

$$u_\epsilon(x) > 0 \;\; \forall x \in \Omega$$

De fato, sendo u_ϵ solução do problema (P_ϵ), temos

$$\begin{cases} -\Delta u_\epsilon = \frac{1}{(\epsilon+|u_\epsilon|)^\gamma}, & \Omega \\ u_\epsilon = 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Assim,

$$\Delta u_\epsilon < 0 \;\; \forall x \in \Omega$$

pois,

$$u_\epsilon(x) \geq \min_{\Omega} u_\epsilon = \min_{\partial\Omega} u_\epsilon = 0$$

e portanto,

$$u_\epsilon(x) \geq 0 \;\; \forall x \in \Omega.$$

Afirmação 2.1:

$$u_\epsilon(x) > 0 \;\; \forall x \in \Omega.$$

De fato, pois caso contrário, existiria

$$x_0 \in \Omega \;\text{ tal que }\; u_\epsilon(x_0) = 0,$$

o que implicaria pelos princípios de máximo que

$$u_\epsilon(x) = 0 \;\; \forall x \in \overline{\Omega}$$

o que é um absurdo.

Recordamos que u_ϵ é uma solução fraca de (P_ϵ) se $u_\epsilon \in H_0^1(\Omega)$ e satisfaz a seguinte igualdade

$$\int_\Omega \nabla u_\epsilon \nabla \varphi = \int_\Omega \frac{\varphi}{(\epsilon + u_\epsilon)^\gamma}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Vamos agora fixar algumas notações:
No que segue, vamos denotar por $\beta = \{e_1, ..., e_n, ...\}$ uma base ortonormal total para $H_0^1(\Omega)$ e fixar a notação $\| \ \| : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ para a norma usual de $H_0^1(\Omega)$, isto é,

$$\|u\| = \Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ vamos fixar

$$V_m = [e_1, ..., e_m],$$

o subespaço de $H_0^1(\Omega)$ gerado pelos vetores $e_1, e_2, ..., e_m$. Veja que, se $v \in V_m$ temos que

$$v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i \ \ \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Note que V_m é isomorfo ao $\mathbb{R}^m$, pois basta considerar a transformação linear $F : V_m \to \mathbb{R}^m$ dada por $F(v) = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$, onde $v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i \ \ \alpha_i \in \mathbb{R}$. Observe que

$$\|v\| = |\alpha| \ \text{ com } \ \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m).$$

Considere agora a função $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ definida por $f(\alpha) = (f_1(\alpha), ..., f_m(\alpha))$, onde

$$f_j(\alpha) = \int_\Omega \nabla v \nabla e_j - \int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon + |v|)^\gamma}, \quad j = 1, ..., m.$$

Aqui estamos identificando o vetor $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$ com a função $v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i$.

Afirmação 2.2:
(I) f é contínua;
(II) Existe $R > 0$ tal que $\langle f(\alpha), \alpha \rangle \geq 0$, para $|\alpha| = R > 0$.

O item (I) é uma consequência imediata das imersões de Sobolev e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. Vamos demonstrar agora (II):
Observe que

$$\langle f(\alpha), \alpha \rangle = f_1(\alpha)\alpha_1 + f_2(\alpha)\alpha_2 + f_3(\alpha)\alpha_3 + ... + f_m(\alpha)\alpha_m,$$

ou seja,

$$\langle f(\alpha), \alpha \rangle = \sum_{i=1}^{m} f_i(\alpha)\alpha_i.$$

Portanto

$$\langle f(\alpha), \alpha \rangle = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left[\int_\Omega \nabla v \nabla e_j - \int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon + |v|)^\gamma} \right]$$

implicando

$$\langle f(\alpha), \alpha \rangle = \sum_{i=1}^{m} \left[\alpha_i \int_\Omega \nabla v \nabla e_j - \alpha_i \int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon + |v|)^\gamma} \right]$$

com isso,

$$\langle f(\alpha), \alpha \rangle = \|v\|^2 - \int_\Omega \frac{v}{(\epsilon + |v|)^\gamma} \geq \|v\|^2 - \frac{1}{\epsilon^\gamma} \int_\Omega |v|.$$

Usando a imersão contínua de $H_0^1(\Omega)$ em $L^1(\Omega)$, ficamos com

$$\langle f(\alpha), \alpha \rangle \geq \|v\|^2 - c_\epsilon \|v\|.$$

Recordando que $\|v\| = |\alpha|$, temos

$$\langle f(\alpha), \alpha \rangle \geq |\alpha|^2 - c_\epsilon |\alpha|.$$

Fixando $R > 0$ verificando $R^2 - c_\epsilon R > 0$, concluímos que

$$\langle f(\alpha), \alpha \rangle \geq 0 \ \text{ para } \ |\alpha| = R$$

demonstrando o item (II). Usando o Lema Fundamental, existe $z_m \in \mathbb{R}^m$ tal que $f(z_m) = 0$ e $|z_m| \leq R$, de onde segue as seguintes igualdades

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla e_j - \int_\Omega \frac{e_j}{(\epsilon + |v_m|)^\gamma} = 0, \quad j = 1, ..., m, \tag{2.4}$$

onde $z_m = (\eta_1, ..., \eta_m)$, $v_m = \sum_{i=1}^{m} \eta_i e_i$ e $\|v_m\| = |z_m| \leq R$.

De (2.4), obtemos também a seguinte igualdade

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla \psi - \int_\Omega \frac{\psi}{(\epsilon + |v_m|)^\gamma} = 0, \quad \forall \psi \in V_m, \|v_m\| \leq R. \tag{2.5}$$

Desde que $H_0^1(\Omega)$ é um espaço reflexivo, a menos de subsequência, podemos assumir que $v_n \rightharpoonup v$ em $H_0^1(\Omega)$ para algum $v \in H_0^1(\Omega)$.

Fixando $\Phi \in H_0^1(\Omega)$, temos que $\Phi = \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i e_i$ com $\|\Phi\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} |\alpha_i|^2 < \infty$, e portanto

$$\Phi = \lim_{m \to \infty} \Psi_m \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega)$$

onde $\Psi_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i \in V_m$.

Observando que $V_m \subseteq V_k$ para $m \leq k$, tem-se

$$\int_\Omega \nabla v_k \nabla \Psi_m - \int_\Omega \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v_k|)^\gamma} = 0. \tag{2.6}$$

Passando o limite quando $k \to \infty$ na última igualdade e usando os limites

$$\int_\Omega \nabla v_k \nabla \Psi_m \to \int_\Omega \nabla v \nabla \Psi_m$$

e

$$\int_\Omega \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v_k|)^\gamma} \to \int_\Omega \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v|)^\gamma}$$

obtemos

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \Psi_m - \int_\Omega \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v|)^\gamma} = 0. \tag{2.7}$$

Agora, passando ao limite de $m \to \infty$ em (2.7), e usando os limites

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \Psi_m \to \int_\Omega \nabla v \nabla \Phi$$

e

$$\int_\Omega \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v|)^\gamma} \to \int_\Omega \frac{\Phi}{(\epsilon + |v|)^\gamma}, \ \ \forall \Phi \in H_0^1(\Omega)$$

chegamos a igualdade

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \Phi - \int_\Omega \frac{\Phi}{(\epsilon + |v|)^\gamma} = 0, \ \ \forall \Phi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.8}$$

Portanto, a função v é uma solução fraca do problema (P_ϵ), isto é,

$$\begin{cases} -\Delta v = \frac{1}{(\epsilon+|v|)^\gamma}, & \Omega \\ v = 0, & \partial\Omega \end{cases}$$

e pelo princípio de máximo, devemos ter

$$\begin{cases} -\Delta v = \frac{1}{(\epsilon+v)^\gamma}, & \Omega \\ v > 0, & \Omega \\ v = 0, & \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_ϵ}$$

No que segue, vamos considerar $\epsilon_n = \frac{1}{n}$ e u_n a solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u_n = \frac{1}{(\frac{1}{n}+u_n)^\gamma}, & \Omega \\ u_n > 0, & \Omega \\ u_n = 0, & \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_n}$$

Segue da definição de solução fraca que

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla \Phi - \int_\Omega \frac{\Phi}{(\epsilon + u_n)^\gamma} = 0, \ \ \forall \Phi \in H_0^1(\Omega).$$

Escolhendo, $\Phi = u_n$ deduzimos que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 - \int_\Omega \frac{u_n}{(\epsilon + u_n)^\gamma} = 0$$

e consequentemente

$$\|u_n\|^2 \leq |\Omega|^\gamma \|u_n\|^{1-\gamma}_{L^1(\Omega)}.$$

Usando a imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, deve existir uma constante $c > 0$ verificando

$$\|u_n\|^2 \leq c\|u_n\|^{1-\gamma}$$

mostrando que a sequência $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Sendo $H_0^1(\Omega)$ reflexivo, existe uma subsequência ainda denotada por $\{u_n\}$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \;\; H_0^1(\Omega)$$

e

$$u_n(x) \to u(x) \;\; \text{q.t.p. em} \;\; \Omega.$$

Definindo $Z_n = u_n + \frac{1}{n}$, tem-se que

$$\begin{cases} -\Delta Z_n = \frac{1}{Z_n^\gamma}, & \Omega \\ Z_n > 0, \;\; \Omega \\ Z_n = 1/n, \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Usando o Teorema 2.2,

$$Z_n(x) \geq \varphi_1(x), \;\; \forall x \in \overline{\Omega}, \forall n \in I\!N. \tag{2.9}$$

Passando ao limite de $n \to \infty$ em (2.9), obtemos

$$u(x) \geq \varphi(x) > 0 \;\; \text{q.t.p. em} \quad \Omega$$

mostrando que $med(\{x \in \Omega; u(x) = 0\}) = 0$.

Desde que

$$\int_\Omega \nabla Z_n \nabla \varphi dx - \int_\Omega \frac{\varphi}{Z_n^\gamma} dx = 0, \;\; \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.10}$$

Passando ao limite de $n \to \infty$ em (2.10) e usando os limites

$$\int_\Omega \nabla Z_n \nabla \varphi dx \to \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx$$

e

$$\int_\Omega \frac{\varphi}{Z_n^\gamma} dx \to \int_\Omega \frac{\varphi}{u^\gamma} dx,$$

ficamos com a igualdade

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx - \int_\Omega \frac{\varphi}{u^\gamma} dx = 0, \;\; \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.11}$$

Agora, para cada $\Psi \in H_0^1(\Omega)$, sabemos que existe uma sequência em $\phi_n \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\|\phi_n - \Psi\| \to 0, \;\; \text{quando} \;\; n \to \infty, \tag{2.12}$$

e portanto pela Desigualdade de Hardy-Sobolev

$$\int_\Omega \frac{\phi_n}{\varphi_1^\gamma} \to \int_\Omega \frac{\Psi}{\varphi_1^\gamma}. \tag{2.13}$$

onde φ_1 é uma autofunção positiva associado ao primeiro autovalor λ_1. Por (2.11),

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi_n dx - \int_\Omega \frac{\phi_n}{u^\gamma} dx = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

Usando as imersões de Sobolev e o fato que $u(x) \geq \varphi_1$ q.t.p. em Ω, segue facilmente de (2.12)-(2.14) a igualdade

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \Psi dx - \int_\Omega \frac{\Psi}{u^\gamma} dx = 0, \ \ \forall \Psi \in H_0^1(\Omega)$$

mostrando que u é uma solução fraca do problema singular (P_4). Usando Regularidade elíptica tem-se que em verdade $u \in C^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

2.4 Unicidade de solução para o problema singular

Suponha que existam u_1 e u_2 funções positivas verificando

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla \varphi dx - \int_\Omega \frac{\varphi}{u^\gamma} dx = 0, \ \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega \nabla u_2 \nabla \Psi dx - \int_\Omega \frac{\Psi}{u^\gamma} dx = 0, \ \ \forall \Psi \in H_0^1(\Omega).$$

Fixando $\varphi = \Psi = u_1 - u_2$, obtemos

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla (u_1 - u_2) dx = \int_\Omega \frac{(u_1 - u_2)}{u^\gamma} dx,$$

e

$$\int_\Omega \nabla u_2 \nabla (u_1 - u_2) dx = \int_\Omega \frac{(u_1 - u_2)}{u^\gamma} dx.$$

Portanto,

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla (u_1 - u_2) dx - \int_\Omega \nabla u_2 \nabla (u_1 - u_2) dx = \int_\Omega \frac{(u_1 - u_2)}{u^\gamma} dx - \int_\Omega \frac{(u_1 - u_2)}{u^\gamma} dx$$

ou ainda,

$$\|u_1 - u_2\|^2 dx = \int_\Omega \left[\frac{1}{u_1^\gamma} - \frac{1}{u_2^\gamma} \right] (u_1 - u_2) dx.$$

Notando que

$$\left[\frac{1}{u_1^\gamma} - \frac{1}{u_2^\gamma} \right] (u_1 - u_2) \leq 0$$

concluímos que $\|u_1 - u_2\| =$, isto é, $u_1 = u_2$, mostrando a unicidade de solução.

