No nosso minicurso apresentaremos os Teoremas de Bishop-Phelps e alguns resultados correlatos.

No que se segue apresentamos um breve panorama sobre este tema.

Seja X um espaço de Banach real ou complexo. Denotamos por X' o *dual topológico* de X, ou seja, o espaço vetorial de todos os funcionais lineares contínuos sobre X munido da norma

$$\|f\| = \sup_{x \in B_X} |f(x)| \quad (f \in X'),$$

onde B_X denota a bola unitária fechada de X. Sabemos que X' é um espaço de Banach. Dizemos que um funcional $f \in X'$ *assume a norma* se existe um ponto $x_0 \in B_X$ tal que

$$\|f\| = |f(x_0)|,$$

o que equivale a dizer que existe um ponto $x_1 \in B_X$ tal que $\|f\| = f(x_1)$. Quando X é reflexivo, é fácil verificar que todo $f \in X'$ assume a norma. Um teorema profundo devido a Robert James afirma que a recíproca deste fato é verdadeira:

Se todo $f \in X'$ assume a norma, então X é reflexivo.

Este teorema foi obtido por James em 1957 para espaços separáveis e em 1964 no caso geral. Motivado por este resultado, Robert Phelps definiu em 1957 o conceito de subreflexividade: um espaço normado Y é dito *subreflexivo* se o conjunto dos funcionais $f \in Y'$ que assumem a norma é denso em Y'. Contudo, em 1961 Errett Bishop e Robert Phelps provaram que todo espaço de Banach é subreflexivo. Em outras palavras, temos o seguinte teorema profundo:

Teorema 1 (Bishop-Phelps). *O conjunto dos funcionais $f \in X'$ que assumem a norma é denso em X'.*

Dois anos depois, Bishop e Phelps estabeleceram uma generalização deste teorema para espaços reais. Dado um subconjunto convexo C de X, dizemos que $f \in X'$ é um *funcional suporte para C* (resp. um *funcional módulo-suporte para C*) se f é não-nulo e se existe um ponto $x_0 \in C$ tal que

$$\mathrm{Re} f(x_0) = \sup_{x \in C} \mathrm{Re} f(x) \quad (\text{resp. } |f(x_0)| = \sup_{x \in C} |f(x)|).$$

Teorema 2 (Bishop-Phelps). *Suponha X real. Para todo subconjunto convexo, fechado e limitado C de X, o conjunto dos funcionais suporte para C é denso em X'.*

Decorre deste teorema sem muita dificuldade o seguinte resultado:

Teorema 3 (Bishop-Phelps). *Suponha X real. Para todo subconjunto convexo, fechado e limitado C de X, o conjunto dos funcionais módulo-suporte para C é denso em X'.*

Note que o Teorema 2 e o Teorema 3 generalizam o Teorema 1 no caso de espaços reais (basta tomar $C = B_X$).

No caso de espaços complexos, a conclusão do Teorema 2 é sempre verdadeira e a conclusão do Teorema 3 vale sob a hipótese adicional de C ser circular: "$x \in C$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda x \in C$". Contudo, sem esta hipótese adicional sobre C, o caso complexo do Teorema 3 permaneceu em aberto por um longo tempo, sendo resolvido na negativa por Victor Lomonosov em 2000. Mais precisamente, Lomonosov exibiu um subconjunto convexo, fechado e limitado C de um certo espaço de Banach complexo Y tal que o conjunto dos funcionais módulo-suporte para C é vazio!

O problema de estabelecer versões vetoriais dos teoremas de Bishop-Phelps foi levantado pelos próprios Bishop e Phelps em 1963. Mais precisamente, eles propuseram a seguinte pergunta: para que pares de espaços de Banach X, Y é verdade que o conjunto $P(X;Y)$ de todas as aplicações lineares contínuas de X em Y que assumem a norma é denso no espaço de Banach $L(X;Y)$ de todas as aplicações lineares contínuas de X em Y? Esta pergunta continua sem uma resposta completa, mas muito progresso foi feito nesta direção. Mencionemos que Joram Lindenstrauss definiu e estudou em 1963 as seguintes propriedades: X tem a *propriedade (A)* (resp. a *propriedade (B)*) se $P(X;Y)$ é denso em $L(X;Y)$ (resp. $P(Y;X)$ é denso em $L(Y;X)$) para todo espaço de Banach Y. Lindenstrauss provou que todo espaço reflexivo tem a propriedade (A), estabeleceu um critério para que um espaço tenha a propriedade (B) e construiu um exemplo de um espaço de Banach Z tal que $P(Z;Z)$ não é denso em $L(Z;Z)$. Sobre a propriedade (A) mencionemos que Jean Bourgain provou em 1977 que todo espaço com a propriedade de Radon-Nikodym tem também a propriedade (A). Já sobre a propriedade (B), mencionemos que Jonathan Partington provou em 1982 que todo espaço de Banach admite uma norma equivalente com a qual ele tem a propriedade (B), e William Gowers provou em 1990 que os espaços ℓ_p (com $1 < p < \infty$) não têm a propriedade (B).