Capítulo 3

Minimização Global

Neste capítulo, iremos usar um resultado de mínimo global que aparece em Cálculo Avançado para mostrar a existência de solução para uma classe de problemas elípticos sublineares.

3.1 Considerações Gerais

Dado um problema elíptico da forma

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u), \ \Omega \\ u &= 0, \ \partial\Omega \end{cases} \tag{P_5}$$

onde $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory, isto é

1. $f(\cdot, s)$ é mensurável para todo $s \in \mathbb{R}$;

2. $f(x, \cdot)$ é contínua em quase todo ponto de Ω.

Vamos denotar por $F(x,t)$, a primitiva de $f(x,t)$ com relação a variável t, ou seja,

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,\tau)d\tau.$$

Mostra-se que para toda função mensurável $u : \Omega \to \mathbb{R}$, a função $F(\cdot, u(\cdot)) : \Omega \to \mathbb{R}$ também é mensurável.

Vamos assumir que a função f tenha a seguinte condição de crescimento

$$|f(x,t)| \leq a + b|t|^p, \tag{3.1}$$

com

$$0 < p \leq \frac{N+2}{N-2} \text{ se } N \geq 3$$

e

$$0 < p < +\infty \text{ se } N = 1, 2.$$

Partindo da desigualdade (3.1),

$$|F(x,t)| \leq a|t| + b_1|t|^{p+1}, \ \ \forall t \in \mathbb{R}$$

de onde segue, que para toda função $u \in H_0^1(\Omega)$ devemos ter

$$|F(x,u(x))| \leq a|u(x)| + b_1|u(x)|^{p+1} \quad \forall x \in \Omega.$$

Assim,

$$F(.,u(.)) \in L^1(\Omega) \ \ \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

O Funcional Energia $I : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ associado a (P_5) é dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F(x,u(x)),$$

onde

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Recorde que $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca de (P_5) se

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega f(x,u)v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Mostra-se que I $\in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ com

$$I^{'}(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega f(x,u)v.$$

Das observações acima, podemos concluir que u é ponto crítico de I, isto é, $I^{'}(u)v = 0, \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$ se, somente se, u é uma solução fraca de (P_5).

Exemplo: Para o problema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u & = & u^2, \ \ \Omega \\ u & = & 0, \ \ \partial\Omega \end{array} \right. \qquad (P_6)$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^3$, o funcional energia associado ao problema é $I : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{3}\int_\Omega u^3.$$

Vejamos que $I \in \ C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ com

$$I^{'}(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega u^2 v \quad \forall \ u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Para isto, iremos mostrar que
$$Q(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2$$
pertence a $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e
$$Q^{'}(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v = (u,v).$$
Para mostrar a diferenciabildade de Q, iremos dividir a nossa argumentação em alguns passos:
Passo 1: $\frac{\partial Q}{\partial v}(u)$ é Gateaux diferenciável:
$$\frac{\partial Q}{\partial v}(u) = \lim_{t\to 0}\frac{Q(u+tv)-Q(u)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}\|u+tv\|^2 - \frac{1}{2}\|u\|^2}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}\|u\|^2 - t(u,v) + \frac{t^2}{2}\|v\|^2 - \frac{1}{2}\|u\|^2}{t},$$
logo
$$\frac{\partial Q}{\partial v}(u) = (u,v).$$
Passo 2: Q é Fréchet diferenciável :

Considerando o funcional linear contínuo $T : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por $Tv = (u,v)$, temos que
$$\frac{Q(u+h)-Q(u)-Th}{h} = \frac{\frac{\|u\|^2}{2} + (u,h) - \frac{\|h\|^2}{2} - \frac{\|u\|^2}{2} - (u,h)}{\|h\|}$$
ou ainda
$$\frac{Q(u+h)-Q(u)-Th}{h} = \frac{\|h\|}{2} \to 0, \text{ quando } \|h\| \to 0.$$
mostrando a diferenciabilidade de Q.
Passo 3: $Q \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.
Com efeito, se $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$, devemos mostrar que
$$\|Q^{'}(u_n) - Q^{'}(u)\|_* \to 0.$$
onde $\| \ \|_*$ denota a norma em $(H_0^1(\Omega))'$ (Dual de $H_0^1(\Omega)$).

Recorde que se $T \in (H_0^1(\Omega))^{'}$ tem-se,
$$\|T\|_* = \sup_{\|v\|\leq 1} |Tv|,$$
assim,
$$\|Q^{'}(u_n) - Q^{'}(u)\|_* = \sup_{\|v\|\leq 1} |(Q^{'}(u_n) - Q^{'}(u))(v)|.$$
Note que
$$|(Q^{'}(u_n) - Q^{'}(u))(v)| = |(u_n,v) - (u,v)| \leq |(u_n - u, v)| \leq \|v\|\|u_n - u\|$$

daí,

$$\|Q^{'}(u_n) - Q^{'}(u)\|_* \leq \|u_n - u\| \to 0.$$

Exercício: Se $(H, \langle ., . \rangle)$ é um espaço de Hilbert, mostre que o funcional $Q(u) = \frac{\|u\|^2}{2}$, com $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ pertence a $C^1(H, \mathbb{R})$.

Vamos agora estudar a diferenciabilidade do funcional $\psi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\psi(u) = \frac{1}{3} \int_\Omega u^3. \tag{3.2}$$

Para isto, iremos usar o seguinte teorema do Cálculo Avançado.

Teorema A. *Seja X um espaço vetorial normado e $J : X \to \mathbb{R}$ um funcional verificando:*

1. *$\frac{\partial J}{\partial (.)}(u) : X \to \mathbb{R}$ existe em cada $u \in X$ sendo um funcional linear contínuo;*
2. *$\frac{\partial J}{\partial (.)} : X \to X^{'}$ é contínuo.*

Então, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$.

No que segue, mostraremos que o funcional ψ definido em (3.2), verifica as hipóteses do Teorema A.

Verificação do item 1:

Note que

$$\frac{\partial \psi}{\partial v}(u) = \lim_{t \to 0} \frac{\psi(u + tv) - \psi(u)}{t}$$

ou equivalentemente

$$\frac{\partial \psi}{\partial v}(u) = \lim_{t \to 0} \left[\frac{\frac{1}{3} \int \frac{u^3}{3} + t \int u^2 v + t^2 \int v^2 u + t^3 \int \frac{v^3}{3} - \frac{1}{3} \int \frac{u^3}{3}}{t} \right]$$

de onde segue que $\frac{\partial \psi}{\partial (.)}(u) : X \to \mathbb{R}$ existe com

$$\frac{\partial \psi}{\partial v}(u) = \int_\Omega u^2 v \ \ \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Note que $\frac{\partial \psi}{\partial (.)}(u)$ é linear em $H_0^1(\Omega)$ e

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial v}(u) \right| \leq \int |u|^2 v \leq |u^2|_{\frac{3}{2}} |v|_3 = |u|_3^2 \|v\|_3 \leq C |u|_3^2 \|v\| \leq M \|v\|$$

mostrando que $\frac{\partial \psi}{\partial (.)}(u) \in (H_1^0(\Omega))^{'}$, e portanto ψ satisfaz o item 1 do Teorema A.

Justificativa do item 2:

Seja $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ com $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. Devemos mostrar que

$$\left\| \frac{\partial \psi}{\partial (.)}(u_n) - \frac{\partial \psi}{\partial (.)}(u) \right\|_* \to 0, \ \text{quando} \ n \to \infty.$$

Note que,

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial v}(u_n) - \frac{\partial\psi}{\partial v}(u)\right| = \left|\int_\Omega u_n^2 v - \int_\Omega u^2 v\right| = \left|\int_\Omega (u_n^2 - u^2)v\right|$$

de onde segue pelas Imersões de Sobolev e Desigualdade de Holder

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial v}(u_n) - \frac{\partial\psi}{\partial v}(u)\right| \leq \|u_n^2 - u^2\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}\|v\|_{L^3(\Omega)} \leq C\|u_n^2 - u^2\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}\|v\|.$$

Desta forma,

$$\left\|\frac{\partial\psi}{\partial(.)}(u_n) - \frac{\partial\psi}{\partial(.)}(u)\right\|_* \leq C\|u_n^2 - u^2\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}.$$

Uma vez que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$, temos pelas imersões contínuas de Sobolev que $u_n \to u$ em $L^3(\Omega)$ e assim $u_n^2 \to u^2$ em $L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$, mostrando que

$$\left\|\frac{\partial\psi}{\partial(.)}(u_n) - \frac{\partial\psi}{\partial(.)}(u)\right\|_* \to 0.$$

Portanto, pelo Teorema A, $\psi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ com

$$\psi'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega u^2 v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

3.2 Uma Aplicação

Nesta seção estudaremos a existência de solução para a seguinte classe de problemas elípticos

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta u &=& |u|^{q-2}u, \;\; \Omega \\ u &=& 0, \;\; \partial\Omega \end{array}\right. \tag{P_7}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave e $1 < q < 2$.

Associado ao problema (P_7), temos o funcional energia $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{q}\int_\Omega |u|^q$$

As afirmações que seguem podem ser facilmente verificadas:

1. Se $f(t) = |t|^{q-2}t$ com $1 < q \leq \frac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$ ou $q > 1$ se $N = 1, 2$, pode-se mostrar que

$$F(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau = \frac{|t|^q}{q}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

2. O funcional $\psi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\psi(u) = \frac{1}{q}\int_\Omega |u|^q$$

é de classe $C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$ com

$$\psi'(u)v = \int_\Omega |u|^{q-2}v, \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

3. Usando a lei de formação de I, não é difícil mostrar que $I \in C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$ e

$$I'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega |u|^{q-2}uv, \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

O nosso objetivo é provar que o funcional I verifica as hipóteses do seguinte teorema.

Teorema B. *Sejam X um espaço vetorial normado e $J : X \to \mathbb{R}$ um funcional diferenciável a Fréchet limitado inferiormente em X. Se existe $u_0 \in X$ tal que*

$$J(u_0) = \inf_{u \in X} J(u)$$

temos que u_0 é um ponto crítico de J, isto é, $J'(u_0) = 0$.

Iremos mostrar que I verifica as seguintes propriedades

1) I é limitado inferiormente em $H_0^1(\Omega)$;

2) Existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$I(u_0) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} I(u).$$

Verificação de 1):

Note que

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{q}|u|_q^q, \tag{3.3}$$

onde

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad |u|_q = \left(\int_\Omega |u|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Usando as imersões contínuas de Sobolev, temos

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$$

para $s \in [1, 2^*]$ se $N \geq 3$ e $s \in [1, +\infty)$ se $N = 1, 2$. Sendo $1 < q < 2 < 2^*$, tem-se

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

Logo, deve existir uma constante $C > 0$, tal que

$$|u|_q \leq C\|u\|, \ \ \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{3.4}$$

Substituindo (3.4) em (3.3) encontramos

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - C\|u\|^q, \ \ \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{3.5}$$

Definindo $h : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(t) = \frac{1}{2}t^2 - Ct^q,$$

temos que h é limitada inferiormente, logo deve existir $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$h(t) \geq M, \ \ \forall t \in [0, +\infty)\,,$$

isto é,

$$\frac{1}{2}t^2 - Ct^q \geq M$$

o que implica

$$\frac{1}{2}\|u\|^2 - C\|u\|^q \geq M, \ \ \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

mostrando que

$$I(u) \geq M, \ \ \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

de onde segue 1.

Verificação 2):

Segue do Postulado de Dedekind que o conjunto $\left\{I(u); u \in H_0^1(\Omega)\right\}$ tem ínfimo, o qual será denotado por I_∞, isto é,

$$I_\infty = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} I(u).$$

Pela definição de ínfimo, existe $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ com $I(u_n) \to I_\infty$.

Afirmação 3.1: $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$, isto é , existe $K > 0$ tal que $\|u_n\| \leq K, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

De fato, pois por (3.5)

$$I(u_n) \geq \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - C\|u_n\|^q$$

logo, se $\|u_n\| \to +\infty$, devemos ter $I(u_n) \to +\infty$, o que é absurdo pois a sequência $\{I(u_n)\}$ é limitada.

Sendo $H_0^1(\Omega)$ reflexivo, existe $\{u_{n_j}\} \subset \{u_n\}$ e $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$u_{n_j} \rightharpoonup u_0 \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega).$$

Segue da Análise Funcional que

$$\liminf_{n_j \to \infty} \|u_{n_j}\| \geq \|u_0\|,$$

o que implica

$$\liminf_{n_j \to \infty} \|u_{n_j}\|^2 \geq \|u_0\|^2. \tag{3.6}$$

Das imersões de Sobolev e das propriedades dos operadores lineares compactos, temos

$$u_{n_j} \to u_0 \ \text{ em } \ L^q(\Omega),$$

implicando

$$\liminf_{n_j \to \infty} \int_\Omega |u_{n_j}|^q \geq \int_\Omega |u_0|^q. \tag{3.7}$$

Observe que

$$I_\infty + o_{n_j}(1) = I(u_{n_j}) = \frac{1}{2}\|u_{n_j}\|^2 - \int_\Omega |u_{n_j}|^q,$$

portanto passando ao limite inferior de $n_j \to \infty$ encontramos

$$I_\infty = \liminf_{n_j \to \infty} \left[\frac{1}{2}\|u_{n_j}\|^2 - \frac{1}{q} \int_\Omega |u_{n_j}|^q \right],$$

logo

$$I_\infty = \liminf_{n_j \to \infty} \left(\frac{1}{2}\|u_{n_j}\|^2 \right) - \frac{1}{q} \liminf_{n_j \to \infty} \left(\int_\Omega |u_{n_j}|^q \right).$$

Por (3.6) e (3.7),

$$I_\infty \geq \frac{1}{2}\|u_0\|^2 - \frac{1}{q} \int_\Omega |u_0|^q = I(u_0).$$

Assim,

$$I(u_0) \leq I_\infty = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} I(u) \leq I(u_0).$$

Logo,

$$I(u_0) = I_\infty = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} I(u).$$

Pelo Teorema B, segue que

$$I'(u_0) = 0.$$

Portanto, u_0 é uma solução fraca para o problema (P_7).

Pergunta: A solução encontrada é diferente da solução trivial ?

A reposta de tal pergunta é fundamental no nosso estudo, pois a função $u = 0$ é uma solução trivial para o problema (P_7). O que devemos fazer é mostrar neste caso que $I(u_0) < 0 = I(0)$.

Para $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi \neq 0$ e $t \geq 0$,

$$I(t\varphi) = \frac{1}{2}\|t\varphi\|^2 - \frac{1}{q} \int_\Omega |t\varphi|^q.$$

Assim,

$$I(t\varphi) = \frac{t^2}{2}\|\varphi\|^2 - \frac{1}{q} t^q \int_\Omega |\varphi|^q,$$

o que implica $I(t\varphi) < 0$ para $t \approx 0$, mostrando que

$$I(u_0) = I_\infty = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} I(u) \leq I(t\varphi) < 0, \;\; (t \approx 0).$$

Exercício: Usar o método apresentado neste capítulo para resolver o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= h(x)|u|^{q-2}u, \;\; \mathbb{R}^N \\ \qquad\;\; u &\in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

onde $1 < q < 2$, $h \in L^{\frac{2}{2-q}}(\mathbb{R}^N)$, $h(x) \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^N$ e $h \neq 0$.

Capítulo 4

Teorema dos Multiplicadores de Lagrange

Neste capítulo iremos usar o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange para encontrar soluções para algumas classes de problemas elípticos.

4.1 Problemas com vínculos

Nesta seção recordamos o enunciado do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange e algumas de suas implicações.

Teorema dos Multiplicadores de Lagrange. (ver [13])
Sejam X um espaço de Banach, $J, F : X \to \mathbb{R}$ funcionais de classe $C^1(X, \mathbb{R})$ e $M = \{u \in X; F(u) = 0\} = F^{-1}(\{0\})$ com $F'(u) \neq 0,\ \forall u \in M$. Se J é limitado inferiormente sobre M e existe $u_0 \in M$ tal que

$$J(u_0) = \inf_{u \in M} J(u),$$

então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (multiplicador de Lagrange) verificando

$$J^{'}(u_0) = \lambda F^{'}(u_0).$$

O conjunto M é uma variedade de dimensão infinita e o espaço tangente em um ponto $u \in M$ é definido como sendo

$$T_u M = \left\{ v \in X; \left\langle F^{'}(u), v \right\rangle = 0 \right\}.$$

A norma da derivada de J restrita a M é dada por

$$\|J^{'}(u)\|_* = \sup_{\substack{v \in T_u M \\ \|v\|=1}} \left| \left\langle J^{'}(u), v \right\rangle \right| = \sup_{\substack{\left\langle F^{'}(u), v \right\rangle = 0 \\ \|v\|=1}} \left\langle J^{'}(u), v \right\rangle$$

Lema 4.1 *Se $f, g \in X^{'}$, temos que*

$$\sup_{\substack{\langle g,y\rangle=0\\ \|y\|=1}} \langle f, y\rangle = \min_{\lambda\in\mathbb{R}} \|f - \lambda g\|_*$$

Demonstração: Note que

$$\sup_{\substack{\langle g,y\rangle=0\\ \|y\|=1}} \langle f, y\rangle = \sup_{\substack{\langle g,y\rangle=0\\ \|y\|=1}} \langle f - \lambda g, y\rangle \leq \sup_{\|y\|=1} \langle f - \lambda g, y\rangle \leq \|f - \lambda g\|, \ \ \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, o Teorema de Hahn Banach garante que f admite um prolongamento $\widetilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\widetilde{f}|_{Ker(g)} = f \quad \text{e} \quad \|\widetilde{f}\|_* = \sup_{\substack{\langle g,y\rangle=0\\ \|y\|=1}} \langle f, y\rangle\,.$$

Observe que $Ker(f - \widetilde{f}) \supset Ker(g)$, de onde concluímos que existe $\lambda_* \in \mathbb{R}$ tal que

$$f - \widetilde{f} = \lambda_* g,$$

ou seja,

$$\widetilde{f} = f - \lambda_* g.$$

Assim,

$$\|\widetilde{f}\|_* = \sup_{\substack{\langle g,y\rangle=0\\ \|y\|=1}} \langle f, y\rangle = \|f - \lambda_* g\|_*$$

mostrando a igualdade,

$$\sup_{\substack{\langle g,y\rangle=0\\ \|y\|=1}} \langle f, y\rangle = \min_{\lambda\in\mathbb{R}} \|f - \lambda g\|.$$

Corolário 4.1 *A derivada de J restrita a M tem norma dada por*

$$\|J^{'}(u)\|_* = \min_{\lambda\in\mathbb{R}} \|J^{'}(u) - \lambda F^{'}(u)\|.$$

Definição 4.1: Um ponto $u \in M$ é dito ser um ponto crítico de J sujeito ao vínculo M, quando $\|J^{'}(u)\|_* = 0$.

Como consequência da definição 4.1, se u é ponto crítico de J sujeito ao vínculo M então, pelo Corolário 4.1, deve existir um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|J^{'}(u) - \lambda F^{'}(u)\|_* = 0,$$

isto é,

$$J^{'}(u) = \lambda F^{'}(u).$$

Vejamos agora uma aplicação do Teorema dos Multipicadores de Lagrange a uma classe de problemas elípticos.

4.2 Uma Aplicação

Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= |u|^{p-2}u, \ \ \Omega \\ u &= 0, \ \ \partial\Omega \end{cases} \tag{P_8}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave com $2 < p < 2^* = \frac{2N}{N-2}$ se $N \geq 3$ ou $2 < p$ se $N = 1, 2$.

Vamos considerar os funcionais $J, F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dados por

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2,$$

$$F(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p - 1.$$

e o conjunto

$$M = \left\{u \in H_0^1(\Omega); F(u) = 0\right\},$$

ou ainda

$$M = \left\{u \in H_0^1(\Omega); \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p = 1\right\}.$$

Afirmação 4.1:

1. $J, F \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$;
2. $\left\langle J'(u), v\right\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v$;
3. $\left\langle F'(u), v\right\rangle = \int_\Omega |u|^{p-2}uv$;
4. Existe $u_0 \in M$ tal que $J(u_0) = \min\limits_{u \in M} J(u)$.

As afirmações dos itens 1,2 e 3 acima são imediatas, e iremos demonstrar apenas o item 4.

Justificativa de 4: Observe que

$$J(u) \geq 0 \ \ \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

logo

$$J(u) \geq 0 \ \ \forall u \in M,$$

mostrando que J é limitado inferiormente em M, portanto deve existir o ínfimo

$$J_\infty = \inf_{u \in M} J(u).$$

Por propriedade de ínfimo, existe $\{u_n\} \subset M$ verificando $J(u_n) \to J_\infty$, isto é,

$$\frac{\|u_n\|^2}{2} \to J_\infty,$$

ou ainda,

$$\|u_n\| \to (2J_\infty)^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto, $(\|u_n\|)$ é limitada em $\mathbb{R}$, e assim deve existir $K > 0$ tal que $\|u_n\| \leq K, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Desta forma, a menos de subsequência, existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ de maneira que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega).$$

Pelas imersões compactas de Sobolev

$$u_n \to u_0 \quad \text{em} \quad L^p(\Omega),$$

implicando no limite

$$\int_\Omega |u_n|^p \longrightarrow \int_\Omega |u_0|^p.$$

Uma vez que $u_n \in M$, devemos ter

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |u_n|^p dx = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Passando ao limite de $n \to +\infty$ na última igualdade, ficamos com

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |u_0|^p dx = 1,$$

mostrando que $u_0 \in M$. Além disso,

$$\liminf_{n\to\infty} \|u_n\| \geq \|u_0\|,$$

logo

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}\|u_n\|^2 \geq \frac{1}{2}\|u_0\|^2,$$

implicando que

$$\liminf_{n\to\infty} J(u_n) \geq J(u_0).$$

Sendo $J(u_n) \to J_\infty$, devemos ter também

$$\liminf_{n\to\infty} J(u_n) = J_\infty,$$

consequentemente, $J_\infty \geq J(u_0)$. Por outro lado, desde que $u_0 \in M$, temos $J_\infty \leq J(u_0)$, e assim chegamos a igualdade $J_\infty = J(u_0)$.

Observe que 0 é um valor regular do funcional F, isto é, $F^{'}(u) \neq 0$ para todo $u \in M = F^{-1}(0)$, pois

$$\left\langle F^{'}(u), u \right\rangle = \int_\Omega |u|^{p-2}uu = \int_\Omega |u|^p = p \neq 0.$$

Assim, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$J^{'}(u_0) = \lambda F^{'}(u_0).$$

Observe que podemos supor que $u_0 \geq 0$, pois podemos trocar u_0 por $|u_0|$ que ainda teremos

$$J(|u_0|) = \min_{u \in M} J(u).$$

A igualdade

$$J^{'}(u_0) = \lambda F^{'}(u_0)$$

é equivalente a

$$J^{'}(u_0)v = \lambda F^{'}(u_0)v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla v = \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} u_0 v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

mostrando que u_0 é solução fraca do problema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u_0 & = & \lambda |u_0|^{p-1} u_0, \;\; \Omega \\ u_0 & = & 0, \;\; \partial\Omega \end{array} \right. \tag{P_9}$$

Afirmação 4.2: O multiplicador de Lagrange λ é positivo, isto é, $\lambda > 0$.
Note que

$$\left\langle J^{'}(u_0), u_0 \right\rangle = \lambda \left\langle F^{'}(u_0), u_0 \right\rangle,$$

logo

$$\|u_0\|^2 = \lambda \int_\Omega |u_0|^p = \lambda p,$$

ou seja,

$$2J(u_0) = \lambda p,$$

portanto,

$$\lambda = \frac{2}{p} J(u_0) = \frac{2}{p} J_\infty > 0.$$

Considere $w = \lambda^\alpha u_0$ onde $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante a ser determinada. Com uma escolha apropriada de α, w é uma solução do problema elíptico

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta w = w^{p-1}, \quad \Omega \\ w > 0, \quad \Omega \\ w = 0, \quad \partial\Omega \end{array} \right.$$

e portanto do problema (P_8)

Observação 4.1:
No caso de domínio limitado, este tipo de raciocínio pode ser aplicado apenas quando a não linearidade é tipo homogênea, por exemplo do tipo

$$f(u) = |u|^{p-2}u.$$

Exercício: Use o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange para encontrar uma solução para os seguintes problemas:

(1)
$$\begin{cases} -\Delta u + u &= |u|^{p-2}u, \;\; \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= 0, \;\; \partial\Omega \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} -\Delta u &= \quad |u|^{p-2}u, \;\; \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= -u \quad , \;\; \partial\Omega \end{cases}$$

(3)
$$\begin{cases} -\Delta u + u = h(x)|u|^{p-2}u, \;\; \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

com $N \geq 3$, $h \in L^{\frac{2^*-p}{2^*}}(\Omega)$, $h(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e $h \neq 0$.

Capítulo 5

Princípio Variacional de Ekeland

Neste capítulo pretendemos usar o Princípio Variacional de Ekeland, para resolver uma classe de problemas elípticos onde a não linearidade não é mais homogênea, mais mesmo assim poderemos resolver o mesmo como um problema de vínculo.

5.1 Variedade de Nehari

Nesta seção, estamos interessados em encontrar solução para uma classe de problemas elípticos do tipo

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta u &=& f(u),\ \Omega \\ u &=& 0,\ \partial\Omega \end{array}\right. \tag{P_{10}}$$

onde f é uma função de classe $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ satisfazendo as seguintes hipóteses:

(f1)

$$\lim_{s\to 0}\frac{f(s)}{s}=0, \quad \text{e} \quad \limsup_{|s|\to+\infty}\frac{|f'(s)|}{|s|^{p-2}}<\infty \ (\textbf{Crescimento Subcrítico })$$

onde $2<p<2^*$ se $N\geq 3$ e $2<p<+\infty$ se $N=1,2$;

(f2) (Condição de Ambrosetti e Rabinowitz) Existe $\theta\in(2,p)$ e $r>0$ tais que

$$0<\theta F(t)\leq f(t)t;\ \ |t|\geq r,\ \text{ onde } F(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau;$$

(f3) Existem constantes $\sigma\in(2,2^*)$ se $N\geq 3$ ou $\sigma>2$ se $N=1,2$ e $C>0$ tais que

$$f(t)t-f^{'}(t)t^2\leq -C|t|^\sigma \quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

Exemplos de funções que verificam (f1)-(f3):

1. $f(t) = |t|^{p-2}t, \;\; 2 < p < 2^*$;

2. $f(t) = |t|^{p-2}t + |t|^{q-2}t, \;\; 2 < p, q < 2^*$.

Observação 5.1: A hipótese (f1) garante que dado $\epsilon > 0$, existe $C = C(\epsilon) > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq \epsilon|s| + C|s|^{p-1} \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

A partir desta desigualdade, pode-se mostrar que

$$|F(s)| \leq \frac{\epsilon}{2}|s|^2 + C|s|^p, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Associado ao problema (P_{10}), temos o funcional energia $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(u), \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Usando a hipótese (f1) mostra-se que $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ com

$$I'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega f(u)v.$$

A Variedade de Nehari associada a I é o conjunto

$$\mathcal{N} = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\};\, I'(u)u = 0 \right\}.$$

Afirmação 5.1: I é limitado inferiormente sobre $\mathcal{N}$.
De fato, se $u \in \mathcal{N}$ temos $I'(u)u = 0$, ou equivalentemente

$$\|u\|^2 = \int_\Omega f(u)u.$$

Note que

$$I(u) = I(u) - \frac{1}{\theta}I'(u)u = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|u\|^2 + \int_\Omega \left[\frac{1}{\theta}f(u)u - F(u)\right],$$

daí,

$$I(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|u\|^2 + \frac{1}{\theta}\int_{|u| \leq r}(f(u)u - \theta F(u)) + \frac{1}{\theta}\int_{|u| \geq r}(f(u)u - \theta F(u)),$$

assim por (f2),

$$I(u) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|u\|^2 + \frac{1}{\theta}\int_{|u| \leq r}(f(u)u - \theta F(u)).$$

Sendo $g(t) = f(t)t - \theta F(t)$ uma função contínua, existe $M > 0$ tal que

$$|g(t)| \leq M, \;\; \text{para } |t| \leq r,$$

isto é,

$$g(t) \geq -M, \ \text{ para } \ |t| \leq r,$$

o que implica,

$$I(u) \geq (\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})\|u\|^2 - \frac{1}{\theta}M \int_{|u|\leq r} dx \geq (\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})\|u\|^2 - \frac{1}{\theta}M|\Omega|.$$

Observando que a função

$$h(t) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})t^2 - \frac{1}{\theta}M||\Omega|$$

é limitada inferiormente, deve existir $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$h(t) \geq k, \quad t \in \mathbb{R}$$

consequentemente,

$$I(u) \geq k, \quad \forall u \in \mathcal{N},$$

mostrando a Afirmação 5.1.

No que segue, denotamos por C^* o ínfimo de I sobre $\mathcal{N}$, isto é

$$C^* = \inf_{u \in \mathcal{N}} I(u)$$

e por $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ o funcional dado por

$$J(u) = I^{'}(u)u,$$

isto é,

$$J(u) = \|u\|^2 - \int_\Omega f(u)u.$$

Assim,

$$J^{'}(u)v = 2\int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega (f^{'}(u)u + f(u))v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

e portanto,

$$J^{'}(u)u = 2\|u\|^2 - \int_\Omega (f^{'}(u)u^2 + f(u))u, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Para $u \in \mathcal{N}$ temos

$$J^{'}(u)u = 2\int_\Omega f(u)u - \int_\Omega (f^{'}(u)u^2 + f(u))u, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

logo

$$J^{'}(u)u = \int_\Omega (f(u)u - f^{'}(u)u^2)$$

e por (f4),

$$J^{'}(u)u = -C\int_\Omega |u|^\sigma < 0 \quad \forall \ u \in \mathcal{N}.$$

Pelo estudo feito até o momento, sendo $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, podemos concluir que $\mathcal{N}$ é de fato uma variedade.

Para provar a existência de uma solução para o problema (P_{10}), vamos usar o Princípio Variacional Ekeland que enunciamos a seguir.

Princípio Variacional de Ekeland. (ver [13])

Seja $(\mathcal{M}, d)$ um espaço métrico completo e J um funcional semi-contínuo inferiormente (s.c.i.) limitado inferiormente sobre $\mathcal{M}$. Se $c = \inf\limits_{u \in \mathcal{M}} J(u)$, para cada $\epsilon > 0$, existe $u_\epsilon \in \mathcal{M}$ tal que

$$c \leq J(u_\epsilon) \leq c + \epsilon$$

e

$$J(u) - J(u_\epsilon) + \epsilon d(u, u_\epsilon) \geq 0, \ \ \forall u \in \mathcal{M}, \ \ u \neq u_\epsilon.$$

Recordamos neste momento que J é s.c.i. quando para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto $J^{-1}((\alpha, +\infty))$ é um aberto em $\mathbb{R}$.

Princípio Variacional de Ekeland (Regular) (ver [17])

Seja X um espaço de Banach, $G \in C^2(X,\mathbb{R})$ tal que para todo $v \in \mathcal{V} := \{v \in X;\, G(v) = 1\}$ tem-se $G^{'}(v) \neq 0$ e $F \in C^1(X,\mathbb{R})$ um funcional limitado inferiormente sobre $\mathcal{V}$. Dados $v \in \mathcal{V}$, $\epsilon, \delta > 0$, verificando

$$F(v) \leq \inf_{\mathcal{V}} F + \epsilon,$$

existe $u \in \mathcal{V}$ tal que

1. $F(v) \leq \inf\limits_{\mathcal{V}} F + 2\epsilon$
2. $\min\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} \|F^{'}(u) - \lambda G^{'}(u)\|_* \leq \dfrac{8\epsilon}{\delta}$
3. $\|u - v\| \leq 2\delta.$

Como uma consequência do último resultado, deve existir $\{u_n\} \subset \mathcal{V}$ e $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$F(u_n) \to \inf_{\mathcal{V}} F \ \ \text{e} \ \ \|F^{'}(u_n) - \lambda_n G'(u_n)\|_* \to 0 \tag{5.1}$$

Vamos usar o Princípio Variacional de Ekeland considerando

- $X = H_0^1(\Omega)$;
- $G(u) = J(u) = \|u\|^2 - \int_\Omega f(u)u$;
- $\mathcal{V} = \mathcal{N}$

Assim, existe $\{u_n\} \subset \mathcal{N}$ e $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$I(u_n) \to C^* \quad \text{e} \quad \|I^{'}(u_n) - \lambda_n J^{'}(u_n)\|_* \to 0.$$

Afirmação 5.2: A sequência $\{u_n\}$ é limitada. De fato, note que

$$I(u_n) - \frac{1}{\theta}I^{'}(u_n)u_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|^2 + \int_\Omega \left(\frac{1}{\theta}f(u_n)u_n - F(u_n)\right)$$

daí,

$$I(u_n) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|^2 + \int_{|u_n|<r} \left(\frac{1}{\theta}f(u_n)u_n - F(u_n)\right) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|^2 - C.$$

Sendo $\{I(u_n)\}$ limitado, segue que $\{u_n\}$ é limitada.
Afirmação 5.3: $(I^{'}(u_n) - \lambda_n J^{'}(u_n))(u_n) \to 0$
Basta notar que,

$$|(I^{'}(u_n) - \lambda_n J^{'}(u_n))(u_n)| \leq C\|I^{'}(u_n) - \lambda_n J^{'}(u_n)\|_* \to 0$$

onde C é uma constante verificando $\|u_n\| \leq C, \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Afirmação 5.4: $\lambda_n \to 0$. Sabemos da Afirmação 5.3 que

$$I^{'}(u_n)u_n - \lambda_n J^{'}(u_n)u_n = o_n(1)$$

onde $o_n(1) \to 0$.
Sendo $I^{'}(u_n)u_n = 0$, pois $u_n \in \mathcal{N}$, temos que

$$\lambda_n J^{'}(u_n)u_n = o_n(1).$$

Usando a definição de J e (f_3)

$$J^{'}(u_n)u_n = \int_\Omega (f(u_n) - f^{'}(u_n)u_n^2) \leq -C\int_\Omega |u_n|^\sigma$$

onde $\sigma \in (2, 2^*)$. Sendo $H_0^1(\Omega)$ reflexivo e (u_n) limitada, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega)$$

e $\forall q \in [1, 2^*)$ se $N \geq 3$ ou $\forall q \in [1, +\infty)$ se $N = 1, 2$ tem-se

$$u_n \to u \text{ em } L^q(\Omega),$$

Desde que, (f1) implica

$$|f(t)t| \leq \epsilon|t|^2 + |t|^p$$

onde $p \in (2, 2^*),\ N \geq 3$ e $p \in (2, +\infty)\,,\ N = 1, 2$, pelas imersões compactas de Sobolev juntamente com o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue tem-se

$$\int_\Omega f(u_n)u_n \to \int_\Omega f(u)u.$$

O limite acima implica que o limite fraco u é diferente de zero, pois do contrário, sendo $\{u_n\} \subset N$, devemos ter

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(u_n)u_n = \int_\Omega f(0)0 = 0$$

ou seja,

$$\|u_n\| \to 0 \tag{5.2}$$

Por outro lado, se $u \in \mathcal{N}$ temos

$$\|u\|^2 \leq \epsilon \int_\Omega |u|^2 + C_\epsilon \int_\Omega |u|^p$$

e pela Desigualdade de Poincaré,

$$\|u\|^2 \leq \frac{\epsilon}{\lambda_1}\|u\|^2 + C_\epsilon |u|_p^p,$$

isto é,

$$(1 - \frac{\epsilon}{\lambda_1})\|u\|^2 \leq +C_\epsilon |u|_p^p.$$

Escolhendo $\epsilon > 0$, de maneira que $1 - \frac{\epsilon}{\lambda_1} > 0$, teremos

$$\|u\|^2 \leq K_\epsilon |u|_p^p,\ \ \forall u \in \mathcal{N}.$$

Usando as imersões contínuas de Sobolev, existe $C > 0$ tal que

$$|u|_p \leq C\|u\|,\ \ \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

logo

$$\|u\|^2 \leq D_\epsilon \|u\|^p,$$

daí,

$$\|u\| \geq (\frac{1}{D_\epsilon})^{\frac{1}{p-2}} \equiv r.$$

Assim observamos que $u = 0$ não pode ocorrer, pois por (5.2) deveríamos ter

$$\|u_n\| < r,\ \text{ para } n \approx \infty$$

chegando a um absurdo.

Desde que

$$|f(t)t - f'(t)t^2| \leq \epsilon |t|^2 + C_\epsilon |t|^p,$$

temos que a sequência $\{J^{'}(u_n)u_n\}$ é limitada em $\mathbb{R}$, pois $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Além disso,

$$\limsup_{n\to\infty} J^{'}(u_n)u_n \leq -C \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^\sigma = -C \int_\Omega |u|^\sigma < 0,$$

que juntamente com o limite

$$\lambda_n J^{'}(u_n)u_n = o_n(1),$$

implica que $\lambda_n \to 0$.

Recordando que

$$\|I^{'}(u_n) - \lambda_n J^{'}(u_n)u_n\|_* \to 0,$$

podemos afirmar agora que

$$I^{'}(u_n) \to 0,$$

pois,

$$\|I^{'}(u_n)\|_* \leq \|I^{'}(u_n) - \lambda_n J^{'}(u_n)\|_* + |\lambda_n| \|J^{'}(u_n)\|_*.$$

Sendo (u_n) limitada, a sequência $(\|\psi^{'}(u_n)\|)$ também é limitada, logo

$$\|I^{'}(u_n)\|_* \leq \|I^{'}(u_n) - \lambda_n J^{'}(u_n)\|_* + |\lambda_n| C,$$

mostrando que

$$\|I^{'}(u_n)\|_* \to 0.$$

Conclusão: A sequência minimizante $\{u_n\} \subset \mathcal{N}$ possui uma subsequência, ainda denotada por (u_n), que é uma sequência $(PS)_{C^*}$, isto é,

$$I(u_n) \to C^* \quad \text{e} \quad I^{'}(u_n) \to 0.$$

Observe agora que, a menos de subsequência $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$. Usando tal limite juntamente com o crescimento subcrítico de f e as imersões de Sobolev, podemos concluir que

$$\int_\Omega f(u_n)u_n \to \int_\Omega f(u)u$$

$$\int_\Omega f(u_n)v \to \int_\Omega f(u)v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

e

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla v \to \int_\Omega \nabla u \nabla v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

logo

$$0 \leq \|u_n - u\|^2 = \|u_n\|^2 - \int_\Omega \nabla u_n \nabla u - (u, u_n - u) = \|u_n\|^2 - \int_\Omega \nabla u_n \nabla u - o_n(1),$$

e portanto

$$0 \leq \|u_n - u\|^2 = \int_\Omega f(u_n)u_n - \int_\Omega f(u_n)u + o_n(1) \to \int_\Omega f(u)u - \int_\Omega f(u)u = 0,$$

implica no limite

$$\|u_n - u\|^2 \to 0,$$

isto é,

$$u_n \to u \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega).$$

Assim, $I(u_n) \to I(u)$ e $I^{'}(u_n) \to I^{'}(u)$, logo pela unicidade do limite

$$I(u) = C^* \quad \text{e} \quad I^{'}(u) = 0.$$

Desta forma, o problema elíptico tem solução não trivial pois,

$$\|u_n\| \geq r > 0 \Rightarrow \|u\| \geq r > 0 \Rightarrow u \neq 0.$$

Capítulo 6

Teorema do Passo da Montanha

Neste capítulo usaremos um teorema devido a Ambrosetti-Rabinowitz [11], denominado Teorema do Passo da Montanha para mostrar a existência de uma solução fraca para uma classe de problemas elípticos.

6.1 Teorema do Passo da Montanha

Um funcional $I : X \to \mathbb{R}$ verifica a condição Palais-Smale (PS), se para todo $c \in \mathbb{R}$ qualquer sequência $\{u_n\} \subset X$ verificando

$$I(u) \to c \text{ e } I'(u_n) \to 0$$

possui uma subsequência que convergente forte em X.

Teorema do Passo da Montanha. (ver [6])
Seja E um espaço de Banach real e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional satisfazendo a condição Palais-Smale (PS). Suponha que $I(0) = 0$ e que as seguintes condições sejam satisfeitas:
($\mathbf{I_1}$) *Existem constantes $\alpha,\ \rho > 0$ tais que $I\Big|_{\partial B_\rho} > \alpha$, e*
($\mathbf{I_2}$) *Existe um $e \in E \backslash \overline{B}_\rho$ tal que $I(e) < 0$.*
Então, I possui um valor crítico $c \geq \alpha$, com

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} I(u)$$

onde, $\Gamma = \{g \in C([0,1], E) \ \backslash\ g(0) = 0 \ \text{ e } \ g(1) = e\}$.

6.2 Uma Aplicação

Nesta seção estudaremos a existência de solução para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + f(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \qquad (P_{11})$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave e $\lambda < \lambda_1$, onde λ_1 é o primeiro autovalor associado ao problema

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda v, & x \in \Omega \\ v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \qquad (P)_A$$

No que segue, supomos as seguintes hipóteses sobre f :

$(\mathbf{H_1})$ $f(x,\xi) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;

$(\mathbf{H_2})$ Dado $\epsilon > 0$, existem constantes positivas $C_\epsilon, s > 0$ tais que

$$|f(x,\xi)| \leq \epsilon|\xi| + C_\epsilon\, |\xi|^s\,, \ \ \forall \ x \in \overline{\Omega} \ \text{ e } \ \xi \in \mathbb{R},$$

onde $1 < s < \frac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$ e $1 < s < +\infty$ se $N = 1, 2$.

$(\mathbf{H_3})$ Existem constantes $2 < \mu < s$ e $r \geq 0$ tais que

$$0 < \mu F(x,\xi) \leq \xi f(x,\xi), \quad \text{para} \ \ |\xi| \geq r, \ \ \text{onde} \ \ F(x,\xi) = \int_0^\xi f(x,t)dt.$$

Além disso, denotaremos por

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\dfrac{1}{2}}$$

e

$$|u|_p = \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{\dfrac{1}{p}}$$

as normas em $H_0^1(\Omega)$ e $L^p(\Omega)$ respectivamente.

Teorema 6.1. *Suponha que $\lambda < \lambda_1$ e que f satisfaz as condições $(H_1) - (H_3)$. Então o Problema (P_{11}) possui uma solução fraca.*

Demonstração. Considere $E = H_0^1(\Omega)$ e $I : E \to \mathbb{R}$ o funcional dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[|\nabla u|^2 - \lambda u^2\right] - \int_\Omega F(x,u)$$

onde $F(x,\xi) = \displaystyle\int_0^\xi f(x,t)dt$. Usando as hipóteses $(H_1) - (H_3)$, mostra-se facilmente que o funcional I é de classe C^1 e

$$I'(u)v = \int_\Omega \left[\nabla u \nabla v - \lambda uv\right]dx - \int_\Omega f(x,u)v dx \quad \ \forall \ u, \ v \ \in \ H_0^1(\Omega).$$

O nosso objetivo é mostrar que o funcional I verifica as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha, obtendo desta maneira um ponto crítico para o mesmo, implicando na existência de uma solução fraca para (P_{11}).

Note que para $\lambda < \lambda_1$, a função

$$\begin{array}{rcl} \| \ \|_* \ : \ E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \|u\|_* = \left(\int_\Omega \left[|\nabla u|^2 - \lambda u^2 \right] \right)^{1/2}, \end{array}$$

define uma norma em E, que es´tá associado ao produto interno

$$\begin{array}{rcl} \langle \ , \ \rangle_* \ : \ E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & \langle u, v \rangle_* = \int_\Omega \left[\nabla u \nabla v - \lambda uv \right]. \end{array}$$

Lema 6.1: *As normas $\| \ \|_*$ e $\| \ \|$ são equivalentes em E*

Demonstração. Temos que $\|u\|_*^2 \geq \left(1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_1}\right) \|u\|^2$, $\forall \ u \ \in \ E$ e $0 \leq \lambda < \lambda_1$. Considerando $C_1 = \left(1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_1}\right)^{1/2}$,

$$\|u\|_* \geq C_1 \|u\|, \ \ \forall \ u \ \in \ E.$$

Observe que para $\lambda < 0$, basta considerar $C_1 = 1$, pois

$$\|u\|_* = \int_\Omega |\nabla u|^2 + |\lambda| \int_\Omega |u|^2 \geq \int_\Omega |\nabla u|^2$$

ou seja,

$$\|u\|_* \geq \|u\|, \quad \forall \ u \ \in \ E.$$

Assim, considerando $C_2 = \min\{C_1, 1\}$, mostramos que existe $C_2 > 0$, tal que para $\lambda < \lambda_1$,

$$\|u\|_* \geq C_2 \|u\|, \quad \forall \ u \ \in \ E.$$

Por outro lado, temos

$$\|u\|_*^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda \int_\Omega |u|^2 \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 + |\lambda| \int_\Omega |u|^2, \quad \forall \ u \ \in \ E \ \text{ e } \ \lambda < \lambda_1.$$

o que implica

$$\|u\|_*^2 \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{|\lambda|}{\lambda_1} \int_\Omega |\nabla u|^2 = \left(1 + \frac{|\lambda|}{\lambda_1}\right) \int_\Omega |\nabla u|^2.$$

Considerando $C_3 = \left(1 + \dfrac{|\lambda|}{\lambda_1}\right)^{1/2}$,

$$\|u\|_* \leq C_3 \|u\|, \qquad \forall \ u \ \in \ E.$$

Assim, existem C_2 e $C_3 > 0$ tais que

$$C_2 \|u\| \leq \|u\|_* \leq C_3 \|u\|, \quad \forall \ u \ \in \ E,$$

mostrando $\| \ \|_*$ e $\| \ \|$ são normas equivalentes em E. ■

No que segue vamos mostrar que o funcional I verifica as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha.

Verificação da condição ($\mathbf{I_1}$):

Da condição ($\mathbf{H_2}$), dado $\epsilon > 0$, existe uma constante $a_2 > 0$ tal que

$$|f(x,\xi)| \leq \epsilon|\xi| + a_2 |\xi|^s, \quad \text{onde} \quad 1 < s < \frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1,$$

logo

$$|F(x,\xi)| \leq \frac{\epsilon}{2}|\xi|^2 + a_2\frac{|\xi|^{s+1}}{s+1}.$$

Sendo

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|_*^2 - \int_\Omega F(x,u)dx,$$

obtemos

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_*^2 - \frac{\epsilon}{2}\int_\Omega |u|^2 - \int_\Omega C_1 |u|^{s+1} dx,$$

ou seja,

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_*^2 - \frac{\epsilon}{2}|u|_2^2 - C_1|u|_{s+1}^{s+1}.$$

Agora, usando a Desigualdade de Poincaré e escolhendo $\epsilon > 0$ pequeno, existe uma constante positiva C_2 tal que

$$I(u) \geq C_2 \|u\|_*^2 - C_1|u|_{s+1}^{s+1}.$$

Usando as imersões de contínuas de Sobolev, existe uma constante positiva C_3 tal que

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_*^2 - C_3\|u\|^{s+1}.$$

Analisando a última desigualdade, concluímos que existem $\alpha > 0$ e $\rho > 0$ tais que

$$I(u) \geq \alpha > 0, \qquad \text{para} \quad \|u\| = \rho,$$

mostrando que I satisfaz ($\mathbf{I_1}$).

Verificação da condição ($\mathbf{I_2}$):

Por ($\mathbf{H_3}$), existem constantes $2 < \mu < s$ e $r \geq 0$ tais que

$$0 < \mu F(x,\xi) \leq \xi f(x,\xi), \quad \text{para} \quad |\xi| \geq r.$$

Tal desigualdade, implica na existência de constantes positivas C_4 e C_5 tais que

$$F(x,\xi) \geq C\,|\xi|^{\mu} - C_3, \quad \forall \;\; \xi \in \mathbb{R} \;\; \text{e} \;\; x \in \overline{\Omega}. \tag{6.1}$$

Para cada $u \in E\backslash\{0\}$ e $t \in [0,+\infty)$, temos que

$$I(tu) = \frac{t^2}{2}\,\|u\|_*^2 - \int_\Omega F(x,tu).$$

Usando (6.1) e o fato de que as normas $\|\;\|_*$ e $\|\;\|$ equivalentes, obtemos

$$I(tu) \leq C_4 t^2\,\|u\|^2 - \int_\Omega \left[C\,|tu|^{\mu} - C_3\right],$$

o que implica

$$I(tu) \leq C_4 t^2\,\|u\|^2 - Ct^{\mu}|u|_{\mu}^{\mu} + C_3\,|\Omega|\,,$$

onde estamos denotando por $|\Omega|$ a medida de Lebesgue de Ω. Portanto, como $\mu > 2$, temos que $I(tu) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$, logo existe $e \in E\backslash\overline{B}_\rho$ tal que $I(e) < 0$, mostrando assim que I satisfaz a condição $(\mathbf{I_2})$.

Verificação da condição (PS):

Seja (u_n) uma sequência do tipo (PS), isto é ,

$$I(u_n) \to c \;\text{ e }\; I'(u_n) \to 0. \tag{6.2}$$

Vamos mostrar que (u_n) possui uma subsequência convergente. Observe que $I'(u_n) \to 0$ implica que, dado $\epsilon > 0$, existe $n_\circ \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|I'(u_n)\right\|_* < \epsilon, \;\forall\;\; n \geq n_\circ,$$

ou seja,

$$\left|I'(u_n)u_n\right| \leq \epsilon\,\|u_n\|\,, \qquad \forall\;\; n \geq n_\circ.$$

Por outro lado,

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n = \frac{1}{2}\left[\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx - \int_\Omega \lambda\,|u_n|^2\,dx\right] - \int_\Omega F(x,u_n)dx-$$

$$-\frac{1}{\mu}\left[\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx - \int_\Omega \lambda\,|u_n|^2\,dx\right] + \frac{1}{\mu}\int_\Omega f(x,u_n)u_n dx$$

de onde segue

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|_*^2 + \int_\Omega \left[\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right]dx.$$

Sendo $\| \, \|_*$ e $\| \, \|$ equivalentes,

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) C_1 \|u_n\|^2 + \int_\Omega \left[\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right] dx.$$

Considerando $A_n = \{x \in \Omega\, ;\, |u_n(x)| \geq r\}$, tem-se

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) C_1 \|u_n\|^2 +$$

$$\int_{A_n} \left[\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right] dx + \int_{A_n^c} \left[\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right] dx.$$

Da condição $(\mathbf{H_3})$,

$$\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n) \geq 0, \ \ \forall \ x \ \in \ A_n,$$

o que implica

$$\int_{A_n} \left[\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right] dx \geq 0,$$

logo

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) C_1 \|u_n\|^2 + \int_{A_n^c} \left[\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right] dx,$$

de onde segue

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) C_1 \|u_n\|^2 - \int_{A_n^c} \left|\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right| dx.$$

Sendo f e F funções contínuas, a função $g(x,t) = \left|\frac{1}{\mu}f(x,t)t - F(x,t)\right|$ também é uma função contínua. Assim, uma vez que $\overline{\Omega} \times [-r,r]$ é um conjunto compacto, g é limitada neste compacto, logo existe $C > 0$ tal que

$$|g(x,t)| \leq C, \quad \ \forall \ (x,t) \ \in \ \overline{\Omega} \times [-r,r]\,,$$

consequentemente

$$\left|\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right| \leq C, \ \ \forall \ x \ \in \ \overline{A_n^c}.$$

Assim,

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) C_1 \|u_n\|^2 - \int_{\overline{A_n^c}} \left|\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\right| dx,$$

o que implica

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) C_1 \|u_n\|^2 - \int_{\overline{A_n^c}} C dx,$$

de onde segue

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) C_1 \|u_n\|^2 - C\left|\overline{A_n^c}\right|$$

ou ainda

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) C_1 \|u_n\|^2 - C\,|\Omega|\,,$$

isto é,

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) C_1 \|u_n\|^2 - C_2. \tag{6.3}$$

Usando agora (6.2), existe $n_\circ \in \mathbb{N}$ tal que

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n \leq M + \frac{1}{\mu}\epsilon \|u_n\|\,, \;\; \forall \;\; n \geq n_\circ. \tag{6.4}$$

De (6.3) e (6.4)

$$M + \frac{1}{\mu}\epsilon \|u_n\| \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) C_1 \|u_n\|^2 - C_2, \;\; \forall \;\; n \geq n_\circ.$$

Fixando $\widetilde{M} = M + C_2 > 0$, $\widetilde{K} = \dfrac{\epsilon}{\mu}$ e $\widetilde{C} = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\mu}\right) C_1 > 0$, obtemos

$$\widetilde{M} + \widetilde{K}\,\|u_n\| \geq \widetilde{C}\,\|u_n\|^2\,, \;\; \forall \;\; n \geq n_\circ,$$

mostrando que (u_n) é limitada em E.

Usando a reflexividade do espaço E e as imersões compactas de Sobolev, existe uma subsequência ainda denotada por $\{u_n\}$ e u em E, tal que

$$u_n \rightharpoonup u \;\text{ em }\; E,$$

$$u_n(x) \to u(x) \;\text{ q.t.p. em }\; \Omega$$

e

$$u_n \to u \;\text{ em }\; L^p(\Omega)$$

para $p \in [1, 2^*)$ se $N \geq 3$ e $p \in [1, \infty)$ se $N = 1, 2$.

Agora usando as condições de crescimento da função f, existem constantes $c_1, c_2 > 0$ verificando

$$|f(x,t)| \leq c_1|t| + c_2|t|^p \;\; \forall x \in \Omega \;\text{ e }\; t \in I\!R.$$

Usando a última desigualdade, podemos concluir que

$$|f(u_n)| \leq c_1|u_n| + c_2|u_n|^p$$

$$|f(u_n)u_n| \leq c_1|u_n|^2 + c_2|u_n|^{p+1}$$

e

$$|F(x,u_n)| \leq \tilde{c}_1|u_n|^2 + \tilde{c}_2|u_n|^{p+1}.$$

As desigualdades acima, juntamente com o Teorema de Lebesgue implica nos seguintes limites

$$\int_{\Omega} f(u_n)v \to \int_{\Omega} f(u)v \ \ \forall v \in E \tag{6.5}$$

$$\int_{\Omega} f(u_n)u_n \to \int_{\Omega} f(u)u. \tag{6.6}$$

Usando a definição do funcional I

$$0 \leq \|u_n - u\|^2 = I'(u_n)u_n - \int_{\Omega} f(u_n)u_n - I'(u_n)u + \int_{\Omega} f(u_n)u - \langle u_n, u\rangle_*$$

e sendo

$$I'(u_n)u_n = I'(u_n)u = \langle u_n, u\rangle_* = o_n(1)$$

concluímos

$$0 \leq \|u_n - u\|^2 = \int_{\Omega} f(u_n)u - \int_{\Omega} f(u_n)u_n + o_n(1)$$

e portanto pelos limites obtidos em (6.5) e (6.6)

$$\|u_n - u\|^2 \to 0$$

ou seja,

$$u_n \to u \ \text{ em } \ E$$

donde concluímos que (u_n) possui uma subsequência convergente. Mostrando assim, que I satisfaz a **condição (PS)**.

Finalmente, podemos aplicar o Teorema do Passo da Montanha e concluir a existência de um ponto crítico de I, isto é, uma solução fraca para o (P_{11}), finalizando a demonstração do Teorema 6.1.

Capítulo 7

Teorema do Ponto de Sela

Nosso objetivo neste capítulo é aplicar o Teorema de Ponto de Sela de Ambrosetti-Rabinowitz para mostrar a existência de solução para uma classe de problemas elípticos.

7.1 Teorema do Ponto de Sela

Nesta seção vamos demonstrar o Teorema do Ponto de Sela de Ambrosetti-Rabinowitz [11].
Definição 7.1. Se E é um espaço de Banach, a classe de deformação de $\overline{D}$ em E que fixa ∂D, na qual denotaremos por Γ, é definida por

$$\Gamma = \left\{ h \in C(\overline{D}, X) \setminus h(u) = u, \;\; \forall \;\; u \in \partial D \right\}.$$

Teorema do Ponto de Sela (ver [6])
Seja $E = V \oplus X$ um espaço de Banach com $dim(V) < +\infty$ e seja $\phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ uma aplicação satisfazendo a condição Palais-Smale (PS). Se D é uma vizinhança limitada de 0 em V tal que

$$a = \max_{\partial D} \phi < \inf_{X} \phi = b,$$

então,

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in \overline{D}} \phi(h(u))$$

é um valor crítico de ϕ com $c \geq b$.

7.2 Uma aplicação

Nesta seção estudamos a existência de solução para a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + f(x, u), \;\; x \in \Omega \\ u = 0, \;\; x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{P_{12}}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave e λ é um autovalor associado ao problema

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda v, & x \in \Omega \\ v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \qquad (P_A)$$

No que segue consideraremos $N \geq 1$ e as seguintes hipóteses sobre f:

$(\mathbf{H_4})$ $f(x,\xi) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;

$(\mathbf{H_5})$ Existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|f(x,\xi)| \leq M, \quad \forall x \in \overline{\Omega} \text{ e } \xi \in \mathbb{R};$$

$(\mathbf{H_6})$ $F(x,\xi) = \displaystyle\int_0^\xi f(x,t)dt \longrightarrow +\infty$, quando $|\xi| \to +\infty$ uniformemente para $x \in \Omega$.

O principal resultado deste capítulo é o seguinte:

Teorema 7.1 *Suponha que $\lambda = \lambda_k < \lambda_{k+1}$ e f satisfaz as condições $(\mathbf{H_4}) - (\mathbf{H_6})$. Então o Problema (P_{12}) possui uma solução fraca.*

Demonstração. Considere o seguinte funcional

$$I(u) = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \frac{\lambda_k}{2} u^2 - F(x,u) \right), \text{ com } u \in E = H_0^1(\Omega).$$

Observe inicialmente que as condições $(\mathbf{H_4})$ e $(\mathbf{H_5})$ implicam que I está bem definido, $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ e

$$I'(u)v = \int_\Omega [\nabla u \nabla v - \lambda_k uv] - \int_\Omega f(x,u)v, \quad \forall \ u, \ v \ \in \ E.$$

Seja $V \equiv \oplus_{j=1}^k V_{\lambda_j} = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$, onde V_{λ_j} é o espaço gerado pelas autofunções v_n^j do Problema (P_A) associadas ao autovalor λ_j, e normalizadas de modo que

$$\int_\Omega \left|\nabla v^j\right|^2 = 1 = \lambda_j \int_\Omega (v^j)^2.$$

Seja $X \equiv \oplus_{j=k+1}^\infty V_{\lambda_j}$, com $X = V^\perp$, onde denotamos por $V^\perp$ o complementar ortogonal de V. Considere $E = H_0^1(\Omega) = V \oplus X$. Vamos mostrar que I satisfaz as seguintes condições :

$(\mathbf{I_3})$ Existe uma constante β tal que $I\Big|_X \geq \beta$.

$(\mathbf{I_4})$ Existe uma constante $\alpha < \beta$ e uma vizinhança limitada de D de 0 em V tal que

$$I\Big|_{\partial D} \leq \alpha.$$

$(\mathbf{PS})$ I verifca a condição (PS).

Uma vez verificadas as condições acima, o Teorema 7.1 é uma consequência imediata do Teorema do Passo de Sela.

Verificação da condição $(\mathbf{I_3})$:

Para cada $u \in X$, usando a ortogonalidade das autofunções é mostra-se que

$$\int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 - \lambda_k u^2 \right) \geq \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \right) \|u\|^2 , \quad \forall \quad u \in X \tag{7.1}$$

Considerando $M \equiv \sup\limits_{\substack{x \in \overline{\Omega} \\ \xi \in \mathbb{R}}} |f(x,\xi)|$, tem-se

$$\left| \int_{\Omega} F(x,u) \right| \leq \int_{\Omega} M\,|u| = M \int_{\Omega} |u| = M\,\|u\|_1$$

de onde segue pelas imersões de Sobolev que

$$\left| \int_{\Omega} F(x,u) \right| \leq M_1 \|u\| , \quad \forall \quad u \in E. \tag{7.2}$$

De (7.1) e (7.2),

$$I(u) \geq \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \right) \|u\|^2 - M_1 \|u\| , \quad \forall \quad u \in X.$$

Considerando $M_2 = \left(1 - \dfrac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \right)$, temos

$$|I(u)| \geq M_2 \|u\|^2 - M_1 \|u\| , \quad \forall \quad u \in X,$$

logo, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$I(u) \geq \beta, \quad \forall \quad u \in X,$$

mostrando assim, a condição $(\mathbf{I_1})$.

Verificação da condição $(\mathbf{I_2})$:

Seja $u \in V$, então $u = u^{\circ} + u^{-}$, onde $u^{\circ} \in E^{\circ} \equiv V_{\lambda_k}$ e $u^{-} \in E^{-} \equiv \oplus_{j=1}^{k-1} V_{\lambda_j}$ e $\|u\|^2 = \|u^{\circ}\|^2 + \|u^{-}\|^2$ e $|u|_2^2 = |u^{\circ}|_2^2 + |u^{-}|_2^2$.

Desde que

$$\int_{\Omega} |\nabla u^{\circ}|^2 - \lambda_k \int_{\Omega} (u^{\circ})^2 = 0$$

podemos concluir que vale a igualdade

$$\int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 - \lambda_k u^2 \right) = \int_{\Omega} \left| \nabla u^{-} \right|^2 - \lambda_k \int_{\Omega} (u^{-})^2.$$

Por outro lado, sendo $u^{-} \in E^{-}$, temos

$$\int_{\Omega} \left| \nabla u^{-} \right|^2 - \lambda_k \int_{\Omega} (u^{-})^2 \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}} \right) \|u^{-}\|^2 \tag{7.3}$$

implicando na desigualdade

$$I(u) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\right)\|u^-\|^2 - \int_\Omega F(x,u). \tag{7.4}$$

Com o intuito de melhorar a estimativa acima, vamos precisar da seguinte desigualdade
Afirmação 7.2: $\displaystyle\int_\Omega \left|F(x,u^\circ + u^-) - F(x,u^\circ)\right| \leq M_1 \left\|u^-\right\|$.

De fato, considere sem perda de generalidade que $u^\circ < u^\circ + u^-$ para x fixado e defina

$$\begin{array}{rcccl} g & : & [u^\circ, u^\circ + u^-] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & g(t) = F(x,t). \end{array}$$

Note que g é contínua em $[u^\circ, u^\circ + u^-]$ e derivável em $(u^\circ, u^\circ + u^-)$ com derivada $g'(t) = f(x,t)$. Assim, pelo Teorema do Valor Médio, existe $s \in (u^\circ, u^\circ + u^-)$, tal que

$$g(u^\circ + u^-) - g(u^\circ) = g'(s)\left[(u^\circ + u^-) - u^\circ\right],$$

logo

$$F(x,u^\circ + u^-) - F(x,u^\circ) = f(x,s)u^-, \quad \text{onde} \quad s \in (u^\circ, u^\circ + u^-),$$

o que implica

$$\int_\Omega \left|F(x,u^\circ + u^-) - F(x,u^\circ)\right| \leq M \int_\Omega \left|u^-\right|,$$

e portanto

$$\int_\Omega \left|F(x,u^\circ + u^-) - F(x,u^\circ)\right| \leq M|u^-|_1.$$

Sendo Ω limitado, pelas imersões contínuas de Sobolev,

$$\int_\Omega \left|F(x,u^\circ + u^-) - F(x,u^\circ)\right| \leq M_1 \left\|u^-\right\|$$

para alguma constante positiva M_1, mostrando assim a Afirmação 7.2.

Voltando a desigualdade (7.4), obtemos

$$I(u) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\right)\left\|u^-\right\|^2 - \int_\Omega F(x,u^\circ) + M_1\left\|u^-\right\|.$$

Considerando $M_2 = \frac{1}{2}\left|1 - \dfrac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\right|$, temos

$$I(u) \leq -M_2\left\|u^-\right\|^2 - \int_\Omega F(x,u^\circ) + M_1\left\|u^-\right\|, \quad \forall \ u \in V. \tag{7.5}$$

Recordando que $\|u\|^2 = \|u^\circ\|^2 + \left\|u^-\right\|^2$, quando $\|u\| \to +\infty$ temos as seguintes possibilidades:
(1) $\|u^\circ\| \to +\infty$ e $\|u^-\| \to +\infty$;

(**2**) $\|u^\circ\| \to +\infty$ e $\|u^-\|$ limitada;
(**3**) $\|u^-\| \to +\infty$ e $\|u^\circ\|$ limitada.

Supondo sem perda de generalidade que $\|u^-\| > 0$, segue de (7.4)

$$I(u) \leq \left\|u^-\right\|^2 \left(-M_3 + \frac{M_1}{\|u^-\|}\right) - \int_\Omega F(x, u^\circ), \ \ \forall \ \ u \in V.$$

Note que, se **(1)** ou **(2)** ocorrer, pela última desigualdade concluímos que,

$$I(u) \to -\infty.$$

Por outro lado, se **(3)** ocorrer, sendo $\|u^\circ\|$ limitada, temos

$$\left|\int_\Omega F(x, u^\circ)\right| \leq \int_\Omega |F(x, u^\circ)| \leq \int_\Omega M\,|u^\circ| = M|u^\circ|_1.$$

Sendo Ω limitado, pelas imersões contínuas de Sobolev, obtemos

$$\left|\int_\Omega F(x, u^\circ)\right| \leq \widetilde{M}\,\|u^\circ\| \leq \overline{M},$$

e portanto

$$I(u) \to -\infty.$$

Portanto, concluímos que $I(u) \to -\infty$ quando $u \to +\infty$ em V, mostrando que I satisfaz a condição ($\mathbf{I_4}$).

Verificação da condição (PS):

Seja $(u_n) \subset E$ uma sequência do tipo (PS), isto é, existe $c > 0$, tal que

$$I(u_n) \to c \quad \text{e} \quad I'(u_n) \to 0.$$

Devemos mostrar que (u_n) possui uma subsequência convergente, ou seja, existe $\{u_{n_j}\} \subset \{u_n\}$ tal que $u_{n_j} \to u$ em E para algum $u \in E$. Sendo $u_n \in E = V \oplus X = E^\circ \oplus E^- \oplus X$, temos $u_n = u_n^\circ + u_n^- + u_n^+$, onde $u_n^\circ \in E^\circ$, $u_n^- \in E^-$ e $u_n^+ \in X$. Assim,

$$\|u_n\|^2 = \|u_n^\circ\|^2 + \left\|u_n^-\right\|^2 + \left\|u_n^+\right\|^2.$$

Sendo

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{\lambda_k}{2}\int_\Omega u^2 - \int_\Omega F(x, u),$$

segue-se que para cada $h \in E$,

$$\left|I'(u_n)h\right| = \left|\int_\Omega \nabla u_n \nabla h - \lambda_k \int_\Omega u_n h - \int_\Omega f(x, u_n)h\right|. \tag{7.6}$$

(i) Considerando $h = u_n^+$ em (7.6), obtemos

$$\left|I'(u_n)u_n^+\right| = \left|\int_\Omega \nabla u_n \nabla u_n^+ - \lambda_k \int_\Omega u_n u_n^+ - \int_\Omega f(x,u_n)u_n^+\right|. \tag{7.7}$$

Desde que $|I'(u_n)h| \leq \|h\|$ $\forall$ $h \in E$ e n suficientemente grande, de (7.7) ficamos com

$$\left\|u_n^+\right\| \geq \left|\int_\Omega \nabla u_n \nabla u_n^+ - \lambda_k \int_\Omega u_n u_n^+ - \int_\Omega f(x,u_n)u_n^+\right|,$$

ou seja,

$$\left\|u_n^+\right\| \geq \int_\Omega \nabla\left(u_n^\circ + u_n^- + u_n^+\right)\nabla u_n^+ - \lambda_k \int_\Omega \left(u_n^\circ + u_n^- + u_n^+\right)u_n^+ - \int_\Omega f(x,u_n)u_n^+,$$

o que implica

$$\left\|u_n^+\right\| \geq \int_\Omega \left|\nabla u_n^+\right|^2 - \lambda_k \int_\Omega (u_n^+)^2 - \int_\Omega f(x,u_n)u_n^+.$$

Sendo $u_n^+ \in X$, pela desigualdade (7.1), segue

$$\left\|u_n^+\right\| \geq \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right)\left\|u_n^+\right\|^2 - \int_\Omega f(x,u_n)u_n^+,$$

o que implica

$$\left\|u_n^+\right\| \geq \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right)\left\|u_n^+\right\|^2 - \int_\Omega |f(x,u_n)|\left|u_n^+\right|.$$

Da condição ($\mathbf{H_5}$),

$$\left\|u_n^+\right\| \geq \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right)\left\|u_n^+\right\|^2 - M|u_n^+|_1.$$

Sendo Ω limitado, pelas imersões contínuas de Sobolev, obtemos

$$\left\|u_n^+\right\| \geq \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right)\left\|u_n^+\right\|^2 - M_1\left\|u_n^+\right\|.$$

Considerando $M_2 = 1 - \dfrac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}$, temos

$$(1 + M_1)\left\|u_n^+\right\| \geq M_2\left\|u_n^+\right\|^2$$

mostrando que (u_n^+) é limitada.

(ii) Vamos mostrar que (u_n^-) é limitada.

Considerando $h = u_n^-$ em (7.6), obtemos

$$\left|I'(u_n)u_n^-\right| = \left|\int_\Omega \nabla u_n \nabla u_n^- - \lambda_k \int_\Omega u_n u_n^- - \int_\Omega f(x,u_n)u_n^-\right|$$

e portanto

$$\left\|u_n^-\right\| \geq \left|\int_\Omega \nabla u_n \nabla u_n^- - \lambda_k \int_\Omega u_n u_n^- - \int_\Omega f(x,u_n)u_n^-\right|,$$

de onde segue

$$\left\|u_n^-\right\| \geq -\left[\int_\Omega \left|\nabla u_n^-\right|^2 - \lambda_k \int_\Omega (u_n^-)^2\right] + \int_\Omega f(x,u_n)u_n^-.$$

Pela desigualdade (7.3), segue

$$\left\|u_n^-\right\| \geq -\left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\right)\left\|u_n^-\right\|^2 + \int_\Omega f(x,u_n)u_n^-,$$

logo

$$\left\|u_n^-\right\| \geq -\left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\right)\left\|u_n^-\right\|^2 - \int_\Omega \left|f(x,u_n)\right|\left|u_n^-\right|.$$

e pela condição ($\mathbf{H_5}$), temos

$$\left\|u_n^-\right\| \geq -\left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\right)\left\|u_n^-\right\|^2 - M|u_n^-|_1.$$

Sendo Ω limitado, pelas imersões contínuas de Sobolev, obtemos

$$\left\|u_n^-\right\| \geq -\left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}\right)\left\|u_n^-\right\|^2 - M_1\left\|u_n^-\right\|.$$

Considerando $M_2 = -\left(1 - \dfrac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right)$ e sendo $M_1,\ M_2 > 0$ temos

$$(1+M_1)\left\|u_n^-\right\| \geq M_2\left\|u_n^-\right\|^2$$

mostrando que (u_n^-) é limitada.

(iii) Vamos mostrar que (u_n°) é limitada.

Sendo $I(u_n) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_n|^2 - \dfrac{\lambda_k}{2}\int_\Omega u_n^2 - \int_\Omega F(x,u_n)$, tem-se que

$$I(u_n) = \frac{1}{2}\left\|u_n^-\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|u_n^+\right\|^2 - \frac{\lambda_k}{2}\int_\Omega \left[(u_n^-)^2 + (u_n^+)^2\right] - \int_\Omega F(x,u_n).$$

Assim

$$\begin{aligned} I(u_n) = {} & \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\left|\nabla u_n^-\right|^2 + \left|\nabla u_n^+\right|^2 - \lambda_k\left((u_n^-)^2 + (u_n^+)^2\right)\right] \\ & - \int_\Omega \left[F(x,u_n) - F(x,u_n^\circ)\right] - \int_\Omega F(x,u_n^\circ). \end{aligned}$$

Logo,

$$\left|\int_\Omega F(x,u_n^\circ)\right| = \left|\frac{1}{2}\int_\Omega \left[\left|\nabla u_n^-\right|^2 + \left|\nabla u_n^+\right|^2\right] - \frac{1}{2}\int_\Omega \lambda_k\left((u_n^-)^2 + (u_n^+)^2\right) - \right.$$

$$\int_\Omega [F(x,u_n) - F(x,u_n^\circ)] - I(u_n) \Bigg|,$$

de onde segue

$$\left| \int_\Omega F(x,u_n^\circ) \right| \leq \left| \frac{1}{2} \int_\Omega \left[|\nabla u_n^-|^2 + |\nabla u_n^+|^2 \right] \right| +$$

$$\left| \frac{1}{2} \int_\Omega \lambda_k \left((u_n^-)^2 + (u_n^+)^2 \right) \right| + \left| \int_\Omega [F(x,u_n) - F(x,u_n^\circ)] \right| + |I(u_n)| . \tag{7.8}$$

Agora observe o seguinte:

(iii-1) Sendo (u_n^-) e (u_n^+) limitadas,

$$\left| \frac{1}{2} \int_\Omega \left[|\nabla u_n^-|^2 + |\nabla u_n^+|^2 \right] \right| = \frac{1}{2} \|u_n^-\|^2 + \frac{1}{2} \|u_n^+\|^2 \leq \frac{1}{2} K_1^2 + \frac{1}{2} K_2^2 = K_3.$$

(iii-2) Sendo $\left| \frac{1}{2} \int_\Omega \lambda_k \left((u_n^-)^2 + (u_n^+)^2 \right) \right| \leq \frac{|\lambda_k|}{2} \int_\Omega |(u_n^-)^2| + \frac{|\lambda_k|}{2} \int_\Omega |(u_n^+)^2|$, obtemos,

$$\left| \frac{1}{2} \int_\Omega \lambda_k \left((u_n^-)^2 + (u_n^+)^2 \right) \right| \leq \frac{|\lambda_k|}{2} \left[|u_n^-|_2^2 + |u_n^+|_2^2 \right].$$

Pelas imersões contínuas de Sobolev, obtemos

$$\left| \frac{1}{2} \int_\Omega \lambda_k \left((u_n^-)^2 + (u_n^+)^2 \right) \right| \leq C \left[\|u_n^-\|^2 + \|u_n^+\|^2 \right] \leq C \left[K_1^2 + K_2^2 \right] = K_4.$$

(iii-3) Sendo $\left| \int_\Omega [F(x,u_n) - F(x,u_n^\circ)] \right| \leq \int_\Omega |F(x,u_n) - F(x,u_n^\circ)|$, usando o Teorema do Valor Médio e pela condição $(\mathbf{H_5})$, obtemos

$$\int_\Omega |F(x,u_n) - F(x,u_n^\circ)| \leq M |u_n - u_n^\circ|_1.$$

Sendo $u_n = u_n^\circ + u_n^- + u_n^+$, segue que $u_n - u_n^\circ = u_n^+ + u_n^-$. Assim,

$$\int_\Omega |F(x,u_n) - F(x,u_n^\circ)| \leq M |u_n^+ + u_n^-|_1.$$

Agora, sendo Ω limitado, pelas imersões de Sobolev, obtemos

$$\int_\Omega |F(x,u_n) - F(x,u_n^\circ)| \leq M_1 \|u_n^+ + u_n^-\| \leq M_1 \left(\|u_n^+\| + \|u_n^-\| \right) \leq K_5,$$

(iii-4) Por hipótese temos que, existe $C > 0$, tal que $|I(u_n)| \leq C, \quad \forall \; n \in \mathbb{N}$. Logo, de **(iii-1)-(iii-4)** e (7.8), concluímos que

$$\left| \int_\Omega F(x,u_n^\circ) \right| \leq K_3 + K_4 + K_5 + C = K, \quad \forall \; n \in \mathbb{N},$$

e sendo $\int_\Omega F(x, u_n^\circ)$ limitada, a subsequência (u_n°) é limitada. Portanto, de **(i)-(iii)**, concluímos que (u_n) é limitada em E.

Repetindo o mesmo tipo de argumento utilizado no Capítulo 6, mostra-se que I satisfaz a condição (PS). Finalmente, podemos aplicar o Teorema do Ponto de Sela de Rabinowitz e concluir a existência de um ponto crítico de I, isto é, uma solução fraca para o Problema (P_{12}), demonstrando o Teorema 7.1.

Capítulo 8

Princípio de Criticalidade de Palais

Neste capítulo iremos estudar o Princípio de Criticalidade de Palais (ver [17])para mostrar a existência de solução para uma classe de problemas elípticos em $\mathbb{R}^N$.

8.1 Ação de um grupo topológico

A ação de um grupo topológico G sobre um espaço vetorial normado H, é uma aplicação contínua $G \times H \to H,\ (g,u) \mapsto g(u)$ que verifica

1. $g : H \to H$ é linear
2. $\|g(u)\| = \|u\|$
3. $(gh)(u) = g(h(u))$
4. $1u = u$

O espaço de pontos invariantes é o subespaço fechado de H definido por

$$Fix(G) = \{u \in H; g(u) = u,\ \forall g \in G\}.$$

Um conjunto $A \subset H$ é invariante se $g(A) = A,\ \forall g \in G$.
Um funcional $I : H \to \mathbb{R}$ é invariante se $I \circ g = I,\ \forall g \in G$.
Um aplicação $f : H \to H$ é invariante se $f \circ g = g \circ f,\ \forall g \in G$.
Princípio de criticalidade de Palais
Assuma que a ação de um grupo G seja isométrica sobre um espaço de Hilbert $(H, \langle\, ,\, \rangle)$. Se $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ é invariante e u é ponto crítico de I restrito a $Fix(G)$, então u é ponto crítico de I em H.
Demonstração : Para cada $g \in G$ e $u \in H$ note que

$$I^{'}(g(u))v = \lim_{t \to 0} \frac{I(gu + tv) - I(gu)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{I(g(u + tg^{-1}v) - I(gu)}{t}$$

ou seja

$$I^{'}(g(u))v = \lim_{t \to 0} \frac{I(u + tg^{-1}v) - I(u)}{t} = I^{'}(u)(g^{-1}v),$$

de onde segue,

$$I^{'}(g(u))v = I^{'}(u)(g^{-1}v), \ \ \forall g \in G \text{ e } \forall u, v \in H. \tag{8.1}$$

Recordando que $\nabla I : H \to H$ é dado por

$$I^{'}(u)v = \langle \nabla I(u), v \rangle$$

e

$$\|I^{'}(u)\|_* = \|\nabla I(u)\|, \ \ \forall u \in H,$$

temos

$$I^{'}(gu)v = \langle \nabla I(gu), v \rangle$$

e

$$I^{'}(u)(g^{-1}v) = \left\langle \nabla I(u), g^{-1}v \right\rangle,$$

logo por (8.1),

$$\langle \nabla I(gu), v \rangle = \left\langle \nabla I(u), g^{-1}v \right\rangle, \ \forall g \in G \ \text{ e } \ \forall u, v \in H. \tag{8.2}$$

Afirmação 8.1: ∇I é invariante com relação a ação do grupo, isto é,

$$g \circ \nabla I = \nabla I \circ g$$

ou ainda,

$$g(\nabla I(u)) = \nabla I(g(u)), \ \forall g \in G \ \text{ e } \ \forall u \in H.$$

Note que

$$\|\nabla I(u) + g^{-1}(v)\|^2 = \|\nabla I(u)\|^2 + 2 \left\langle \nabla I(u), g^{-1}(v) \right\rangle + \|g^{-1}(v)\|^2,$$

logo,

$$\|\nabla I(u) + g^{-1}(v)\|^2 = \|\nabla I(u)\|^2 + 2 \left\langle \nabla I(u), g^{-1}(v) \right\rangle + \|v\|^2. \tag{8.3}$$

Além disso,

$$\|g(\nabla I(u)) + v\|^2 = \|g(\nabla I(u))\|^2 + 2 \left\langle g\nabla I(u), v \right\rangle + \|v\|^2,$$

ou ainda,

$$\|g(\nabla I(u)) + v\|^2 = \|\nabla I(u)\|^2 + 2 \left\langle g\nabla I(u), v \right\rangle + \|v\|^2$$

daí,

$$\|g(\nabla I(u)) + g^{-1}v\|^2 = \|\nabla I(u)\|^2 + 2 \left\langle g\nabla I(u), v \right\rangle + \|v\|^2.$$

Portanto,

$$\|\nabla I(u) + g^{-1}v\|^2 = \|\nabla I(u)\|^2 + 2 \left\langle g\nabla I(u), v \right\rangle + \|v\|^2 \tag{8.4}$$

de (8.3) e (8.4)

$$\left\langle \nabla I(u), g^{-1}v \right\rangle = \langle g(\nabla I(u)), v \rangle$$

e por (8.2)

$$\langle \nabla I(gu), v \rangle = \langle g(\nabla I(u)), v \rangle\,, \ \ \forall v \in H$$

de onde segue

$$\nabla I(gu) = g(\nabla I(u)), \ \ \forall g \in G, \ \forall v \in H. \tag{8.5}$$

Afirmação 8.2: u é ponto crítico de I em H. Por hipótese $u \in Fix(G)$, logo $g(u) = u \ \forall g \in G$ e por (8.5)

$$\nabla I(u) = g(\nabla I(u)), \ \ \forall g \in G,$$

mostrando que

$$\nabla I(u) \in Fix(G).$$

Se u é ponto crítico de I restrito a $Fix(G)$, temos

$$\langle \nabla I(u), v \rangle = 0, \ \ \forall v \in Fix(G)$$

o que implica

$$\nabla I(u) \in Fix(G)^{\perp}$$

e assim

$$\nabla I(u) \in Fix(G) \cap Fix(G)^{\perp}$$

mostrando que $\nabla I(u) = 0$ em H, de onde segue que u é um ponto crítico de I em H.

8.2 O espaço $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$

Vamos denotar por $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ o seguinte subespaço de $H^1(\mathbb{R}^N)$

$$H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) = \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N);\, u(g(x)) = u(x), \ \forall g \in O(N)\right\},$$

onde $O(N)$ é o grupo das rotações em $\mathbb{R}^N$.

Note que $u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ se, e somente se, $u(x) = u(r)$ onde $r = |x|$ e $| \ \ |$ denota a norma euclidiana em $\mathbb{R}^N$.

A ação $O(N)$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ é a aplicação $O(N) \times H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ dada por

$$g(u)(x) = u(g(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \ \text{ e } \forall g \in O(N).$$

Afirmação 8.3: Para todo $g \in O(N)$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tem-se

$$\|g(u)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \ \ \text{(Exercício)}$$

Note que

$$Fix(O(N)) = \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N);\ g(u) = u,\ \forall g \in O(N)\right\},$$

daí,

$$Fix(O(N)) = \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N); u(g(x)) = u(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^N,\ \ \forall g \in O(N)\right\},$$

ou seja,

$$Fix(O(N)) = H^1_{rad}(\mathbb{R}^N).$$

Lema de Strauss. (ver [13])
As seguintes imersões são compactas

$$H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \to L^s(\mathbb{R}^N)$$

onde $s \in (2, 2^*)$ *se* $N \geq 3$ *e* $s \in (2, +\infty)$ *se* $N = 1, 2$

8.3 Uma Aplicação

Pretendemos nesta seção, aplicar o Princípio de Criticalidade de Palais para mostrar a existência de solução para a seguinte classe de problemas em $\mathbb{R}^N$.

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(u), & \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases} \qquad (P_{13})$$

onde $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua verificando as seguintes hipóteses:
($\mathbf{f_1}$)

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} = 0, \text{ e } \limsup_{|t|\to+\infty} \frac{f(t)}{|t|^{p-1}} < +\infty$$

onde $2 < p < 2^*$ se $N \geq 3$ e $2 < p < +\infty$ se $N = 1, 2$.

($\mathbf{f_2}$) (Condição de Ambrosetti e Rabinowitz) Existe $\theta \in (2, p)$ tal que

$$0 < \theta F(t) \leq f(t)t,\ \ \forall t \in \mathbb{R} - \{0\} \ \text{ onde } \ F(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau.$$

O funcional energia associado ao problema (P_{13}) é dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx,\ \ u \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

onde

$$\|u\| = (\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |u|^2)dx)^{\frac{1}{2}}.$$

Usando as imersões contínuas de Sobolev é possível mostrar que $I \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$. Restringindo o funcional I ao subespaço $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ temos o seguinte:

1- Existem constantes $\alpha, \rho > 0$ tais que $I(u) \geq \alpha > 0$ para $\|u\| = \rho$;

2- Existe $e \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \setminus \overline{B}_\rho(0)$ tal que $I(e) < 0$;

3- I verifica a condição (PS).

Os itens 1 e 2 seguem o mesmo tipo de raciocínio usado no Capítulo 6. Para provar o item 3, observe que f satisfaz

$$|f(t)t| \leq \epsilon|t|^2 + C_\epsilon|t|^p \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e que a condição de Ambrosetti e Rabinowitz implica que toda sequência $(PS)_c$ é limitada. Usando o Lema de Strauss, a menos de subsequência temos

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \text{ e } u_n \to u \text{ em } L^s(\mathbb{R}^N) \tag{8.6}$$

para todo $s \in (2, 2^*)$, $N \geq 3$ ou $s \in (2, +\infty)$, $N = 1, 2$.

Os limites em (8.6) implicam que

1- $\int f(u_n)u_n \to \int f(u)u$

2- $\int f(u_n)v \to \int f(u)v, \ \forall v \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$

3- $\int(\nabla u_n \nabla v + u_n v) \to \int(\nabla u \nabla v + uv), \ \forall v \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$

Repetindo o mesmo tipo de argumento usado no Capítulo 6, pode-se mostrar facilmente que

$$u_n \to u \text{ em } H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$$

mostrando que $I : H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ verifica a condição (PS).

Pelo Teorema do Passo da Montanha, o funcional I tem um ponto crítico $u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ com

$$I(u) \geq \alpha > 0.$$

Afirmação 8.4: O funcional é invariante sob a ação de $O(N)$, isto é, $I \circ g = I, \ \forall g \in O(N)$.

De fato, pois

$$(I \circ g)(u) = I(g(u)) = \frac{1}{2}\|g(u)\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(g(u))dx = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u(g(x)))dx.$$

Considerando $T(x) = g^{-1}(x)$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u(g(x)))dx = \int_{g^{-1}(\mathbb{R}^N)} F(u(g(x)))dx$$

logo pelo Teorema de mudança de variáveis

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u(g(x)))dx = \int_{\mathbb{R}^N} F(u((x))|detT|dx = \int_{\mathbb{R}^N} F(u(x))dx.$$

Portanto,

$$I(g(u)) = I(u), \ \ \forall g \in O(N).$$

A existência de um ponto crítico para o funcional I em $H^1(\mathbb{R}^N)$ segue do Princípio de Criticalidade de Palais, isto é, existe $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$I^{'}(u) = 0, \ \text{ e } \ I(u) \geq \alpha > 0.$$

Mostrando que o problema (P_{12}) tem uma solução não trivial. ■

Referências Bibliográficas

[1] R. A Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] S. Agmon, A. Douglis & L. Niremberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary value conditions I,* Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959), 623-727.

[3] C. O. Alves & D. G. de Figueiredo, *Nonvariational elliptic systems via Galerkin methods*, Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis. The Hans Triebel Anniversary Volume, Birkhauser (2003), 47-57.

[4] C. O. Alves, F. J. S. Corrêa & J. V. Gonçalves, *Existence of solutions for some classes of singular Hamiltonian systems*, Advanced Nonlinear Studies, 5 (2005), 265-278.

[5] A. Ambrosetti, H. Brézis & G. Cerami, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. 122 (1994), 519-543.

[6] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. 14 (1973), 349-381.

[7] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.

[8] D. G. de Figueiredo, *Positive solutions of semilinear elliptic equations*, Lecture Notes in Mathematics 957, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 34-87 (1982).

[9] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl. 47 (1974), 324 - 353

[10] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.

[11] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[12] E. L. Lima,*espaços Métricos*, Projeto Euclides, 1983.

[13] O. Kavian, *Introduction á la théorie des points critiques at applications aux problèmes elliptíques*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1993.

[14] S. Kesavan, *Nonlinear Functional Analysis: A first course*, Naroa Publishing House, 1999.

[15] P. H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, CBMS Regional Conf. in Math. 65, MAS. Providence, RI, 1986.

[16] M. Struwe,*Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Springer Verlag, 1990.

[17] M. Willem, *Minimax theorems*, Birkhäuser, Boston, 1996.